ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE PICARD

Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 10 (1881), p. 305-322

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1881_2_10__305_0>

SUR UNE EXTENSION

AUX

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

DU

PROBLÈME DE RIEMANN

RELATIF

AUX FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES,

PAR M. ÉMILE PICARD.

On sait de quelle manière Riemann (*Mathematische Werke*) a envisagé les fonctions hypergéométriques. Il établit que ces fonctions sont déterminées par leurs trois points critiques et les exposants relatifs à ces points, entre lesquels est assignée une relation convenable, et ces résultats du grand géomètre sont devenus immédiats depuis les travaux bien connus de M. Fuchs sur les équations différentielles linéaires.

Je me propose de montrer, dans ce travail (¹), comment on peut étendre aux fonctions de deux variables le problème de Riemann, et de faire voir que certaines fonctions de deux variables indépendantes peuvent être déterminées par leurs points critiques et les exposants correspondants; mais ici les points singuliers ne sont plus en nombre limité, et il y aura une infinité de valeurs de x et y qui seront pour la fonction des positions singulières. Je pose le problème de la manière suivante. Soit $F(x, y)$ une fonction des deux variables indépendantes illimitées x

(¹) Un résumé de cette étude a paru dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (31 mai 1880).

et y, jouissant des propriétés suivantes. Tout d'abord il existe entre quatre déterminations de la fonction une relation linéaire et homogène à coefficients constants. Dans le voisinage de toute valeur α de x et β de y, ne coïncidant avec aucun des points 0, 1 et ∞, et, de plus, différentes entre elles, la fonction est holomorphe par rapport à x et à y; α étant une valeur quelconque différente de 0, 1 et ∞, trois des branches de la fonction ont, dans le voisinage de $x=0$, $y=\alpha$, les formes suivantes, linéairement indépendantes,

$$P_1(x,y), \quad P_2(x,y), \quad x^{\lambda+b_1-1}P_3(x,y),$$

λ et b_1 étant deux constantes, et P_1, P_2, P_3 étant des fonctions holomorphes dans le voisinage de $x=0$, $y=\alpha$.

Pareillement, dans le voisinage de $x=1$, y ayant toujours une valeur α différente de 0, 1 et ∞, on aura les déterminations

$$Q_1(x,y), \quad Q_2(x,y), \quad (x-1)^{\lambda+b_2-1}Q_3(x,y),$$

Q_1, Q_2 et Q_3 étant holomorphes pour $x=1$, $y=\alpha$.

Enfin, pour $x=\frac{1}{x'}=\infty$, on a trois déterminations,

$$x'^{-\lambda+1}R_1(x',y), \quad x'^{-\lambda+1}R_2(x',y), \quad x'^{3-\lambda-(b_1+b_2+b_3)}R_3(x',y),$$

R_1, R_2 et R_3 étant holomorphes pour $x'=0$, $y=\alpha$.

Nous aurons de même des déterminations analogues quand, faisant varier x dans le voisinage d'une valeur distincte de 0, 1 et ∞, on donne à y des valeurs voisines de ces dernières, les divers exposants étant représentés par les mêmes lettres accentuées. Enfin, pour $x=y=\alpha$, α étant une quantité quelconque différente de 0, 1 et ∞, on a les déterminations linéairement indépendantes

$$A_1(x,y), \quad A_2(x,y), \quad (x-y)^{\lambda+b_3-1}A_3(x,y),$$

A_1, A_2 et A_3 étant holomorphes dans le voisinage de $x=\alpha$, $y=\alpha$.

On suppose que λ, $\lambda+b_1$, $\lambda+b_2$ et $\lambda+b_3$, ainsi que la somme $b_1+b_2+b_3$, ne sont pas des nombres entiers, et qu'il en est de même pour les lettres accentuées, et enfin que b_1 est différent de b_2. D'ailleurs, nous particularisons immédiatement cette seconde série de constantes en posant

$$b'_1 = b_1, \quad b'_2 = b_2, \quad b'_3 = \lambda, \quad \lambda' = b_3.$$

Nous établirons que la fonction $F(x, y)$ est déterminée par les conditions précédentes : je veux dire que, $F(x, y)$ étant une première fonction satisfaisant à ces conditions, toute autre fonction jouissant des mêmes propriétés s'exprimera linéairement au moyen de trois déterminations de F, linéairement indépendantes. Parmi ces déterminations, il en est une particulièrement intéressante : c'est celle qui est holomorphe par rapport à x et y dans l'intérieur des cercles ayant pour centres respectifs $x = 0$, $y = 0$ et un rayon égal à l'unité : on peut la développer en série procédant suivant les puissances croissantes de x et y, et l'on obtient alors la série hypergéométrique de deux variables, considérée récemment par M. Appell, qui en a fait une étude approfondie (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1880).

1. Soient F_1, F_2, F_3 trois branches distinctes de la fonction; la fonction F satisfera évidemment aux deux équations linéaires simultanées

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} r & p & q & z \\ \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & F_1 \\ \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & F_2 \\ \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial F_3}{\partial x} & \dfrac{\partial F_3}{\partial y} & F_3 \end{vmatrix} = 0$$

et

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} s & p & q & z \\ \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & F_1 \\ \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & F_2 \\ \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial F_3}{\partial x} & \dfrac{\partial F_3}{\partial y} & F_3 \end{vmatrix} = 0,$$

où l'on pose $F = z$ et p, q, r, s désignent, suivant l'usage, les dérivées partielles de z par rapport à x et y. Nous allons chercher la forme des coefficients de ces équations.

2. Envisageons d'abord la première, que j'écrirai sous la forme suivante :

$$(1)' \quad \begin{vmatrix} r & p & q & z \\ \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & F_1 \\ \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & F_2 \\ \dfrac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial F_3}{\partial x} & \dfrac{\partial F_3}{\partial y} & F_3 \end{vmatrix} x^{-(\lambda+b_1)+3}(1-x)^{-(\lambda+b_2)+3} y^{-(\lambda'+b'_1)+2}(1-y)^{-(\lambda'+b'_2)+2}(x-y)^{-(\lambda+b_3)+3} = 0.$$

Je prends le coefficient de r, sur lequel je développerai les raisonnements dont je ne ferai qu'indiquer les résultats pour les autres coefficients. Sa valeur est évidemment

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & F_1 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & F_2 \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial x} & \dfrac{\partial F_3}{\partial y} & F_3 \end{vmatrix} x^{-(\lambda+b_1)+3}(1-x)^{-(\lambda+b_2)+3} y^{-(\lambda'+b'_1)+2}(1-y)^{-(\lambda'+b'_2)+2}(x-y)^{-(\lambda+b_3)+3}.$$

Laissant y constant (distinct de 0, 1 et ∞), je considère cette expression comme une fonction de x. Elle ne peut avoir d'autres points critiques que $x=0$, 1, y et ∞. Étudions-la dans le voisinage de chacun de ces points. Prenons d'abord $x=0$; la valeur du déterminant entrant dans l'expression (3) étant la même à un facteur constant près, quand on remplace les éléments d'un système fondamental par ceux d'un autre système fondamental, nous pouvons supposer que F_1, F_2, F_3 désignent les trois branches dont il a été question au début, et qui sont susceptibles de prendre les formes

$$P_1(x,y), \quad P_2(x,y), \quad x^{\lambda+b_1-1} P_3(x,y).$$

En substituant ces valeurs dans l'expression (3), on voit de suite qu'elle est holomorphe dans le voisinage de $x=0$ et s'annule pour cette valeur de x. On reconnaît de la même manière qu'il en est ainsi pour $x=1$ et pour $x=y$, et, par suite, l'expression (3) est une fonction holomorphe de x, s'annulant pour $x = 0, 1, y$. En l'étudiant dans le voisinage de $x = \infty$, nous pourrons achever de déterminer sa forme.

Supposons, comme nous pouvons le faire d'après une remarque précédemment faite, que F_1, F_2 et F_3 désignent trois branches susceptibles, dans le voisinage de $x = \frac{1}{x'} = \infty$, de prendre les formes indiquées plus haut,

$$x'^{-\lambda+1} R_1(x', y),\quad x'^{-\lambda+1} R_2(x', y),\quad x'^{3-\lambda-(b_1+b_2+b_3)} R_3(x', y).$$

On aura

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = x'^{-\lambda+2} P_1(x'),\qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = x'^{-\lambda+2} P_2(x'),\qquad \frac{\partial F_3}{\partial x} = x'^{4-\lambda-(b_1+b_2+b_3)} P_3(x').$$

P_1, P_2 et P_3 désignant d'une manière générale des séries procédant suivant les puissances croissantes de x'. En substituant ces valeurs ainsi que les dérivées partielles par rapport à y dans l'expression (3), on reconnaît de suite que cette dernière devient égale au produit de x'^{-3} par une fonction holomorphe par rapport à x'. Nous concluons de là que le coefficient de r dans l'équation $(1)'$ est un polynôme du troisième degré en x, et, puisqu'il s'annule pour $x = 0$, 1 et y, il doit nécessairement avoir la forme

$$x(x-1)(x-y)\,\varphi(y),$$

le facteur $\varphi(y)$ ne dépendant que de y.

Laissant maintenant x constant (distinct de 0, 1 et ∞), considérons la même expression comme une fonction de y; on vérifiera facilement que c'est une fonction holomorphe de y, s'annulant pour $y = x$. De plus, l'étude de la fonction dans le voisinage de $y = \infty$ montre qu'elle ne peut être qu'un polynôme du premier degré en y. Elle doit donc avoir nécessairement la forme

$$(y - x)\,\psi(x),$$

le facteur $\psi(x)$ ne dépendant que de x. L'identité

$$x(x-1)(x-y)\,\varphi(y) = (y-x)\,\psi(x)$$

montre immédiatement que $\varphi(y)$ est une constante et que $\psi(x)$ est, à un facteur constant près, égal à $x(x-1)$.

Je recherche de la même manière les formes des coefficients de p, q et z, qui sont tous des polynômes en x et y. On trouve ainsi que le coefficient de p a la forme

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C},$$

où A, B et C sont des polynômes du premier degré en y.

Le coefficient de q est égal à $a(1-y)y$, a étant une constante, et enfin celui de z est un polynôme du premier degré en x et en y, que nous désignerons par $\mathrm{D}x + \mathrm{E}$, D et E étant des polynômes du premier degré en y.

L'équation (1) peut donc s'écrire

$$x(x-1)(x-y)r + (\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C})p + ay(1-y)q + (\mathrm{D}x + \mathrm{E})z = 0.$$

3. J'étudie de la même manière la forme des coefficients dans l'équation (2), que j'écris de la manière suivante,

$$x^{-(\lambda+b_1)+2}(1-x)^{-(\lambda+b_2)+2}y^{-(\lambda'+b'_1)+2}(1-y)^{-(\lambda'+b'_2)+2}(x-y)^{-(\lambda+b_3)+3}\begin{vmatrix} s & p & q & z \\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{F}_1}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y} & \mathrm{F}_1 \\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{F}_2}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial y} & \mathrm{F}_2 \\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{F}_3}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial x} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial y} & \mathrm{F}_3 \end{vmatrix}$$

et j'écris de suite, sans insister sur une suite de calculs qui ne présentent pas de difficultés, le résultat auquel on parvient. L'équation (2) peut s'écrire

$$(x-y)s = (a''x + a')p + (b''y + b')q + ez,$$

où a', a'', b', b'' et e sont des constantes. On peut encore former une troisième équation de la forme

$$(3)\quad y(y-1)(y-x)t + (\mathrm{A}_1 y^2 + \mathrm{B}_1 y + \mathrm{C}_1)q + a_1 x(1-x)p + (\mathrm{D}_1 y + \mathrm{E}_1)z = 0,$$

A_1, B_1, C_1, D_1 et E_1 étant des polynômes du premier degré en x et a_1 une constante.

4. Nous avons maintenant à déterminer les divers coefficients entrant dans ces équations, mais je veux former tout d'abord un second

système d'équations différentielles auxquelles satisfasse notre fonction F.

Il est indispensable à cet effet de rappeler comment M. Pochammer [(*Ueber hypergeometrische Functionen höheren Ordnung*) (*Journal de Crelle*, t. 71)] a généralisé le problème de Riemann pour les fonctions d'une seule variable, et je me bornerai au cas le plus simple, dont j'ai seul besoin ici. Soit une fonction d'une variable indépendante x, ayant les points critiques a_1, a_2, a_3 et ∞, et telle qu'entre quatre branches de la fonction il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants. Dans le voisinage d'un point critique $a_i (i = 1, 2, 3)$, on a trois déterminations de la fonction linéairement indépendantes

$$P_1(x), \quad P_2(x), \quad (x - a_i)^{\lambda + b_i - 1} P_3(x),$$

P_1, P_2 et P_3 étant holomorphes dans le voisinage de $x = a_i$.

Dans le voisinage de $x = \frac{1}{x'} = \infty$, on a les déterminations

$$x'^{-\lambda+1} R_1(x'), \quad x'^{-\lambda+1} R_2(x'), \quad x'^{3-\lambda-(b_1+b_2+b_3)} R_3(x'),$$

R_1, R_2 et R_3 étant holomorphes pour $x' = 0$.

L'équation linéaire du troisième ordre à laquelle satisfait une telle fonction est complètement déterminée et peut se mettre sous la forme suivante,

$$\varphi(x) \frac{d^3 F}{dx^3} + \sum_{k=2}^{k=0} (-1)^{3-k} [(\lambda - k - 1)_{3-k} \varphi^{(3-k)}(x) + (\lambda - k - 1)_{2-k} \psi^{(2-k)}(x)] \frac{d^k F}{dx^k} = 0,$$

où

$$\varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \quad \text{et} \quad \psi(x) = \varphi(x) \left(\frac{b_1}{x - a_1} + \frac{b_2}{x - a_2} + \frac{b_3}{x - a_3} \right),$$

et l'on écrit

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1.2\ldots q} = (p)_q.$$

Cela posé, considérons notre fonction F comme une fonction de x seule, y ayant une valeur distincte de 0, 1, ∞. Ses points critiques sont 0, 1, y et ∞, et les exposants relatifs à ces points critiques sont précisément ceux de la fonction que nous venons de considérer. F satisfait donc à l'équation

$$\text{(I)}\quad \varphi(x)\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+\sum_{k=2}^{k=0}(-1)^{3-k}[(\lambda-k-1)_{3-k}\,\varphi^{(3-k)}(x)+(\lambda-k-1)_{2-k}\,\psi^{(2-k)}(x)]\frac{\partial^k F}{\partial x^k}=0,$$

où

$$\varphi(x)=x(x-1)(x-y)\quad\text{et}\quad \psi(x)=\varphi(x)\left(\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x-1}+\frac{b_3}{x-y}\right).$$

Si nous considérons au contraire x comme constant, nous obtiendrons pareillement une équation (I)' qui se déduira de l'équation (I) en remplaçant x par y et y par x et accentuant les constantes b_1, b_2, b_3 et λ.

5. Pour déterminer les constantes et les polynômes entrant dans les équations (1) et (2), nous allons tirer de ces dernières une équation différentielle du troisième ordre, ne contenant que les dérivées partielles de F par rapport à x, et nous écrirons qu'elle coïncide avec l'équation (I). De même, des équations (2) et (3) on peut tirer une équation du troisième ordre ne contenant que les dérivées par rapport à y, et elle devra coïncider avec l'équation (I)'.

Différentions l'équation (1) par rapport à x; il vient

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &x(x-1)(x-y)\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+r\frac{d}{dx}\,x(x-1)(x-y)+(Ax^2+Bx+C)r\\ &\qquad+(2Ax+B)p+ay(1-y)s+(Dx+E)p+Dz=0;\end{aligned}\right.$$

mais on a

$$s=\frac{(a''x+a')p+(b''y+b')q+ez}{x-y},$$

et, en remplaçant q par sa valeur tirée de (1), on a

$$ay(1-y)s=\frac{\left\{\begin{aligned}&ay(1-y)(a''x+a')p-x(x-1)(x-y)(b''y+b')r\\ &-(Ax^2+Bx+C)(b''y+b')p-(Dx+E)(b''y+b')z+aey(1-y)z\end{aligned}\right\}}{x-y}.$$

Remplaçant, dans (4) $ay(1-y)s$ par cette valeur, nous avons l'équation cherchée.

Dans l'équation (I), le coefficient de F est une constante

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(3 - \lambda - b_1 - b_2 - b_3);$$

il a pour valeur, dans l'équation (4),

$$D + \frac{aey(1-y) - (Dx + E)(b''y + b')}{x - y};$$

D et E sont des polynômes du premier degré en y, que j'écrirai

$$D = \alpha y + \beta, \quad E = \gamma y + \delta.$$

Dans le second terme, la division devant se faire exactement, le quotient doit être égal à $-D(b''y + b')$. L'expression précédente a donc pour valeur

$$D - D(b''y + b') \quad \text{ou} \quad (\alpha y + \beta)(1 - b' + b''y);$$

cette expression devant avoir une valeur constante différente de zéro, on aura

$$\alpha = b'' = 0,$$

b'' étant nul, il en est nécessairement de même de a'' par symétrie, comme le montrerait d'ailleurs la comparaison de l'équation (I)' avec celle qu'on déduirait des équations (2) et (3).

Écrivons maintenant que $aey(1-y) - (\beta x + \gamma y + \delta)b'$ est divisible par $x - y$; pour $x = y$, cette expression étant identiquement nulle, on a

$$(5) \qquad ae = 0, \quad (\beta + \gamma)b' = 0, \quad b'\delta = 0.$$

Supposons d'abord b' différent de zéro, seule supposition admissible, comme nous le montrerons tout à l'heure; on aura

$$\gamma = -\beta \quad \text{et} \quad \delta = 0;$$

donc

$$Dx + E = \beta(x - y).$$

5. Égalons maintenant le coefficient de r ou $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ dans l'équation (4)

avec ce même coefficient dans l'équation (1); on a

$$\frac{d}{dx}x(x-1)(x-y)+\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C}-b'x(x-1)$$
$$=-\left[(\lambda-2)\frac{d}{dx}x(x-1)(x-y)+b_1(x-1)(x-y)+b_2x(x-y)+b_3x(x-1)\right]$$

ou

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C}-b'x(x-1)$$
$$=-[(\lambda+b_3-2)x(x-1)+(\lambda+b_1-2)(x-1)(x-y)+(\lambda+b_2-2)x(x-y)]$$

Posant $\mathrm{B}=my+n$ et identifiant, on a de suite

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A}-b'&=-(3\lambda+b_1+b_2+b_3-6),\\ \mathrm{C}&=-(\lambda+b_1-2)y,\\ m&=2\lambda+b_1+b_2-4,\\ n+b'&=2\lambda+b_1+b_3-4.\end{aligned}\right.$$

La première relation montre que A est une constante; mais nous n'avons là que trois relations entre A, m, n et b'.

Passons au coefficient de $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}$ ou p. Il est, dans l'équation (4),

$$(7)\qquad 2\mathrm{A}x+my+n+\beta(x-y)+\frac{aa'y(1-y)-(\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C})b'}{x-y}.$$

Le dernier terme devant être entier, le quotient de la division est

$-\mathrm{A}b'x-\mathrm{A}b'y-\mathrm{B}b'$, et le reste $-\mathrm{C}b'+aa'y(1-y)-(\mathrm{A}y+\mathrm{B})b'y$.

L'expression totale est donc

$$(2\mathrm{A}+\beta-\mathrm{A}b')x+[m-\beta-b'(\mathrm{A}+m)]y+n(1-b').$$

Ce même coefficient a, dans l'équation (I), la valeur

$$[3(\lambda-2)(\lambda-3)+2(\lambda-2)(b_1+b_2+b_3)]x$$
$$+[-(\lambda-2)(\lambda-3)-(\lambda-2)(b_1+b_2)]y-(\lambda-2)(\lambda-3)-(\lambda-2)(b_1+b_3);$$

on a, par suite,

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\mathrm{A}+\beta-\mathrm{A}b'&=3(\lambda-2)(\lambda-3)+2(\lambda-2)(b_1+b_2+b_3),\\ m-\beta-b'(\mathrm{A}+m)&=-(\lambda-2)(\lambda-3)-(\lambda-2)(b_1+b_2),\\ n(1-b')&=-(\lambda-2)(\lambda-3)-(\lambda-2)(b_1+b_3).\end{aligned}\right.$$

Enfin, en écrivant que le reste

$$+(\lambda+b_1-2)b'+aa'(1-y)-(Ay+my+n)b'$$

est nul, on a

$$aa'+(A+m)b'=0,$$
$$aa'-[n-(\lambda+b_1-2)]b'=0,$$

et remarquons que ces équations, retranchées membre à membre, donnent le même résultat que si l'on eût ajouté les trois équations (6).

Nous avons en résumé maintenant les trois équations (6) et les trois équations (8) entre les cinq quantités A, m, n, b' et β. Nous allons voir qu'elles sont compatibles.

En ajoutant les deux premières équations (8), on a

$$(2A+m)(1-b')=2(\lambda-2)(\lambda-3)+(\lambda-2)(b_1+b_2+2b_3),$$
$$n(1-b')=-(\lambda-2)(\lambda-3)-(\lambda-2)(b_1+b_3),$$

que je rapproche de l'équation.

On ne peut avoir $b'=1$ que si les seconds membres sont nuls, ce qui entraînerait $b_1=b_2$ contre l'hypothèse; nous avons donc, en divisant et remplaçant m et n par leur valeur,

$$\frac{-4\lambda-b_1-b_2-2b_3+2b'+8}{b'-(2\lambda+b_1+b_3-4)}=\frac{2(\lambda-3)+b_1+b_2+2b_3}{\lambda-3+b_1+b_3},$$

et, en réduisant,

$$(b_1-b_2)[b'-(\lambda-1)]=0,$$

d'où

$$b'=\lambda-1.$$

b' étant trouvé, toutes les autres constantes s'en déduisent immédiatement.

On aura

$$A=-2\lambda-b_1-b_2-b_3+5,$$
$$n=\lambda-3+b_1+b_3$$

et

$$\beta=(\lambda-1)(3-\lambda-b_1-b_2-b_3),$$

et l'on aura d'autre part

$$aa' = b'(n - \lambda - b_1 + 2) = (\lambda - 1)(b_3 - 1) = (\lambda - 1)(\lambda' - 1);$$

λ et λ' n'étant pas des entiers, on voit que aa' n'est pas nul.

Cette remarque est importante. Nous avons supposé, en effet, dans l'analyse précédente, que b' était différent de zéro. On voit, dans ce cas, que a' sera aussi nécessairement différent de zéro, et, raisonnant alors sur les équations (2) et (3) comme nous venons de raisonner sur (1) et (2), nous trouverons la valeur de a' comme on vient de trouver celle de b'. Il vient ainsi

$$a' = -\lambda' + 1,$$

et, par suite, nous pouvons maintenant avoir a, qui a pour valeur $-\lambda + 1$.

D'autre part, la première des équations (5) donnerait $ae = 0$, et, puisque a n'est pas nul, on a $e = 0$, ce qui achève de déterminer les coefficients des équations (1) et (2).

7. Cela suppose que a' et b' ne sont pas nuls simultanément; mais il est aisé de voir que la chose est impossible. Dans ce cas, en effet, la constante e ne pouvant être nulle, puisque alors l'équation (2) se réduirait à $s = 0$, on aurait nécessairement

$$a = a_1 = 0,$$

et les équations (1) et (3) ne contiendraient plus, la première que les dérivées par rapport à x, la seconde les dérivées relatives à y, F_1, F_2, F_3 désignant les trois branches de la fonction; on aurait d'une part

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + A_3 F_3 = 0,$$

où A_1, A_2 et A_3 ne dépendent que de y, puis d'autre part

$$B_1 F_1 + B_2 F_2 + B_3 F_3 = 0,$$

où les B ne dépendent que de x.

Supposons que F_1, F_2 et F_3 soient les trois déterminations considérées au début dans le voisinage d'une valeur $x = y = \alpha$. On aura évidemment

$$A_3 = B_3 = 0,$$

et par suite

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 = 0, \quad B_1 F_1 + B_2 F_2 = 0.$$

Donc

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2};$$

mais, le premier rapport ne dépendant que de y et le second de x, leur valeur commune est une constante, et l'on a par suite

$$F_1 = CF_2,$$

C étant une constante, et, contre l'hypothèse, F_1 et F_2 ne sont pas linéairement indépendants.

8. Les équations (1) et (2) sont donc complètement déterminées et peuvent s'écrire

$$(x-y)s = (1-\lambda')p + (\lambda - 1)q,$$

$$\begin{aligned} x(x-1)(x-y)r + [(5 - 2\lambda - b_1 - b_2 - b_3)x^2 + (2\lambda + b_1 + b_2 - 4)xy \\ + (\lambda - 3 + b_1 + b_3)x - (\lambda + b_1 - 2)y]p \\ + (1-\lambda)y(1-y)q + (\lambda - 1)(3 - \lambda - b_1 - b_2 - b_3)(x-y)z = 0, \end{aligned}$$

et l'on pourrait adjoindre à ces deux équations la troisième, exprimant la dérivée seconde t en fonction de p, q, z.

Il resterait à vérifier maintenant que les trois équations précédentes ont effectivement trois solutions communes linéairement indépendantes. Nous arriverons à ce résultat en donnant la forme même de ces solutions communes. Il résulte du travail de M. Pochammer que l'équation (I) admet comme intégrale l'intégrale définie

$$\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

g et h désignant deux quelconques des quantités 0, 1, y, x et ∞.

Nous supposons, pour que toutes ces intégrales aient un sens, que

$$b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad b_3 > 0, \quad \lambda > 0$$

et

$$b_1 + b_2 + b_3 + \lambda - 3 < 0,$$

en bornant ces inégalités aux parties réelles de chacun des premiers membres, si ceux-ci sont imaginaires.

De même l'équation (I)′ admet pour solutions les intégrales

$$\int_g^h u^{b'_1-1}(u-1)^{b'_2-1}(u-x)^{b'_3-1}(u-y)^{\lambda'-1}\,du;$$

mais, à cause des relations $b'_1=b_1$, $b'_2=b_2$, $b'_3=\lambda$, $\lambda'=b_3$, ces intégrales coïncident avec les précédentes, et nous obtenons de cette manière des solutions communes aux équations (I) et (I)′. Nous allons vérifier sans peine qu'elles satisfont aux équations (1) et (2).

Soit donc

$$z=\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du.$$

Prenons d'abord pour g et h deux des quantités 0, 1 et ∞, nous aurons

$$p=-(\lambda-1)\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-2}\,du,$$

$$q=-(b_3-1)\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-y)^{b_3-2}(u-x)^{\lambda-1}\,du,$$

$$=(b_3-1)(\lambda-1)\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-y)^{b_3-2}(u-x)^{\lambda-2}\,du.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation

$$(x-y)s=(1-b_3)p+(\lambda-1)q.$$

Il vient

$$\begin{aligned}\int_g^h (x-y)(b_3-1)(\lambda-1)u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-y)^{b_3-2}(u-x)^{\lambda-2}\,du&\\ =(b_3-1)(\lambda-1)\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-2}\,du&\\ +(\lambda-1)(1-b_3)\int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-y)^{b_3-2}(u-x)^{\lambda-1}\,du,&\end{aligned}$$

et l'identité des deux membres est évidente.

Supposons maintenant que, g étant une des quantités o. 1, ∞, h soit égal à une des variables, x par exemple. Nous allons considérer l'intégrale prise entre les limites g et $x-\varepsilon$, ε étant une constante. On aura alors

$$p = -(\lambda-1)\int_g^{x-\varepsilon} u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-2}\,du$$
$$+(x-\varepsilon)^{b_1-1}(x-\varepsilon-1)^{b_2-1}(x-\varepsilon-y)^{b_3-1}(-\varepsilon)^{\lambda-1},$$

q aura la même expression, et à la valeur précédemment écrite pour s on devra ajouter

$$-(b_3-1)(x-\varepsilon)^{b_1-1}(x-\varepsilon-1)^{b_2-1}(x-\varepsilon-y)^{b_3-2}(-\varepsilon)^{\lambda-1};$$

on aura, par suite,

$$(x-y)s-(1-b_3)p-(\lambda-1)q$$
$$=(1-b_3)(x-\varepsilon)^{b_1-1}(x-\varepsilon-1)^{b_2-1}(x-\varepsilon-y)^{b_3-2}(-1)^{\lambda-1}\varepsilon^{\lambda}.$$

Faisons tendre maintenant la constante ε vers zéro; le second membre tendra vers zéro, puisque la partie réelle de λ est positive, et l'équation (2) se trouvera par suite vérifiée.

Passons maintenant à l'équation (1) : nous supposerons que g et h sont deux des quantités o, 1 et ∞ ; le cas où ces limites sont x et y se traitera d'une manière analogue, mais en raisonnant sur $x-\varepsilon$ et $y-\varepsilon'$, et l'on fera tendre ensuite les constantes ε vers zéro, comme dans le cas précédent.

Posons

$$f(u) = u^{b_1}(u-1)^{b_2}(u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-2};$$

on aura

$$df(u) = f(u)\left(\frac{b_1}{u}+\frac{b_2}{u-1}+\frac{b_3-1}{u-y}+\frac{\lambda-2}{u-x}\right)du;$$

donc

$$\begin{aligned}f(h)-f(g) = \int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}\big[&b_1(u-1)(u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-2}\\ &+b_2u(u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-2}\\ &+(b_3-1)u(u-1)(u-y)^{b_3-2}(u-x)^{\lambda-2}\\ &+(\lambda-2)u(u-1)(u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-3}\big]\,du;\end{aligned}$$

h et g désignant deux des quantités o, 1, ∞, on a

$$f(h) = f(g) = 0,$$

et l'on a par suite zéro dans le premier membre. L'identité précédente peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} 0 = \int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}[b_1(u-x+x-1)(u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-2} + b_2(u-x+x)(u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-2} \\ + (b_3-1)(u-y+y)(u-x+x-1)(u-y)^{b_3-2}(u-x)^{\lambda-2} \\ + (\lambda-2)(u-x+x)(u-x+x-1)(u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-3}]\,du, \end{aligned}$$

ou, en effectuant quelques réductions,

$$\begin{aligned} 0 = \int_g^h u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}\{(\lambda-2)x(x-1)(u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-3} + (b_3-1)y(x-1)(u-y)^{b_3-2}(u-x)^{\lambda-2} \\ + [(b_1+b_2+b_3+2\lambda-5)x - b_1 - b_3 + 3 - \lambda](u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-2} \\ + (b_3-1)y(u-y)^{b_3-2}(u-x)^{\lambda-1} + (b_1+b_2+b_3+\lambda-3)(u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-1}\}\,du, \end{aligned}$$

et, en multipliant par $\lambda - 1$, on peut l'écrire

$$\begin{aligned} x(x-1)r + y(x-1)s + [(b_1+b_2+b_3+2\lambda-5)x - b_1 - b_3 + 3 - \lambda]p \\ + (\lambda-1)yq + (\lambda-1)(b_1+b_2+b_3+\lambda-3)z = 0, \end{aligned}$$

et, en remplaçant s par sa valeur tirée de l'identité précédemment établie,

$$(x-y)s = (1-b_3)p + (\lambda-1)q,$$

on tombe sur l'équation qu'il s'agissait de vérifier.

9. Le système d'équations simultanées que nous venons d'étudier avait déjà été signalé par M. Appell dans ses intéressantes recherches sur les séries hypergéométriques. Il est facile de voir en effet que les équations F_1 considérées par M. Appell (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 16 février 1880) coïncident avec les équations précédentes en posant

$$(\mu) \qquad b_1 = 1 + \beta + \beta' - \gamma, \quad b_2 = \gamma - \alpha, \quad b_3 = 1 - \beta', \quad \lambda = 1 - \beta.$$

Indépendamment de l'étude des fonctions intégrales dans le voisinage des points critiques, qui est le principal objet de ce travail, les considérations précédentes montrent que ces fonctions ne sont autre chose que les intégrales de M. Pochammer, envisagées comme fonctions de deux variables, un des points critiques devenant une seconde variable. J'ai annoncé qu'une des déterminations de la fonction était holomorphe par rapport à x et y dans l'intérieur des cercles ayant pour centres respectifs $x = 0$, $y = 0$ et un rayon égal à l'unité; c'est la série hypergéométrique de deux variables étudiée par M. Appell.

Il est facile de l'exprimer par une intégrale simple. Envisageons en effet l'intégrale

$$\int_1^\infty u^{b_1-1}(u-1)^{b_2-1}(u-y)^{b_3-1}(u-x)^{\lambda-1}\,du;$$

nous pouvons l'écrire, en remplaçant b_1, b_2, b_3 et λ par les valeurs tirées des équations (μ),

$$\int_1^\infty \frac{(u-1)^{\gamma-\alpha-1}}{u^\gamma}\left(1-\frac{y}{u}\right)^{-\beta'}\left(1-\frac{x}{u}\right)^{-\beta} du,$$

et, en développant $\left(1-\frac{y}{u}\right)^{-\beta'}$ et $\left(1-\frac{x}{u}\right)^{-\beta}$ en série procédant suivant les puissances croissantes de $\frac{y}{u}$ et $\frac{x}{u}$, nous pourrons mettre cette intégrale sous la forme

$$\sum \frac{\beta'(\beta'+1)\ldots(\beta'+m-1).\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}\, y^m x^n \int_1^\infty \frac{(u-1)^{\gamma-\alpha-1}}{u^{m+n+\gamma}}\,du,$$

la sommation s'étendant aux valeurs entières de m et n de zéro à l'infini.

Or, on établit sans peine que

$$\int^\infty \frac{(u-1)^{\gamma-\alpha-1}\,du}{u^{m+n+\gamma}} = \frac{(\alpha+m+n-1)}{(\gamma+m+n-1)}\int_1^\infty \frac{(u-1)^{\gamma-\alpha-1}\,du}{u^{m+n-1+\gamma}},$$

d'où l'on conclut

$$\int_1^\infty \frac{(u-1)^{\gamma-\alpha-1}\,du}{u^{m+n+\gamma}} = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m+n-1)}\int_1^\infty \frac{(u-1)^{\gamma-\alpha-1}}{u^\gamma}\,du,$$

et l'on retombe, par suite, sur la série hypergéométrique de M. Appell.