ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. JOUBERT

Études sur les machines magnéto-électriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 10 (1881), p. 131-174
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1881_2_10__131_0>

ÉTUDES

SUR LES

MACHINES MAGNÉTO-ÉLECTRIQUES,

PAR M. J. JOUBERT,

PROFESSEUR DE PHYSIQUE AU COLLÈGE ROLLIN.

INTRODUCTION.

L'emploi des machines à courants alternatifs a pris depuis quelques années, particulièrement depuis l'invention de la bougie Jablochkoff, une extension considérable. Ces machines sont actuellement les seules qui se prêtent à la division de la lumière électrique. Des types nouveaux ont été créés et sont créés tous les jours; mais la théorie n'a pas marché d'un pas égal. Les courants donnés par ces machines ont été très peu étudiés, et cela s'explique par les difficultés qu'on rencontre quand on veut appliquer les méthodes et les instruments ordinaires à des courants d'une grande intensité et qui changent de sens cent ou deux cents fois par seconde. Les seuls travaux publiés sur ce sujet qui soient parvenus à ma connaissance sont ceux de M. Le Roux et ceux de MM. Jamin et Roger. Ils portent sur la machine de *l'Alliance*, la première des machines électromagnétiques qui soit entrée dans l'industrie. Les expériences de M. Le Roux, qui datent de 1857 (1), donnent déjà quelques résultats intéressants. Malheureusement, M. Le Roux

(1) LE ROUX, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. L, p. 463.

redressait au moyen d'un commutateur les courants alternatifs de la machine; la position du commutateur dépend de la vitesse de la machine et de la résistance du circuit. S'il garde une position fixe dans les diverses expériences, celles-ci ne sont plus comparables entre elles, et les données qu'elles fournissent n'ont qu'un rapport très compliqué avec les lois réelles de la machine. Le fait principal qui ressort des expériences de M. Le Roux est que l'intensité suit la loi d'Ohm, et par conséquent celle de Joule, pour les très grandes résistances, celles qui dépassent quarante ou cinquante fois la résistance propre de la machine, mais que pour les résistances plus faibles elle croît beaucoup moins vite que ne le voudrait cette loi.

MM. Jamin et Roger [1] ont supprimé le commutateur et employé la méthode calorimétrique. La conclusion principale de leur travail est que la loi de l'intensité moyenne et celle de la chaleur dégagée dans le circuit extérieur peuvent être représentées par des formules analogues à celles qui conviennent aux piles. Dans le cas d'une pile, A étant la force électromotrice, r la résistance intérieure, x la résistance extérieure, l'intensité a pour expression

$$i = \frac{A}{r+x},$$

et la quantité de chaleur dégagée dans le circuit extérieur,

$$C = \frac{A^2 x}{(r+x)^2}.$$

Des expressions de cette forme conviennent également, d'après MM. Jamin et Roger, à la machine de *l'Alliance*, à la condition toutefois de ne pas attribuer aux constantes A et r leur signification physique ordinaire.

Pour M. Jamin, A ne représente pas plus la force électromotrice réelle de la machine que r n'en représente la résistance. Il ne croit pas, comme on l'a admis souvent depuis, que la résistance soit augmentée pendant le mouvement et qu'il y ait lieu d'établir une distinction entre la résistance *statique* et la résistance *dynamique* : « La formule qui

---

(1) Jamin et Roger, *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. XVII, p. 276; 1869.

représente C n'a pas de sens théorique; c'est la valeur d'une intégrale définie qui exprime la somme des chaleurs dégagées pendant chaque instant; elle l'exprime au moyen de deux constantes A et r, qui sont deux fonctions inconnues des forces électromotrices vraies et de la résistance vraie des bobines. Mais la formule n'en exprime pas moins ce fait important que la quantité de chaleur donnée par la machine est égale à celle que donnerait une pile qui aurait une force électromotrice A et une résistance réelle égale à r [1]. »

Cette loi est d'ailleurs celle à laquelle a été conduit M. Mascart dans la théorie qu'il a donnée des diverses machines électriques [2], avec cette différence essentielle, cependant, que la résistance fictive r, au lieu d'être constante, comme semble le croire M. Jamin, est une fonction de la vitesse.

Soient A le travail électromagnétique du système induit, supposé parcouru par un courant d'intensité égale à l'unité, pour un tour de la machine, I l'intensité du courant, R la résistance du circuit et n le nombre de tours pendant l'unité de temps. Dans chaque unité de temps, le travail électromagnétique est égal au travail qui se retrouve sous forme de chaleur dans le circuit; on a donc l'équation

$$nAI = I^2R, \tag{1}$$

d'où l'on déduit

$$I = \frac{nA}{R}, \tag{2}$$

c'est-à-dire la loi d'Ohm. Mais la réaction des bobines sur les aimants fixes conduit à introduire un terme en I^2 proportionnel à la vitesse et à écrire l'équation (1) sous la forme

$$n(A - BI)I = I^2R, \tag{3}$$

d'où l'on déduit

$$I = \frac{nA}{R + nB}, \tag{4}$$

---

(1) JAMIN et ROGER, *loc. cit.*, p. 293.
(2) MASCART, *Journal de Physique*, t. VI, p. 300, et t. VII, p. 79.

c'est-à-dire une loi de l'intensité qui se confond avec celle de M. Jamin quand on suppose la vitesse constante.

MM. Jamin et Roger ajoutent que les lois qu'ils ont découvertes ne doivent pas être considérées comme particulières à la machine qui leur a servi, « mais qu'ils les considèrent comme étant générales, s'appliquant à tous les électromoteurs fondés sur le même principe, c'est-à-dire comme étant les lois générales de l'induction ».

Quelques essais faits sur différents types de machines m'ayant montré qu'il n'en est pas ainsi, j'ai été conduit à reprendre cette étude, en cherchant, s'il était possible, à pénétrer plus avant dans le fond des choses et à découvrir, ce qui est indispensable pour établir une discussion complète, la signification physique des constantes qui entrent dans les formules.

J'ai choisi, pour commencer cette étude, la machine Siemens à courants alternatifs; d'abord, parce qu'elle me semble la plus parfaite des machines de ce type, mais surtout parce qu'elle me paraissait présenter des conditions plus simples et plus facilement accessibles à la théorie.

Une machine électromagnétique est formée de deux organes essentiels. L'un, composé d'aimants fixes ou d'électro-aimants, détermine un champ magnétique constant : c'est le système *inducteur*. L'autre, appelé *système induit,* est formé de bobines avec ou sans noyau de fer doux, qui, par suite de leur déplacement dans le champ de l'inducteur, sont le siège des courants d'induction qu'on utilise dans la machine. Quant aux électro-aimants de l'inducteur, ils sont ordinairement animés par une machine à courants continus, indépendante ou montée sur le même arbre, et qu'on appelle l'*excitatrice*.

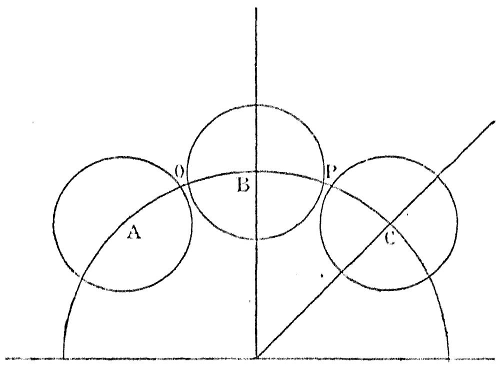
L'inducteur de la machine Siemens se compose de deux couronnes d'électro-aimants, alternativement de sens contraires, qui sont placées en regard, verticalement et à une petite distance l'une de l'autre, de manière que les axes des bobines des deux couronnes soient en coïncidence et que les pôles opposés soient de noms contraires. L'espace compris entre les deux couronnes constitue un champ magnétique, variable d'un point à un autre quant à l'intensité et la direction; les maxima, alternativement de sens contraires, coïncident avec l'axe des bobines, et les minima, qui sont nuls, se trouvent dans le plan de symétrie de deux électro-aimants consécutifs et à égale distance des deux couronnes.

Le système induit se compose d'une couronne de bobines plates, sans noyau de fer doux, en nombre égal à celui des électro-aimants de chaque couronne. L'axe des bobines est parallèle à celui des électro-aimants ou encore à l'axe de rotation de la machine. Elles se déplacent d'un mouvement uniforme dans le champ inducteur et sont reliées de manière que les courants dont elles sont le siège s'ajoutent.

Il est facile de se rendre compte du jeu de la machine.

Prenons une des bobines induites au moment où son axe coïncide avec celui de la bobine inductrice A (*fig.* 1). Soient S la surface totale

Fig. 1.



comprise par les spires et H l'intensité moyenne du champ dans la région occupée par la bobine; le flux total de force qu'elle comprend a pour valeur SH. En O le flux sera nul; en B il sera — SH, les valeurs de H en A et en B étant égales et de signes contraires. Quand la bobine passera de A en B, la variation totale du flux sera donc 2SH; d'après les théorèmes connus de l'*induction,* la force électromotrice correspondant à ce déplacement sera 2SH, et, si R est la résistance du circuit, la quantité d'électricité mise en mouvement aura pour expression $\frac{2SH}{R}$.

A chaque instant le courant est proportionnel à la variation du flux de force; il est maximum en O, où la variation est la plus rapide, nul en A et en B, où pendant un instant très court cette variation est nulle. De B en C la même succession se reproduit, mais en sens contraire; le changement de sens du courant a donc lieu en B. En C la bobine se retrouve dans la même situation qu'en A; le déplacement de A en C correspond donc à une période entière. S'il y a huit bobines dans la couronne, un tour correspond à quatre périodes complètes et à huit courants alternatifs. La même action se reproduit simultanément pour chacune des bobines, et, d'après le mode de jonction de ces bobines, les huit courants s'ajoutent.

Si cette théorie était complète, la loi de l'intensité à chaque instant serait exactement la loi d'Ohm : l'expérience montre qu'il en est autrement. L'expérience montre également que la formule de M. Jamin n'est pas davantage l'expression du phénomène.

Dans la première Partie de ce Mémoire, j'exposerai les méthodes expérimentales que j'ai employées et les résultats qu'elles m'ont fournis; dans la seconde, j'établirai une théorie de la machine qui nous conduira à une connaissance complète de la loi qui la régit.

PREMIÈRE PARTIE.

EXPÉRIENCES.

Mesure de l'intensité moyenne. — Les seules méthodes appliquées jusqu'ici à la mesure de l'intensité des courants alternatifs reposent sur la mesure des quantités de chaleur dégagées dans le circuit, ou sur l'emploi de l'électrodynamomètre. Dans le cas actuel, il se présente avec ce dernier instrument des difficultés spéciales, les unes théoriques, les autres pratiques : mis sur le circuit principal, il s'échauffe outre mesure, même quand il est formé de fils très gros et qu'on lui donne des dimensions considérables; s'il est placé en dérivation, les effets d'induction du courant sur lui-même mettent en défaut les lois ordinaires des courants dérivés et les indications de l'instrument n'ont plus alors de signification connue ([1]).

Je me suis servi avec beaucoup d'avantage, pour la mesure de l'intensité moyenne, de l'électromètre à cadran de Thomson, en l'employant d'une manière particulière et que je crois nouvelle ([2]). Je supprime complètement toute source étrangère d'électricité pour charger soit l'aiguille, soit les cadrans; les deux paires de cadrans sont isolées, et l'une d'elles est mise en communication électrique permanente avec l'aiguille, également isolée.

La formule générale de l'électromètre,

$$d = k(V_1 - V_2)V - \left(\frac{V_1 + V_2}{2}\right),$$

dans laquelle d est la déviation de l'aiguille, V_1 et V_2 les potentiels des cadrans et V celui de l'aiguille, se réduit dans le cas actuel, où $V = V_1$, à

$$d = \frac{k}{2}(V_1 - V_2)^2.$$

La déviation est proportionnelle au carré de la différence des potentiels des deux cadrans, et par suite indépendante du signe de cette différence.

Supposons d'abord les cadrans mis en communication avec deux points A et B d'un circuit traversé par un courant continu d'intensité I. Soient V_1 et V_2 les potentiels des deux points A et B, et R la résistance du conducteur qui les sépare; on a

$$IR = V_1 - V_2. \tag{1}$$

Supposons maintenant qu'entre deux autres points A' et B' du même circuit, au lieu d'un simple conducteur, on ait un moteur électrique ou tout autre engin capable de transformer l'énergie électrique en quelque autre forme de l'énergie; on a à considérer, outre la résistance propre R' du moteur au repos, la force électromotrice E dont il est le siège

---

([1]) *Voir* les Notes B et C, à la fin du Mémoire.

([2]) Je prends cet instrument sous la forme que lui a donnée M. Mascart.

pendant le mouvement, et l'équation devient

$$(2) \qquad E + IR' = V'_1 - V'_2.$$

Remarquons enfin que l'énergie électrique consommée entre les deux points A' et B' a pour expression

$$(3) \qquad I(E + IR') = \frac{(V_1 - V_2)(V'_1 - V'_2)}{R};$$

les valeurs du second membre des équations (1) et (2) sont fournies par la déviation de l'électromètre. On évite tout calcul en graduant une fois pour toutes l'instrument avec une pile de Daniell bien isolée et construisant la courbe des différences de potentiel en fonction des déviations. Un électromètre donnera donc la mesure de l'intensité du courant, et deux électromètres combinés celle de l'énergie consommée par l'engin de transformation.

Si, au lieu d'un courant continu, on a affaire à des courants alternatifs se succédant à des intervalles petits relativement à la durée des oscillations de l'aiguille, celle-ci, entraînée toujours dans le même sens, quel que soit le signe du courant, prend une déviation fixe, proportionnelle à la moyenne des valeurs successives du carré de $V_1 - V_2$. Cette moyenne est celle que donnerait l'emploi des méthodes calorimétriques ou de l'électrodynamomètre. Il faut remarquer qu'elle n'est pas la moyenne proprement dite, celle qui représente la quantité totale d'électricité, abstraction faite du signe, qui traverse une section du circuit pendant chaque unité de temps, et que l'écart ne peut être connu que si l'on connaît la loi de variation de $V_1 - V_2$ en fonction du temps.

L'emploi de l'instrument ainsi disposé pour la mesure des courants alternatifs ne le cède en rien, pour la simplicité et la précision, à celui d'un galvanomètre pour les courants continus. La fixité de l'aiguille est absolue. Rien n'est plus facile, avec une suspension bifilaire à écartement variable, que de donner à l'instrument la sensibilité convenable. Une précaution est indispensable : c'est de n'interposer entre les deux points A et B du circuit, auxquels communiquent les deux électrodes, que des résistances disposées de manière à éviter les effets secondaires d'induction. Je me sers soit de fils rectilignes, soit de charbons cylindriques, tels que les fabrique M. Carré [1], placés parallèlement et disposés de manière que le courant les traverse alternativement en sens inverse. Ces charbons doivent être assez gros pour ne pas s'échauffer trop fortement; à l'inverse des conducteurs métalliques, leur résistance diminue quand la température s'élève : la variation est de $\frac{1}{3400}$ environ par degré centigrade [2].

L'intensité moyenne, telle que la fournit l'électromètre, est la donnée la plus importante au point de vue pratique; mais elle est insuffisante pour établir une théorie des machines électriques, et il était indispensable de se livrer à une étude analytique du courant. J'ai employé, pour cette étude, des méthodes variées sur lesquelles je donnerai quelques détails.

Intensité et distribution du champ inducteur. — Les spectres donnés par la limaille de fer fournissent le moyen le plus simple et le plus précis d'étudier la distribution des forces dans un champ magnétique constant. Pour avoir l'intensité, je me suis servi du procédé de Weber, qui consiste, comme on sait, à faire tourner de 180° autour d'un axe perpendiculaire à la direction des lignes de force une très petite bobine, de manière que, dans la position initiale et la position finale, le plan des spires soit perpendiculaire à la direction du champ. Si l'on désigne par H l'intensité du champ, S la surface totale des spires, R la résistance totale du circuit, Q la quantité d'électricité, on a

$$2SH = QR.$$

Si un galvanomètre est placé dans le circuit, l'arc d'impulsion de l'aiguille est proportionnel à Q, et, pour connaître la constante de

---

(1) La résistance du charbon Carré est en moyenne de 50 ohms pour des cylindres de $0^m,001$ de diamètre et 1^m de longueur.

(2) Je citerai ici, à titre de renseignement, quelques nombres qui ont été obtenus par la méthode que je viens de décrire. Pour faire brûler une bougie Jablochkoff dans les conditions normales (charbons de $0^m,004$, avec une intensité lumineuse équivalant à 50 becs Carcel), il faut un courant dont l'intensité moyenne, telle que la définit l'électromètre, soit de 8 à 9 webers; la bougie cesse de brûler quand l'intensité tombe au-dessous de 5 webers; les charbons rougissent dans toute leur longueur, quand elle atteint 11 webers. Enfin la chute moyenne de potentiel entre les pieds des deux charbons varie de 40 à 45 volts, sur lesquels 30 à 35 volts correspondent à la force électromotrice de l'arc.

l'instrument, il suffit, une fois pour toutes, d'y faire passer la décharge d'une capacité étalonnée, chargée à un potentiel connu. Le galvanomètre employé était un galvanomètre Thomson, non astatique et à oscillations non amorties; la résistance du cadre est de $0^{ohm},988$. J'avais été obligé de réduire beaucoup sa sensibilité, et une division correspondait à une quantité d'électricité égale à 15.10^{-8} (C.G.S). Pour avoir H, il faut avoir la valeur de S. La détermination directe de la surface des spires la donnerait avec une précision insuffisante. Il vaut mieux la déterminer au moyen d'une expérience faite dans un champ dont on connaît l'intensité en valeur absolue. Je m'y suis pris de la manière suivante. Je me suis servi du grand électro-aimant de Faraday, tel que le construit Ruhmkorff; les deux branches étaient munies de larges armatures en fer doux donnant entre elles un champ uniforme ([1]); un tube de verre plein de sulfure de carbone était placé dans l'axe de l'instrument, de manière que ses extrémités fussent à l'intérieur des bobines, et à côté se trouvait la petite bobine d'épreuve. On observait au même instant la déviation de l'aiguille du galvanomètre et la rotation du plan de polarisation de la lumière de la soude. Cette rotation est de $0',086$ pour une différence de potentiel égale à l'unité (C.G.S.) ([2]). J'avais donc tous les éléments nécessaires pour avoir la valeur absolue du champ, et par suite celle de S.

Voici les données relatives à l'une des expériences :

Longueur de la colonne de sulfure de carbone........	$10^{c},05$
Rotation du plan de polarisation........................	$5^{o},27$
Arc d'impulsion du galvanomètre.....................	91^{o}
Résistance du circuit..................................	$1^{ohm},585$

([1]) Verdet, t. I, p. 118.

([2]) J'ai déduit d'expériences sur la rotation imprimée au plan de polarisation de la lumière jaune par une longue colonne de sulfure de carbone, sous l'influence de la composante horizontale du magnétisme terrestre, que cette rotation est de $1',7$ pour une longueur de 1^{m} (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVII, p. 984). J'ai su depuis que cette même constante avait été déterminée antérieurement et par un autre procédé par M. Gordon (*Philosophical Transactions*, 1877, Part I, et *Gordon's physical Treatise on electricity and magnetism*, t. II, p. 228). M. Gordon a opéré avec la lumière du thallium. En appliquant la loi approximative de la réciprocité des rotations aux carrés des longueurs d'onde, on trouve que le nombre de M. Gordon et le mien sont presque identiques.

On en déduit

$$H = \frac{327'}{0,086 \times 10,05} = 380,$$

$$2S = \frac{QR}{H} = \frac{91 \times 15.10^{-8} \times 1,585.10^{9}}{380} = 56^{cq},80,$$

et, par suite, une division du galvanomètre correspond à un champ d'intensité égale à 4, 185.

J'ai étudié par ce procédé la valeur du champ aux différents points: le maximum est évidemment sur l'axe des deux bobines opposées. Le Tableau suivant renferme les diverses valeurs de H pour un point situé sur cet axe à égale distance des deux bobines et des intensités variables du courant excitateur. Ces valeurs, dans les limites où j'ai opéré, c'est-à-dire avec des intensités de 1 à 30 webers, se trouvent très bien représentées par la formule

$$H = 400I - 25I^2 - 5I^3,$$

dans laquelle H et I sont exprimés en unités absolues (C.G.S.). Si l'on veut exprimer I en webers, la formule devient

$$H = 40I - 0,25I^2 - 0,005I^3.$$

Intensité du courant en webers I.	Intensité du champ en unités absolues H.	Rapport $\frac{H}{I}$.	Limite $\frac{\Delta H}{\Delta I}$.
5	193,13	38,6	
10	370	38,5	33,5
15	526,88	35,6	
20	660	33,0	24,0
25	767,63	30,5	
30	850	28,3	11,5

Force électromotrice d'induction. — Quand le système induit, partant d'une position où les axes des bobines induites et des bobines inductrices sont en coïncidence, se déplace d'un arc correspondant à la demi-période, la valeur totale de la force électromotrice est, comme on l'a vu, égale à SH. Si R est la résistance du circuit, la quantité d'électricité mise en mouvement dans ce déplacement est donnée par la formule

$$Q = \frac{SH}{R}.$$

Q est donné par l'arc d'impulsion du galvanomètre; si R est connu, SH se trouve déterminé.

Mais il était du plus grand intérêt, comme on le verra par la suite, de connaître non seulement cette valeur totale de la force électromotrice, mais les variations qu'elle suit à chaque instant quand le système induit passe d'une position à une autre. A cet effet, j'ai divisé l'arc correspondant à la demi-période en dix parties égales et établi sur l'arbre un dispositif qui permettait de faire avancer brusquement le système induit d'une quantité égale à chacun de ces dixièmes; l'intensité du champ avait été notablement diminuée; l'inducteur n'était excité que par un seul élément Daniell à grande surface, donnant une intensité de $0^{\text{web}},527$; le système induit était réuni au galvanomètre dont il a été question précédemment; la résistance totale du circuit était de 62 ohms. Le Tableau suivant représente la moyenne de trois séries d'expériences :

Déplacement.	Arc d'impulsion.	Quantité d'électricité $n \times 15.10^{-8}$.
0 à 1	26	390
1 à 2	70	1050
2 à 3	120	1800
3 à 4	147	2235
4 à 5	167	2505
5 à 6	170	2560
6 à 7	153	2300
7 à 8	121	1815
8 à 9	78	1170
9 à 10	27	405
		16230.10^{-8}

Si l'on représente ces quantités d'électricité par des rectangles ayant pour base le dixième de la longueur qui correspond à la demi-période et pour hauteurs les nombres de la troisième colonne, on obtient une surface polygonale dont la forme générale rappelle celle d'une sinusoïde; et si l'on trace une ligne continue laissant en dehors des surfaces équivalentes à celles qui manquent en dedans, on obtient une courbe qui coïncide très exactement avec une sinusoïde dont l'ordonnée maxima aurait pour valeur 2600 ([1]). Il est important de remarquer que, dans chacun des déplacements successifs, l'effet mesuré est celui qui est dû au champ primitif, et qu'il n'y a point à tenir compte des effets secondaires d'induction, puisque, dans chaque cas, les quantités d'électricité, que développent ces effets secondaires, sont rigoureusement égales et de sens contraires. On peut donc conclure de ces expériences que, dans la machine en question, la force électromotrice d'induction due au champ primitif et abstraction faite des réactions varie comme un sinus, et que, si le mouvement est uniforme, la force électromotrice à chaque instant peut être représentée par une fonction de la forme

$$E_0 \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

E_0 étant la valeur maximum de la force électromotrice et T la durée d'une période complète.

Étude analytique des effets de la machine en mouvement. — La méthode consiste à placer un interrupteur sur l'axe même de la machine et à saisir à chaque révolution l'effet qu'on veut étudier dans une phase précise et toujours la même de sa période. L'appareil dont je me suis servi se compose de deux petites roues en cuivre fixées sur un même manchon, parfaitement isolées et portant chacune près de la circonférence un petit couteau de forme triangulaire qui vient, à chaque révolution, butter contre un couteau semblable, placé à l'extrémité d'un

---

([1]) On déduit de là que, dans les conditions actuelles de la machine, la valeur maxima de la force électromotrice correspondant à une vitesse d'un tour par seconde serait

$$e_0 = 2,000.10^{-8} \times 62.10^9 \times 8 = 1^{\text{volt}},289.$$

L'intensité du courant inducteur était de $0^{\text{web}},527$. L'expérience directe a montré que, pour la même vitesse et pour un courant de 5 webers (p. 153), la valeur de $e_0 = 12$ volts. Si l'on admet la proportionnalité de l'intensité du champ à l'intensité du courant, on obtient

$$e_0 = \tfrac{12}{5} \times 0,527 = 1^{\text{volt}},264.$$

La différence n'est que de $0^{\text{volt}},025$ et l'erreur relative est moindre que $\frac{1}{50}$:

ressort également isolé. On peut régler les deux ressorts de manière que les deux contacts s'opèrent rigoureusement au même instant; quant au système des deux roues, on peut le caler sur l'arbre de manière que le contact s'opère à une phase quelconque. Dans les conditions ordinaires de vitesse, la durée du contact ne dépasse pas $\frac{1}{20000}$ de seconde.

Il est évident que, puisque le contact saisit à chaque révolution le phénomène toujours dans une même phase, il n'y a plus de changement de sens; on rentre dans les conditions ordinaires, et l'on peut faire usage des méthodes et des instruments employés pour les courants continus. Il est cependant dans l'emploi de l'interrupteur une condition essentielle qu'il ne faut pas perdre de vue : il est indispensable que le contact ne dérive jamais qu'une quantité d'électricité absolument négligeable; autrement, on provoquerait la formation d'extra-courants qui changeraient d'une façon nécessaire et parfois très profonde la nature du phénomène au moment même où on veut l'étudier.

Ce danger n'est pas à craindre avec un instrument statique, de faible capacité et bien isolé, comme l'électromètre à cadrans que j'emploie. Avec cet instrument, il faut prendre sur le circuit deux points A et B séparés par une résistance rectiligne, mettre ces deux points en communication avec les deux frotteurs, les deux contacts étant en communication avec les cadrans de l'électromètre. L'aiguille peut, à volonté, ou être laissée, comme dans les expériences précédentes, en communication avec une des paires de cadrans, ou être chargée, à la manière ordinaire, au moyen d'une pile dont le second pôle communique avec le sol. La seule condition à remplir est que les deux contacts aient lieu rigoureusement en même temps, ce dont on s'assure en mettant l'électromètre en communication avec les deux pôles d'une pile isolée, d'abord d'une façon directe et ensuite par l'intermédiaire de l'interrupteur en mouvement; l'appareil est bien réglé quand, dans les deux cas, l'indication de l'électromètre est la même [1].

Cet ajustement est un peu délicat quand l'appareil n'a pas été con-

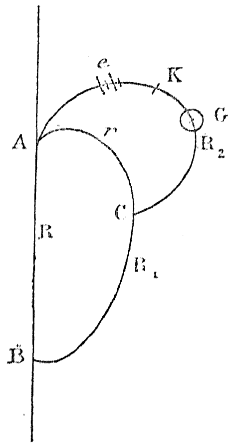
---

[1] Cette disposition et ce mode de réglage ont déjà été employés par M. Mouton dans son travail *Sur les phénomènes d'induction électrodynamique* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. V, 1876).

struit dans des conditions de haute précision. Aussi me suis-je le plus souvent servi de la méthode suivante, qui ne demande qu'un seul contact et supprime par conséquent toute la difficulté de l'ajustement. C'est une méthode d'opposition, et il est facile de reconnaître qu'elle satisfait à la condition fondamentale dont il a été parlé plus haut.

A et B (*fig.* 2) sont deux points du circuit principal aux extrémités d'une résistance connue R (1 ohm environ); ACB forme entre les mêmes points une dérivation de résistance connue et graduée R_1 (100 ohms environ); enfin AKC est une dérivation de résistance quelconque, mais

Fig. 2.



très grande (30000 ohms), qui part du point A et va aboutir à un point variable C de la résistance R_1, de manière à intercepter entre A et C une résistance variable r. Sur cette dérivation se trouve une pile de force électromotrice e, de 1 à 5 éléments Daniell, suivant le cas; le galvanomètre (un galvanomètre astatique de Thomson, d'une résistance de 7000 ohms environ); enfin l'interrupteur K, placé sur l'arbre de la machine. On déplace le contact C jusqu'à ce que l'aiguille soit ramenée au zéro. Il faut remarquer que la compensation est indépendante de la façon dont fonctionne l'interrupteur, puisqu'il commande de la même manière le courant à mesurer et celui de la pile qu'on lui oppose. Il est bien entendu que les résistances R_1 et R_2 sont des résistances rectilignes incapables de donner lieu à des extra-courants; on peut donc appliquer les formules des courants dérivés. Cela posé, si l'on représente par I, I_1, I_2 les intensités du courant dans le circuit principal, dans la résistance R_1 et dans la résistance R_2, et par V la différence de potentiel entre les deux points A et B, on a évidemment

$$e = I_2 r,$$
$$V = I_2 R_2,$$

et par suite

$$V = e\frac{R_2}{r}.$$

D'autre part, les équations

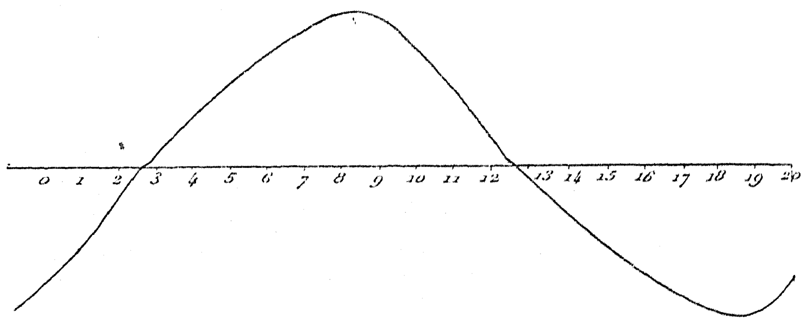
$$I = I_1 + I_2,$$
$$I_1 R_1 = I_2 R_2 = V$$

donnent

$$I = \frac{e}{r}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right).$$

Tout se réduit donc à la mesure de r pour les différentes phases de la période.

Fig. 3.



Courbe des intensités aux différentes phases.

L'arc correspondant à la période avait été divisé en vingt parties égales par des traits numérotés de 0 à 20, le zéro correspondant à la coïncidence des axes des bobines inductrices et induites. L'interrupteur, réduit à une seule des roues, était calé de manière à donner le contact au commencement de chacun des intervalles successifs. Avec une vitesse de dix tours par seconde, chaque intervalle correspond à $\frac{1}{800}$ de seconde; le contact n'occupait guère qu'un trentième de cet intervalle et avait une durée moindre que $\frac{1}{20000}$ de seconde.

Les expériences ont été répétées un grand nombre de fois, dans des conditions variées de vitesse de la machine et de résistance du circuit, mais toujours, et je le regrette aujourd'hui, avec des bougies en nombre variable dans le circuit et à peu près dans les conditions de travail maximum de la machine. Je crois inutile de rappeler ici toutes les déterminations faites; les diverses séries réduites en courbes donnent des figures semblables entre elles, et pouvant être ramenées à coïncidence par un simple changement d'échelle pour les ordonnées.

Numéro de la phase.	Intensités relatives.
0	− 0,790
1	− 0,525
2	− 0,188
3	+ 0,093
4	+ 0,330
5	+ 0,535
6	+ 0,735
7	+ 0,895
8	+ 0,995
9	+ 0,974
10	+ 0,790

L'ordonnée maximum, prise égale à l'unité, correspond à la position du contact qui coïncide avec la division 8,35. Deux faits principaux ressortent de ces nombres et de la courbe qui les traduit.

D'abord le changement de sens du courant ne se fait pas au point zéro, comme cela devrait être d'après la théorie élémentaire; il se fait au point 2,5 : autrement dit, il y a eu un changement de phase d'un huitième dans le sens du mouvement, ou bien encore le changement de sens a subi un retard égal au huitième de la période entière. En second lieu, si la courbe a en gros la forme d'une sinusoïde, elle présente une dissymétrie assez marquée : l'ordonnée maximum se trouve transportée dans le sens du mouvement, de manière à partager l'abscisse en deux parties inégales. Ici l'ordonnée maxima correspond au numéro 8,35; le déplacement correspond à 3,35 divisions, celui du zéro correspondant à 2,50 seulement.

Le déplacement de zéro sera expliqué d'une façon complète dans ce qui va suivre; quant à la forme dissymétrique de la courbe, je suis tenté de l'attribuer à la présence des bougies dans le circuit, ne l'ayant pas retrouvée, par d'autres méthodes, il est vrai, dans des circuits métalliques.

Quoi qu'il en soit, la différence avec la forme sinusoïdale est assez petite pour qu'on puisse la négliger dans la pratique. Ce résultat est important au point de vue de la signification des indications fournies par l'électromètre.

Supposons l'intensité à chaque instant représentée par une sinusoïde

$$i = \mathrm{A}\sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}},$$

la quantité d'électricité qui traverse le circuit pendant une demi-période a pour valeur

$$\mathrm{Q} = \int_{t=0}^{t=\frac{\mathrm{T}}{2}} i\,dt = \mathrm{A}\int_{t=0}^{t=\frac{\mathrm{T}}{2}} \sin\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}\,dt = \frac{\mathrm{AT}}{\pi},$$

et l'on en déduit, pour l'intensité moyenne,

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{Q}}{\frac{\mathrm{T}}{2}} = \frac{2\mathrm{A}}{\pi}.$$

La valeur I', donnée par l'électromètre ou le calorimètre, satisfait à la relation

$$\mathrm{I}'^2\frac{\mathrm{T}}{2} = \mathrm{A}^2\int_{t=0}^{t=\frac{\mathrm{T}}{2}} \sin^2\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t\,dt = \frac{\mathrm{A}^2\mathrm{T}}{4}.$$

On en déduit

$$\mathrm{I}' = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{2}},$$

et par conséquent

$$\frac{\mathrm{I}'}{\mathrm{I}} = \frac{\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{2}}}{\frac{2\mathrm{A}}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11.$$

L'intensité donnée par l'électromètre surpasse de $\frac{1}{10}$ l'intensité moyenne vraie.

En faisant un calcul analogue pour la courbe qui représente l'intensité dans les expériences précédentes, on arrive à ce résultat que

$$\frac{I'}{I} = 1,07.$$

L'erreur commise en confondant la courbe dissymétrique avec une sinusoïde en entraînerait une de $\frac{4}{111}$ ou $\frac{1}{28}$ environ dans la valeur de l'intensité; mais, je le répète, cette dissymétrie doit être accidentelle: on verra par la suite que l'erreur commise sur les intensités dans les circuits n'offrant que des résistances est en réalité beaucoup plus petite.

J'ai fait également un grand nombre de mesures par la méthode des électromètres-balances de M. Thomson.

L'instrument dont je me sers est celui des nombreux instruments imaginés par M. Thomson qui est connu sous le nom de *portable electrometer;* il est destiné surtout aux mesures des potentiels atmosphériques.

Dans mon instrument, chaque division du micromètre correspond à $3^{\text{volts}},63$; la lecture se fait avec une erreur d'un tiers de division au plus, c'est-à-dire environ à 1 volt près. On peut d'ailleurs mesurer des potentiels de plusieurs milliers de volts.

Mais il ne faut pas perdre de vue que pour les grands écarts les indications de l'instrument cessent d'être rigoureusement proportionnelles, et, bien que le défaut de proportionnalité soit très faible, il faut, si l'on veut une exactitude complète, construire empiriquement une Table de l'instrument.

Je mets l'un des pôles de la machine en communication avec la cage métallique de l'instrument et l'autre, par l'intermédiaire de l'interrupteur, avec le disque mobile. L'instrument donne alors la force électromotrice qui existe entre les deux pôles de la machine au moment du contact; la machine peut d'ailleurs être ouverte ou fermée par un circuit quelconque. Si dans ce circuit il n'existe pas de fils enroulés et pouvant donner lieu à des effets secondaires d'induction, l'indication de l'instrument, divisée par la résistance du circuit extérieur, doit donner un résultat identique à celui de la méthode précédente.

L'instrument présente l'avantage de pouvoir fonctionner avec la machine ouverte, et par conséquent de donner pour chaque instant la valeur de la force électromotrice vraie. Voici une série de mesures, pour une vitesse de 720 tours de la machine et une intensité de 20 webers, du courant excitateur :

	Valeurs observées en volts.	Ordonnées de la sinusoïde ayant même ordonnée maximum.	Différences.
0..........	0	0	0
1...........	152	155	— 3
2..........	290	296	— 6
3..........	399	406	— 7
4..........	475	476	— 1
5..........	502	502	0
6..........	477	476	+ 1
7...........	410	406	+ 4
8..........	288	291	— 3
9...........	154	155	— 1
10..........	0	0	0

On trouve ici une courbe qui se confond presque exactement avec une sinusoïde. Elle occupe la position normale. Il n'en est plus de même quand le circuit est fermé : la courbe est alors déplacée dans le sens du mouvement, et le déplacement est à la fois une fonction et de la résistance et de la vitesse.

Intensité moyenne et phase en fonction de la résistance et de la vitesse. — Étant donné que la loi de chacun des courants alternatifs est celle du sinus, on peut, au moyen de l'interrupteur et d'un électromètre, déterminer du même coup, au moyen de deux observations, l'intensité et la phase. Soient R la résistance totale du circuit, et y_1 et y_2 les différences de potentiel des deux pôles de la machine quand le contact est au n° 0, puis au n° 5, par exemple.

On a

$$y_1 = F \sin x,$$
$$y_2 = F \sin(x + \delta);$$

on en déduit

$$\sin x = \frac{\sin\delta}{\sqrt{\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 - 2\frac{y_2}{y_1}\cos\delta + 1}} = \frac{y_1}{F},$$

et, comme dans le cas actuel $\delta = \frac{\pi}{2}$,

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 + 1}} = \frac{y_1}{F}.$$

x exprime la distance angulaire, comptée à partir du n° 0, à laquelle se fait le changement de sens du courant; la phase sera donc $\frac{x}{2\pi} = \varphi$. F est la valeur maximum de la force électromotrice existant entre les deux pôles à l'instant $x + \frac{T}{2}$; la valeur moyenne sera $\frac{2F}{\pi}$. La résistance qui sépare extérieurement les deux pôles est $R - \rho$, ρ étant la résistance propre de la machine; l'intensité moyenne aura donc pour valeur

$$I = \frac{2F}{\pi(R - \rho)}.$$

F se présente ici, bien entendu, comme une fonction complexe et inconnue de la résistance et de la vitesse, mais que le procédé expérimental permet de déterminer dans chaque circonstance. En réalité, je ne me suis servi de ce procédé que pour la détermination de la phase; les intensités moyennes ont été mesurées directement avec l'électromètre à cadrans, comme je l'ai expliqué plus haut.

Force électromotrice de la machine ouverte en fonction de l'intensité du champ et de la vitesse. — La théorie indique que la force électromotrice de la machine ouverte est proportionnelle à la vitesse et à l'intensité du champ. Dans chaque cas, la valeur maximum de cette force électromotrice est obtenue, comme il vient d'être dit, au moyen du *portable electrometer*, le contact étant mis sur le n° 5. On donnait à la machine une vitesse constante et l'on faisait varier, par l'interposition de résistances, l'intensité du courant de l'*excitatrice*. Le Tableau suivant renferme les nombres obtenus aux vitesses de 500, 720 et 1070 tours pour des intensités du courant de l'excitatrice comprises entre 5 et 35 webers.

Intensité du courant de l'excitatrice en webers.	Nombre de tours de la machine par minute.		
	$n = 500$.	$n = 720$.	$n = 1070$.
	volts	volts	volts
5	103	145	208
10	188	270	405
15	271	390	576
20	345	500	740
25	412	598	885
30	475	690	1017
35	530	773	1126

Les nombres d'une même colonne verticale qui correspondent à une même vitesse sont proportionnels à l'intensité du champ (¹); ceux d'une même ligne horizontale, qui correspondent à une même intensité du champ, sont très exactement proportionnels aux vitesses.

C'est ce que met en évidence le Tableau suivant des valeurs de $\frac{E_0}{n}$ pour les diverses vitesses et les diverses intensités.

Valeurs de $\frac{E_0}{n}$.

n.	$I = 5$.	$I = 10$.	$I = 15$.	$I = 20$.	$I = 25$.	$I = 30$.	$I = 35$.
500	0,206	0,376	0,542	0,690	0,824	0,950	1,060
720	0,201	0,375	0,541	0,694	0,830	0,958	1,073
1070	0,194	0,378	0,540	0,691	0,827	0,950	1,052
	0,200	0,376	0,541	0,691	0,826	0,952	1,062

Les nombres de ce Tableau donnent la valeur maxima de la force électromotrice quand la vitesse est de 1 tour par minute. On en déduit le Tableau suivant :

(¹) La proportionnalité avec les nombres de la page 141 n'est pas tout à fait rigoureuse ; les deux séries de nombres n'ont pas été obtenues avec la même machine, mais avec deux machines du même type.

Intensité de l'excitatrice en webers.	Force électromotrice en volts pour des vitesses de 1 tour par minute.	de 1 tour par seconde.
5	0,200	12,00
10	0,376	22,56
15	0,541	32,46
20	0,691	41,46
25	0,826	49,56
30	0,952	57,12
35	1,062	63,72

Pour avoir la force électromotrice moyenne, il suffira de multiplier par $\frac{2}{\pi}$.

La valeur de la force électromotrice est, comme on le voit, extrêmement considérable; j'ajouterai que c'est un caractère commun à la plupart des machines à courants alternatifs : les machines à courants continus n'ont qu'une force électromotrice beaucoup plus faible. Ainsi s'explique ce fait remarquable que, tandis que les premières se prêtent à la division de la lumière électrique, les secondes ne peuvent guère admettre plus d'un foyer lumineux dans leur circuit.

Intensité moyenne et phase en fonction de la résistance et de la vitesse. — Les expériences ont été faites avec une intensité du courant de l'excitatrice égale à 10 ohms; cette intensité est notablement plus faible que celle qu'on emploie quand la machine marche dans les conditions normales; il était nécessaire de maintenir le courant de la machine *lumière* au-dessous d'une certaine valeur pour empêcher l'échauffement du circuit et éviter des complications inutiles dans l'expérience.

Le circuit extérieur était formé de câble rectiligne et de charbons disposés de manière à éviter les courants d'induction secondaires. On pouvait, en introduisant dans le circuit un nombre plus ou moins grand de charbons, faire varier la résistance totale, y compris celle de la machine, depuis 10 jusqu'à 100 ohms. Le circuit comprenait une résistance en charbon de $0^{\text{ohms}},774$, dont les extrémités communiquaient avec les deux cadrans de l'électromètre. Soit V la différence de potentiel mesurée; l'intensité moyenne est

$$I' = \frac{V}{0,774}.$$

Les pôles de la machine étant, par l'intermédiaire de l'interrupteur, en communication avec l'électromètre portatif, on mesure en même temps la valeur de y qui servira à déterminer la phase. On s'est assuré d'ailleurs, bien que ce soit évident *a priori*, que l'indication de l'électromètre à cadrans est exactement la même, que l'interrupteur fonctionne ou bien qu'il soit supprimé.

On exécutait une première série d'expériences en faisant croître la résistance, le contact étant au n° 0; puis on mettait le contact au n° 5 ou à tout autre, et l'on faisait une seconde série en faisant décroître progressivement la résistance.

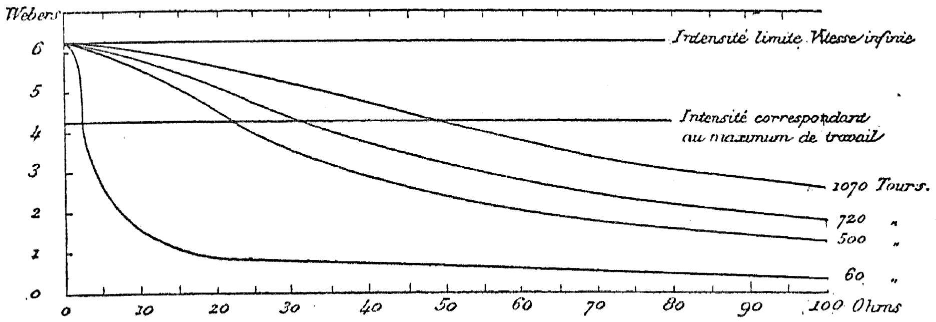
On s'assurait, par des mesures continues, de la constance de la vitesse; quant au courant inducteur, on en mesurait l'intensité au moyen d'un galvanomètre Thomson placé sur une dérivation convenable.

Pour chaque vitesse de la machine ont été faites plusieurs séries; les résultats, très concordants, ont été portés en ordonnées, les résistances totales étaient prises comme abscisses, et on a tracé les courbes correspondantes aux diverses séries; ces courbes ne se superposent pas rigoureusement, l'intensité du courant inducteur ou la vitesse n'étant pas toujours exactement la même, mais elles sont toujours parallèles et très voisines. On a pris comme courbe finale la courbe des valeurs moyennes des diverses séries ; c'est de cette courbe que sont déduites les valeurs expérimentales portées dans les Tableaux suivants.

Les expériences ont été faites à trois vitesses différentes de 500, 720 et 1070 tours par minute. La vitesse normale de la machine est de 720 tours.

Les courbes correspondant à chaque vitesse ayant été construites comme il vient d'être dit, j'ai cherché une formule empirique qui pût les représenter. La loi de Ohm n'était pas admissible; la loi de Ohm modifiée par l'introduction d'une résistance fictive constante, comme le fait M. Jamin, ou d'une résistance fictive fonction de la vitesse, n'a pas mieux réussi. Après beaucoup de tâtonnements, j'ai trouvé que l'inten-

Fig. 4.



Intensité de l'excitatrice : $I = 10$ webers.

Intensités données par l'électromètre pour des vitesses de 500, 720 et 1070 tours.

sité moyenne se trouvait très exactement représentée par une expression de la forme

$$I = \frac{e}{(a^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}},$$

R étant la résistance totale du circuit, e et a deux constantes déterminées par deux valeurs prises sur la courbe. C'est de cette formule qu'ont été déduits les nombres compris dans la troisième colonne des Tableaux suivants. La première renferme les résistances allant de 10 à 100 ohms; la seconde, les intensités observées à l'électromètre; la quatrième, la différence, extrêmement petite, comme on le verra, entre ces nombres et ceux qu'on déduit de la formule; la cinquième colonne renferme les retards exprimés en degrés, tels que les a fournis l'expérience; la sixième donne la valeur de ces mêmes retards déduits de la formule théorique que je démontrerai plus loin.

$$V = 500.$$

$$T = 0,030, \qquad E_0 = 188,$$

$$\frac{2\pi}{T} = 209,4, \qquad \frac{E_0}{\sqrt{2}} = 133.$$

Valeurs prises sur la courbe :

$$R = 40, \qquad I = 2,90,$$
$$R' = 80, \qquad I' = 1,59.$$

Valeurs déduites :

$$e = 132, \quad a^2 = 475, \quad a = 21,8,$$

$$I = \frac{132}{(475 + R^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

R.	I. Observé.	I. Calculé.	Différence.	$2\pi\varphi$. Observé.	$2\pi\varphi$. Calculé.
				° ′	° ′
10..........	5,55	5,54	+0,01		65.20
20..........	4,50	4,56	−0,06		47.30
30..........	3,65	3,70	−0,05		36.10
40..........	2,90	2,90	0,00	28. 0	28.30
50..........	2,45	2,42	+0,03		23. 0
60..........	2,10	2,07	+0,03		19.50
70..........	1,80	1,80	0,00		17. 0
80..........	1,59	1,59	0,00	14.30	15.10
90..........	1,40	1,42	−0,02		13.30
100..........	1,27	1,31	−0,04		12.20

Travail maximum, 405; $U = \frac{21,8}{209,4} = 0,104.$

V = 720.

$$T = 0,0208, \qquad E_0 = 270,$$

$$\frac{2\pi}{T} = 302, \qquad \frac{E_0}{\sqrt{2}} = 190.$$

Valeurs prises sur la courbe :

$$R = 40, \qquad I = 3,74,$$

$$R' = 80, \qquad I' = 2,21.$$

Valeurs déduites :

$$e = 190, \quad a^2 = 986, \quad a = 31,4,$$

$$I = \frac{190}{(986 + R^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

R.	I. Observé.	I. Calculé.	Différence.	$2\pi\varphi$. Observé.	$2\pi\varphi$. Calculé.
				°	° ′
10..........	5,75	5,77	−0,02		72.20
20..........	5,10	5,10	0,00	57	57.30
30..........	4,40	4,37	+0,03		46.30
40..........	3,74	3,74	0,00	40	38. 0
50..........	3,25	3,22	+0,03		32.10
60..........	2,80	2,80	0,00		27.30
70..........	2,44	2,47	−0,03		34. 0
80..........	2,21	2,21	0,00	20	21.20
90..........	1,90	1,99	−0,09		19.20
100..........	1,75	1,86	−0,11		17.20

Travail maximum, 580; $U = \frac{31,4}{302} = 0,104.$

$$V = 1070.$$

$$T = 0,0138, \qquad E_0 = 405,$$

$$\frac{2\pi}{T} = 452,7, \qquad \frac{E_0}{\sqrt{2}} = 287.$$

Valeurs prises sur la courbe :

$$R = 40, \qquad I = 4,63,$$

$$R' = 80, \qquad I' = 3,10.$$

Valeurs déduites :

$$e = 287, \quad a^2 = 2254, \quad a = 47,4,$$

$$I = \frac{287}{(2254 + R^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

R.	I. Observé.	I. Calculé.	Différence.	$2\pi\varphi$. Observé.	$2\pi\varphi$. Calculé.
				°	° ′
10..........	5,83	5,91	−0,08		78. 5
20..........	5,52	5,57	−0,05		67.10
30..........	5,10	5,11	−0,01		57.40
40..........	4,63	4,63	0,00		49.50
50..........	4,20	4,16	+0,04	44	43.30
60..........	3,78	3,75	+0,03		38.20
70..........	3,41	3,37	+0,04		34. 0
80..........	3,10	3,10	0,00		30.30
90..........	2,78	2,84	−0,06		37.30
100..........	2,52	2,59	−0,07	25.30	25.10

Travail maximum, 856; $U = \frac{47,4}{452,7} = 0,104.$

La formule

$$(1) \qquad I = \frac{e}{(a^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}$$

donne lieu à plusieurs remarques intéressantes. On voit d'abord qu'elle tend à se confondre avec celle de Ohm quand la résistance augmente; elle s'en écarte au contraire considérablement quand la résistance devient faible; l'intensité, dans ce cas, augmente beaucoup moins vite qu'elle ne le ferait dans le cas d'une pile.

Le travail électrodynamique dépensé dans le circuit quand il ne s'y trouve que des résistances a pour expression

$$W = RI'^2,$$

I' étant l'intensité moyenne telle que la donne l'électromètre et qu'elle est représentée par la formule ci-dessus; on a donc

$$(2) \qquad W = \frac{Re^2}{(a^2 + R^2)}.$$

Cette expression passe par un maximum; on a, en effet,

$$\frac{dW}{dR} = \frac{e^2(a^2 + R^2) - 2e^2R^2}{(a^2 + R^2)^2} = \frac{e^2(a^2 - R^2)}{(a^2 + R^2)^2},$$

et l'on voit que le numérateur s'annule pour

$$(3) \qquad R = a.$$

La constante a est donc précisément *la valeur de la résistance totale pour laquelle le travail électrodynamique est maximum.* La valeur de ce maximum est

$$(4) \qquad W_m = \frac{e^2}{2a}.$$

La formule (2) peut s'écrire

$$W = \frac{\frac{e^2}{R}}{\frac{a^2}{R^2} + 1};$$

on voit qu'elle donne $W = 0$ pour $R = \infty$, c'est-à-dire quand la machine est ouverte. Quand au contraire elle est fermée par une résistance négligeable, et que la résistance du circuit se réduit à la résistance propre de la machine ρ, le travail a pour valeur

$$W = \frac{\rho e^2}{a^2 + \rho^2}. \tag{5}$$

On voit donc que la machine ouverte ne consomme aucun travail [1]; si on la ferme par une résistance très faible, le travail prend la valeur donnée par la formule (5), il va en augmentant jusqu'à ce que la résistance totale soit devenue égale à a, puis, à partir de ce moment, il va en décroissant de nouveau jusqu'à zéro.

Si l'on compare entre elles les valeurs de a correspondant aux vitesses 500, 720 et 1070, on reconnaît que ces valeurs ont entre elles une relation très simple; elles sont proportionnelles à la vitesse ou, ce qui revient au même, en raison inverse de la période T. Dans ces trois cas, le produit de a par la durée T de la période correspondante, divisé par 2π, a la même valeur 0,104. Ce nombre est désigné par U dans les Tableaux; nous verrons plus loin quelle est sa signification physique.

Si l'on compare de même les valeurs de la constante e, on reconnaît qu'elle varie aussi proportionnellement à la vitesse ou en raison inverse de la période; mais elle présente de plus cette circonstance remarquable qu'elle est précisément le quotient par $\sqrt{2}$ de la force électro-motrice maxima telle qu'on la détermine directement en circuit ouvert au moyen de l'électromètre. J'ai placé en tête de chaque Tableau cette valeur E_0 telle que la donne l'expérience directe et son quotient par $\sqrt{2}$, pour que le lecteur puisse faire immédiatement la comparaison.

La simplicité de la formule, son accord si remarquable avec l'expérience, enfin la signification si nette des constantes et l'absence de tout coefficient de proportionnalité m'ont fait penser que je me trouvais en présence, non pas seulement d'une formule empirique, mais de l'ex-

---

(1) Il n'en serait pas de même si le système mobile dans le champ magnétique présentait des masses métalliques d'une certaine étendue, et en particulier des pièces de fer doux.

pression même de la loi des phénomènes. J'ai été aussi conduit à examiner la question au point de vue théorique, avec l'espoir de revenir à la formule par une voie opposée à celle qui m'y avait conduit.

SECONDE PARTIE.

THÉORIE.

Supposons la machine à l'état de mouvement uniforme. Soient, à un instant donné, E la valeur de la force électromotrice résultant du champ primitif, c'est-à-dire du champ tel qu'il existe quand le système induit est au repos, et i l'intensité du courant. Le travail électromagnétique pendant le temps dt est égal à $\mathrm{E}i\,dt$, et ce travail, si le courant ne produit aucun travail mécanique, chimique ou lumineux, doit se retrouver tout entier dans le travail calorifique du courant $i^2\mathrm{R}\,dt$ et dans le travail des forces électromotrices inverses qui naissent des réactions des diverses parties de la machine. Ces réactions sont celles du système induit sur les électro-aimants et celles du système induit sur lui-même. L'expérience montre que l'effet des premières peut être considéré comme négligeable; en effet, le courant qui excite les électro-aimants, mesuré à un galvanomètre d'une grande sensibilité, n'accuse de variations appréciables ni au moment où l'on ouvre ni au moment où l'on ferme le circuit induit. Tout se réduit donc à la réaction du système induit sur lui-même. Pour évaluer le travail qui, à un instant donné, correspond à cette réaction, rappelons-nous que la force électromotrice développée à chaque instant dans un circuit est égale à la variation du flux de force qui le traverse. Soit U le flux de force que comprend le système induit quand il est parcouru par un courant d'intensité égale à l'unité; U est ce qu'on appelle le coefficient de *self-*

induction; ici c'est une constante, puisque le circuit se déplace sans déformation. Quand l'intensité du courant est i, le flux de force a pour valeur Ui; si l'intensité varie de di, la variation du flux de force, et par suite la force électromotrice d'induction, est $U\,di$; le travail de cette force électromotrice pendant le temps dt a pour valeur

$$iU\,di.$$

L'équation qui exprime que *l'énergie s'est conservée* pendant le temps dt s'écrira

$$Ei\,dt = i^2 R\,dt + Ui\frac{di}{dt}\,dt$$

ou, en divisant par i et par dt,

$$E = iR + U\frac{di}{dt}.$$

Cette équation est précisément l'équation donnée par Helmholtz et dont il a déduit les lois des courants induits qui se produisent au moment de la fermeture et de l'ouverture du circuit d'une pile. Dans le cas d'une pile, la quantité E est une constante; ici, elle est une fonction du temps.

Cette fonction se trouvait déterminée par les expériences citées plus haut; c'est un de ses éléments qu'on détermine quand, l'induit étant relié à un galvanomètre, on donne brusquement au système induit un déplacement très petit et qu'on observe l'arc d'impulsion correspondant; comme je l'ai déjà fait remarquer, on obtient ainsi la *quantité totale d'électricité* due au déplacement; la quantité d'électricité due aux réactions a une somme nulle d'elle-même; la force électromotrice qu'on déduit de cette expérience est donc bien celle qui résulte du champ primitif, telle qu'on l'a introduite dans la formule.

L'expérience nous a montré que cette fonction E est de la forme

$$E = E_0 \sin 2\pi\frac{t}{T}.$$

En posant

$$\frac{R}{U} = a, \quad \frac{E}{U} = b \quad \text{et} \quad m = \frac{2\pi}{T},$$

l'équation (1) prend la forme connue de l'équation linéaire du premier ordre

$$\frac{di}{dt} + ai = b,$$

dont l'intégrale est

$$i = e^{-\int a\,dt}\left(\int b e^{\int a\,dt}\,dt + C\right).$$

Dans le cas actuel, a est une constante et $b = \frac{E_0 \sin mt}{U}$; on a donc

$$i = \frac{E_0}{U} e^{-at}\left(\int e^{at} \sin mt\,dt + C_1\right).$$

D'ailleurs

$$\int e^{at} \sin mt\,dt = \frac{e^{at}(a \sin mt - m \cos mt)}{a^2 + m^2} = \frac{ae^{at}}{a^2 + m^2}\,\frac{\sin(mt - 2\pi\varphi)}{\cos 2\pi\varphi},$$

en posant

$$(2) \qquad \operatorname{tang} 2\pi\varphi = \frac{m}{a}.$$

On a donc enfin, pour l'intégrale de l'équation (1),

$$i = \frac{E_0}{U}\,\frac{a}{a^2 + m^2}\,\frac{\sin(mt - 2\pi\varphi)}{\cos 2\pi\varphi} + C_1 \frac{E_0}{U} e^{-at}.$$

Si nous choisissons l'origine du temps de manière que $i = 0$ pour $t = \varphi T$, la constante C_1 sera nulle et φT exprimera le temps qui s'écoule entre le moment où la force électromotrice E est nulle et celui où le courant change de signe. Sous cette condition, et en remarquant que

$$\cos 2\pi\varphi = \frac{a}{(a^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}},$$

l'équation devient

$$i = \frac{E_0}{U}\,\frac{\sin(mt - 2\pi\varphi)}{(a^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}},$$

ou, en remplaçant a et m par leurs valeurs,

$$(3) \qquad i = \frac{E_0}{\left(R^2 + \frac{4\pi^2 U^2}{T^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi\right).$$

La loi de l'intensité est donc celle du sinus. Quant à la phase qui est donnée par l'équation (2), sa valeur est

$$\tang 2\pi\varphi = \frac{m}{a} = \frac{2\pi}{T}\frac{U}{R};$$

elle est à la fois une fonction de R et de T.

Il suffit maintenant de se reporter aux formules de la page 148 pour reconnaître que l'intensité moyenne vraie a pour valeur

$$\text{(4)} \qquad I = \frac{\dfrac{2E_0}{\pi}}{\left(R^2 + \dfrac{4\pi^2 U^2}{T^2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

et l'intensité électrométrique

$$\text{(5)} \qquad I' = \frac{\dfrac{E_0}{\sqrt{2}}}{\left(R^2 + \dfrac{4\pi^2 U^2}{T^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

On retrouve ainsi la formule à laquelle l'expérience avait conduit.

L'expérience a donné trois choses : la force électromotrice due au champ primitif suit la loi du sinus; l'intensité à chaque instant suit également la loi du sinus, mais avec un changement de phase par rapport à la force électromotrice due au champ primitif; enfin l'intensité moyenne est représentée par une fonction de la forme $\frac{e}{(a^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}$, a et e étant des constantes proportionnelles à la vitesse. Ces trois choses ne sont pas *a priori* des conséquences les unes des autres; elles ne le deviennent que par les hypothèses qui ont conduit à l'équation (1), savoir qu'il n'y a de réactions que celles du système induit sur lui-même et qu'à ces réactions correspond un travail représenté à chaque instant par $Ui\frac{di}{dt}dt$; l'exactitude rigoureuse de ces hypothèses se trouve donc démontrée.

La connaissance complète de la signification des constantes va nous permettre une discussion plus approfondie des propriétés de la machine.

Examinons d'abord ce qui est relatif à la phase. L'équation

$$\operatorname{tang} 2\pi\varphi = \frac{2\pi U}{TR}$$

montre que le déplacement du zéro augmente pour une vitesse donnée quand la résistance R diminue et pour une résistance donnée quand la vitesse augmente. On voit qu'il est nul quand le circuit présente une résistance infinie ou qu'il est ouvert, qu'il est au contraire maximum pour une vitesse infinie; la valeur de la phase est alors $\frac{1}{4}$, quelle que soit la résistance. Pour chaque vitesse, le retard présente un maximum qui est atteint quand, la résistance extérieure étant négligeable, la résistance totale se réduit à la résistance propre de la machine que nous représenterons par ρ; la phase est alors donnée par l'équation

$$\operatorname{tang} 2\pi\varphi = \frac{2\pi U}{T\rho};$$

elle est toujours inférieure à $\frac{1}{4}$, bien qu'elle s'en approche indéfiniment à mesure que la vitesse augmente; le déplacement ne peut donc jamais surpasser ni même atteindre la moitié de l'intervalle qui sépare, dans l'inducteur, deux pôles consécutifs de signes contraires.

Nous avons vu que le travail électrodynamique de la machine est maximum quand

$$R = a = \frac{2\pi}{T} U; \tag{6}$$

dans ces conditions, l'équation de la phase donne

$$\operatorname{tang} 2\pi\varphi = 1,$$

c'est-à-dire

$$2\pi\varphi = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{1}{8},$$

et le déplacement est égal au quart de l'intervalle qui sépare les deux pôles consécutifs.

La théorie et l'expérience prouvent que la valeur maximum de la force électromotrice E_0 pendant le cours d'une période est proportionnelle à la vitesse. Si l'on représente par e_0 sa valeur quand la machine fait un tour par seconde et s'il y a n périodes par tour, on peut poser

$$(6) \qquad E_0 = \frac{e_0}{nT}.$$

Cette valeur, portée dans la formule de l'intensité moyenne vraie, lui donne la forme

$$(7) \qquad I = \frac{2e_0}{n\pi(R^2T^2 + 4\pi^2U^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

On voit d'abord que l'intensité ne peut pas augmenter indéfiniment quand on fait croître indéfiniment la vitesse, mais qu'elle tend vers une limite

$$I_0 = \frac{e_0}{n\pi^2 U},$$

ou

$$(8) \qquad I'_0 = \frac{e_0}{2\sqrt{2}\,n\pi U}$$

s'il s'agit de l'intensité électrométrique. Ainsi, avec notre machine, dans laquelle $U = 0{,}104$ [1], l'intensité du courant excitateur étant de 10 webers, et, par suite, la force électromotrice e_0 de 22,56 volts, cette limite est égale à $6^{\text{web}},1$; comme elle est indépendante de la résistance, on voit que les courbes des intensités en fonction de la résistance ont pour limite, quand on fait croître la vitesse, une parallèle à l'axe des résistances correspondant à l'ordonnée 6,1 (*fig.* 3).

Ou mieux encore, supposons qu'on ait construit en coordonnées rectangulaires la surface dont les différents points représentent, pour une intensité donnée du champ, les valeurs de I en fonction des valeurs de R et de T prises comme variables indépendantes; cette surface du sixième degré coupe les deux plans des xz et des yz suivant deux droites parallèles aux axes des x et des y et situées à une distance $I = \frac{e_0}{n\pi^2 U}$.

A partir de ces deux lignes, la surface s'abaisse d'une manière continue, la ligne de plus grande pente étant l'intersection qu'elle donne avec le plan R = T, bissecteur de deux plans coordonnés.

(1) Ou, en unités absolues (C.G.S), $104 . 10^6$.

Toute section par un plan horizontal est une hyperbole équilatère correspondant à l'équation

$$RT = \text{const.}$$

On peut donc toujours, quelle que soit la résistance du circuit, obtenir une intensité au-dessous du maximum, en donnant à la machine une vitesse proportionnelle à la résistance.

En particulier, si la machine fonctionne dans les conditions du maximum de travail, nous avons vu que

$$RT = 2\pi U;$$

l'intensité qui correspond à ce maximum a donc une *valeur constante*. Cette valeur est

$$I_m = \frac{e_0}{n\sqrt{2\pi^2 U}}, \quad I'_m = \frac{e_0}{4n\pi U},$$

et donne, pour le travail maximum,

$$W_m = \frac{e_0^2}{8n^2\pi U}\,\frac{1}{T}.$$

On voit qu'elle est égale au quotient par $\sqrt{2}$ du maximum absolu d'intensité. Avec le courant inducteur de 10 webers, cette valeur est $4^{\text{web}},31$ et le travail maximum est de

$$\frac{12,2}{T} \text{ masse-kilogrammètres, ou } \frac{12,2}{9,8.T} \text{ kilogrammètres}$$

par seconde.

Ce résultat est extrêmement intéressant pour la pratique.

Il est évidemment avantageux de faire travailler la machine dans les conditions du maximum. Supposons qu'on veuille obtenir dans ces conditions un courant d'intensité I_0 dans un circuit de résistance totale R_0.

On posera

$$I_0 = \frac{e_0}{n\sqrt{2\pi^2 U}},$$

et cette équation donnera la valeur de e_0. On déduira de la Table (p. 153) la valeur du courant de l'excitatrice nécessaire pour cette valeur. D'autre part, l'équation

$$RT = 2\pi U$$

fera connaître la vitesse à donner à la machine.

Outre l'intensité du champ et la vitesse, qui sont deux éléments pour ainsi dire extérieurs à la machine, il en est trois autres qui tiennent à sa constitution même : la résistance intérieure, la force électromotrice et le coefficient de *self-induction*.

J'ai déjà fait remarquer qu'un des caractères essentiels de ces machines est la valeur considérable de leur force électromotrice ; en faisant tourner la machine qui a fait l'objet de cette étude à une vitesse de 1500 tours par minute et avec une intensité de 30 webers pour le courant inducteur, on peut avoir pour la force électromotrice la valeur maximum de 1500 volts et une valeur moyenne de 1000 volts, et par des modifications très simples de la machine ces valeurs pourraient être notablement dépassées.

Relativement aux deux autres constantes, considérons deux cas extrêmes, ceux où chacun des termes du dénominateur est négligeable devant l'autre. Si le terme $2\pi U$ est négligeable devant RT, la machine suit à très peu près la loi d'Ohm; elle se comporte, pour tous les phénomènes qui ne dépendent pas du sens du courant, comme une pile dont on pourrait à volonté faire varier la force électromotrice, en faisant varier l'intensité du champ et la vitesse, sans changer en même temps la résistance intérieure. C'est l'état vers lequel tend la machine quand la résistance extérieure augmente indéfiniment.

Supposons, au contraire, le terme RT négligeable devant $2\pi U$; dans certaines limites, l'intensité sera peu influencée par les variations de la résistance R. Ce cas est celui dont se rapprochent les machines dans les conditions où elles fonctionnent ordinairement. La vitesse est toujours très grande et la résistance extérieure médiocre. Dans ces conditions, la résistance intérieure de la machine, en tant que résistance, n'a qu'une influence tout à fait secondaire.

Les deux constantes e_0 et U sont les véritables *caractéristiques* de cette classe de machines. En général, on ne peut modifier l'une sans modifier en même temps l'autre; mais on peut, pour ainsi dire, modifier à volonté le rapport de ces deux quantités. Quand le terme $2\pi U$ est prépondérant dans le dénominateur, les variations de U ont une influence considérable sur la valeur de l'intensité.

La formule (7) permet d'ailleurs, dans chaque cas particulier, de répondre complètement aux diverses questions que soulève la pratique. S'agit-il, par exemple, du groupement des bobines induites en série ou en éléments multiples? On remarquera que le groupement en éléments multiples ne modifie que la force électromotrice et la résistance intérieure, sans changer le coefficient de *self-induction*. Cette disposition sera rarement avantageuse, puisque, en général, comme cela ressort des remarques précédentes, on perdra à la fois en force électromotrice et en intensité.

Si, sans rien changer à la forme générale de la machine, on veut savoir quel est, pour un emploi déterminé, le diamètre le plus avantageux à donner au fil qui doit garnir les bobines, il suffira de remarquer que, si l'on fait abstraction de l'épaisseur de la couche isolante, la résistance intérieure varie en raison inverse de la quatrième puissance du diamètre, que la force électromotrice varie comme la racine carrée de la résistance et le coefficient de *self-induction* comme la résistance ellemême. Il s'agit ici de bobines induites n'ayant pas de noyaux de fer doux.

La présence du fer doux dans les bobines influe à la fois sur la force électromotrice et le coefficient de *self-induction;* elle peut être avantageuse ou nuisible suivant la manière dont elle modifie les deux constantes. C'est un point sur lequel je me propose de revenir dans un prochain Mémoire, ainsi que certaines particularités que présentent les machines à noyaux de fer doux [1].

[1] Les expériences qui font l'objet de ce Mémoire ont été faites au laboratoire de la Société générale d'électricité.

NOTE A.

MESURE DU COEFFICIENT DE SELF-INDUCTION D'UNE BOBINE.

Désignons par R la résistance et par U le coefficient de *self-induction* de la bobine. On la placera dans le circuit d'un courant satisfaisant à la relation

$$i = \mathrm{A} \sin 2\pi \frac{t}{\mathrm{T}}.$$

Ce courant sera, par exemple, celui de la machine étudiée plus haut, ou encore celui qu'on obtiendrait en faisant tourner d'un mouvement uniforme, dans un champ magnétique uniforme et autour d'un axe perpendiculaire à la direction du champ, une bobine quelconque.

Un électromètre sera mis en communication successivement avec les deux extrémités A et B de la bobine et avec les extrémités A′ et B′ d'une résistance rectiligne R′. Soient V_1 et V'_1 les chutes moyennes de potentiel dans les deux cas et d et d' les déviations de l'aiguille qui leur correspondent; on a évidemment

$$\frac{d'}{\mathrm{K}} = \mathrm{V}'^2_1 = \frac{\mathrm{A}^2 \mathrm{R}'^2}{2};$$

$$\frac{d}{k} = \mathrm{V}_1^2 = \frac{2}{\mathrm{T}} \int_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}} \left(i\mathrm{R} + \mathrm{U} \frac{di}{dt} \right)^2 dt = \frac{\mathrm{A}^2}{2} \left(\mathrm{R}^2 + \frac{4\pi^2 \mathrm{U}^2}{\mathrm{T}^2} \right);$$

on en déduit

$$\frac{\mathrm{R}^2 + \dfrac{4\pi^2 \mathrm{U}^2}{\mathrm{T}^2}}{\mathrm{R}'^2} = \frac{d}{d'},$$

et par suite

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{T}}{2\pi} \left(\mathrm{R}'^2 \frac{d}{d'} - \mathrm{R}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'expression ne dépendant que de la durée de la période, des résistances R et R′ et du *rapport* des déviations de l'électromètre, le coefficient U sera obtenu en valeur absolue et pourra l'être avec une grande précision. La méthode s'applique évidemment à une bobine de forme quelconque.

NOTE B.

LOI DES COURANTS DÉRIVÉS DANS LE CAS DES COURANTS ALTERNATIFS.

Supposons qu'entre deux points A et B un courant, dont l'intensité à chaque instant est représentée par la formule

$$(1) \qquad i_0 = \mathrm{A} \sin mt = \mathrm{A} \sin 2\pi \frac{t}{\mathrm{T}},$$

se partage entre deux bobines, dont nous représenterons les résistances par r et r' et les coefficients de *self-induction* par u et u'. A chaque instant les lois de Kirchhoff sont applicables et donnent, en appelant i et i' les intensités des deux courants dérivés,

$$i_0 = i + i',$$

$$ir + u\frac{di}{dt} = i'r' + u'\frac{di'}{dt};$$

on a, par suite,

$$\frac{di}{dt} + \frac{r+r'}{u+u'}\, i = \frac{1}{u+u'}\left(i_0 r' + u'\frac{di_0}{dt}\right),$$

ou, en tenant compte de l'équation (1) et posant $a = \dfrac{r+r'}{u+u'}$,

$$\frac{di}{dt} + ai = \frac{\mathrm{A}}{u+u'}(r' \sin mt + mu' \cos mt).$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$i = e^{-at}\left[\frac{A}{u+u'}\left(r'\int e^{at}\sin mt\,dt + mu'\int e^{at}\cos mt\,dt\right) + c\right],$$

ou, en posant

$$\operatorname{tang} 2\pi\varphi = \frac{m(u+u')}{r+r'},$$

$$\operatorname{tang} 2\pi\alpha = \frac{mu'}{r'},$$

$$i = A\left[\frac{r'^2 + \dfrac{4\pi^2 u'^2}{T^2}}{(r+r')^2 + \dfrac{4\pi^2(u+u')^2}{T^2}}\right]^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi + \alpha\right) + C_1 e^{-at}.$$

Une fois le régime établi, le terme $C_1 e^{-at}$ devient négligeable et l'intensité moyenne a pour valeur, dans la branche de résistance r,

$$I = \frac{A}{\sqrt{2}}\left[\frac{r'^2T^2 + 4\pi^2 u'^2}{(r+r')^2T^2 + 4\pi^2(u+u')^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

et, dans la branche de résistance r',

$$I' = \frac{A}{\sqrt{2}}\left[\frac{r^2T^2 + 4\pi^2 u^2}{(r+r')^2T^2 + 4\pi^2(u+u')^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Le rapport des deux intensités, qui dans le cas de résistances rectilignes serait

$$\frac{I}{I'} = \frac{r'}{r},$$

est ici

$$\frac{I}{I'} = \left(\frac{r'^2T^2 + 4\pi^2 u'^2}{r^2T^2 + 4\pi^2 u^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

NOTE C.

SUR L'EMPLOI DE L'ÉLECTRODYNAMOMÈTRE DANS LE CAS DES COURANTS ALTERNATIFS.

Considérons une source d'électricité satisfaisant à la relation

$$E = E_0 \sin mt$$

et donnant, dans une résistance R rectiligne, des courants alternatifs.

L'intensité moyenne sera

$$I_0 = \frac{E_0}{R\sqrt{2}}.$$

Celle que donnera un électrodynamomètre de résistance r compris dans le circuit sera

$$I' = \frac{E_0}{\sqrt{2}\left(R^2 + \frac{4\pi^2 U^2}{T^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{I_0}{\left(1 + \frac{4\pi^2 U^2}{T^2 R^2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

U étant le coefficient de *self-induction* de l'instrument pour la position qu'il prend sous l'influence du courant.

Supposons maintenant l'instrument placé en dérivation entre deux points A et B séparés par une résistance rectiligne r'; il suffit, dans les formules de la Note précédente, de faire $u' = 0$ et $u = U$. L'intensité du courant qui traverse l'instrument est alors

$$I = I_0 \frac{r'}{\left[(r + r')^2 + \frac{4\pi^2 U^2}{T^2}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

et l'on voit que, pour avoir l'intensité dans le circuit principal, il faut multiplier l'intensité observée I, non par le facteur ordinaire $\frac{r+r'}{r'}$, mais par le facteur

$$\frac{\left[(r+r')^2+\frac{4\pi^2 U^2}{T^2}\right]^{\frac{1}{2}}}{r'}.$$

Ces deux facteurs peuvent avoir des valeurs très différentes, même quand r est très grand, puisque pour une bobine de forme donnée, et toutes choses égales d'ailleurs, U croît proportionnellement à r. De même que dans le cas précédent, U n'est plus, à proprement parler, une constante de l'instrument, mais une quantité qui est une fonction de la déviation.

L'électrodynamomètre ne peut donc donner d'une manière directe l'intensité moyenne d'un courant alternatif, ni quand il est placé en dérivation, ni même quand il est mis sur le circuit principal.