ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

DUPORT

Sur un mode particulier de représentation des imaginaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 9 (1880), p. 301-362
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1880_2_9__301_0>

SUR UN MODE PARTICULIER

DE

REPRÉSENTATION DES IMAGINAIRES,

PAR M. DUPORT,

ÉLÈVE A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

On appelle *quantité imaginaire* une expression de la forme $u+v\sqrt{-1}$, dans laquelle u et v sont des quantités réelles, positives ou négatives. Pour simplifier l'écriture, nous représenterons le symbole $\sqrt{-1}$ par la lettre i.

Supposons que la position d'un point dans un plan soit rapportée à deux axes fixes; il arrive souvent que l'on est conduit pour les coordonnées d'un point à des quantités imaginaires : on dit alors qu'elles déterminent un point imaginaire. Le but que nous nous proposons dans cette étude est de représenter géométriquement un point imaginaire d'un plan, c'est-à-dire l'ensemble de deux quantités imaginaires.

En effet, la Géométrie, envisagée à un certain point de vue, peut être considérée comme ayant pour objet la représentation des symboles algébriques, symboles abstraits, d'une manière visible et pour ainsi dire palpable. C'est ainsi que la géométrie de la ligne droite représente la variation d'une quantité réelle, positive ou négative, que la géométrie du plan représente l'ensemble des variations dépendantes ou indépendantes de deux quantités réelles, que la géométrie de l'espace représente la variation de trois quantités réelles liées par deux, une ou aucune relation, et que de nos jours la représentation de la variation de quatre quantités réelles a conduit à une géométrie nouvelle, la géométrie des complexes et des congruences. Aussi, quand on a été conduit à introduire en Algèbre les quantités imaginaires, on s'est de suite proposé de les représenter géométriquement, et, comme une quantité imaginaire dépend de deux paramètres arbitraires, il fallait nécessairement, pour la représenter, un élément géométrique dépendant aussi de deux paramètres arbitraires. L'un de ces modes de représentation consiste, par exemple, à regarder u et v, dans l'expression $u+v\sqrt{-1}$, comme les coordonnées cartésiennes d'un point.

Si maintenant nous nous proposons de représenter l'ensemble de deux quantités imaginaires, il faut chercher un élément géométrique dépendant de quatre paramètres arbitraires, et l'on voit que les droites de l'espace s'offrent tout naturellement. Il ne nous reste plus qu'à définir la droite qui représentera un point imaginaire.

A cet effet, menons par le point imaginaire considéré les deux droites qui ont pour coefficients angulaires $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$. Soient A et A′ les points réels de ces deux droites. Au point A, élevons une perpendiculaire jusqu'à la rencontre en B du plan $z=-1$; au point A′, élevons une perpendiculaire jusqu'à la rencontre en B′ du plan $z=+1$. Nous regarderons la droite BB′ comme représentant le point imaginaire.

On voit que cette définition, reposant sur des constructions géométriques, est indépendante du choix des axes de coordonnées.

Cherchons maintenant les équations de la droite BB′; soit un point imaginaire ayant pour coordonnées $\alpha+p\sqrt{-1}$ et $\beta+q\sqrt{-1}$. Les équations des droites qui passent par ce point et qui ont pour coefficients angulaires $\pm\sqrt{-1}$ sont

$$y-(\beta+q\sqrt{-1})=\sqrt{-1}\,[x-(\alpha+p\sqrt{-1})],$$
$$y-(\beta+q\sqrt{-1})=-\sqrt{-1}\,[x-(\alpha+p\sqrt{-1})].$$

Les points réels de ces droites sont $A(\alpha-q, \beta+p)$ et $A'(\alpha+q, \beta-p)$. On voit alors que la droite BB′ a pour équations

$$x=\alpha+qz,$$
$$y=\beta-pz,$$

car on vérifie que les valeurs de x et de y pour $z=\mp 1$ sont précisément les coordonnées des points A et A′. Cette droite coupe le plan des xy au point qui a pour coordonnées les parties réelles α et β des coordonnées du point imaginaire.

On voit aussi que deux points conjugués seront représentés par deux droites symétriques par rapport au plan des xy et qu'un point réel est représenté par une perpendiculaire au plan des xy.

Maintenant que notre mode de représentation est entièrement défini, nous allons exposer le plan de cette étude. Nous l'avons divisée en deux Parties.

Dans la première Partie, nous nous occupons tout d'abord de la représentation de la ligne droite et des différents éléments géométriques, tels que la distance de deux points, l'angle de deux droites, etc.; puis, une fois que nous aurons en main ces premiers et indispensables instruments, nous pourrons étudier d'une manière générale la représentation d'une courbe.

La seconde Partie aura pour objet l'étude plus spéciale de la représentation des coniques et de quelques autres courbes.

PREMIÈRE PARTIE.

Représentation de la ligne droite.

L'équation la plus générale d'une droite est

$$(A + iB)x + (C + iD)y + U + iV = 0.$$

Exprimons que le point $(\alpha + ip, \beta + iq)$ appartient à cette droite; on a

$$(A + iB)(\alpha + ip) + (C + iD)(\beta + iq) + U + iV = 0,$$

ce qui donne les deux relations

$$A\alpha + C\beta - Bp - Dq + U = 0,$$
$$B\alpha + D\beta + Ap + Cq + V = 0.$$

Si l'on regarde maintenant α, β, p, q comme les paramètres de la droite

$$(x = \alpha + qz,\ y = \beta - pz),$$

on voit que toutes les droites de l'espace représentant les points de la droite imaginaire considérée appartiennent à une congruence linéaire. Or on sait que toutes les droites appartenant à une congruence linéaire rencontrent deux droites fixes appelées *directrices*, et, si l'on cherche les droites appartenant à la congruence et passant par un point d'une directrice, on sait qu'il y en a une infinité situées dans le plan passant par le point considéré et l'autre directrice. Si donc (x, y, z) est un point d'une directrice, les quatre équations

$$\begin{gathered} A\alpha + C\beta - Bp - Dq + U = 0, \\ B\alpha + D\beta + Ap + Cq + V = 0, \\ x = \alpha + qz, \\ y = \beta - pz \end{gathered}$$

sont indéterminées en α, β, p, q. Remplaçons dans les deux premières α et β par leurs valeurs tirées des deux autres. On aura, pour déterminer p et q, les deux équations

$$\begin{gathered} Ax + Cy + U + p(Cz - B) - q(Az + D) = 0, \\ Bx + Dy + V + p(Dz + A) - q(Bz - C) = 0, \end{gathered}$$

qui devront donner pour p et q des valeurs indéterminées. Elles devront donc avoir leurs coefficients proportionnels, et les directrices seront données par les équations

$$\frac{Ax + Cy + U}{Bx + Dy + V} = \frac{Cz - B}{Dz + A} = \frac{Az + D}{Bz - C}.$$

Les deux derniers rapports montrent que les deux directrices sont parallèles au plan des xy. Leurs distances à ce plan sont données par l'équation

$$(BC - AD)z^2 - (A^2 + B^2 + C^2 + D^2)z + (BC - AD) = 0.$$

On vérifie sans peine que cette équation a toujours ses racines réelles; leur produit est égal à $+1$.

Soit λ la valeur commune des trois rapports. Les deux derniers donnent

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l}(C - D\lambda)z - (B + A\lambda) = 0,\\ (A - B\lambda)z + (D + C\lambda) = 0.\end{array}\right.$$

La projection horizontale d'une quelconque des directrices sera donc

$$(A - B\lambda)x + (C - D\lambda)y + U - V\lambda = 0,$$

où l'on doit remplacer λ par une des racines de l'équation qu'on obtient en éliminant z entre les équations (1).

Cherchons leurs directions; pour cela, posons

$$-\frac{A - B\lambda}{C - D\lambda} = m;$$

on en déduit

$$\lambda = \frac{A + Cm}{B + Dm}.$$

En portant cette valeur de λ dans les équations (1), elles deviennent

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l}(BC - AD)z - [(A^2 + B^2) + m(BD + AC)] = 0,\\ (BC - AD)mz - [(C^2 + D^2)m + (BD + AC)] = 0.\end{array}\right.$$

En éliminant z, on arrive, pour déterminer m, à l'équation

$$m^2(BD + AC) + m(A^2 + B^2 - C^2 - D^2) - (BD + AC) = 0,$$

qui a ses deux racines réelles; leur produit est de plus égal à -1. Donc les deux directrices sont toujours réelles et rectangulaires.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Tous les points d'une droite sont représentés par les droites de l'espace rencontrant deux directrices, toujours réelles, rectangulaires, parallèles au plan des xy et situées à des distances de ce plan dont le produit est $+1$.

Introduisons le coefficient angulaire de la droite donnée; posons

$$-\frac{A + iB}{C + iD} = r + is,$$

on en déduit

$$A^2+B^2=(C^2+D^2)(r^2+s^2),$$
$$AC+BD=-(C^2+D^2)r,$$
$$BC-AD=-(C^2+D^2)s.$$

Les formules (2) deviennent alors

$$(3)\qquad \begin{cases} sz+r^2+s^2-mr=0, \\ smz+m-r=0. \end{cases}$$

Les équations qui donnent les valeurs de z et de m sont

$$sz^2+(1+r^2+s^2)z+s=0,$$
$$rm^2-(r^2+s^2-1)m-r=0.$$

Faisons $s=0$. On a une droite parallèle à une droite réelle. L'une des valeurs de z est nulle, l'autre est infinie, et les deux valeurs de m sont r et $-\frac{1}{r}$.

Soient

$$Ax+By+U+iV=0$$

une pareille droite, et $(\alpha+ip, \beta+iq)$ un point appartenant à cette droite; on a

$$A\alpha+B\beta+U=0,$$
$$Ap+Bq+V=0.$$

On voit qu'alors les droites qui représentent les points imaginaires de la droite rencontrent toutes la droite

$$Ax+By+U=0$$

(c'est l'une des directrices) et sont parallèles au plan

$$-Ay+Bx+Vz=0,$$

dont la trace sur le plan des xy est perpendiculaire à la directrice que l'on vient de trouver.

Si l'on fait $r=0$, on a une droite dont le coefficient angulaire est de la forme is. Les deux valeurs de z sont alors $-s$ et $-\frac{1}{s}$, et les valeurs correspondantes de m sont 0 et ∞. Donc les directrices correspondantes sont parallèles aux axes des x et des y. On voit que l'on peut toujours amener une droite à avoir son coefficient angulaire de la forme is par un choix d'axes convenable.

Si, en particulier, on fait $s = \pm 1$, on voit que l'on a $z = \mp 1$ et que les valeurs de m sont indéterminées. Tous les points d'une droite qui a pour coefficient angulaire $\pm\sqrt{-1}$ sont donc représentés par des droites passant par un même point du plan $z = \mp 1$.

De ce qui précède, on peut encore déduire que deux droites parallèles ont leurs directrices parallèles et situées à la même distance du plan des xy, que deux droites perpendiculaires ont leurs directrices dans les mêmes plans parallèles au plan des xy et respectivement perpendiculaires, enfin que deux droites conjuguées ont leurs directrices symétriques par rapport au plan des xy.

Intersection de deux droites.

Il s'agit de trouver la droite représentant le point d'intersection de deux droites imaginaires données par leurs directrices; on a donc à mener une droite rencontrant quatre droites parallèles à un même plan. Pour cela, on mènera deux droites rencontrant trois des directrices; ces deux droites couperont le plan horizontal passant par la quatrième directrice en deux points. On cherchera le point d'intersection de la droite qui les joint avec la quatrième directrice. Si par ce point on mène une droite rencontrant deux des autres directrices, elle rencontrera la troisième et représentera le point cherché.

Ligne droite passant par deux points.

Soient O un cercle quelconque tracé dans le plan des xy, et A un point de sa circonférence. Considérons les droites parallèles au plan des xy et rencontrant les deux droites qui représentent les deux points donnés, et spécialement les couples de ces droites telles que le produit de leurs distances au plan des xy soit $+1$. Menons-leur des parallèles par le point A. Soit (AB, AC) un couple. Les droites AB, AC forment une involution; donc la corde BC passe par un point fixe, qu'on déterminera au moyen de deux couples arbitraires. Soit I ce point fixe;

joignons-le au centre O du cercle, et soient D et D′ les points où la droite OI rencontre le cercle. Les deux droites AD, AD′ seront parallèles aux directrices cherchées. Il ne reste plus alors qu'à mener deux droites de directions données rencontrant deux droites fixes.

Quand les deux droites de l'espace représentant les deux points donnés se rencontrent, l'une des directrices passe par leur point de rencontre. Soit z la distance de ce point au plan des xy; l'autre directrice est alors située dans le plan parallèle au plan des xy à la distance $\frac{1}{z}$, et, comme elle rencontre les deux droites données, elle est déterminée; dès lors, l'autre directrice, étant perpendiculaire à la première et passant par le point de rencontre des deux droites, est aussi déterminée.

Quand le plan parallèle aux deux droites coupe le plan des xy suivant une perpendiculaire à la droite AA′, qui joint les points de rencontre des droites avec le plan des xy, on sait que la droite cherchée est parallèle à une droite réelle et qu'alors les directrices cherchées sont l'une la droite AA′, l'autre à l'infini dans le plan parallèle aux deux droites.

Angle de deux droites.

Cherchons d'abord l'angle d'une droite avec l'axe des x; pour cela, posons

$$r + is = \lambda$$

et reprenons les formules (3)

$$sz + r^2 + s^2 - mr = 0,$$

$$smz + m - r = 0.$$

Éliminons r et s entre ces formules et l'équation précédente; il vient définitivement

$$\lambda = \frac{m - iz}{1 + miz}; \tag{3'}$$

z et m sont deux valeurs se correspondant, c'est-à-dire que la directrice qui a pour coefficient angulaire m est à la distance z du plan des xy.

Posons $\lambda = \operatorname{tang}(\alpha + i\beta)$; $\alpha + i\beta$ sera l'angle de la droite donnée avec l'axe des x. On a

$$\operatorname{tang}(\alpha + i\beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha - i \operatorname{tangh}\beta}{1 + i \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tangh}\beta} = \frac{m - iz}{1 + miz};$$

on a donc

$$(4) \qquad \begin{cases} m = \operatorname{tang}\alpha, & \text{ou bien} \quad m = -\dfrac{1}{\operatorname{tang}\alpha}, \\ z = \operatorname{tangh}\beta & \quad » \qquad z = \dfrac{1}{\operatorname{tangh}\beta}. \end{cases}$$

Remarquons que $\operatorname{tangh}\beta$ est < 1. Donc ces deux groupes de formules montrent que la partie réelle de l'angle d'une droite avec l'axe des x est l'angle de la directrice la plus rapprochée du plan des xy avec l'axe des x, et que la partie imaginaire est représentée par le segment d'hyperbole équilatère qui a pour tangente hyperbolique z.

Désormais, nous représenterons une droite en direction par le coefficient angulaire de sa directrice la plus rapprochée du plan des xy et la distance de cette directrice au plan des xy, soit (m, h).

On passe de ce qui précède sans difficulté à l'angle de deux droites. La partie réelle est l'angle des deux directrices les plus rapprochées du plan des xy, et la partie imaginaire est le segment d'hyperbole équilatère différence des segments qui ont pour tangentes hyperboliques les distances de ces directrices au plan des xy.

Soient donc les deux droites (m, h), (m', h'), et soit $u + iv$ leur angle. On aura

$$(5) \qquad \operatorname{tang} u = \frac{m - m'}{1 + mm'}, \quad \operatorname{tangh} v = \frac{h - h'}{1 - hh'}.$$

Bissectrices de deux droites.

Les droites cherchées auront évidemment leurs directrices parallèles aux bissectrices des directrices des droites données, et l'on trouve sans difficulté que les distances de ces directrices cherchées au plan des xy sont données par l'équation

$$(h + h')z^2 - 2(1 + hh')z + h + h' = 0,$$

où h et h' désignent les distances des directrices des droites données situées le plus près du plan des xy à ce plan. Le produit des deux racines de cette équation est $+1$. On vérifie donc sans peine que les deux bissectrices sont bien rectangulaires.

Distance de deux points.

Cherchons d'abord la distance d'un point à l'origine.

Soit un point représenté par la droite

$$(x = \alpha + qz,\ y = \beta - pz);$$

il s'agit de représenter le symbole

$$(\alpha + ip)^2 + (\beta + iq)^2.$$

Pour cela, menons la droite passant par l'origine et le point donné, et soient (x_1, y_1, z) et $\left(x_2, y_2, \frac{1}{z}\right)$ les points de l'espace où la droite

$$(x = \alpha + qz,\ y = \beta - pz)$$

rencontre les directrices de cette droite; on a la relation

$$xx_1 + yy_1 = 0,$$

et z est supposé < 1. On a donc

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} x_1 = \alpha + qz, & x_2 = \alpha + \dfrac{q}{z}, \\ y_1 = \beta - pz, & y_2 = \beta - \dfrac{p}{z}. \end{cases}$$

On en déduit les formules

$$\alpha = \frac{x_1 - x_2 z^2}{1 - z^2}, \quad p = -\frac{(y_2 - y_1) z}{1 - z^2},$$

$$\beta = \frac{y_1 - y_2 z^2}{1 - z^2}, \quad q = \frac{(x_2 - x_1) z}{1 - z^2}.$$

On en déduit l'expression de $(\alpha + ip)^2 + (\beta + iq)^2$ suivante :

$$\frac{x_1^2 + y_1^2 - z^2(x_2^2 + y_2^2) + 2iz(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{1 - z^2}.$$

D'ailleurs on a, à cause de la relation $xx_1 + yy_1 = 0$,

$$x_2 y_1 - x_1 y_2 = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)},$$

de sorte que l'expression précédente devient

$$\text{(II)} \qquad \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + iz\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}{\sqrt{1 - z^2}}\right)^2.$$

Supposons maintenant que nous voulions chercher la distance de deux points quelconques $(\alpha + ip, \beta + iq)$ et $(\alpha' + ip', \beta' + iq')$.

Il s'agit de représenter le symbole algébrique

$$[\alpha + ip - (\alpha' + ip')]^2 + [\beta + iq - (\beta' + iq')]^2,$$

que l'on peut écrire

$$[(\alpha - \alpha') + i(p - p')]^2 + [\beta - \beta' + i(q - q')]^2.$$

Soient (x_1, y_1, z), (x'_1, y'_1, z) les points où les droites de l'espace représentant les deux points donnés rencontrent une des directrices de la droite qui joint les deux points, et $\left(x_2, y_2, \frac{1}{z}\right)$, $\left(x'_2, y'_2, \frac{1}{z}\right)$ les points où elles rencontrent l'autre directrice; nous supposerons que z est < 1, et l'on a

$$(x_1 - x'_1)(x_2 - x'_2) + (y_1 - y'_1)(y_2 - y'_2) = 0.$$

On a donc les relations

$$x_1 = \alpha + qz, \quad y_1 = \beta - pz, \qquad x_2 = \alpha + \frac{q}{z}, \quad y_2 = \beta - \frac{p}{z},$$

$$x'_1 = \alpha' + q'z, \quad y'_1 = \beta' - p'z, \qquad x'_2 = \alpha' + \frac{q'}{z}, \quad y'_2 = \beta' - \frac{p'}{z};$$

on en déduit les suivantes :

$$x_1 - x'_1 = (\alpha - \alpha') + (q - q')z, \quad x_2 - x'_2 = \alpha - \alpha' + \frac{q - q'}{z},$$

$$y_1 - y'_1 = (\beta - \beta') - (p - p')z, \quad y_2 - y'_2 = \beta - \beta' - \frac{p - p'}{z}.$$

Si l'on compare ces formules aux formules précédentes (I), on voit que, pour avoir l'expression de la distance des deux points, il suffit de remplacer, dans la formule (II), x_1, y_1, x_2, y_2 par les binômes $x_1 - x'_1$, $y_1 - y'_1$, $x_2 - x'_2$, $y_2 - y'_2$, et l'on a finalement l'expression

$$\left[\frac{\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (y_1 - y'_1)^2} + iz\sqrt{(x_2 - x'_2)^2 + (y_2 - y'_2)^2}}{\sqrt{1 - z^2}}\right]^2.$$

On voit donc qu'en général, si l'on désigne par A et A' les points où les droites de l'espace représentant les deux points rencontrent la directrice, située à la hauteur z au-dessus du plan des xy, de la droite qui joint les deux points (z étant < 1), et par B, B' les points où ces droites rencontrent l'autre directrice, située par conséquent à la distance $\frac{1}{z}$ du plan des xy, la distance des deux points est exprimée par

$$(6) \qquad \frac{AA'}{\sqrt{1 - z^2}} + \frac{izBB'}{\sqrt{1 - z^2}} \quad \text{ou bien} \quad \frac{AA'}{\sqrt{1 - z^2}} + i\frac{BB'}{\sqrt{\left(\frac{1}{z}\right)^2 - 1}},$$

c'est-à-dire que la partie réelle est

$$d = \frac{AA'}{\sqrt{1 - z^2}}$$

et le coefficient de $\sqrt{-1}$,

$$d' = \frac{BB'}{\sqrt{\left(\frac{1}{z}\right)^2 - 1}}.$$

La partie réelle est donc comptée sur la directrice la plus rapprochée du plan des xy.

Dans le cas où la droite qui joint les deux points est parallèle à une droite réelle, la formule qui donne d' est indéterminée ; mais il est alors facile de la chercher directement.

Soient, en effet, deux points représentés par les droites

$$x = \alpha + qz, \quad y = \beta - pz,$$
$$x = \alpha' + q'z, \quad y = \beta' - p'z;$$

si la droite qui les joint est parallèle à une droite réelle, on a

$$\frac{p - p'}{\alpha - \alpha'} = \frac{q - q'}{\beta - \beta'}.$$

Soit λ la valeur commune de ces deux rapports; on a

$$p - p' = \lambda(\alpha - \alpha'),$$
$$q - q' = \lambda(\beta - \beta').$$

L'expression de la distance de deux points est alors

$$\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2}\,(1 + i\lambda)$$

ou bien

$$\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2} + i\sqrt{(p - p')^2 + (q - q')^2}.$$

Si donc on mène par l'origine deux droites parallèles aux droites représentant les deux points qui rencontrent en I et I' le plan $Z = 1$, on a, pour représenter le coefficient δ de $\sqrt{-1}$ dans l'expression de la distance des deux points,

$$\delta = \mathrm{II}'.$$

Remarquons encore que, comme tous les points d'une droite parallèle à une droite réelle sont représentés par des droites rencontrant une directrice fixe tracée dans le plan des xy et parallèle à un plan dont la trace sur le plan des xy est perpendiculaire à cette directrice, la droite II' sera la même, quels que soient les deux points pris sur la droite donnée; elle remplacera donc, au point de vue de l'expression de la distance, l'autre directrice qui est à l'infini.

Distance d'un point à une droite.

Soit A la droite qui représente le point imaginaire, et désignons par D et D' les directrices de la droite. Nous mènerons d'abord par le point une perpendiculaire à la droite; pour cela, soient B et B' les points où la droite A rencontre les plans parallèles au plan des xy passant par D et D'; menons par B une perpendiculaire BC à la droite D, par B' menons une perpendiculaire B'C' à la droite D'. Soient C et C' les pieds de ces perpendiculaires. D'après ce qui précède, les deux droites BC et B'C' seront les directrices de la perpendiculaire menée du point représenté par la droite A sur la droite dont les directrices sont D et D', et la droite CC' représentera le pied de cette perpendiculaire. Si donc z désigne la distance de la directrice D au plan des xy, z étant < 1, la distance du point à la droite aura pour expression

$$\frac{BC}{\sqrt{1-z^2}} + i \frac{B'C'}{\sqrt{\left(\frac{1}{z}\right)^2 - 1}}.$$

Le cas où la droite donnée est parallèle à une droite réelle se traite sans difficulté d'après ce qui précède. Nous n'insisterons pas.

Surface d'un polygone.

Soient

$$\begin{array}{ll} \alpha + ip, & \beta + iq, \\ \alpha_1 + ip_1, & \beta_1 + iq_1, \\ \alpha_2 + ip_2, & \beta_2 + iq_2, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

les sommets du polygone. Il s'agit de représenter l'expression

$$\Sigma(\alpha + ip)(\beta_1 + iq_1) - (\alpha_1 + ip_1)(\beta + iq)$$

ou bien, en développant et ne considérant que la partie réelle,

$$\Sigma \alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 + qp_1 - pq_1.$$

Considérons les deux polygones ayant pour sommets les points où les droites représentant les points donnés rencontrent les plans menés parallèlement au plan des xy aux distances z et $\frac{1}{z}$. Soient s et s' leurs surfaces. On a les formules

$$s = \Sigma \alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 + z^2(pq_1 - qp_1) + z(q\beta_1 - \beta q_1 + p\alpha_1 - \alpha p_1),$$

$$s' = \Sigma \alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 + \frac{1}{z^2}(pq_1 - qp_1) + \frac{1}{z}(q\beta_1 - \beta q_1 + p\alpha_1 - \alpha p_1).$$

En multipliant la seconde par z^2 et la retranchant de la première, il vient

$$s - s'z^2 = (1 - z^2)\Sigma(\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 + qp_1 - pq_1).$$

Donc la partie réelle de la surface cherchée a pour expression

$$(7) \qquad \frac{s - s'z^2}{1 - z^2}.$$

Cette formule est en défaut pour $z = \pm 1$; il en est de même quand z est nul ou infini, car on ne peut l'établir.

La surface du triangle formé par les points où les droites représentant les sommets coupent le plan des xy est

$$C = \Sigma(\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1).$$

Menons par l'origine des parallèles aux droites représentant les sommets; elles coupent le plan $Z = 1$ en des points qui forment un polygone dont la surface a pour expression

$$C' = \Sigma(pq_1 - qp_1).$$

On a donc encore, pour représenter la partie réelle de la surface cherchée, la formule

$$(7') \qquad C - C'.$$

Quant au coefficient de $\sqrt{-1}$, il n'a pas de représentation simple.

Il ne nous reste plus, avant d'arriver à l'étude générale des courbes, que quelques mots à dire sur la transformation de coordonnées, afin de bien faire comprendre ce que cela signifie de prendre pour origine un point imaginaire et pour axes de coordonnées des droites imaginaires.

Transformation de coordonnées.

Jusqu'ici un point imaginaire du plan était déterminé par ses coordonnées $(\alpha + pi, \beta + qi)$ par rapport à deux axes de coordonnées réels, et l'origine des coordonnées était par conséquent réelle. Dans notre représentation, un point imaginaire a été représenté par la droite dont les équations étaient

$$x = \alpha + qz,$$
$$y = \beta - pz,$$

les axes des x et des y étant précisément les axes de coordonnées auxquels nous avons rapporté les points du plan, et l'axe des z la droite qui représentait l'origine.

Supposons maintenant que nous prenions pour origine un point imaginaire et que nous transportions les axes primitifs parallèlement à eux-mêmes en ce point; les axes seront donc des parallèles à des droites réelles. Prenons pour axes de coordonnées dans l'espace la droite A, représentant le point imaginaire pris pour origine, pour axe des z', et pour axes des x' et des y' les deux parallèles aux axes primitifs menées par le point où la droite A rencontre le plan des xy, c'est-à-dire les deux directrices des droites imaginaires prises pour axes de coordonnées.

Les formules de transformation de coordonnées dans l'espace nous donnent

$$x = \alpha_0 + x' + aq_0 z',$$
$$y = \beta_0 + y' - ap_0 z',$$
$$z = az',$$

$(\alpha_0 + ip_0)$, $(\beta_0 + iq_0)$ étant les coordonnées du point imaginaire pris pour origine, et a désignant le cosinus de l'angle de l'axe des z' avec la perpendiculaire au plan des xy.

Les équations de la droite représentant le point $(\alpha + pi, \beta + qi)$ deviennent alors

$$(8) \qquad \begin{cases} x' = \alpha - \alpha_0 + a(q - q_0)z', \\ y' = \beta - \beta_0 - a(p - p_0)z'. \end{cases}$$

Or, les formules de transformation de coordonnées dans le plan donnent

$$\alpha + ip = \alpha_0 + ip_0 + \alpha' + ip',$$
$$\beta + iq = \beta_0 + iq_0 + \beta' + iq',$$

α', β', p', q' étant les paramètres des nouvelles coordonnées; les équations (8) deviennent alors

$$x' = \alpha' + q'az',$$
$$y' = \beta' - p'az',$$

ou bien, finalement,

$$(9) \qquad \begin{cases} x' = \alpha' + q'z, \\ y' = \beta' - p'z, \end{cases}$$

z désignant la distance d'un point au plan des xy. On voit donc que, en prenant pour axes de coordonnées dans l'espace les droites indiquées, les équations de la droite représentant le point qui a pour coordonnées $\alpha' + ip'$, $\beta' + iq'$ par rapport aux nouveaux axes conservent leur simplicité primitive.

Imaginons maintenant que nous prenions pour axes de coordonnées deux droites imaginaires; les nouvelles variables $\alpha' + p'i$, $\beta' + q'i$ exprimeront toujours les distances d'un point aux nouveaux axes, ces distances étant comptées parallèlement à ces axes, et ce sont ces distances traduites d'après la représentation qu'on en a donnée qui définissent la droite représentant un point imaginaire. Mais, comme on ne peut plus alors choisir les axes de coordonnées dans l'espace de façon que les paramètres de la droite s'expriment simplement en fonction des nouvelles variables, il ne sera pas en général avantageux de prendre pour axes des droites imaginaires quelconques, tandis que le choix d'un point imaginaire pour origine, avec des axes de coordonnées parallèles à des droites réelles, pourra être très utile, comme nous le verrons plus tard.

Nous avons maintenant donné toutes les formules dont nous aurons besoin plus tard, et nous pouvons aborder l'étude de la représentation d'une courbe. En effet, tous les symboles élémentaires qui entrent dans les énoncés des théorèmes sont traduits dans notre représentation de façon à séparer la partie réelle et la partie imaginaire, ce qui était le point important, et cette partie réelle et cette partie imaginaire sont représentées par des éléments géométriques simples. On voit donc que chaque théorème du plan se dédoublera en deux autres relatifs aux figures de l'espace qui représentent les éléments qui entrent dans ce théorème. Nous pouvons déjà, avec ce que nous savons, construire les droites représentant les points imaginaires d'une courbe définie géométriquement, et même les énoncés des théorèmes seront tout de suite généralisés, car nous n'aurons pas besoin de supposer réels les éléments qui y entrent.

Mais on voit que nous admettons implicitement qu'un théorème, démontré quand les éléments qui y entrent sont réels, subsiste encore quand ces éléments deviennent imaginaires. Nous pourrions nous en dispenser et démontrer directement les théorèmes sur les figures de l'espace. Nous ne le ferons pas, parce que ce serait long et pénible et que d'ailleurs il n'en est pas besoin pour être certain de la validité des théorèmes, car l'extension des théorèmes démontrés dans le cas où les quantités sont réelles au cas où les quantités deviennent imaginaires est depuis longtemps admise en Géométrie.

Représentation d'une courbe.

Considérons une courbe plane représentée par l'équation $f(x,y)=0$ en coordonnées rectangulaires. Exprimons que le point imaginaire $(\alpha+pi, \beta+qi)$ appartient à cette courbe; on aura l'équation

$$f(\alpha+pi, \beta+qi)=0,$$

qui se décompose dans les deux suivantes, qu'on obtient en séparant la partie réelle et la partie imaginaire :

$$\left\{\begin{aligned} &F(\alpha,\beta,p,q)=0,\\ &\Phi(\alpha,\beta,p,q)=0. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Prenons pour axe des z la perpendiculaire élevée au plan des xy à l'origine des coordonnées choisies dans le plan, et regardons dans les équations précédentes α, β, p, q comme les paramètres de la droite qui a pour équations

$$x=\alpha+qz,$$
$$y=\beta-pz.$$

On voit que, de ces quatre paramètres, deux resteront arbitraires. On peut donc dire que tous les points d'une courbe, réels ou imaginaires, sont représentés par un système de rayons rectilignes dépendant de deux paramètres arbitraires, ou, ce qui revient au même, que les droites représentant les points d'une courbe appartiennent à une congruence.

On sait que toutes les droites appartenant à une congruence sont tangentes en deux points à une même surface à deux nappes. Comme ce théorème est fondamental et que nous aurons besoin des formules auxquelles il conduit, nous allons le démontrer.

THÉORÈME. — *Toutes les droites appartenant à une congruence sont tangentes en deux points à une surface.*

Soient

$$x = \alpha + qz,$$
$$y = \beta - pz$$

les équations d'une droite A de la congruence; nous prendrons α et β pour variables indépendantes; alors dans tout ce qui suit p et q seront des fonctions de α et de β définies par les équations (10). Considérons un point M (x, y, z) sur la droite A ; regardons z comme fonction de α et de β; alors x et y seront aussi des fonctions de α et de β, et quand α et β varieront le point M se déplacera sur une certaine surface. Je dis qu'on peut trouver pour z une fonction de α et de β telle que la droite A soit constamment tangente à cette surface.

Différentions les équations de la droite A ; on a

$$(11)\quad \begin{cases} dx = \left(1 + z\dfrac{dq}{d\alpha}\right)d\alpha + z\dfrac{dq}{d\beta}d\beta + q\,dz, \\ dy = -z\dfrac{dp}{d\alpha}d\alpha + \left(1 - z\dfrac{dp}{d\beta}\right)d\beta - p\,dz. \end{cases}$$

Nous voulons que la droite soit tangente à la surface décrite par M ; il faut donc que ces deux équations soient satisfaites quand on y fait

$$\frac{dx}{dz} = q,$$
$$\frac{dy}{dz} = -p;$$

alors on a les deux équations

$$(12)\quad \begin{cases} \left(1 + z\dfrac{dq}{d\alpha}\right)d\alpha + z\dfrac{dq}{d\beta}d\beta = 0, \\ -z\dfrac{dp}{d\alpha}d\alpha + \left(1 - z\dfrac{dp}{d\beta}\right)d\beta = 0. \end{cases}$$

En éliminant le rapport $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$, on a une équation du second degré qui donne pour z deux fonctions de α et de β.

Prenons pour z une de ces fonctions de α et de β; alors le point M se déplacera sur une certaine surface s quand α et β varieront. Faisons varier infiniment peu α et β, de façon que l'on ait

$$\left(1 + z\frac{dq}{d\alpha}\right)d\alpha + z\frac{dq}{d\beta}d\beta = 0;$$

alors, d'après la façon dont on a déterminé z en fonction de α et de β, on aura aussi

$$-z\frac{dp}{d\alpha}d\alpha + \left(1 - z\frac{dp}{d\beta}\right)d\beta = 0,$$

et le point M se déplacera sur une certaine courbe tracée sur la surface s; mais, dans ces conditions, les équations (11) donnent

$$\frac{dx}{dz} = q,$$

$$\frac{dy}{dz} = -p.$$

Donc cette courbe est tangente à la droite A, et, par conséquent, la droite A est tangente à la surface.

Cherchons les plans tangents à la surface aux deux points M et M_1, où elle est touchée par la droite A. A cet effet, remarquons que, quand on fait varier infiniment peu α et β de façon que leurs variations satisfassent aux équations (12), la droite A vient dans une position infiniment voisine A′, et, comme le point M s'est déplacé infiniment peu sur la droite A en M′, cette droite A′ rencontre la droite A en M′. Donc le plan de A et de A′ est le plan tangent en M_1 à la surface, et sa trace sur le plan des xy a pour coefficient angulaire $\frac{d\beta}{d\alpha}$; donc on obtient l'équation qui donne les coefficients angulaires des traces des plans tangents à la surface aux deux points où elle est touchée par la droite A en éliminant z entre les deux équations numérotées (12).

Un cas particulier de ce théorème s'offre pour le cas des droites normales à une surface qui sont les tangentes doubles de la surface lieu des centres de courbure; mais les plans tangents aux deux points de contact d'une même normale sont rectangulaires.

Formons l'équation du second degré qui donne z; c'est

$$z^2\left(\frac{dp}{d\alpha}\frac{dq}{d\beta}-\frac{dq}{d\alpha}\frac{dp}{d\beta}\right)+z\left(\frac{dq}{d\alpha}-\frac{dp}{d\beta}\right)+1=0,$$

et l'équation qui donne les coefficients angulaires des traces des plans tangents à la surface aux deux points de contact d'une tangente double sur le plan des xy est

$$\frac{dq}{d\beta}m^2+m\left(\frac{dp}{d\beta}+\frac{dq}{d\alpha}\right)+\frac{dp}{d\alpha}=0.$$

Dans le cas que nous considérons, les deux fonctions p et q de α et de β ne sont pas arbitraires, mais satisfont à deux équations aux différentielles partielles qu'il est facile de former.

On a, en effet,

$$\alpha+ip=f(\beta+iq);$$

en dérivant successivement par rapport à α et à β, il vient

$$1+i\frac{dp}{d\alpha}=f'\,i\frac{dq}{d\alpha},$$
$$i\frac{dp}{d\beta}=f'\left(1+i\frac{dq}{d\beta}\right);$$

en divisant membre à membre, et séparant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient les deux relations

$$1=\frac{dp}{d\alpha}\frac{dq}{d\beta}-\frac{dq}{d\alpha}\frac{dp}{d\beta},$$
$$\frac{dq}{d\beta}+\frac{dp}{d\alpha}=0.$$

En tenant compte de ces relations, les équations qui donnent z et m deviennent

$$(12')\quad\left\{\begin{aligned}&z^2+z\left(\frac{dq}{d\alpha}-\frac{dp}{d\beta}\right)+1=0,\\&\frac{dq}{d\beta}m^2+m\left(\frac{dp}{d\beta}+\frac{dq}{d\alpha}\right)-\frac{dq}{d\beta}=0.\end{aligned}\right.$$

On voit que le produit des deux valeurs de z est $+1$ et que le produit des deux valeurs de m est -1. On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les points d'une courbe, réels et imaginaires, sont représentés par des droites qui touchent une même surface à deux nappes en deux points. Le produit des distances de ces deux points au plan des xy est $+1$, et les plans tangents en ces deux points à la surface ont leurs traces sur le plan des xy rectangulaires.*

Il en résulte que les équations (12) peuvent s'écrire

$$(13)\qquad \begin{cases} z + \dfrac{dq}{d\alpha} + m\dfrac{dq}{d\beta} = 0, \\ -\dfrac{dp}{d\alpha} + \left(z - \dfrac{dp}{d\beta}\right) m = 0, \end{cases}$$

m désignant le coefficient angulaire de la trace du plan tangent au point de contact situé sur la tangente double à la distance z du plan des xy, tandis que, dans les équations (12), $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$ était le coefficient angulaire du plan tangent à l'autre point de contact.

Il en résulte encore que, si l'on considère les deux droites d'intersection de ces deux plans tangents avec les plans parallèles au plan des xy passant par leurs points de contact respectifs, ces deux droites peuvent être considérées comme les directrices d'une droite imaginaire. Je vais démontrer que cette droite est la tangente à la courbe au point considéré.

Soit en général $f(x, y) = 0$ l'équation de la courbe donnée; en remplaçant x par $\alpha + ip$, y par $\beta + iq$, et en séparant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient les deux équations

$$F(\alpha, \beta, p, q) = 0,$$
$$\Phi(\alpha, \beta, p, q) = 0.$$

Les deux fonctions F et Φ ne sont pas arbitraires, mais liées par des relations qu'il est facile de former en partant de l'identité

$$F(\alpha, \beta, p, q) + i\,\Phi(\alpha, \beta, p, q) = f(\alpha + pi, \beta + qi),$$

et qui sont

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{dF}{d\alpha} = \dfrac{d\Phi}{dp}, & \dfrac{dF}{d\beta} = \dfrac{d\Phi}{dq}, \\ \dfrac{dF}{dp} = -\dfrac{d\Phi}{d\alpha}, & \dfrac{dF}{dq} = -\dfrac{d\Phi}{d\beta}. \end{cases}$$

Considérons maintenant α, β, p, q comme les paramètres de la droite qui a pour équations

$$x = \alpha + qz,$$
$$y = \beta - pz;$$

alors les deux équations $F = 0$, $\Phi = 0$ déterminent deux complexes. Soient α_1, β_1, p_1, q_1 les paramètres d'une droite, et considérons les deux complexes polaires de cette droite par rapport aux deux complexes $F = 0$, $\Phi = 0$. Ce sont

$$\alpha\left(\frac{dF}{d\alpha}\right)_1 + \beta\left(\frac{dF}{d\beta}\right)_1 + p\left(\frac{dF}{dp}\right)_1 + q\left(\frac{dF}{dq}\right)_1 + \left(\frac{dF}{dt}\right)_{t=1} = 0,$$
$$\alpha\left(\frac{d\Phi}{d\alpha}\right)_1 + \beta\left(\frac{d\Phi}{d\beta}\right)_1 + p\left(\frac{d\Phi}{dp}\right)_1 + q\left(\frac{d\Phi}{dq}\right)_1 + \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_{t=1} = 0.$$

Ces deux complexes, qui sont linéaires, définissent une congruence linéaire. Multiplions la seconde équation par $\sqrt{-1}$ et ajoutons, en tenant compte des relations (14); il vient

$$(\alpha + ip)\left(\frac{df}{d(\alpha + ip)}\right)_1 + (\beta + iq)\left(\frac{df}{d(\beta + iq)}\right)_1 + \left(\frac{df}{dt}\right)_{t=1} = 0.$$

Cette congruence linéaire représente donc la polaire du point $(\alpha_1 + ip_1, \beta_1 + iq_1)$ par rapport à la courbe donnée, et, si ce point est sur la courbe, elle représente la tangente en ce point.

Dans le cas qui nous occupe, nous avons considéré p et q comme des fonctions de α et de β. La congruence qui représente la tangente est donc ici

$$q - \alpha\left(\frac{dq}{d\alpha}\right)_1 - \beta\left(\frac{dq}{d\beta}\right)_1 - \left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=1} = 0,$$
$$p - \alpha\left(\frac{dp}{d\alpha}\right)_1 - \beta\left(\frac{dp}{d\beta}\right)_1 - \left(\frac{dp}{dt}\right)_{t=1} = 0.$$

On trouve, pour déterminer ses directrices, les équations

$$\frac{x\left(\frac{dq}{d\alpha}\right)_1+y\left(\frac{dq}{d\beta}\right)_1}{x\left(\frac{dp}{d\alpha}\right)_1+y\left(\frac{dp}{d\beta}\right)_1}=\frac{z\left(\frac{dq}{d\alpha}\right)_1+1}{z\left(\frac{dp}{d\alpha}\right)_1}=\frac{z\left(\frac{dq}{d\beta}\right)_1}{z\left(\frac{dp}{d\beta}\right)_1-1}.$$

Si l'on ne considère que leur direction, comme elles rencontrent en plus la tangente double représentant le point $(\alpha_1+ip_1,\ \beta_1+iq_1)$ de la courbe, elles sont complètement déterminées. Soit λ la valeur commune de ces trois rapports; on a

$$\left[\left(\frac{dq}{d\alpha}\right)_1-\lambda\left(\frac{dp}{d\alpha}\right)_1\right]x+\left[\left(\frac{dq}{d\beta}\right)_1-\lambda\left(\frac{dp}{d\beta}\right)_1\right]y=0$$

pour la projection d'une directrice sur le plan des xy; soit m son coefficient angulaire; on en déduit

$$\lambda=\frac{\left(\frac{dq}{d\alpha}\right)_1+m\left(\frac{dq}{d\beta}\right)_1}{\left(\frac{dp}{d\alpha}\right)_1+m\left(\frac{dp}{d\beta}\right)_1}.$$

En égalant cette valeur de λ aux deux derniers rapports on trouve précisément, pour déterminer z et m, les équations (13), ce qui démontre le théorème.

La normale en un point d'une courbe étant la droite perpendiculaire à la tangente au point considéré, ses directrices sont perpendiculaires aux directrices de la tangente et situées dans les mêmes plans parallèles au plan des xy, et, par conséquent, si M et M′ sont les points de contact de la tangente double, les deux droites d'intersection des plans tangents en M et M′ avec les plans parallèles au plan des xy menés par M′ et par M sont les directrices de la normale.

Tels sont les théorèmes généraux qui donnent la représentation d'un point d'une courbe, de la tangente et de la normale en ce point.

Nous allons maintenant chercher dans quel cas il peut arriver que l'une des nappes de la surface se réduise à une courbe.

A cet effet, nous prendrons comme variables indépendantes α et p. On a alors

$$\beta+iq=f(\alpha+ip).$$

Donc β et q sont deux fonctions de α et de p entre lesquelles on a les relations

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\beta}{d\alpha} &= \frac{dq}{dp}, \\ \frac{d\beta}{dp} &= -\frac{dq}{d\alpha}. \end{aligned}\right.$$

Les équations d'une droite représentant un point imaginaire de la courbe seront toujours

$$x = \alpha + qz, \quad y = \beta - pz.$$

Considérons z comme fonction de α et de p, et différentions les équations de la droite; on a

$$dx = \left(1 + z\frac{dq}{d\alpha}\right) d\alpha + z\frac{dq}{dp}\,dp + q\,dz,$$

$$dy = \frac{d\beta}{d\alpha}\,d\alpha + \left(\frac{d\beta}{dp} - z\right) dp - p\,dz.$$

Si l'on joint à ces équations la suivante,

$$dz = \frac{dz}{d\alpha}\,d\alpha + \frac{dz}{dp}\,dp,$$

et si l'on élimine $d\alpha$ et dp entre ces trois équations, après avoir remplacé dx, dy, dz par $X - x$, $Y - y$, $Z - z$, on sait que l'on obtient l'équation du plan tangent à la surface que décrit le point (x, y, z). Si l'on peut choisir z en fonction de α et de p de façon que ce point décrive une courbe, l'équation du plan tangent sera indéterminée. Écrivons donc que les coefficients de $d\alpha$ et de dp dans les équations précédentes sont proportionnels. Il faudra trouver une fonction z de α et de p satisfaisant aux équations

$$(16)\qquad \frac{1 + z\dfrac{dq}{d\alpha}}{z\dfrac{dq}{dp}} = \frac{\dfrac{d\beta}{d\alpha}}{\dfrac{d\beta}{dp} - z} = \frac{\dfrac{dz}{d\alpha}}{\dfrac{dz}{dp}}.$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = u,$$

$$\frac{d\beta}{dp} = v;$$

alors on aura, d'après les équations (15),

$$\frac{dq}{dp} = u,$$

$$\frac{dq}{d\alpha} = -v.$$

Désignons par r, s, t les dérivées partielles du second ordre de la fonction β par rapport à α et à p, c'est-à-dire posons

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = r, \quad \frac{d^2\beta}{d\alpha\, dp} = s, \quad \frac{d^2\beta}{dp^2} = t;$$

on sait que l'on a

$$r + t = 0$$

Remarquons enfin que l'on a

$$(17) \qquad \begin{cases} u - iv = f'(\alpha + ip), \\ r - is = f''(\alpha + ip); \end{cases}$$

avec ces notations, les équations précédentes (16) deviennent

$$(18) \qquad \frac{1 - vz}{uz} = \frac{u}{v - z} = \frac{\frac{dz}{d\alpha}}{\frac{dz}{dp}}.$$

De ces équations on déduit que $\frac{\frac{dz}{d\alpha}}{\frac{dz}{dp}}$ satisfait à l'équation

$$\left[1 - \left(\frac{\frac{dz}{d\alpha}}{\frac{dz}{dp}}\right)^2\right] uv + \frac{\frac{dz}{d\alpha}}{\frac{dz}{dp}}(1 + u^2 - v^2) = 0.$$

On en déduit

$$\frac{\left(\frac{dz}{d\alpha}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dp}\right)^2}{\frac{dz}{d\alpha}\frac{dz}{dp}} = \frac{1 + u^2 - v^2}{uv},$$

ou encore, en ayant égard aux formules (17),

$$(19) \qquad \frac{\left(\frac{dz}{d\alpha} + i\frac{dz}{dp}\right)^2}{\left(\frac{dz}{d\alpha} - i\frac{dz}{dp}\right)^2} = \frac{1 + (u + iv)^2}{1 + (u - iv)^2} = \frac{1 + f'^2(\alpha - ip)}{1 + f'^2(\alpha + ip)}.$$

D'ailleurs les équations (18) donnent, pour déterminer z, l'équation

$$\frac{1 + z^2}{z} = \frac{1 + u^2 + v^2}{v};$$

en prenant le quotient des dérivées des deux membres de cette équation par rapport à α et à p, il vient

$$\frac{\frac{dz}{d\alpha}}{\frac{dz}{dp}} = \frac{(1 + u^2 - v^2)s - 2uvr}{(1 + u^2 - v^2)t - 2uvs}.$$

On en déduit, en se rappelant que l'on a $r + t = 0$ et les équations (17),

$$\frac{\frac{dz}{d\alpha} + i\frac{dz}{dp}}{\frac{dz}{d\alpha} - i\frac{dz}{dp}} = -\frac{[1 + (u - iv)^2](r + is)}{[1 + (u + iv)^2](r - is)} = -\frac{[1 + f'^2(\alpha + ip)]f''(\alpha - ip)}{[1 + f'^2(\alpha - ip)]f''(\alpha + ip)}.$$

En comparant cette dernière formule avec la formule (19), on a

$$\frac{[1 + f'^2(\alpha + ip)]^3}{f''(\alpha + ip)^2} = \frac{[1 + f'^2(\alpha - ip)]^3}{f''(\alpha - ip)^2}.$$

On voit donc que l'expression

$$\frac{(1 + f'^2)^3}{f''^2}$$

ne change pas quand on change i en $-i$; donc il faut que ce soit une constante réelle. Or, cette expression représente le carré du rayon de courbure en un point de la courbe cherchée. Donc cette courbe est un cercle dont le carré du rayon est réel, et, en effet, nous verrons plus tard que la surface à deux nappes correspondant à un cercle dont le carré du rayon est réel se décompose en une droite et une surface du second degré.

Enfin l'équation de condition est encore satisfaite si l'on a $f'' = 0$; mais alors la courbe cherchée est une droite.

On peut encore donner de ce résultat la démonstration suivante. Imaginons que l'une des nappes de la surface considérée se réduise à une courbe C; soit Σ la seconde nappe de la surface. Considérons deux plans parallèles au plan des xy et à des distances z et $\frac{1}{z}$; le premier de ces plans coupe la surface Σ suivant une courbe S et le second coupe la courbe C en un certain nombre de points. Soit A l'un de ces points. D'après les propriétés de la surface à deux nappes, si je considère une droite D passant par A et tangente à la surface Σ, le point de contact avec la surface Σ devra être sur la courbe S, et, de plus, le plan tangent à la surface Σ en ce point de contact et le plan passant par la tangente en A à la courbe C et la droite D devront couper un plan parallèle au plan des xy suivant deux droites rectangulaires; il en résulte que, si l'on considère la trace du second plan sur le plan de la courbe S, il contiendra la normale à cette courbe au point de contact de la droite D, et, par conséquent, toutes les normales à la courbe S vont passer par la trace B de la tangente en A à la courbe C. Donc cette courbe S est un cercle. La surface Σ sera donc telle que les plans parallèles au plan des xy la coupent suivant des cercles. Son équation sera donc de la forme

$$x^2 + y^2 - 2xf(z) - 2y\varphi(z) + \psi(z) = 0. \qquad (19\ bis)$$

Le plan tangent en un point de la courbe S aura pour équation

$$\begin{aligned} X[x - f(z)] + Y[y - \varphi(z)] + Z\left[-xf'(z) - y\varphi'(z) + \frac{\psi'(z)}{2}\right] \\ = xf(z) + y\varphi(z) - \psi(z) - xzf'(z) - yz\varphi'(z) + z\frac{\psi'(z)}{2}. \end{aligned}$$

Ce plan tangent doit passer par un point fixe du plan $Z = \frac{1}{z}$ quand x et y varient en restant liés par l'équation (1).

On en déduit, en désignant par X, Y et $\frac{1}{z}$ les coordonnées de ce point, les équations

$$(19\ ter) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= f(z) + \left(\frac{1}{z} - z\right) f'(z), \\ Y &= \varphi(z) + \left(\frac{1}{z} - z\right) \varphi'(z), \\ X f(z) + Y\varphi(z) &- \frac{1}{z} \frac{\psi'(z)}{2} - \psi(z) + z \frac{\psi'(z)}{2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Portant de suite les valeurs de X et de Y tirées des deux premières dans la troisième, elle devient

$$\frac{\psi'(z) - 2f(z)f'(z) - 2\varphi(z)\varphi'(z)}{\psi(z) - f^2(z) - \varphi^2(z)} = \frac{2z}{z^2 - 1}.$$

On a donc, en intégrant,

$$\psi(z) - f^2(z) - \varphi^2(z) = C(z^2 - 1),$$

et l'équation de la surface Σ devient

$$[x - f(z)]^2 + [y - \varphi(z)]^2 = C(1 - z^2).$$

Revenons maintenant aux deux premières des équations (19 *ter*); elles montrent que la tangente à la courbe décrite par le centre B du cercle va passer par le point A; mais nous avons déjà vu que la tangente en A à la courbe décrite par le point A va passer par le centre du cercle; donc les droites telles que AB sont tangentes aux trajectoires de deux de leurs points. On voit aisément que cela exige que les deux points A et B décrivent la même droite. On a donc

$$f(z) = a + bz,$$
$$\varphi(z) = c + dz,$$

et, par conséquent, l'équation de la surface Σ devient

$$[x - (a + bz)]^2 + [y - (c + dz)]^2 = C(1 - z^2).$$

C'est une surface du second degré, tangente aux deux plans $z = \pm 1$

en deux ombilics; le diamètre conjugué du plan des xy est la courbe C. On verra plus tard que la surface à deux nappes correspondant au cercle de rayon réel se compose précisément de l'ensemble le plus général que nous venons de trouver. Le cercle de rayon réel fournit donc la solution complète de la question proposée.

Nous n'avons plus, pour terminer cette première Partie, qu'à parler de la développée d'une courbe et à donner les formules relatives à l'arc et à l'aire d'une courbe.

Développée et arc d'une courbe.

Pour trouver la développée d'une courbe, nous nous appuierons sur un théorème qui est la conséquence immédiate des théorèmes précédents sur la représentation d'un point d'une courbe et de la tangente en ce point, et qui nous servira aussi plus tard pour déterminer la surface à deux nappes correspondant à une courbe donnée.

Théorème. — *La surface à deux nappes correspondant à une courbe donnée coupe tout plan parallèle au plan des xy suivant une courbe qui est l'enveloppe des directrices des tangentes à la courbe situées dans ce plan parallèle au plan des xy.*

Nous allons appliquer ce théorème. Soit AB une droite de l'espace représentant un point de la courbe; elle touche la surface à deux nappes Σ correspondant à cette courbe aux points A et B situés à des distances z et $\frac{1}{z}$ du plan des xy. Nous supposons toujours $z < 1$. Menons par les points A et B des plans parallèles au plan des xy; ils coupent la surface Σ suivant deux courbes C et D, et l'on sait que les normales à ces courbes aux points A et B sont les directrices de la normale à la courbe proposée au point représenté par la tangente double AB. Désignons par Σ' la surface à deux nappes correspondant à la développée de la courbe donnée; il résulte du théorème précédent qu'un plan parallèle au plan des xy coupe la surface Σ' suivant la développée de la courbe d'intersection de ce plan avec la surface Σ.

Il en résulte que, si H et K désignent les centres des cercles osculateurs des courbes C et D aux points A et B, la droite HK représente le centre du cercle osculateur de la courbe proposée au point représenté par la droite AB, et le rayon de courbure en ce point aura pour expression

$$(20)\qquad R = \frac{\rho}{\sqrt{1-z^2}} + i\frac{\rho_1}{\sqrt{\left(\frac{1}{z}\right)^2 - 1}},$$

p et p_1 désignant les rayons de courbure des courbes C et D aux points A et B.

Cette formule (20) conduit à une expression intéressante de l'arc d'une courbe. On sait, en effet, que la différentielle de l'arc d'une courbe est égale au produit du rayon de courbure par la différentielle de l'angle de la tangente avec l'axe des x.

Soient $\sigma + i\tau$ l'arc de la courbe compté à partir d'un certain point et $\alpha + i\beta$ l'angle de la tangente en un point avec l'axe des x. On aura donc

$$d\sigma + i\,d\tau = \left[\frac{\rho}{\sqrt{1-z^2}} + i\frac{\rho_1}{\sqrt{\left(\frac{1}{z}\right)^2 - 1}}\right](d\alpha + i\,d\beta).$$

D'ailleurs, en différentiant les formules (4), on a

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} d\alpha &= \frac{dm}{1+m^2},\\ d\beta &= \frac{dz}{1-z^2},\end{aligned}\right.$$

m désignant le coefficient angulaire de la directrice de la tangente qui est située à la distance z du plan des xy.

Or, remarquons que l'expression

$$\frac{\rho}{\sqrt{1-z^2}} + i\frac{\rho_1}{\sqrt{\left(\frac{1}{z}\right)^2 - 1}},$$

représentant le rayon de courbure de la courbe, peut être regardée comme une fonction de $\alpha + i\beta$; on a donc, pour avoir l'expression de l'arc de la courbe, à effectuer une intégrale de la forme

$$\int f(\alpha + i\beta)(d\alpha + i\,d\beta).$$

Or, supposons que nous évaluions cette intégrale en regardant β comme constant; on voit de suite que l'on obtient le même résultat qu'en y considérant β comme variable.

Or, si l'on considère β comme constant, la seconde formule (21) donne $z =$ const., et l'on a dans ce cas

$$d\sigma + i d\tau = \frac{\rho\, d\alpha}{\sqrt{1 - z^2}} + i \frac{\rho_1\, d\alpha}{\sqrt{\left(\frac{1}{z}\right)^2 - 1}}.$$

Or, $\rho\, d\alpha$ est l'élément de l'arc s de la courbe suivant laquelle le plan $Z = z$ coupe la surface Σ; $\rho_1\, d\alpha$ est l'élément de l'arc s' de la courbe suivant laquelle le plan $Z = \frac{1}{z}$ coupe la surface Σ; on a donc

$$d\sigma + i\, d\tau = \frac{ds}{\sqrt{1 - z^2}} + i \frac{ds'}{\sqrt{\left(\frac{1}{z}\right)^2 - 1}}$$

ou bien, en intégrant,

$$\sigma + i\tau = \frac{s}{\sqrt{1 - z^2}} + i \frac{s'}{\sqrt{\left(\frac{1}{z}\right)^2 - 1}}, \tag{22}$$

l'arc $\sigma + i\tau$ étant compté à partir du point représenté par la droite AB, et les arcs s, s' étant alors comptés à partir des points A et B. Cette formule (22), qui a une signification géométrique très nette quand z reste constant, puisque alors s et s' désignent les arcs des courbes C et D, n'a plus évidemment qu'un sens algébrique quand z est regardé comme variable.

Cette formule (22) est une des plus importantes parce qu'elle montre que les arcs des courbes qu'on obtient en coupant la surface Σ par des plans parallèles au plan des xy dépendent de la même intégrale que l'arc de la courbe donnée. Nous en ferons des applications dans la seconde Partie.

L'arc $\sigma + i\tau$, compté à partir d'un point fixe de la courbe, peut être considéré comme une fonction d'une des coordonnées, $\alpha + ip$ par exemple, d'un point variable μ de la courbe représenté par la tangente double MM'. Supposons que nous fassions varier α et p de façon qu'ils satisfassent à une certaine équation $f(\alpha, p) = 0$; alors la droite MM' se déplacera en restant tangente double à la surface à deux nappes, et les deux points de contact M et M' décriront certaines courbes sur cette surface. Je me propose de chercher comment doit se déplacer la droite MM' pour que la partie réelle ou la partie imaginaire de l'arc conserve une valeur constante.

A cet effet, considérons deux points infiniment voisins de la courbe représentés par les deux tangentes doubles infiniment voisines AB et A'B'. Soient AA', BB' les directrices de la droite qui joint ces deux points; on aura

$$d\sigma = \frac{AA'}{\sqrt{1 - z^2}},$$

$$d\tau = \frac{BB'}{\sqrt{\left(\frac{1}{z}\right)^2 - 1}}.$$

Donc, pour que $d\sigma$, par exemple, soit nul, il faut que $AA' = 0$, c'est-à-dire que les deux droites AB, A'B' se rencontrent, et le point de rencontre sera infiniment voisin d'un des points où la droite AB touche la surface à deux nappes, de celui qui est le plus rapproché du plan des xy. Si, au contraire, on veut que $d\tau$ soit nul, la droite A'B' devra rencontrer la droite AB en un point infiniment voisin de celui des points de contact de la droite AB qui est le plus éloigné du plan des xy.

On voit donc, en résumé, qu'il faut chercher les surfaces développables formées par les tangentes doubles à la surface à deux nappes, c'est-à-dire que α, β, p, q devront être des fonctions d'une variable satisfaisant à la condition

$$\alpha' p' + \beta' q' = 0$$

et de plus, bien entendu, aux deux équations qui expriment que le point imaginaire $(\alpha + ip, \beta + iq)$ appartient à la courbe proposée.

On a donc les équations

$$d\alpha\, dp + d\beta\, dq = 0,$$
$$\alpha + pi = \varphi(\beta + qi),$$
$$\alpha - pi = \varphi_1(\beta - qi).$$

On en déduit

$$d\alpha + i\,dp = \varphi'(d\beta + i\,dq),$$
$$d\alpha - i\,dp = \varphi'_1(d\beta - i\,dq),$$

d'où

$$4i\,d\alpha\,dp = \varphi'^2(d\beta + i\,dq)^2 - \varphi_1'^2(d\beta - i\,dq)^2.$$

Donc l'équation différentielle peut s'écrire

$$-4i\,d\beta\,dq = \varphi'^2(d\beta + i\,dq)^2 - \varphi_1'^2(d\beta - i\,dq)^2$$

ou bien

$$(1 + \varphi'^2)(d\beta + i\,dq)^2 = (1 + \varphi_1'^2)(d\beta - i\,dq)^2.$$

Les variables y sont séparées, et l'on a la confirmation analytique du résultat établi précédemment, à savoir que la partie réelle ou la partie imaginaire de l'arc conserve une valeur constante.

La formule (22) donne la condition cherchée sous une autre forme ; mais il n'y a aucun avantage à la considérer ici, car nous avons vu qu'elle n'avait qu'un sens purement algébrique quand z était regardé comme une quantité variable.

Aire d'une courbe.

On établirait, de la même manière que dans le cas où l'on a un polygone ayant un certain nombre de sommets, la formule

$$(23) \qquad A = \frac{S - S'z^2}{1 - z^2},$$

A désignant la partie réelle de l'intégrale

$$\int (\alpha + ip)(d\beta + i\,dq) - (\beta + iq)(d\alpha + i\,dp),$$

c'est-à-dire

$$\int \alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha + q\,dp - p\,dq,$$

quand α, β, p, q sont des fonctions d'une variable, S et S′ désignant les surfaces comprises entre les arcs de courbe que tracent les droites représentant les points $(\alpha + ip,\ \beta + iq)$ sur les deux plans $Z = z$ et $Z = \frac{1}{z}$, et les rayons vecteurs limites menés à l'origine dans ces deux plans.

Supposons maintenant que l'on veuille évaluer l'aire d'une courbe. Considérons z comme constant; alors, dans la formule précédente (23), A désignera la partie réelle de la surface comprise dans la courbe donnée entre deux droites L, L′ passant par l'origine et dont les directrices sont situées dans les plans $Z = z$ et $Z = \frac{1}{z}$, et S et S′ désigneront les aires des courbes que ces plans déterminent dans la surface à deux nappes Σ et qui sont comprises entre les directrices des droites L et L′. D'une façon plus générale, A désignera la partie réelle de l'aire comprise entre la courbe donnée et certaines droites L, L′, ... dont les directrices sont situées dans les plans $Z = z$, $Z = \frac{1}{z}$, et S et S′ désigneront les aires des courbes que déterminent ces plans dans la surface Σ, comprises entre les directrices de ces droites L, L′,....

On verrait ensuite, comme pour la formule de l'arc d'une courbe, que cette formule (23), établie dans le cas où z est constant, est encore vraie quand z est regardé comme variable.

Nous ferions sur cette formule (23) les mêmes remarques que sur la formule (22); nous n'insisterons pas ; d'ailleurs, elle trouvera des applications dans la seconde Partie.

SECONDE PARTIE.

Nous nous proposons, dans la seconde Partie de ce travail, d'étudier plus spécialement les surfaces à deux nappes auxquelles sont tangentes les droites représentant les points d'une courbe du second ordre. Nous considérerons aussi ensuite les surfaces correspondant à quelques autres courbes algébriques ou transcendantes; mais, avant d'aborder l'étude des coniques, nous allons donner divers procédés pour obtenir l'équation de ces surfaces.

Soient Ox, Oy, Oz les axes de coordonnées dans l'espace. Nous supposerons Ox et Oy rectangulaires; l'axe Oz aura une direction quelconque.

Soit $f(x, y) = 0$ l'équation de la courbe donnée, l'origine étant le point représenté par la droite Oz, et les axes des x et des y étant les parallèles aux droites Ox, Oy menées par l'origine.

On a vu, dans la transformation de coordonnées, que le point qui avait pour coordonnées $\alpha + ip$, $\beta + iq$ par rapport à ces axes pris dans le plan était représenté par la droite qui avait pour équations

$$x = \alpha + qz,$$
$$y = \beta - pz$$

par rapport aux axes Ox, Oy, Oz de l'espace, z désignant toujours la distance d'un point au plan des xy. Cela posé, cherchons l'équation de notre surface par rapport aux axes Ox, Oy, Oz.

Première méthode. — Elle consiste à se servir de l'équation qui donne les distances au plan des xy des points de contact d'une droite représentant un point du lieu avec la surface cherchée.

Cette équation était, d'après la formule (12'),

$$1 + z^2 + z\left(\frac{dq}{d\alpha} - \frac{dp}{d\beta}\right) = 0,$$

où p et q sont deux fonctions de α et de β définies par les équations qu'on obtient en remplaçant, dans l'équation de la courbe $f(x, y) = 0$, x par $\alpha + ip$, y par $\beta + iq$ et en séparant la partie réelle et la partie imaginaire; c'est-à-dire, en posant

$$f(\alpha + pi, \beta + qi) = F(\alpha, \beta, p, q) + i\Phi(\alpha, \beta, p, q),$$

par les deux équations

$$F = 0,$$
$$\Phi = 0.$$

Exprimons $\frac{dq}{d\alpha}$ et $\frac{dp}{d\beta}$ au moyen des dérivées partielles de F et de Φ par rapport à α, β, p, q; il vient finalement, R désignant l'une quelconque des fonctions F et Φ,

$$\left(\frac{dR}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dR}{d\beta}\right)^2 + \left(\frac{dR}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dR}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dq}{d\alpha} - \frac{dp}{d\beta}\right)\left(\frac{dR}{d\alpha}\frac{dR}{dq} - \frac{dR}{d\beta}\frac{dR}{dp}\right) = 0,$$

De sorte que l'équation qui donne z est

$$(24)\quad (1+z^2)\left(\frac{dR}{d\alpha}\frac{dR}{dq}-\frac{dR}{d\beta}\frac{dR}{dp}\right)=z\left[\left(\frac{dR}{d\alpha}\right)^2+\left(\frac{dR}{d\beta}\right)^2+\left(\frac{dR}{dp}\right)^2+\left(\frac{dR}{dq}\right)^2\right].$$

Pour avoir la surface cherchée, il faudra donc éliminer α, β, p, q entre cette équation (24) et les équations

$$(25)\quad \begin{cases} F=0, \\ \Phi=0, \\ x=\alpha+qz, \\ y=\beta-pz. \end{cases}$$

On peut éliminer α et β au moyen des deux dernières équations (25), et l'on est ramené à éliminer p et q entre trois équations.

Deuxième méthode. — Elle consiste à chercher l'équation de la courbe C déterminée dans la surface par le plan mené parallèlement au plan des xy à une distance variable z, et nous nous servirons de ce que, si l'on cherche les tangentes à la courbe dont une directrice est à la distance z du plan des xy, toutes ces directrices enveloppent la courbe C.

Soient donc

$$ax+by=1,\quad Z=z$$

et

$$bx-ay=\lambda,\quad Z=\frac{1}{z}$$

les équations des directrices d'une droite; on vérifie sans peine que cette droite aura pour équation

$$(a+ibz)x+(b-iaz)y=1+\lambda iz.$$

Soit $f(\lambda, \mu, \nu)=0$ l'équation tangentielle de la courbe donnée, on devra avoir

$$(26)\quad f(a+ibz,\, b-iaz,\, 1+\lambda iz)=0.$$

En éliminant λ entre les deux équations qu'on obtient en séparant dans la précédente la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient une équation

$$(27)\quad \varphi(a,b)=0.$$

En cherchant l'enveloppe de la droite

$$ax + by = 1,$$

a et b étant liés par l'équation (27), on a l'équation de la courbe C, et, en y regardant z comme variable, on a l'équation de la surface.

Cette méthode subit une légère modification quand on part de l'équation tangentielle de la courbe relativement à des axes imaginaires. Nous supposerons que ces axes imaginaires sont rectangulaires, l'origine étant toujours un point imaginaire. Nous prendrons pour axe des z la droite représentant ce point, pour origine le point où elle rencontre le plan des xy, et pour axes des x et des y des parallèles aux directrices des axes imaginaires auxquels est rapportée la courbe. Soient h et $\frac{1}{h}$ les distances de ces directrices au plan des xy; les équations des axes sont donc

$$y = -ihx,$$
$$y = -\frac{i}{h}x$$

par rapport aux axes imaginaires parallèles aux droites réelles Ox, Oy passant par l'origine.

Soient toujours

$$ax + by = 1, \quad Z = z,$$
$$bx - ay = \lambda, \quad Z = \frac{1}{z}$$

les équations des directrices d'une droite; son équation par rapport aux axes imaginaires précédents est

$$(a + ibz)x + (b - iaz)y = 1 + \lambda iz,$$

et l'on trouve sans difficulté que les distances à l'origine des points où elle rencontre les axes imaginaires auxquels est rapportée la courbe, c'est-à-dire les droites

$$y = -ihx,$$
$$y = -\frac{i}{h}x,$$

sont

$$d = \frac{1 + \lambda i z}{(a + ibz) - ih(b - iaz)} \sqrt{1 - h^2},$$

$$d' = \frac{1 + \lambda i z}{(a + ibz)ih + (b - iaz)} \sqrt{1 - h^2}.$$

Or soit $f(\lambda, \mu, \nu)$ l'équation tangentielle de la courbe, c'est-à-dire la relation entre les paramètres λ, μ, ν de la droite

$$\lambda x + \mu y = \nu,$$

qui exprime qu'elle est tangente à la courbe. On a

$$\frac{\nu}{\lambda} = d, \quad \frac{\nu}{\mu} = d'.$$

On a donc la relation

$$(28) \quad f\left[\frac{a + ibz - ih(b - iaz)}{\sqrt{1 - h^2}}, \frac{(a + ibz)ih + (b - iaz)}{\sqrt{1 - h^2}}, 1 + \lambda i z\right] = 0.$$

En éliminant λ entre les deux équations qu'on obtient en séparant la partie réelle et la partie imaginaire dans l'équation précédente, on a une équation entre a et b, soit

$$\varphi(a, b) = 0,$$

qui est la condition pour que la droite

$$ax + by = 1$$

soit tangente à la courbe C, et l'on achève comme précédemment.

On voit que cette seconde méthode permet de discuter complètement la courbe C, puisqu'on sait qu'elle est la polaire réciproque par rapport au cercle $x^2 + y^2 = 1$ de la courbe qui a pour équation

$$\varphi(x, y) = 0,$$

sans chercher son équation ; c'est cette méthode que nous emploierons de préférence.

Avant d'appliquer ce qui précède aux courbes du second degré, nous allons donner quelques propriétés générales des courbes C, que nous pourrons vérifier sur les courbes particulières que nous étudierons ensuite.

Théorème. — *Les foyers réels des sections faites dans la surface Σ par des plans parallèles au plan des xy se trouvent sur les droites qui représentent les foyers de la courbe donnée.*

Soient

$$(29)\qquad \begin{cases} ax+by=1, & Z=z, \\ bx-ay=\lambda, & Z=\dfrac{1}{z} \end{cases}$$

les équations des directrices D et D′ d'une droite. On sait que son équation est

$$(30)\qquad (a+ibz)x+(b-iaz)y=1+\lambda iz;$$

cela signifie que, si

$$x=\alpha+qz,$$
$$y=\beta-pz$$

sont les équations d'une droite rencontrant D et D′, les deux quantités $\alpha+pi$, $\beta+qi$ vérifient l'équation (30).

Supposons maintenant que, dans les équations (29) et (30), a, b, λ, jusqu'ici nécessairement réels, aient des valeurs imaginaires; l'équation (30) représente toujours une droite imaginaire, et, si

$$x=\alpha+qz,$$
$$y=\beta-pz$$

sont les équations d'une droite rencontrant D et D′ (α, β, p, q sont maintenant imaginaires), les deux quantités $\alpha+pi$, $\beta+qi$ vérifient encore l'équation (30).

On verrait de même que, si les équations (29) représentent deux droites imaginaires tangentes aux courbes C et C′ que les plans $Z=z$, $Z=\frac{1}{z}$ déterminent dans la surface Σ, l'équation (30) représente une droite imaginaire tangente à la courbe que représente la surface Σ.

Soient alors a', b', λ' des valeurs de a, b, λ telles que les équations (29) représentent des tangentes D, D′ aux courbes C, C′ et que l'on ait $a'=ib'$; si dans les équations (29) on remplace a', b', λ' par leurs expressions conjuguées a'', b'', λ'', on aura $a''=-ib''$; les équations (29) représenteront encore des tangentes E, E′ aux courbes C et

C′, et le point de rencontre de D et de E sera un foyer réel A de la courbe C; de même, le point de rencontre de D′ et de E′ sera un foyer réel A′ de la courbe C′.

Remplaçons maintenant, dans l'équation (30), a, b, λ par a', b', λ' et a'', b'', λ''. On obtient deux droites L et L′ tangentes à la courbe donnée, et des deux relations $a' = ib'$, $a'' = -ib''$ on déduit

$$a' + ib'z = i(b' - ia'z),$$
$$a'' + ib''z = -i(b'' - ia''z).$$

Donc ces deux droites ont pour coefficients angulaires $+i$ et $-i$; leur point de rencontre est donc un foyer de la courbe. Or, la droite AA′ rencontre les droites D et D′, E et E′; donc, si l'on met ses équations sous la forme

$$x = \alpha + qz,$$
$$y = \beta - pz,$$

les deux quantités $\alpha + pi$, $\beta + qi$ vérifieront les équations des deux droites L et L′, et, comme α, β, p, q sont réels, puisque la droite AA′ est réelle, $\alpha + pi$ et $\beta + qi$ seront les coordonnées du point de rencontre des deux droites L et L′, et par suite la droite AA′ représentera ce foyer de la courbe, ce qui démontre le théorème annoncé.

Théorème. — *Les sections faites dans la surface Σ par les plans $Z = \pm 1$ se réduisent à des points.*

Nous avons considéré la section faite dans la surface Σ par le plan $Z = z$ comme l'enveloppe des directrices des tangentes à la courbe qui sont situées dans ce plan.

Soit $\beta + iq = f(\alpha + ip)$ l'équation de la courbe donnée.

Considérons une droite dont une directrice est située dans le plan $Z = z$ et a pour coefficient angulaire m; le coefficient angulaire de la droite est, d'après la formule (3′),

$$\frac{m - iz}{1 + miz}.$$

Supposons qu'elle soit tangente au point $\alpha + ip$, $\beta + iq$ de la courbe; on aura

$$\frac{m - iz}{1 + miz} = f'(\alpha + ip).$$

Regardons z comme constant. On obtient toutes les tangentes dont une directrice est située dans le plan $Z = z$ en menant les tangentes aux points de la courbe déterminés par l'équation précédente, où m est variable.

Or, faisons $z = 1$; cette équation devient

$$-i = f'(\alpha + ip).$$

Donc, dans ce cas, il n'y a qu'un certain nombre de points sur la courbe pour lesquels la tangente en ces points a une directrice dans le plan $Z = 1$.

Soit un de ces points; la tangente en ce point a pour coefficient angulaire $-i$. Cherchons ses directrices. D'abord elle passe par un foyer de la courbe; soit AA' la droite représentant ce foyer, et soient A et A' les points où elle rencontre les plans $Z = \pm 1$. On sait qu'alors la droite de coefficient $-i$ passant par le point représenté par la droite AA' est représentée par le point A, c'est-à-dire que tout point de cette droite est représenté par une droite de l'espace passant par A, et que les directrices sont indéterminées et sont deux droites quelconques passant par le point A dans le plan $Z = 1$. On voit donc que la courbe d'intersection de la surface Σ par le plan $Z = 1$ se réduit aux points tels que A, c'est-à-dire aux points où les droites représentant les foyers de la courbe rencontrent le plan $Z = 1$.

Nous allons maintenant aborder la représentation des courbes du second degré et nous commencerons par le cercle, parce que son étude nous sera tout de suite utile.

Représentation du cercle.

On peut trouver la surface Σ à laquelle sont tangentes les droites représentant les points d'un cercle par des considérations élémentaires, en regardant le cercle comme le lieu des points dont la distance à un point fixe appelé *centre* est constante.

Nous prendrons pour axe des z la droite Oz représentant le centre du cercle, pour origine le point où elle rencontre le plan des xy, pour axes des x et des y deux droites rectangulaires quelconques passant par le point O dans le plan des xy; mais nous désignerons toujours par z la distance d'un point au plan des xy.

Soit AA′ la droite représentant un point du cercle; soient CA, C′A′ les directrices de la droite qui joint ce point au centre; désignons par z et $z' = \frac{1}{z}$ les distances de ces directrices au plan des xy, z étant < 1; soit $R + iS$ le rayon du cercle : on aura

$$R = \frac{CA}{\sqrt{1 - z^2}},$$
$$S = \frac{C'A'}{\sqrt{z'^2 - 1}}.$$

Cherchons la tangente au point représenté par la droite AA′. Elle est perpendiculaire à la droite qui a pour directrices CA, C′A′; donc ses directrices sont tangentes aux deux cercles ayant pour centres l'un C et l'autre C′ et respectivement pour rayons CA, C′A′. Ces cercles représentent donc la section faite dans la surface Σ par les plans $Z = z$ et $Z = z'$.

Or, les équations du premier cercle sont

$$Z = z, \quad x^2 + y^2 = R^2(1 - z^2).$$

Celles du second cercle sont

$$Z = z', \quad x^2 + y^2 = S^2(z^2 - 1).$$

On voit donc que la surface Σ se compose ici de l'ellipsoïde qui a pour équation

$$x^2 + y^2 + R^2 z^2 - R^2 = 0$$

et de l'hyperboloïde à deux nappes qui a pour équation

$$x^2 + y^2 - S^2 z^2 + S^2 = 0.$$

On voit que cet ellipsoïde et cet hyperboloïde ont le plan des xy pour un plan de section circulaire commun, pour diamètre conjugué commun de ce plan la droite représentant le centre du cercle, et pour ombilics communs les points où cette droite rencontre les plans $z = \pm 1$.

Considérons en particulier le cas où le carré du rayon est réel; alors on a ou bien $S = 0$ ou bien $R = 0$, et l'on voit que, dans ce cas, l'une des deux surfaces se réduit à l'axe des z; et l'on voit bien, comme nous l'avons trouvé précédemment, que dans ce cas l'une des deux nappes de la surface Σ se réduit à une courbe.

Si le centre du cercle est un point réel, l'ellipsoïde et l'hyperboloïde deviennent de révolution, et, si de plus la partie réelle du rayon du cercle est 1, l'ellipsoïde devient une sphère.

Remarquons que les deux cercles ayant pour rayons $R+iS$ et $R-iS$, sont représentés par les mêmes surfaces. D'ailleurs, comme un cercle ne change pas quand son rayon change de signe, on peut toujours supposer R positif.

Pour terminer ce qui est relatif au cercle, nous allons chercher l'intersection d'un cercle avec une droite passant par le centre. Mais, pour pouvoir distinguer les cercles ayant pour rayons $R+iS$ et $R-iS$, il est nécessaire de préciser sur une droite une direction positive et une direction négative.

Soient CD, C′D′ les deux directrices d'une droite; prenons arbitrairement pour direction positive sur CD la direction CD, et convenons de prendre pour direction positive sur C′D′ la direction C′D′ telle qu'une rotation positive de 90° amène la demi-droite CD sur la demi-droite C′D′.

Soit alors CC′ la droite représentant le centre du cercle; désignons par z et $\frac{1}{z}$ les distances des droites CD, C′D′ au plan des xy. Il faut, d'après ce qui précède, pour résoudre le problème, porter sur les directions CD, C′D′ respectivement les longueurs $\pm R\sqrt{1-z^2}$, $\pm S\sqrt{\left(\frac{1}{z}\right)^2-1}$, ce qui donne les points H, K sur CD et H′, K′ sur C′D′. Les deux droites HH′, KK′ représentent évidemment les deux points cherchés.

Remarquons que, si l'on cherchait l'intersection de la même droite avec le cercle ayant pour rayon $R-iS$, les deux points cherchés seraient représentés par les droites HK′ et H′K.

Représentation d'une courbe du second degré à centre.

Nous déterminerons la courbe en nous donnant son centre, qui sera un point imaginaire représenté par une droite quelconque de l'espace, ses axes, qui seront deux droites rectangulaires quelconques dont les directrices seront situées dans les plans $Z = h$ et $Z = \frac{1}{h}$; si en plus nous nous donnons les longueurs des axes, la courbe sera complètement définie.

On peut, d'après ce qui précède, construire des droites représentant des points de la courbe et les directrices de la tangente en chacun de ces points, c'est-à-dire les points de contact de ces droites avec la surface Σ et les plans tangents à la surface en ces points.

Il suffit pour cela d'appliquer la construction connue pour obtenir un point d'une ellipse et la tangente en ce point au moyen des cercles décrits sur les deux axes comme diamètres, construction dont nous savons maintenant exécuter toutes les parties; mais nous n'insisterons pas, afin d'arriver de suite à l'étude de la surface Σ.

Nous allons appliquer la seconde des méthodes que nous avons données précédemment. Prenons pour axes de coordonnées dans l'espace les axes suivants : pour axe des z, la droite représentant le centre de la courbe, pour origine le point O où elle perce le plan des xy, et pour axes des x et des y les parallèles aux directrices des axes de la courbe; rappelons-nous qu'alors les axes de coordonnées dans le plan sont deux droites parallèles à Ox et Oy passant par le centre de la courbe.

Son équation est donc de la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1,$$

A, B, C désignant des quantités imaginaires quelconques; écrivons maintenant que les axes Ox, Oy sont parallèles aux directrices des axes de la courbe. On sait que, si l'on appelle α l'angle de l'un des axes d'une conique avec l'axe des x, on a

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}.$$

Or, ici, l'un des axes a pour une de ses directrices la droite $(z = h, y = 0)$; la formule (3') donne donc

$$\operatorname{tang} \alpha = -ih,$$

d'où

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{-2ih}{1 + h^2}.$$

On a donc la relation

$$\frac{B}{A - C} = \frac{-ih}{1 + h^2}. \tag{31}$$

La condition pour que la droite $\alpha x + \beta y = \gamma$ soit tangente à la conique est

$$A\beta^2 - 2B\alpha\beta + C\alpha^2 = (AC - B^2)\gamma^2.$$

Soient

$$Z = z, \quad ax + by = 1,$$

$$Z = \frac{1}{z}, \quad bx - ay = \lambda$$

les équations des directrices d'une tangente; on a

$$\begin{aligned} a + ibz &= \alpha, \\ b - iaz &= \beta, \\ 1 + \lambda iz &= \gamma. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} \alpha - i\beta h &= u, \\ \beta + i\alpha h &= v; \end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{v - iuh}{1 - h^2}, \\ \alpha &= \frac{u + ivh}{1 - h^2}. \end{aligned}$$

Portons ces valeurs de α et de β dans l'équation tangentielle de la conique, et remplaçons B par sa valeur tirée de l'équation (31); elle devient

$$\frac{(A + Ch^2)v^2 + (Ah^2 + C)u^2}{(1 - h^2)(1 + h^2)} = (AC - B^2)(1 + \lambda iz)^2.$$

Soient ρ et ρ_1 les longueurs des axes; on a

$$\begin{aligned} A + Ch^2 &= \frac{1 + h^2}{\rho^2}, \\ Ah^2 + C &= \frac{1 + h^2}{\rho_1^2}, \\ AC - B^2 &= \frac{1}{\rho^2 \rho_1^2}. \end{aligned}$$

En introduisant ces valeurs, l'équation précédente devient

$$\frac{\rho^2}{1-h^2}u^2+\frac{\rho_1^2}{1-h^2}v^2=(1+\lambda i z)^2.$$

On pouvait écrire cette équation en partant de la formule (28), car l'équation tangentielle de la conique rapportée à ses axes est

$$\rho^2\alpha^2+\rho_1^2\beta^2=\gamma^2,$$

et l'on a

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} u&=a+ibz-ih(b-iaz),\\ v&=b-iaz+ih(a+ibz).\end{aligned}\right.$$

Posons finalement

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\rho^2}{1-h^2}&=\mathrm{H}+i\mathrm{K},\\ \frac{\rho_1^2}{1-h^2}&=\mathrm{L}+i\mathrm{N}.\end{aligned}\right.$$

Il faut donc éliminer λ entre les deux équations qu'on obtient, en séparant la partie réelle et la partie imaginaire dans l'équation

$$(\mathrm{H}+i\mathrm{K})[a+ibz-ih(b-iaz)]^2+(\mathrm{L}+i\mathrm{N})[b-iaz+ih(a+ibz)]^2=(1+\lambda iz)^2,$$

et l'on aura l'équation de condition entre a et b qui exprime que la droite $ax+by=1$ est tangente à la section de la surface Σ par le plan $\mathrm{Z}=z$.

Pour abréger l'écriture, nous poserons

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{R}&=\mathrm{H}(1-hz)^2-\mathrm{L}(z-h)^2, & \mathrm{R}'&=\mathrm{K}(1-hz)^2-\mathrm{N}(z-h)^2,\\ \mathrm{S}&=\mathrm{L}(1-hz)^2-\mathrm{H}(z-h)^2, & \mathrm{S}'&=\mathrm{N}(1-hz)^2-\mathrm{K}(z-h)^2,\\ \mathrm{T}&=(\mathrm{K}-\mathrm{N})(1-hz)(z-h), & \mathrm{T}'&=(\mathrm{H}-\mathrm{L})(1-hz)(z-h).\end{aligned}\right.$$

Alors les deux équations qu'on obtient en séparant la partie réelle et la partie imaginaire dans l'équation précédente sont

$$\begin{aligned} \mathrm{R}a^2+\mathrm{S}b^2-2\mathrm{T}ab&=1-\lambda^2z^2,\\ \mathrm{R}'a^2+\mathrm{S}'b^2+2\mathrm{T}'ab&=2\lambda z.\end{aligned}$$

En éliminant λ, on a l'équation cherchée

$$(35)\qquad \frac{(\mathrm{R}'a^2+\mathrm{S}'b^2+2\mathrm{T}'ab)^2}{4}+(\mathrm{R}a^2+\mathrm{S}b^2-2\mathrm{T}ab)=1.$$

Il faut maintenant chercher l'enveloppe de la droite

$$ax + by = 1,$$

sachant que a et b sont liés par l'équation (35).

Mais auparavant nous allons discuter complètement les sections de la surface par les plans parallèles au plan des xy, d'après leur équation tangentielle, que l'on vient d'obtenir.

On voit d'abord que ce sont des courbes de quatrième classe et que, parallèlement à une direction donnée, on peut toujours leur mener deux tangentes réelles et deux seulement, car, si l'on pose $a = b\lambda$, λ étant une constante, on a pour déterminer b une équation du quatrième degré bicarrée, dont les deux termes extrêmes sont de signes contraires.

Il est d'ailleurs facile de démontrer directement ce résultat. En effet, mener à la courbe située dans le plan $Z = z$ une tangente de coefficient angulaire m revient à mener à la conique une tangente dont le coefficient angulaire est $\frac{m - iz}{1 + miz}$, c'est-à-dire de direction donnée. Or on sait qu'on peut mener à une conique deux tangentes parallèlement à une direction donnée et rien que deux. Le problème dépend donc d'une équation du second degré à coefficients imaginaires; il admet par suite quatre solutions, dont deux réelles, qui sont fournies par les directrices des deux tangentes qu'on peut mener à la conique parallèlement à la direction considérée, et deux imaginaires.

En général, considérons une courbe à laquelle on peut mener p tangentes parallèlement à une direction donnée. Le problème de mener à la section faite dans la surface Σ correspondant à cette courbe par le plan $Z = z$ des tangentes de coefficient angulaire m dépendra de la résolution d'une équation de degré p à coefficients imaginaires et admettra par suite p^2 solutions, dont p réelles, qui sont fournies par les directrices des tangentes qu'on peut mener à la courbe parallèlement à la direction $\frac{m - iz}{1 + miz}$, et $p(p - 1)$ autres qui sont imaginaires.

On voit aussi que ces sections ne peuvent avoir d'asymptotes réelles, sauf le cas où le plan parallèle au plan des xy qui contient la section considérée passe par une directrice d'une asymptote de la courbe. Nous allons le vérifier dans le cas qui nous occupe.

En effet, on trouve que les directions asymptotiques cherchées sont données par l'équation

$$(R'a^2 + S'b^2 + 2T'ab)^2 + (Ra^2 + Sb^2 - 2Tab)^2 = 0.$$

Pour avoir la position des asymptotes, il faut joindre à cette équation la suivante :

$$Ra^2 + Sb^2 - 2Tab = 2.$$

On voit donc que la courbe possède huit asymptotes imaginaires, deux à deux parallèles et équidistantes du centre.

Il ne peut y avoir exception que dans le cas où les deux équations

$$(36) \qquad \begin{cases} R'a^2 + S'b^2 + 2T'ab = 0, \\ Ra^2 + Sb^2 - 2Tab = 0 \end{cases}$$

ont une racine commune. Or je dis que cette condition est précisément celle qui doit être remplie pour que le plan de la section contienne une directrice d'une asymptote de la conique.

En effet, pour avoir les asymptotes de notre conique, il suffit de supprimer le terme constant dans son équation. On voit ainsi qu'elles sont données par l'équation

$$\frac{\rho^2}{1 - h^2} u^2 + \frac{\rho_1^2}{1 - h^2} v^2 = 0,$$

u et v étant remplacés par leurs valeurs tirées des formules (32), ou bien, d'après les formules (33) et (34),

$$(R'a^2 + S'b^2 + 2T'ab) + i(Ra^2 + Sb^2 - 2Tab) = 0.$$

On voit donc que les asymptotes sont précisément données par les formules (36); la condition pour que ces deux équations aient une racine commune détermine les z des directrices des asymptotes.

Les quatre plans passant par une directrice des deux asymptotes de la conique fournissent les quatre solutions réelles de la question, et, alors, on voit aisément que la section par un de ces plans a cette directrice, qui d'ailleurs passe par le centre, pour asymptote quadruple, et a quatre autres asymptotes imaginaires deux à deux parallèles et équidistantes du centre.

On peut se proposer de chercher si les deux équations (36) peuvent avoir deux racines communes. On trouve qu'il faut avoir la relation

$$\frac{L}{H} = \frac{N}{K}.$$

Alors les deux plans $z = h$ et $z = \frac{1}{h}$ répondent à la question; mais ce ne sont pas nécessairement les plans contenant les directrices des asymptotes de la conique : il faut pour cela que $\frac{L}{H}$ soit négatif. Ces résultats peuvent se déduire soit de l'équation en z qu'on obtient en exprimant que les deux équations (36) ont une racine commune, soit d'une recherche directe; en tout cas, quel que soit le signe de $\frac{L}{H}$, les deux plans $z = h$ et $z = \frac{1}{h}$ coupent la surface Σ suivant deux coniques. On peut aussi le voir directement d'après la construction de la droite représentant un point de la conique et des directrices de la tangente en ce point que nous avons indiquée en commençant.

Revenons au cas général et cherchons les foyers de notre courbe. Pour cela, rendons l'équation (35) homogène au moyen de l'équation

$$ax + by = 1,$$

et faisons $b = ia$. On obtient une équation en $x + yi$ qui donne les foyers de la courbe; c'est la suivante :

$$(x + yi)^4 - (x + yi)^2 (R - S - 2iT) - \frac{(R' - S' + 2iT')^2}{4} = 0.$$

En résolvant cette équation, on trouve qu'elle admet pour racines

$$x + yi = \begin{cases} \pm [r(1 - hz) - is(z - h)] \\ \pm [r(z - h) - is(1 - hz)], \end{cases}$$

r et s étant définis par la relation

$$(37) \qquad r + is = +\sqrt{(H - L) + i(K - N)}.$$

On voit donc que ces foyers sont sur quatre lignes droites. Je dis, maintenant, que ces droites représentent précisément les foyers de la conique.

Considérons, par exemple, les foyers situés sur l'axe qui a pour directrices les droites

$$(y=0,\ z=h),$$
$$\left(x=0,\ z=\frac{1}{h}\right).$$

Soient $\alpha+ip$, $\beta+iq$ les coordonnées d'un des foyers; on a d'abord, puisqu'il est situé sur l'axe précédent,

$$(38)\qquad \begin{cases} \beta=ph, \\ q=-\alpha h. \end{cases}$$

De plus, il est sur cet axe à une distance du centre égale à

$$\pm\sqrt{\rho^2-\rho_1^2},$$

c'est-à-dire, d'après les formules (33) et (37), à

$$\pm\sqrt{1-h^2}\,(r+is).$$

On a donc

$$(\alpha+ip)^2+(\beta+iq)^2=(1-h^2)(r+is)^2$$

ou bien, à cause des relations (38),

$$\alpha+ip=\pm(r+is),$$

d'où

$$\alpha=\pm r,$$
$$p=\pm s,$$

et alors la droite représentant le foyer a pour équations

$$x=\pm r(1-hz),$$
$$y=\mp s(z-h),$$

ce qu'il fallait démontrer,

On démontrerait de même que les sections de la surface Σ par les plans $z=\pm1$ se réduisent aux points où les droites représentant les foyers de la conique percent ces plans, en décomposant, dans ce cas, l'équation (35) en un produit de quatre facteurs.

Revenons à la recherche de la surface Σ; pour obtenir son équation, il faut rendre l'équation (35) homogène au moyen de l'équation de la droite

$$ax + by = 1$$

et égaler à zéro le déterminant de l'équation du quatrième degré homogène en a et b que l'on obtient.

On sait que, si l'on met cette équation sous la forme

$$Aa^4 + 4Ba^3b + 6Ca^2b^2 + 4Dab^3 + Eb^4 = 0,$$

le déterminant cherché sera égalé à zéro :

$$(39)\qquad (AE - 4BD + 3C^2)^3 = 27(ACE + 2BCD - AD^2 - EB^2 - C^3)^2.$$

Dans le cas qui nous occupe, on a

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= R'^2 + 4Rx^2 - 4x^4,\\ B &= T'R' + 2Rxy - 2Tx^2 - 4x^3y,\\ 3C &= 2T'^2 + R'S' + 2(Sx^2 + Ry^2 - 4Txy) - 12x^2y^2,\\ D &= T'S' + 2Sxy - 2Ty^2 - 4xy^3,\\ E &= S'^2 + 4Sy^2 - 4y^4.\end{aligned}\right.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (39), on aura l'équation de la surface Σ.

Le calcul étant très compliqué, nous ne le ferons que dans le cas de la conique réelle; alors on a

$$B = 0,\quad D = 0,\quad h = 0,$$

et les axes deviennent rectangulaires.

Les formules (34) donnent alors

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned} R &= H - Lz^2, & R' &= 0,\\ S &= L - Hz^2, & S' &= 0,\\ T &= 0, & T' &= (H - L)z,\end{aligned}\right.$$

et les formules (40) deviennent

$$(42)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= 4Rx^2 - 4x^4,\\ B &= 2Rxy - 4x^3y,\\ 3C &= 2T'^2 + 2(Sx^2 + Ry^2) - 12x^2y^2,\\ D &= 2Sxy - 4xy^3,\\ E &= 4Sy^2 - 4y^4.\end{aligned}\right.$$

En portant ces valeurs dans la formule (39), on trouve, tout calcul fait, l'équation

$$(V^2+4x^2y^2T'^2)^2+27x^2y^2T'^2(RS+T'^2)^2-V(RS+T'^2)(V^2+36x^2y^2T'^2)=0,$$

dans laquelle V désigne l'expression

$$Sx^2+Ry^2+T'^2.$$

On peut vérifier sur cette équation tout ce que nous avons dit sur les asymptotes d'une section faite par un plan parallèle au plan des xy et sur les sections faites par les plans $z=\pm 1$; en faisant $z=0$, on retrouve d'ailleurs la conique réelle.

Tout ce que nous avons fait est en défaut dans le cas où l'on a $h=\pm 1$, c'est-à-dire dans le cas d'une conique ayant ses axes confondus avec l'une des droites isotropes. On ne peut, dans ce cas, se servir de l'équation de la conique rapportée à ses axes; nous reprendrons donc l'équation qui nous avait servi de point de départ

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1.$$

L'axe des z est toujours la droite représentant le centre de la courbe, l'origine le point de rencontre de cette droite avec le plan des xy, les axes des x et des y deux droites rectangulaires. Exprimons que les axes de la courbe sont confondus avec la droite $y=-ix$; on devra avoir

$$\frac{2B}{A-C}=-i.$$

L'équation de la conique est donc

$$Ax^2-i(A-C)xy+Cy^2=1.$$

La condition pour que la droite

$$(a+ibz)x+(b-iaz)y=1+\lambda iz$$

soit tangente est donc

$$A(b-iaz)^2+i(A-C)(b-iaz)(a+ibz)+C(a+ibz)^2=(1+\lambda iz)^2\frac{(A+C)^2}{4}$$

ou bien

$$\begin{aligned}&A(1-z)[b^2+a^2z+iab(1-z)]\\&\quad+C(1-z)[a^2+b^2z-iab(1-z)]=(1+\lambda iz)^2\frac{(A+C)^2}{4}.\end{aligned}$$

Posons

$$(43)\qquad \begin{cases}\dfrac{4A}{(A+C)^2}=L+iN,\\[2mm] \dfrac{4C}{(A+C)^2}=H+iK,\end{cases}$$

et séparons la partie réelle et la partie imaginaire dans l'équation précédente; en posant, pour abréger, les formules suivantes,

$$(44)\qquad \begin{cases}(1-z)(H+Lz)=R, & (1-z)(K+Nz)=R',\\ (1-z)(L+Hz)=S, & (1-z)(N+Kz)=S',\\ (1-z)^2(K-N)=T=R'-S', & (1-z)^2(L-H)=T'=-(R-S),\end{cases}$$

on obtient les deux équations

$$\begin{aligned}R a^2+S b^2+T ab&=1-\lambda^2z^2,\\ R'a^2+S'b^2+T'ab&=2\lambda z,\end{aligned}$$

et l'élimination de λ donne finalement

$$(45)\qquad \frac{(R'a^2+S'b^2+T'ab)^2}{4}+Ra^2+Sb^2+Tab=1.$$

Il resterait à chercher l'enveloppe de la droite

$$ax+by=1,$$

sachant qu'entre ses deux paramètres a et b existe la relation (45); la méthode serait la même que précédemment.

On voit que cette courbe enveloppe est de quatrième classe. On trouve qu'elle a quatre directions asymptotiques, dont deux sont les asymptotes du cercle; les deux autres sont aussi toujours imaginaires, excepté pour les sections dont les plans passent par les deux directrices de l'asymptote de la conique différente de l'axe, car l'axe est l'autre asymptote; à chaque direction asymptotique de la courbe correspondent d'ailleurs deux asymptotes équidistantes du centre. La courbe a quatre foyers aux points de rencontre des quatre asymptotes parallèles à celles du cercle, et pas d'autres. Les deux foyers réels de toutes les courbes dont les plans sont parallèles au plan des xy sont sur deux droites qui représentent les deux foyers de la conique, car, dans ce cas, les quatre foyers de la conique se réduisent à deux. La section par le plan $z=1$ se réduit au point de rencontre de ce plan avec l'axe des z, c'est-à-dire que les deux droites représentant les deux foyers de la conique passent par ce point.

Parabole.

Pour déterminer la parabole géométriquement, nous nous donnerons son foyer et sa directrice. On voit que l'on peut construire autant de points que l'on veut de la courbe et les tangentes en ces points par la construction connue qui donne à la fois un point d'une parabole et la tangente en ce point. Nous n'insisterons pas, afin d'arriver de suite à l'étude de la surface Σ.

Prenons pour axe des z la droite représentant le sommet de la parabole, pour origine le point où cette droite perce le plan des xy, pour axes des x et des y les parallèles aux directrices de l'axe et de la tangente au sommet; désignons par h et $\frac{1}{h}$ les distances de ces directrices au plan des xy.

En employant la même méthode que pour une conique à centre, on trouve que, pour avoir l'équation de la section faite dans la surface Σ par le plan $Z=z$, il faut chercher l'enveloppe de la droite

$$ax+by=1,$$

sachant qu'entre ses paramètres a et b existe la relation

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned}&[b^2(1-hz)^2-a^2(z-h)^2][ma(1-hz)+nb(z-h)]\\&\quad+2ab(1-hz)(z-h)[na(1-hz)-mb(z-h)]\\&\qquad\qquad+2(1-h^2)[(1-hz)^2a^2+(z-h)^2b^2]=0,\end{aligned}\right.$$

la quantité $\frac{m+in}{\sqrt{1-h^2}}$ désignant le paramètre de la parabole. On voit que ces courbes sont de troisième classe, que parallèlement à une direction donnée on ne peut leur mener qu'une tangente, qu'elles ont deux directions asymptotiques toujours imaginaires données par l'équation

$$(1 - hz)^2 a^2 + (z - h)^2 b^2 = 0.$$

Il n'y a exception que pour les plans $z = h$ et $z = \frac{1}{h}$, qui coupent la surface Σ chacun suivant une parabole, ce que l'on peut voir d'ailleurs directement.

Les asymptotes correspondantes sont rejetées à l'infini. Ces courbes n'ont qu'un foyer, et tous ces foyers sont comme toujours sur la droite représentant le foyer de la parabole.

Nous verrons plus tard qu'on peut donner de ces courbes une définition géométrique simple. Si l'on voulait obtenir leur équation, on suivrait la même méthode que pour les courbes à centre, en se servant du déterminant de l'équation du troisième degré. Il faudrait aussi traiter à part le cas où l'axe de la parabole est une droite isotrope.

On peut donner en termes finis l'expression de l'arc de ces courbes. Il suffit d'appliquer la formule (22). On sait qu'en désignant par s l'arc de la parabole $y^2 = 2px$ on a

$$s = C + \frac{1}{2}\left(y\sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} + p\,\mathcal{L}\frac{y}{p} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}}\right).$$

Or, si μ désigne le coefficient angulaire de la tangente au point (x, y), de la parabole, on a

$$y = \frac{p}{\mu}.$$

La formule précédente devient donc

$$s = C + \frac{p}{2}\left(\frac{1}{\mu}\sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2}} + \mathcal{L}\frac{1}{\mu} + \sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2}}\right)$$

ou bien, en y remplaçant μ par $\frac{m - iz}{1 + miz}$,

$$s = C + \frac{p}{2}\left\{\frac{1 + miz}{(m - iz)^2}\sqrt{(1 + m^2)(1 - z^2)} + \mathcal{L}\left[1 + miz + \sqrt{(1 + m^2)(1 - z^2)}\right] - \mathcal{L}(m - iz)\right\}.$$

On voit que la partie réelle et la partie imaginaire se sépareront sans difficulté et que l'arc de nos courbes s'exprimera au moyen des signes $\mathcal{L}$ et arc tang.

La formule (23), donnée pour l'aire d'une courbe, s'applique aussi d'une manière simple. Considérons deux points de la parabole représentés par les droites AA′, BB′ et tels que les tangentes en ces points aient leurs directrices situées dans les mêmes plans $Z=z$ et $Z=\frac{1}{z}\cdot$ Soient AT, BT, A′T′, B′T′ ces directrices, et soient C et C′ les courbes d'intersection de ces plans avec la surface Σ. On aura, en désignant par S et S′ les surfaces comprises entre les droites AB, A′B′ et les arcs des courbes C et C′ situés entre les cordes AB, A′B′ et les tangentes en ces points, la formule

$$\operatorname{surf tr}(\mathrm{ABT}) - z^2 \operatorname{surf tr}(\mathrm{A'B'T'}) = \frac{2}{3}(\mathrm{S} - \mathrm{S'}z^2).$$

Nous terminerons ici ce que nous avions à dire sur les courbes du second degré, et nous allons dire quelques mots de la cycloïde, à cause de la propriété qu'elle possède de pouvoir être rectifiée.

Cycloïde.

On démontre aisément que, si la droite $ax + by = 1$ est tangente à une cycloïde rapportée à son axe et à sa tangente au sommet, r désignant le rayon du cercle générateur, on a entre a et b la relation

$$\tag{47} \operatorname{tang}\frac{b-p}{a} = \frac{b}{a},$$

en posant

$$p = \frac{1}{2r}\cdot$$

Soient h et $\frac{1}{h}$ les distances des directrices de l'axe au plan des xy, et posons

$$p = \frac{m+in}{\sqrt{1-h^2}}\cdot$$

En appliquant ici la méthode connue, on voit qu'il faut éliminer entre les deux équations que l'on obtient en séparant la partie réelle et la partie imaginaire dans l'équation

$$\operatorname{tang}\frac{b(1-hz) - ia(z-h) - (m+in)(1+\lambda iz)}{a(1-hz)+ib(z-h)} = \frac{b(1-hz)-ia(z-h)}{a(1-hz)+ib(z-h)};$$

en résolvant cette équation par rapport à la quantité placée sous le signe tang et, se rappelant que l'on a

$$\operatorname{arc\,tang}(u+iv)=\operatorname{arc\,tang}u+\frac{i}{2}\mathcal{L}\frac{1+v}{1-v},$$

elle peut s'écrire

$$\begin{aligned}&b(1-hz)-ia(z-h)-(m+in)(1+\lambda iz)\\&\quad=[a(1-hz)+ib(z-h)]\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}+\frac{i}{2}\mathcal{L}\frac{(1-h)(1+z)}{(1+h)(1-z)}\right].\end{aligned}$$

Dès lors, l'élimination de λ se fait sans difficulté, et l'on obtient finalement l'équation suivante,

$$\begin{aligned}&mb(1-hz)-na(z-h)-(m^2+n^2)\\&\quad=[ma(1-hz)+nb(z-h)]\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}\\&\qquad+\frac{1}{2}[mb(z-h)+na(1-hz)]\mathcal{L}\frac{(1-h)(1+z)}{(1+h)(1-z)},\end{aligned}$$

qui est l'équation tangentielle de la section faite dans la surface Σ correspondant à la cycloïde par le plan $Z=z$.

Si l'on suppose la cycloïde réelle, il faut faire

$$h=0,\quad n=0;$$

alors l'équation précédente devient

$$b-m=a\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}-\frac{1}{2}bz\mathcal{L}\frac{1+z}{1-z}.$$

Mettons l'équation de la tangente sous la forme

$$x=\alpha y+\beta;$$

l'équation de condition devient alors

$$(48)\quad\left\{\begin{aligned}&-m\alpha(1-hz)-n(z-h)-(m^2+n^2)\beta\\&\quad=-[m(1-hz)-n\alpha(z-h)]\operatorname{arc\,tang}\alpha\\&\qquad+\frac{1}{2}[m\alpha(z-h)+n(1-hz)]\mathcal{L}\frac{(1-h)(1+z)}{(1+h)(1-z)}.\end{aligned}\right.$$

Cette équation (48) donne β en fonction de α; prenons la dérivée par rapport à α pour chercher l'enveloppe de la droite; en remplaçant dans cette dérivée $\frac{d\beta}{d\alpha}$ par $-y$, on a

$$(m^2+n^2)y = m(1-hz) - [m(1-hz) - n\alpha(z-h)]\frac{1}{1+\alpha^2}$$
$$+ n(z-h)\,\text{arc tang}\,\alpha + \frac{1}{2}m(z-h)\,\mathcal{L}\frac{(1-h)(1+z)}{(1+h)(1-z)}.$$

Posons $\alpha = \text{tang}\,u$, l'équation précédente devient

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} (m^2+n^2)y &= m(1-hz)\sin^2 u + n(z-h)\sin u\cos u \\ &\quad + n(z-h)u + \frac{1}{2}m(z-h)\,\mathcal{L}\frac{(1-h)(1+z)}{(1+h)(1-z)}. \end{aligned}\right.$$

En portant cette valeur de y dans l'équation de la droite, on a de même l'expression de l'abscisse d'un point de la courbe en fonction du paramètre u, qui est complètement explicitée, car β est donné en fonction de α par l'équation (48); cette expression est

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} (m^2+n^2)x &= -m(1-hz)\sin u\cos u - n(z-h)\cos^2 u \\ &\quad + m(1-hz)u - \frac{1}{2}n(1-hz)\,\mathcal{L}\frac{(1-h)(1+z)}{(1+h)(1-z)}. \end{aligned}\right.$$

On peut obtenir l'expression de l'arc de cette courbe soit directement en partant des équations (49) et (50), ou bien en partant de l'expression de l'arc de la cycloïde ordinaire, comme nous allons le faire.

On sait qu'en appelant φ l'angle de la tangente en un point d'une cycloïde avec l'axe des y on a

$$(51)\qquad s = -4r\cos\varphi + C.$$

Supposons $z < 1$; on a

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\text{tang}\,u + i\,\dfrac{z-h}{1-hz}}{1 + i\,\text{tang}\,u\,\dfrac{z-h}{1-hz}},$$

d'où l'on déduit

$$\cos\varphi = \frac{\cos u(1-hz) - i(z-h)\sin u}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-h^2}}.$$

En portant cette valeur dans la formule (51), et appliquant la formule (22), on en déduit pour s, qui est l'arc cherché, l'expression suivante :

$$(m^2+n^2)s = -2(1-hz)m\cos u - 2(z-h)n\sin u + C.$$

Ce résultat peut encore s'exprimer géométriquement en traduisant comme nous y sommes habitués ce théorème connu sur l'arc d'une cycloïde : *La longueur de l'arc d'une cycloïde compris entre deux points est le double de la différence des segments des tangentes en ces points compris entre les points de contact et les points de rencontre avec la parallèle à l'axe à laquelle reste tangent le cercle générateur.*

Nous allons terminer cette étude en cherchant l'intersection d'une courbe avec les droites passant par un point.

Pour cela, nous supposerons qu'on ait pris ce point pour origine et qu'on ait transformé l'équation de la courbe en coordonnées polaires. Soit alors

$$f(\rho, \omega) = 0 \tag{52}$$

son équation. L'axe polaire est une droite dont les directrices sont situées à des distances h et $\frac{1}{h}$ du plan des xy.

Soit AA′ la droite représentant l'origine; nous prendrons cette droite pour axe des z, pour origine le point où elle perce le plan des xy, pour axes des x et des y des parallèles aux directrices de l'axe polaire.

Menons par l'origine une droite dont les directrices sont AT, A′T′ situées à des distances z et $\frac{1}{z}$ du plan des xy; considérons le point représenté par la droite TT′; ses coordonnées polaires sont

$$\left\{\begin{aligned} \rho &= \frac{\mathrm{AT}}{\sqrt{1-z^2}} + i\frac{\mathrm{A'T'}}{\sqrt{\left(\frac{1}{z}\right)^2-1}}, \\ \omega &= \operatorname{arc\,tang} \frac{m - i\dfrac{z-h}{1-hz}}{1+im\dfrac{z-h}{1-hz}}, \end{aligned}\right. \tag{53}$$

m désignant le coefficient angulaire de la droite AT.

En portant ces valeurs dans l'équation (52), on exprimera que le point représenté par la droite TT' appartient à la courbe.

Si nous regardons z comme constant, on aura l'équation du lieu des points T en éliminant A'T' entre les deux équations qu'on obtient en séparant dans l'équation (52) la partie réelle et la partie imaginaire; on obtiendrait le lieu des points T' en éliminant AT entre ces deux équations. Soient C et C' ces deux courbes; on voit que la connaissance de ces courbes dans tous les plans parallèles au plan des xy permettra d'obtenir les droites représentant tous les points de la courbe donnée.

Comme application, nous considérerons comme courbe la ligne droite. Nous prendrons l'axe polaire parallèle à la droite; alors l'équation de la droite sera

$$\rho = \frac{d}{\sin\omega}, \tag{54}$$

d désignant la distance des deux droites; posons

$$d = \frac{m' + in'}{\sqrt{1 - h^2}}, \quad m = \operatorname{tang} u.$$

En substituant dans l'équation (54) les valeurs tirées des formules (53), il vient

$$\frac{\mathrm{AT}}{\sqrt{1 - z^2}} + \frac{iz\,\mathrm{A'T'}}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{\sqrt{1 - z^2}\,(m' + in')}{(1 - hz)\sin u - i(z - h)\cos u}.$$

On en déduit, en séparant la partie réelle et la partie imaginaire,

$$\mathrm{AT} = (1 - z^2)\frac{m'(1 - hz)\sin u - n'(z - h)\cos u}{(1 - hz)^2\sin^2 u + (z - h)^2\cos^2 u}.$$

Revenons aux coordonnées rectilignes; la courbe considérée aura pour équation

$$(1 - hz)^2 y^2 + (z - h)^2 x^2 = (1 - z^2)[(1 - hz)m'y - (z - h)n'x].$$

On voit que c'est l'équation d'une ellipse passant par l'origine.

Appliquons ce résultat à la parabole. On sait qu'elle peut être considérée comme l'enveloppe des perpendiculaires menées sur les rayons vecteurs passant par le foyer aux points où ces rayons vecteurs rencontrent une droite fixe. On voit donc que les sections faites dans la surface Σ correspondant à une parabole par les plans parallèles au plan des xy seront susceptibles de la définition géométrique suivante : *Considérons une ellipse et un point* A *sur cette ellipse ; menons par ce point une droite qui rencontre l'ellipse en un second point* B ; *en ce point menons* BT *perpendiculaire à* AB : *l'enveloppe des droites* BT *est la courbe considérée.*