Annales scientifiques de l'É.N.S.

Désiré André

Second mémoire sur la sommation des séries

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 9 (1880), p. 209-226
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1880_2_9__209_0>

SECOND MÉMOIRE

SUR

LA SOMMATION DES SÉRIES,

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

I. — Introduction.

1. Notre premier Mémoire sur la sommation des séries a paru dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure* sous ce titre : *Sommation de certaines séries*. Son but était de faire connaître une formule générale pour sommer toutes les séries convergentes, en nombre infini, dont le terme général affecte une certaine forme donnée.

Ce second Mémoire a un objet tout à fait analogue. Nous nous y proposons de donner la somme de toutes les séries convergentes, en nombre infini, où la forme du terme général se définit par l'égalité

$$U_n = \frac{u_n}{n(n+1)\ldots(n+p-1)} x^n,$$

dans laquelle n désigne un entier quelconque supérieur à zéro et où le numérateur u_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite quelconque.

2. Nous admettrons, dans tout ce qui va suivre, que la fonction de n représentée par le numérateur u_n n'est divisible ni par le dénominateur tout entier, ni par n, ni par $n+p-1$: supposer u_n divisible par le dénominateur tout entier, ce serait réduire la série donnée à une série récurrente proprement dite, c'est-à-dire à une série dont la somme est connue depuis les travaux de Moivre; supposer u_n divisible

soit par n, soit par $n+p-1$, ce serait simplement diminuer d'une unité, sans le dire, la valeur du nombre entier p.

Nous admettrons de même que, dans l'équation génératrice de la série récurrente dont u_n est le terme général, nulle racine n'est d'un degré de multiplicité supérieur à p. Nous y sommes autorisé par ce fait que le cas où cette condition n'est point remplie se ramène, d'une manière facile et pour ainsi dire immédiate, au cas où elle l'est. La possibilité de cette réduction se démontre sans difficulté.

3. C'est par cette démonstration que nous commençons le présent travail.

Aussitôt après, nous donnons une expression remarquable de la fraction

$$\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p-1)},$$

mise sous la forme d'une somme de fractions simples.

Puis nous décomposons le terme général U_n en deux parties, la première ne contenant plus rien du dénominateur $n(n+1)\ldots(n+p-1)$, la seconde en renfermant encore un facteur dans chacun de ses termes.

Nous établissons que la première partie est identiquement nulle et, par suite, que U_n se réduit à la seconde partie.

Nous sommons la série dont cette seconde partie constitue le terme général, et nous obtenons évidemment ainsi la somme de la série proposée.

Nous résumons les résultats obtenus, et, après différentes remarques, nous faisons observer que, connaissant la somme de notre série, nous en pouvons déduire celles de toutes les séries qu'on obtient en prenant, dans la proposée, les termes de deux en deux, de trois en trois, etc.

Ensuite nous appliquons les formules trouvées à la sommation d'une série dont le terme général est tout à fait de la forme que nous avons indiquée.

Enfin, nous les appliquons encore à une série dont le terme général est aussi de cette forme, mais se trouve dans le cas, que nous avons enseigné à réduire, où l'équation génératrice de u_n admet une ou plusieurs racines d'un degré de multiplicité supérieur à p.

II. — Réduction du problème.

4. Comme nous l'avons annoncé (2), le cas où l'équation génératrice de u_n a des racines d'un degré de multiplicité supérieur à p peut toujours se ramener au cas où elle n'a que des racines dont le degré de multiplicité ne dépasse point ce nombre. Il suffit, pour opérer cette réduction, de détacher de la série proposée une certaine série récurrente proprement dite.

5. Considérons, en effet, le numérateur u_n, et désignons par a une racine quelconque de l'équation génératrice de ce numérateur et par α le degré de multiplicité de cette racine. Puisque u_n, par hypothèse, est le terme général d'une série récurrente proprement dite, nous avons, en étendant le $\sum$ ci-dessous à toutes les racines de l'équation génératrice considérée,

$$u_n = \sum \Phi_a(n) a^n,$$

$\Phi_a(n)$ étant un polynôme, entier en n, du degré $\alpha - 1$; et il s'ensuit immédiatement

$$U_n = \sum \frac{\Phi_a(n)}{n(n+1)\ldots(n+p-1)} a^n x^n.$$

Or le dénominateur $n(n+1)\ldots(n+p-1)$, ainsi que le numérateur $\Phi_a(n)$, est un polynôme entier en n. Ordonnons ces deux polynômes par rapport aux puissances décroissantes de n, puis divisons le polynôme numérateur par le polynôme dénominateur. Soient $\Psi_a(n)$ le quotient et $\varphi_a(n)$ le reste. Nous avons

$$\frac{\Phi_a(n)}{n(n+1)\ldots(n+p-1)} = \Psi_a(n) + \frac{\varphi_a(n)}{n(n+1)\ldots(n+p-1)}$$

et, par conséquent,

$$U_n = \sum \Psi_a(n) a^n x^n + \sum \frac{\varphi_a(n)}{n(n+1)\ldots(n+p-1)} a^n x^n.$$

6. Cette expression se compose de deux sommes. La première est le terme général d'une série récurrente proprement dite. La seconde est de la forme même que nous considérons dans ce Mémoire; seulement les numérateurs $\varphi_a(n)$, $\varphi_b(n)$, $\varphi_c(n)$, ... qui y figurent, étant chacun le reste d'une division par le polynôme $n(n+1)\ldots(n+p-1)$, qui est du degré p, sont chacun des polynômes en n, au plus du degré $p-1$. Par conséquent, cette seconde partie est bien de la forme $\frac{u_n}{n(n+1)\ldots(n+p-1)}$, si l'on désigne par u_n le terme général d'une série récurrente proprement dite, dont l'équation génératrice n'admet aucune racine d'un degré de multiplicité supérieur à p. Nous pouvons donc toujours, en détachant de la série donnée une série récurrente proprement dite, ramener le cas où l'équation génératrice de u_n a des racines d'un degré de multiplicité supérieur à p à celui où elle n'en a que d'un degré de multiplicité qui ne dépasse point ce nombre.

7. Quant à la série récurrente que nous détachons, et dont le terme général est donné par l'expression $\sum \Psi_a(n) a^n x^n$, nous pouvons en déterminer facilement la somme.

Il est évident, en effet, que l'équation génératrice de cette série récurrente a pour racines celles, $a, b, c, \ldots$, des racines de la proposée dont le degré de multiplicité était supérieur à p; seulement, comme $\Psi_a(n)$, $\Psi_b(n)$, $\Psi_c(n)$, ... sont des polynômes en n dont les degrés respectifs ne sont plus que $\alpha-1-p$, $\beta-1-p$, $\gamma-1-p$, ..., ces racines a, b, c, ... n'entrent dans cette nouvelle équation génératrice qu'avec les degrés $\alpha-p$, $\beta-p$, $\gamma-p$, ... de multiplicité.

Par conséquent, la série récurrente que nous détachons a pour somme la fraction rationnelle

$$\frac{X}{(1-ax)^{\alpha-p}(1-bx)^{\beta-p}(1-cx)^{\gamma-p}\ldots},$$

où le dénominateur n'est relatif qu'aux seules racines a, b, c, ..., dont le degré de multiplicité était supérieur à p, et où le numérateur est un polynôme entier en x, sans terme constant, au plus du même degré que le dénominateur et dont les coefficients se déterminent à l'aide des premiers termes de la série détachée.

8. Ayant ainsi démontré la possibilité de la réduction annoncée (2) et fait connaître la somme de la série détachée, nous ne considérerons plus, dans tout ce qui va suivre, jusqu'à notre seconde application exclusivement, que le cas simple où, dans l'égalité

$$U_n = \frac{u_n}{n(n+1)\dots(n+p-1)} x^n,$$

le numérateur u_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite, dont l'équation génératrice n'a aucune racine d'un degré de multiplicité supérieur à p.

III. — Décomposition de la fraction $\frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)}$.

9. La fraction rationnelle que nous considérons a, comme on le voit, pour dénominateur le produit de p facteurs en progression arithmétique. Nous allons la décomposer d'abord en fractions présentant à leurs dénominateurs chacune $p-1$ de ces facteurs, puis en fractions en présentant $p-2$, puis $p-3$, et ainsi de suite jusqu'à ce que nous arrivions à des fractions ne contenant plus chacune qu'un seul des facteurs donnés.

10. Nous avons d'abord identiquement

$$\frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)} = \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-2)} - \frac{1}{(n+1)\dots(n+p-1)}\right],$$

et, pour pousser plus loin la décomposition de la fraction donnée, il nous suffit évidemment d'effectuer sur les fractions placées entre crochets, puis sur celles qui en résulteront, et ainsi de suite, des décompositions analogues à celle que présente l'identité que nous venons d'écrire.

Évidemment, en opérant ainsi et nous arrêtant à l'instant où les fractions du second membre n'auront plus chacune que $p-k$ facteurs au dénominateur, nous trouverons une décomposition, que nous appellerons la $k^{ième}$ *décomposition,* où la fraction $\frac{1}{(p-1)(p-2)\dots(p-k)}$ sera en facteur commun et multipliera une suite de $k+1$ fractions, alternativement positives et négatives, dont les dénominateurs seront les produits $n(n+1)\ldots(n+p-k-1)$, $(n+1)(n+2)\ldots(n+p-k)$, $(n+2)(n+3)\ldots(n+p-k+1)$, $\ldots$, $(n+k)(n+k+1)\ldots(n+p-1)$, et dont les numérateurs seront des nombres que nous allons déterminer.

Pour y parvenir, supposons écrits sur une ligne horizontale les $k+1$ numérateurs de notre $k^{\text{ième}}$ décomposition, et au-dessus, à partir de la même verticale de gauche, les k numérateurs de la $(k-1)^{\text{ième}}$. Le passage de la $(k-1)^{\text{ième}}$ décomposition à la $k^{\text{ième}}$, s'effectuant par des identités pareilles à celle qui commence ce paragraphe, il est clair que, dans les deux lignes de numérateurs que nous venons d'écrire, chaque numérateur de la ligne inférieure est égal à celui qui est au-dessus plus celui qui est à la gauche de ce dernier. Donc ces numérateurs se peuvent calculer à l'aide d'un triangle se formant suivant la même loi que celui de Pascal. D'ailleurs, dans la première décomposition, les deux numérateurs sont égaux à l'unité. Donc les nombres de ce triangle sont les mêmes que ceux du triangle de Pascal. Donc les numérateurs de la $k^{\text{ième}}$ décomposition ne sont autre chose que les coefficients de la puissance $k^{\text{ième}}$ du binôme.

Par suite, si nous désignons, comme à l'ordinaire, ces coefficients par les notations C_k^0, C_k^1, C_k^2, C_k^3, $\ldots$, C_k^k, nous avons identiquement

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p-1)}\\
&\quad=\frac{1}{(p-1)\ldots(p-k)}\left[\frac{C_k^0}{n(n+1)\ldots(n+p-k-1)}-\frac{C_k^1}{(n+1)\ldots(n+p-k)}+\cdots\right.\\
&\qquad\qquad\left.\pm\frac{C_k^k}{(n+k)(n+k+1)\ldots(n+p-1)}\right].
\end{aligned}$$

11. On peut remarquer en passant que ces valeurs des numérateurs restent les mêmes lorsque l'on remplace, au dénominateur de la fraction donnée, les p nombres entiers consécutifs qui y figurent par p termes consécutifs d'une progression arithmétique quelconque. On voit par là tout l'intérêt que présente la suite de décompositions que nous venons d'exposer.

12. Cela posé, revenons à la fraction donnée et cherchons à la décomposer en une somme algébrique de fractions n'ayant chacune à son dénominateur qu'un seul des facteurs n, $n+1$, $n+2$, ..., $n+p-1$.

Cette décomposition cherchée n'est que la $(p-1)^{\text{ième}}$ des décompositions que nous venons d'exposer. Pour l'obtenir, il suffit de remplacer k par $p-1$ dans la formule que nous avons trouvée, substitution qui nous donne, sous une forme abrégée, le résultat suivant :

$$\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p-1)} = \frac{1}{(p-1)!}\sum_{0}^{p-1}{}_t (-1)^t \frac{C_{p-1}^t}{n+t},$$

que l'on peut encore, en remplaçant C_{p-1}^t par son expression et en supprimant la factorielle $(p-1)!$, écrire sous cette nouvelle forme :

$$\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p-1)} = \sum_{0}^{p-1}{}_t \frac{(-1)^t}{(p-1-t)!\,t!}\,\frac{1}{n+t}.$$

13. Il s'ensuit immédiatement que le terme général U_n de la série que nous voulons sommer peut s'écrire

$$U_n = \sum_{0}^{p-1}{}_t \frac{(-1)^t}{(p-1-t)!\,t!}\,\frac{u_n x^n}{n+t}.$$

IV. — Décomposition de U_n en deux parties.

14. Nous avons, comme on l'a vu,

$$U_n = \frac{u_n}{n(n+1)\ldots(n+p-1)}x^n,$$

et la fonction de n que nous représentons par u_n est, par définition, le terme général d'une série récurrente proprement dite. Si donc nous désignons, comme précédemment (5), par a l'une quelconque des racines de l'équation génératrice de cette série, que nous appelions α son degré de multiplicité, lequel, par hypothèse, est au plus égal à p, et que nous convenions d'étendre le $\sum$ ci-dessous à toutes les racines de cette équation, nous avons, comme on sait,

$$u_n = \sum \varphi_a(n)\, a^n,$$

$\varphi_a(n)$ étant un polynôme entier en n du degré $\alpha - 1$.

15. On voit ainsi que u_n et par suite U_n sont chacun la somme de plusieurs groupes de termes, correspondant aux différentes racines de l'équation génératrice. Si l'on tient compte de la décomposition de la fraction $\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p-1)}$ en fractions simples, le groupe des termes de U_n qui correspond à la racine a est égal à

$$\sum_{0}^{p-1}{}_t \frac{(-1)^t}{(p-1-t)!\,t!}\,\frac{1}{n+t}\,\varphi_a(n)\,a^n x^n,$$

et le terme général de ce groupe peut s'écrire

$$\frac{(-1)^t}{(p-1-t)!\,t!}\,\frac{\varphi_a(n)}{n+t}\,a^n x^n.$$

16. Divisons le polynôme $\varphi_a(n)$ par $n+t$. Si nous représentons par $\varphi'_a(n)$, $\varphi''_a(n)$, $\varphi'''_a(n)$, ... les dérivées successives de $\varphi_a(n)$ par rapport à n, le quotient de la division sera donné par l'expression

$$\frac{1}{1!}\varphi'_a(-t) + \frac{n+t}{2!}\varphi''_a(-t) + \frac{(n+t)^2}{3!}\varphi'''_a(n) + \ldots + \frac{(n+t)^{\alpha-2}}{(\alpha-1)!}\varphi_a^{(\alpha-1)}(-t),$$

et le reste se réduira simplement à $\varphi_a(-t)$. Si donc encore, pour abréger, nous représentons le quotient par $\psi_a(n,t)$, nous aurons

$$\frac{\varphi_a(n)}{n+t} = \psi_a(n,t) + \frac{\varphi_a(-t)}{n+t}.$$

Conséquemment, si nous convenons d'étendre, dans chacune des expressions ci-dessous, le premier $\sum$ de gauche à toutes les racines de l'équation génératrice, nous pouvons écrire

$$U_n = \sum \sum_{t}^{p-1}_{0} \frac{(-1)^t}{(p-1-t)!\,t!} \psi_a(n,t)\, a^n x^n + \sum \sum_{t}^{p-1}_{0} \frac{(-1)^t}{(p-1-t)!\,t!} \frac{\varphi_a(-t)}{n+t} a^n x^n.$$

17. Le terme général U_n de la série considérée se trouve ainsi décomposé en deux parties : la première, que nous désignerons par V_n, ne renfermant en dénominateur aucun des facteurs $n, n+1, n+2, \ldots, n+p-1$; la seconde, que nous désignerons par W_n, renfermant l'un d'eux dans chacun de ses termes.

Nous allons montrer que la première partie, V_n, est identiquement nulle.

V. — Calcul de V_n.

18. La première partie V_n du terme général U_n est donnée, comme on l'a vu (16), par l'égalité

$$V_n = \sum \sum_{t}^{p-1}_{0} \frac{(-1)^t}{(p-1-t)!\,t!} \psi_a(n,t)\, a^n x^n,$$

et, par suite, la portion de V_n qui correspond à la seule racine a de l'équation génératrice est égale à l'expression

$$a^n x^n \sum_{t}^{p-1}_{0} \frac{(-1)^t}{(p-1-t)!\,t!} \psi_a(n,t).$$

19. Pour obtenir la valeur de la somme qui, dans cette expression, multiplie $a^n x^n$, nous allons rappeler d'abord une identité bien connue.

Soient $f(t)$ un polynôme entier en t, au plus du degré $p-2$, et $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{p-1}$ des nombres quelconques, dont la quotité est p. L'identité que nous rappelons, et que l'on désigne souvent sous le nom d'*identité de Lagrange*, est celle-ci :

$$\frac{f(t_0)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)\ldots(t_0-t_{p-1})} + \frac{f(t_1)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)\ldots(t_1-t_0)} + \cdots + \frac{f(t_{p-1})}{(t_{p-1}-t_0)(t_{p-1}-t_1)\ldots(t_{p-1}-t_{p-2})} = 0.$$

Nous la regardons comme connue et n'en reproduisons pas la démonstration.

20. Revenons à la somme qui multiplie $a^n x^n$ dans l'expression (**18**) de la partie de V_n qui est relative à la racine a. Dans cette expression, $\psi_a(n, t)$ est un polynôme entier en t, que nous avons donné précédemment (**16**), et dont le degré par rapport à t est inférieur d'une unité au degré de $\varphi_a(n)$ par rapport à n. Or, comme l'équation génératrice de u_n n'a que des racines d'un degré de multiplicité non supérieur à p, le polynôme $\varphi_a(n)$ est au plus du degré $p-1$. Donc $\psi_a(n, t)$ est au plus, par rapport à t, du degré $p-2$. Donc, dans l'identité que nous venons de rappeler (**19**), nous pouvons remplacer $f(t)$ par $\psi_a(n, t)$.

Cette substitution opérée, donnons aux p nombres $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{p-1}$ les p valeurs respectives $0, 1, 2, \ldots, p-1$. Notre identité, après qu'on en a divisé les deux membres par $(-1)^{p-1}$, se réduit à

$$\frac{\psi_a(n, 0)}{(p-1)!} - \frac{\psi_a(n, 1)}{1!(p-2)!} + \frac{\psi_a(n, 2)}{2!(p-3)!} - \cdots = 0,$$

c'est-à-dire à

$$\sum_0^{p-1}{}_t \frac{(-1)^t \psi_a(n, t)}{(p-1-t)!\,t!} = 0,$$

et nous voyons ainsi que la portion de V_n qui correspond à la racine a est identiquement nulle.

Il en est de même de celles qui correspondent à toutes les autres racines de l'équation génératrice, et, par conséquent, V_n tout entier est identiquement nul.

21. Nous voyons, par ce qui précède, que le terme général U_n se réduit à sa seconde partie, c'est-à-dire à W_n. Le problème qui fait l'objet du présent Mémoire est donc ramené à la sommation de la série dont W_n constitue le terme général.

VI. — Sommation de la série W_n.

22. Le terme général W_n est défini (**17**) par l'égalité

$$W_n = \sum \sum_0^{p-1}{}_t \frac{(-1)^t}{(p-1-t)!\,t!} \frac{\varphi_a(-t)}{n+t} a^n x^n,$$

dans laquelle le $\sum$ de gauche s'étend à toutes les racines de l'équation génératrice de la série récurrente dont u_n est le terme général.

La portion de W_n qui correspond à la seule racine a est, par suite, donnée par l'expression

$$\sum_0^{p-1}{}_t \frac{(-1)^t}{(p-1-t)!\,t!} \frac{\varphi_a(-t)}{n+t} a^n x^n.$$

23. Dans cette dernière, considérons en particulier le terme qui suit le $\sum$ et écrivons-le de la manière suivante :

$$\frac{(-1)^t}{(p-1-t)!\,t!} \frac{\varphi_a(-t)}{a^t x^t} \frac{a^{n+t} x^{n+t}}{n+t}.$$

Sous cette forme il est, on le voit, le produit de trois facteurs, dont les deux premiers ne dépendent pas de n, mais dont le dernier en dépend. Ce dernier facteur, lorsqu'on donne à n toutes les valeurs entières depuis l'unité jusqu'à l'infini positif et qu'on additionne les résultats, fournit la série

$$\frac{a^{1+t} x^{1+t}}{1+t} + \frac{a^{2+t} x^{2+t}}{2+t} + \frac{a^{3+t} x^{3+t}}{3+t} + \ldots,$$

laquelle, si l'on y ajoute le polynôme

$$\frac{ax}{1} + \frac{a^2 x^2}{2} + \frac{a^3 x^3}{3} + \ldots + \frac{a^t x^t}{t},$$

n'est autre chose que

$$-\mathrm{L}(1-ax),$$

la lettre L désignant un logarithme népérien.

Donc le terme particulier que nous venons de considérer donne, dans la somme de la série W_n, l'expression

$$\frac{(-1)^{t+1}}{(p-1-t)!\,t!}\,\frac{\varphi_a(-t)}{a^t x^t}\left[\left(\frac{ax}{1}+\frac{a^2x^2}{2}+\ldots+\frac{a^tx^t}{t}\right)+\mathrm{L}(1-ax)\right].$$

24. Par conséquent, la portion de W_n qui correspond à la seule racine a est le terme général d'une série dont la somme est égale à celle des deux expressions

$$\sum_{1}^{p-1}{}_t\,\frac{(-1)^{t+1}}{(p-1-t)!\,t!}\,\frac{\varphi_a(-t)}{a^t x^t}\left(\frac{ax}{1}+\frac{a^2x^2}{2}+\ldots+\frac{a^tx^t}{t}\right),$$

$$\sum_{0}^{p-1}{}_t\,\frac{(-1)^{t+1}}{(p-1-t)!\,t!}\,\frac{\varphi_a(-t)}{a^t x^t}\,\mathrm{L}(1-ax).$$

Par conséquent, enfin, la somme de la série dont W_n est le terme général est égale à celle des deux expressions

$$\sum\sum_{1}^{p-1}{}_t\,\frac{(-1)^{t+1}}{(p-1-t)!\,t!}\,\frac{\varphi_a(-t)}{a^t x^t}\left(\frac{ax}{1}+\frac{a^2x^2}{2}+\ldots+\frac{a^tx^t}{t}\right),$$

$$\sum\sum_{0}^{p-1}{}_t\,\frac{(-1)^{t+1}}{(p-1-t)!\,t!}\,\frac{\varphi_a(-t)}{a^t x^t}\,\mathrm{L}(1-ax),$$

dans chacune desquelles le $\sum$ de gauche s'étend à toutes les racines de l'équation génératrice de la série récurrente donnée.

VII. — Résumé.

25. Comme nous l'avons fait observer déjà (**21**), le terme général U_n se réduit à sa seconde partie, c'est-à-dire à W_n. Par suite, la somme de la série proposée est identique à celle que nous venons d'obtenir, de façon que, si nous posons à la fois

$$S_1 = \sum \sum_1^{p-1}{}_t \frac{(-1)^{t+1}}{(p-1-t)!\,t!} \frac{\varphi_a(-t)}{a^t x^t} \left(\frac{ax}{1} + \frac{a^2 x^2}{2} + \ldots + \frac{a^t x^t}{t} \right),$$

$$S_2 = \sum \sum_0^{p-1}{}_t \frac{(-1)^{t+1}}{(p-1-t)!\,t!} \frac{\varphi_a(-t)}{a^t x^t} \mathrm{L}(1-ax),$$

en étendant le $\sum$ de gauche à toutes les racines de l'équation génératrice, et que nous désignions par S la somme de la série proposée dont U_n est le terme général, nous avons identiquement

$$S = S_1 + S_2.$$

Il est évident que ce résultat résout, de la façon la plus complète, le problème que nous nous étions proposé.

26. On voit ainsi que la somme que nous cherchions se compose d'une première partie S_1, purement algébrique, et d'une seconde partie S_2, à la fois algébrique et logarithmique.

La première n'est, en définitive, qu'un polynôme entier en $\frac{1}{x}$ et, par rapport à $\frac{1}{x}$, du degré $p-2$.

La seconde partie se compose de termes qui correspondent aux différentes racines $a, b, c, \ldots$ de l'équation génératrice donnée, et qui sont chacun le produit de l'un des facteurs $\mathrm{L}(1-ax), \mathrm{L}(1-bx), \mathrm{L}(1-cx), \ldots$ par un polynôme entier en $\frac{1}{x}$ et, par rapport à $\frac{1}{x}$, du degré $p-1$.

27. Il est évident que la partie purement algébrique ne disparaît que dans le seul cas où p est égal à l'unité, mais que, dans ce cas, elle disparaît tout entière.

Quant à la partie logarithmique, elle ne disparaît jamais, car, pour qu'elle disparût, il faudrait que chacune des quantités analogues à $\varphi_a(n)$ s'annulât pour les p valeurs $0, -1, -2, \ldots, -(p-1)$ données à n, c'est-à-dire que u_n fût divisible par le dénominateur donné $n(n+1)\ldots(n+p-1)$, chose qui ne peut avoir lieu, puisque, d'après notre hypothèse initiale (2), chacun de ces polynômes en n est au plus du degré $p-1$, c'est-à-dire est toujours, par rapport à n, d'un degré inférieur au degré du dénominateur. On voit même ainsi qu'aucune partie de S_2 ne peut disparaître, en d'autres termes que l'on trouvera toujours dans S_2 les logarithmes correspondant à toutes les racines de l'équation génératrice.

28. Lorsque x est nul, l'expression de S que nous venons d'écrire (26) prend, comme on le voit, la forme $\infty-\infty$, qui est indéterminée. Mais cette indétermination n'est qu'apparente. Par hypothèse (1), en effet, le nombre n n'est jamais nul; par suite, la série donnée ne contient pas de terme indépendant de x et elle s'annule avec x.

29. Avant de passer aux applications que nous avons promises (3), nous pouvons remarquer que la solution que nous venons de donner du problème que nous nous étions proposé nous permet d'en résoudre une infinité d'autres.

On sait, en effet, que, quand on connaît la somme d'une série convergente, ordonnée suivant les puissances croissantes d'une variable x, on peut en déduire la somme de chacune des séries qu'on obtient en prenant, dans la proposée, les termes de deux en deux, de trois en trois, de quatre en quatre, etc. Il suffit pour cela, on le sait, de multiplier la variable x successivement par les deux racines secondes, ou les trois racines troisièmes, ou les quatre racines quatrièmes, etc., de l'unité, puis d'ajouter les résultats obtenus. Nous avons d'ailleurs exposé ce procédé en détail dans le Mémoire sur *la sommation de certaines séries,* que nous avons rappelé en commençant.

VIII. — Première application.

30. Considérons, pour en déterminer la somme, la série particulière

$$\frac{1^2+1+1}{1.2.3}x+\frac{2^2+2+1}{2.3.4}x^2+\frac{3^2+3+1}{3.4.5}x^3+\ldots,$$

dont le terme général est défini par l'égalité

$$U_n=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)(n+2)}x^n.$$

31. Dans le présent exemple, nous avons évidemment

$$u_n = n^2 + n + 1,$$

que l'on peut écrire

$$u_n = (n^2 + n + 1)1^n.$$

Sous cette nouvelle forme, on voit immédiatement que u_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite, dont l'équation génératrice, laquelle est l'équation

$$(x - 1)^3 = 0,$$

n'a pas de racine d'un degré de multiplicité supérieur à p, qui est ici égal à 3.

Par conséquent, le terme général U_n est bien de la forme que nous considérons, et, pour obtenir la somme S de la série donnée, il nous suffit de calculer successivement S_1 et S_2.

32. Nous avons vu (25) que

$$S_1 = \sum \sum_{1}^{p-1}{}_t \frac{(-1)^{t+1}}{(p-1-t)!\,t!} \frac{\varphi_a(-t)}{a^t x^t} \left(\frac{ax}{1} + \frac{a^2x^2}{2} + \cdots + \frac{a^t x^t}{t} \right).$$

Pour la série particulière dont nous nous occupons, cette égalité s'écrit plus simplement

$$S_1 = \sum_{1}^{2}{}_t \frac{(-1)^{t+1}}{(2-t)!\,t!} \frac{t^2 - t + 1}{x^t} \left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^t}{t} \right).$$

En effectuant les calculs, nous trouvons

$$S_1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\frac{1}{x}.$$

33. Nous avons vu de même (25) que l'on a

$$S_2 = \sum \sum_{0}^{p-1}{}_t \frac{(-1)^{t+1}}{(p-1-t)!\,t!} \frac{\varphi_a(-t)}{a^t x^t} L(1 - ax).$$

Dans le cas actuel, cette égalité se simplifie et devient

$$S_2 = \sum_{0}^{2} {}_t \frac{(-1)^{t+1}}{(2-t)!\,t!} \frac{t^2 - t + 1}{x^t} L(1-x),$$

ou bien, tous calculs effectués,

$$S_2 = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\frac{1}{x^2}\right) L(1-x).$$

34. Donc, si nous appelons S la somme que nous cherchons, c'est-à-dire si nous posons

$$S = \frac{1^2+1+1}{1.2.3} x + \frac{2^2+2+1}{2.3.4} x^2 + \frac{3^2+3+1}{3.4.5} x^3 + \ldots,$$

nous avons, en ajoutant les deux résultats que nous venons d'obtenir,

$$S = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\frac{1}{x^2}\right) L(1-x).$$

Telle est la somme cherchée.

IX. — Seconde application.

35. Cherchons la somme de la série

$$\frac{1^3+2^3}{1.2} x + \frac{2^3+3^3}{2.3} x^2 + \frac{3^3+4^3}{3.4} x^3 + \ldots,$$

dont le terme général est défini par l'égalité

$$U_n = \frac{n^3+(n+1)^3}{n(n+1)} x^n.$$

36. Dans ce nouvel exemple, nous avons évidemment

$$u_n = n^3 + (n+1)^3,$$

égalité qui peut s'écrire aussi

$$u_n = [n^3 + (n+1)^3]1^n.$$

Sous cette nouvelle forme, nous voyons que u_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite, dont l'équation génératrice est

$$(x-1)^4=0.$$

Par conséquent, le terme général U_n de la présente série est bien de la forme considérée. Seulement, comme ici p est égal à 2 et que l'équation génératrice admet une racine quadruple, il importe, avant de calculer S_1 et S_2, d'opérer la réduction que nous avons précédemment (4, 5, ...) étudiée.

37. Divisons donc (5) le numérateur $n^3+(n+1)^3$ par le dénominateur $n(n+1)$. Nous trouvons pour quotient $2n+1$ et pour reste le même binôme $2n+1$, de façon que nous avons

$$U_n=(2n+1)x^n+\frac{2n+1}{n(n+1)}x^n.$$

La première partie du second membre est le terme général d'une série récurrente proprement dite; la deuxième est celui d'une série qui, cette fois, rentre absolument dans la forme donnée (2). Nous sommerons d'abord la série récurrente; nous sommerons ensuite la seconde série, en calculant séparément, pour cette seconde série, les deux quantités S_1, S_2.

38. La série récurrente proprement dite qui a pour terme général la première partie de U_n admet évidemment l'équation génératrice

$$(x-1)^2=0.$$

Par suite, si nous nous rappelons ce que nous avons vu en commençant (7), nous savons que la somme de cette série récurrente est une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{Gx+Hx^2}{(1-x)^2}.$$

Les deux premiers termes du développement de cette fraction sont Gx et $(2G+H)x^2$; les deux premiers termes de la série récurrente sont $3x$ et $5x^2$; en égalant ces valeurs, on trouve

$$G=3,\quad H=-1.$$

Donc la somme de notre série récurrente est la fraction

$$\frac{3x - x^2}{(1 - x)^2}.$$

39. Considérons maintenant la série qui a pour terme général la seconde partie de U_n et calculons en premier lieu S_1. Dans le cas actuel, la formule (25) qui donne S_1 se réduit à celle-ci,

$$S_1 = \sum_{t}\!{}_{1}^{1} \frac{(-1)^{t+1}}{(1-t)!\,t!} \, \frac{-2t+1}{x^t} \left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^t}{t}\right),$$

d'où l'on tire, en effectuant les calculs,

$$S_1 = -1.$$

40. De même la formule (25) qui donne S_2 devient, dans le cas présent,

$$S_2 = \sum_{t}\!{}_{0}^{1} \frac{(-1)^{t+1}}{(1-t)!\,t!} \, \frac{-2t+1}{x^t} \, L(1 - x),$$

et, en effectuant les calculs, nous trouvons

$$S_2 = -\left(1 + \frac{1}{x}\right) L(1 - x).$$

41. Si donc nous posons

$$S = \frac{1^3 + 2^3}{1.2} x + \frac{2^3 + 3^3}{2.3} x^2 + \frac{3^3 + 4^3}{3.4} x^3 + \dots,$$

nous n'avons, pour déterminer la valeur cherchée de S, qu'à ajouter à la fraction rationnelle trouvée plus haut (38) les quantités S_1 et S_2. Nous obtenons ainsi

$$S = \frac{3x - x^2}{(1 - x)^2} - 1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right) L(1 - x).$$

Telle est la somme de la série considérée.

Dijon, 8 novembre 1878.