J. BOURGET

Mémoire sur le mouvement vibratoire des membranes circulaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 3 (1866), p. 55-95
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1866_1_3__55_0>

MÉMOIRE

SUR

LE MOUVEMENT VIBRATOIRE

DES MEMBRANES CIRCULAIRES,

PAR M. J. BOURGET,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLERMONT-FERRAND.

INTRODUCTION.

On connaît depuis longtemps l'équation différentielle du mouvement vibratoire des membranes élastiques; c'est Poisson qui l'a donnée pour la première fois dans son Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques, lu à l'Académie le 14 avril 1828, et inséré dans le tome VIII des *Mémoires de l'Institut*. M. Lamé, par une marche plus simple, est arrivé au même résultat dans ses *Leçons sur l'élasticité*.

L'intégration de cette équation aux dérivées partielles a été effectuée pour divers cas particuliers intéressants. Poisson avait indiqué la marche à suivre quand la membrane est rectangulaire; M. Lamé a complété cette étude, et il a fait connaître la succession des sons que peut rendre une membrane carrée, ainsi que les figures nodales correspondantes. On trouve encore dans son ouvrage le cas des membranes triangulaires équilatérales traité par une méthode élégante qu'il avait déjà employée pour la solution d'un problème sur la chaleur, relatif au prisme triangulaire (*). Poisson s'est occupé des membranes circulaires, mais il n'a pris qu'un cas particulier, celui dans lequel les points de la membrane également éloignés du centre ont le même mouvement; en d'autres termes, il a cherché les divers sons qu'une membrane circulaire peut rendre quand elle se divise en cercles nodaux concentriques. Son analyse permet de trouver non-seulement le rapport

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, t. XIV.

des nombres de vibrations qui correspondent à deux nombres donnés de cercles nodaux, mais encore les rayons de ces cercles.

Tels sont, à ma connaissance, les divers travaux d'analyse connus sur le mouvement vibratoire des membranes.

Des travaux d'un ordre purement expérimental ont été faits sur le même sujet par Savart (*). Cet habile physicien crut s'apercevoir que ces corps peuvent vibrer à l'unisson d'un son quelconque, et que, de plus, on peut passer d'une figure nodale à une autre par une suite continue de déformations naissant de variations continues dans la hauteur du son. Ces résultats sont en contradiction complète avec ceux de la théorie mathématique. Nous avons, M. Félix Bernard et moi, montré, par une série d'expériences faciles à répéter (**), que les lois énoncées par Savart sont erronées, et nous avons même pu découvrir la cause de ses erreurs. Nous avons en outre comparé avec soin la théorie et l'expérience dans le cas des membranes carrées. Cette étude nous a démontré que les lignes nodales se succèdent bien dans l'ordre assigné par le calcul avec les formes générales qu'elles doivent présenter. Toutefois, deux perturbations importantes se manifestent constamment :

1° Les figures nodales sont généralement un peu déformées aux points d'intersection des lignes droites ou courbes qui les déterminent.

2° Deux figures nodales qui devraient se produire à un intervalle musical déterminé sont séparées par un intervalle toujours plus grand.

Les lois de ces perturbations sont compliquées; il importe cependant de les connaître, d'en assigner les causes et l'étendue, pour juger de la valeur des bases de la théorie de l'élasticité et de l'approximation qu'elle peut fournir dans l'étude des lois des phénomènes physiques qui s'y rattachent. Or les cadres des membranes carrées offrent dans les angles des points singuliers qui nous paraissent s'opposer à peu près inévitablement à l'établissement d'une tension uniforme exigée par la théorie; les membranes circulaires nous semblent plus susceptibles de remplir cette condition, et de donner la clef des anomalies signalées plus haut. La nécessité d'avoir, avant toute étude expérimentale, les lois mathématiques du mouvement vibratoire de ces corps a été l'origine du présent travail.

J'ai repris la solution du problème abordé par Poisson, mais je l'ai traité dans toute sa généralité. Je me suis proposé de trouver toutes les figures nodales d'une membrane circulaire en mouvement vibratoire et tous les sons correspondants. Les résultats généraux de mon analyse peuvent s'énoncer ainsi :

1° Les lignes nodales d'une membrane circulaire uniformément tendue ne

(*) *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. XXXII.
(**) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LX.

peuvent être que des cercles concentriques, des diamètres équidistants ou des combinaisons de cercles et de diamètres.

2° Chacun de ces modes de division correspond à un son déterminé différent.

3° Les divers sons possibles d'une membrane circulaire forment une série très-compliquée, à partir du son le plus bas qui correspond au cas où la membrane vibre en totalité. Les nombres des vibrations de ces sons sont tous incommensurables.

La difficulté principale du problème que j'ai résolu consiste dans le calcul des sons possibles de la membrane et des rayons des cercles nodaux correspondants; car ils dépendent d'une équation transcendante compliquée, et ce calcul doit être fait pour un grand nombre de sons et de figures, si l'on veut plus tard procéder à une vérification expérimentale. Je suis parvenu à le rendre simple et facile à l'aide de quelques artifices d'analyse analogues à ceux que l'on emploie en Mécanique céleste pour l'évaluation des transcendantes de Bessel, et les physiciens trouveront à la fin de mon Mémoire des tableaux numériques étendus résumant les lois théoriques du phénomène. Je me suis borné à trois ou quatre figures dans l'évaluation des nombres de vibrations; c'est une limite d'approximation supérieure à celle que l'oreille peut atteindre dans l'évaluation du ton. Les rayons des cercles nodaux sont encore moins approchés, puisque l'emploi du sable pour la détermination de ces figures ne permet pas une mesure plus exacte.

ANALYSE.

§ Ier. — *Équation différentielle. Solutions simples particulières.*

1. L'équation différentielle du mouvement vibratoire d'une membrane élastique est

$$\frac{d^2w}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2}\right) \quad (1)$$

(*), dans laquelle

- w désigne l'écart infiniment petit d'un point quelconque de la membrane, perpendiculairement à la surface supposée primitivement plane;
- x, y les coordonnées d'un point quelconque;
- t le temps;
- c^2 une constante égale à $\frac{F}{\rho}$, F étant la force constante de traction qui s'exerce

(*) *Leçons sur l'élasticité*, par M. Lamé, p. 115.

sur tous les points de contour normalement à la courbe qu'il forme, ρ désignant la masse de l'unité de volume du corps homogène qui constitue la membrane.

2. Cette équation se prête à l'étude du mouvement vibratoire des membranes rectangulaires; mais il convient, pour l'étude des membranes circulaires, de la transformer en coordonnées polaires.

Nous prendrons pour origine fixe le centre de la membrane au repos; traçons par ce point deux axes rectangulaires; désignons par r et θ les coordonnées polaires du point (x, y), nous aurons

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

et les règles générales du changement de variables nous conduiront sans peine à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2 w}{d\theta^2}\right). \tag{2}$$

C'est l'équation à intégrer.

Poisson se borne à considérer l'équation

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right);$$

il suppose donc

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} = 0$$

pendant tout le mouvement : c'est qu'en effet il se borne au cas où w est le même pour tous les points également distants de l'origine, par conséquent au cas où w ne dépend que de t et r.

3. La fonction inconnue w de t, r, θ ne doit pas seulement satisfaire à l'équation différentielle (2), il faut encore qu'elle satisfasse aux *conditions aux limites* et aux *conditions initiales*.

Nous supposerons que la membrane est terminée par un contour fixe de rayon unité; les conditions aux limites sont donc que l'on ait $w = 0$, quel que soit t lorsque $r = 1$.

Nous supposerons la membrane placée au-dessus d'un tuyau ouvert en vibration : l'air vient frapper la surface en repos et imprime à chacun des points une vitesse particulière et généralement variable d'un point à l'autre. Les conditions initiales sont donc que pour $t = 0$ on ait

$$w_0 = 0; \quad \left(\frac{dw}{dt}\right)_0 = \mathrm{F}(r, \theta),$$

$\mathrm{F}(r, \theta)$ désignant une fonction arbitrairement donnée.

4. *Intégration de l'équation par solutions particulières.* — On peut satisfaire à l'équation (2) en posant

$$w = \mathrm{TR}\Theta, \tag{3}$$

T étant fonction de t seulement, R de r, Θ de θ; il suffit que ces fonctions soient des intégrales des équations différentielles ordinaires

$$\frac{d^2\mathrm{T}}{dt^2} + q^2c^2\mathrm{T} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + n^2\Theta = 0, \tag{5}$$

$$\frac{d^2\mathrm{R}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mathrm{R}}{dr} + \left(q^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)\mathrm{R} = 0; \tag{6}$$

q^2 et n^2 sont deux constantes arbitraires; mais il faut :

1° Que Θ redevienne le même lorsque θ croît de 2π; donc n^2 doit être le carré d'un nombre entier, que nous supposerons positif;

2° Que T soit périodique avec le temps et ne croisse pas indéfiniment avec lui; q^2 est donc une constante positive;

3° Que $\mathrm{R} = 0$ lorsque $r = 1$, ce qui lie q à n;

4° Que l'état initial auquel répond cette solution soit un cas particulier de l'état initial général; il faut donc que $\mathrm{T} = 0$ lorsque $t = 0$; et que $\frac{d\mathrm{T}}{dt}$, qui est proportionnel à la vitesse $\frac{dw}{dt}$, acquière une valeur déterminée dans la même hypothèse.

Dans ces conditions, la solution (3) représente un mouvement vibratoire possible de la membrane, répondant à un état initial particulier qu'elle pourrait avoir reçu; nous démontrerons plus loin que le mouvement vibratoire le plus général peut être regardé comme résultant de la superposition d'une infinité de mouvements vibratoires simples de la forme (3); il nous suffit donc d'étudier les propriétés de ce dernier; c'est ce que nous allons faire en détail.

5. *Intégration de l'équation* (4). — L'équation (4) a pour intégrale générale

$$\mathrm{T} = \mathrm{A}\cos qct + \mathrm{B}\sin qct,$$

A et B désignant deux constantes arbitraires; mais, d'après ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, on doit supposer $\mathrm{A} = 0$ et prendre simplement

$$\mathrm{T} = \mathrm{B}\sin qct. \tag{7}$$

B étant une constante arbitraire, on peut ne donner à q que des valeurs positives, sans diminuer la généralité de la solution.

6. *Intégration de l'équation* (5). — L'intégrale générale de l'équation (5) est

$$\Theta = M \cos n\theta + N \sin n\theta,$$

dans laquelle M et N désignent deux constantes arbitraires et n un nombre entier toujours positif, parce qu'il est inutile de le supposer négatif pour la généralité de la solution. Ce nombre devra recevoir successivement les valeurs de la série

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

7. *Intégration de l'équation* (6). — Pour intégrer l'équation

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(q^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) R = 0, \tag{6}$$

on peut suivre deux méthodes, que nous allons exposer successivement.

Intégration par séries. — Cherchons à satisfaire à l'équation (6) par la formule

$$R = A r^\alpha + B r^\beta + C r^\gamma + \ldots,$$

A, B, C,... étant des coefficients constants et α, β, γ,... des exposants croissants différents. Il faut que l'on ait, quel que soit r, l'identité

$$0 = (\alpha^2 - n^2) A r^{\alpha-2} + (\beta^2 - n^2) B r^{\beta-2} + (\gamma^2 - n^2) C r^{\gamma-2} + \ldots + q^2 A r^\alpha + q^2 B r^\beta + q^2 C r^\gamma + \ldots.$$

Or, l'exposant $\alpha - 2$ étant le plus petit de la série, le terme qui lui correspond ne peut se réduire avec aucun autre et doit disparaître de lui-même; donc

$$\alpha^2 = n^2.$$

Les deux exposants les plus faibles qui viennent ensuite sont $\beta - 2$ et α; ils doivent être égaux entre eux, sans quoi A serait nul ou bien β égal à α, hypothèses contraires à celles que nous avons faites au début. On a donc

$$\beta - 2 = \alpha,$$

et par suite

$$(\beta^2 - n^2) B + q^2 A = 0.$$

Ce raisonnement connu peut se continuer indéfiniment, et l'on arrive à la série des égalités suivantes,

$$\begin{array}{ll} & \alpha^2 - n^2 = 0, \\ \beta - 2 = \alpha, & (\beta^2 - n^2) B + q^2 A = 0, \\ \gamma - 2 = \beta, & (\gamma^2 - n^2) C + q^2 B = 0, \\ \delta - 2 = \gamma, & (\delta^2 - n^2) D + q^2 C = 0, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

pour déterminer les constantes α, β, γ,..., A, B, C,....

On tire de ces équations :

$$\alpha = \pm n,$$

$$B = -\frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{(1 \pm n).1} A,$$

$$C = \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^4}{(1 \pm n)(2 \pm n).1.2} A,$$

$$D = -\frac{\left(\frac{q}{2}\right)^6}{(1 \pm n)(2 \pm n)(3 \pm n)\,1.2.3} A, \ldots.$$

La constante A reste arbitraire. Les signes supérieurs se correspondent tous dans les diverses formules; il en est de même des inférieurs. Nous voyons par là que l'équation différentielle (6) est satisfaite par chacune des solutions particulières :

$$(7) \qquad R = A r^n \left[1 - \frac{\left(\frac{qr}{2}\right)^2}{1.(n+1)} + \frac{\left(\frac{qr}{2}\right)^4}{1.2(n+1)(n+2)} - \ldots \right],$$

$$(8) \qquad R_1 = A_1 r^{-n} \left[1 + \frac{\left(\frac{qr}{2}\right)^2}{1.(n-1)} + \frac{\left(\frac{qr}{2}\right)^4}{1.2(n-1)(n-2)} + \ldots \right].$$

La seconde, devenant infinie pour $r = 0$, ne convient pas au problème de physique qui nous occupe; en d'autres termes, comme R est toujours fini, il faut supposer $A_1 = 0$, et l'on doit prendre uniquement

$$(9) \qquad R = A r^n U,$$

en posant

$$(10) \qquad U = 1 - \frac{\left(\frac{qr}{2}\right)^2}{1.(n+1)} + \frac{\left(\frac{qr}{2}\right)^4}{1.2.(n+1)(n+2)} - \ldots.$$

Intégration par intégrale définie. — Nous pouvons exprimer U par une intégrale définie, et par suite transformer l'intégrale R (9) en une autre de forme finie.

On a généralement

$$\cos(\alpha \cos\omega) = 1 - \frac{\alpha^2 \cos\omega}{1.2} + \frac{\alpha^4 \cos^4\omega}{1.2.3.4} - \ldots;$$

multiplions les deux nombres par

$$\sin^{2n}\omega \, d\omega$$

et intégrons de o à π, il viendra

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\omega \cos(\alpha\cos\omega)\,d\omega = \int_0^\pi \sin^{2n}\omega\,d\omega - \frac{\alpha^2}{1.2}\int_0^\pi \sin^{2n}\omega\cos^2\omega\,d\omega + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4}\int_0^\pi \sin^{2n}\omega\cos^4\omega\,d\omega - \ldots.$$

Or, la première des intégrales du second membre peut facilement s'évaluer, et les autres s'y ramènent au moyen de l'intégration par parties; on trouve

$$I_{2n} = \int_0^\pi \sin^{2n}\omega\,d\omega = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\pi,$$

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\omega\cos^2\omega\,d\omega = \frac{1}{2n+2}I_{2n},$$

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\omega\cos^4\omega\,d\omega = \frac{1.3}{(2n+2)(2n+4)}I_{2n},$$

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\omega\cos^6\omega\,d\omega = \frac{1.3.5}{(2n+2)(2n+4)(2n+6)}I_{2n},$$

....;

par conséquent,

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\omega\cos(\alpha\cos\omega)d\omega = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\pi\left[1 - \frac{\alpha^2}{1.2}\,\frac{1}{2n+2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4}\,\frac{1.3}{(2n+2)(2n+4)}\cdots\right],$$

ou bien, en simplifiant,

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\omega\cos(\alpha\cos\omega)\,d\omega = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\pi\left[1 - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1(n+1)} + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4}{1.2(n+1)(n+2)}\cdots\right],$$

Si dans cette expression nous remplaçons α par qr, nous en tirons, sous forme d'intégrale définie, la valeur de la série U (10)

$$(11)\qquad U = \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{2n}\omega\cos(qr\cos\omega)\,d\omega.$$

D'après cette dernière formule, l'intégrale (9) se présente sous forme finie.

8. *Intégrale particulière.* — Si maintenant, à l'aide des valeurs trouvées pour T, Θ, R, nous voulons former la fonction intégrale (3) que nous cherchons, nous trouverons

$$(12)\qquad w = r^n U_n(H\cos n\theta + K\sin n\theta)\sin qct.$$

Nous avons affecté U d'un indice, parce qu'il varie avec n.

Les seules constantes arbitraires sont maintenant H et K. Nous rappelons que cette intégrale particulière est une intégrale complète pour le cas où la vitesse initiale de chacun des points serait donnée par la formule particulière

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_0 = qcr^n \mathrm{U}_n (\mathrm{H} \cos n\theta + \mathrm{K} \sin n\theta),$$

ce qui peut être.

9. *Liaison entre q et n.* — Nous avons dit que ces deux constantes sont fonctions l'une de l'autre, par suite de la condition que w soit nul, quel que soit t, lorsque $r = 1$.

Pour trouver la relation qui lie ces deux quantités, il suffit d'égaler $\mathrm{U} = 0$, après avoir fait $r = 1$; on obtient l'équation transcendante

$$(13) \qquad 0 = 1 - \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{1(n+1)} + \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^4}{1.2(n+1)(n+2)} - \dots.$$

Pour chaque valeur de n, cette équation donne une infinité de valeurs de q formant le tableau théorique suivant :

$$(14) \qquad \left\{\begin{array}{llll} q_0^{(1)} & q_0^{(2)} & q_0^{(3)} \dots q_0^{(s)} & \text{pour } n = 0, \\ q_1^{(1)} & q_1^{(2)} & q_1^{(3)} \dots q_1^{(s)} & \text{pour } n = 1, \\ q_2^{(1)} & q_2^{(2)} & q_2^{(3)} \dots q_2^{(s)} & \text{pour } n = 2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots, \\ q_n^{(1)} & q_n^{(2)} & q_n^{(3)} \dots q_n^{(s)} & \text{pour } n \text{ quelconque}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right.$$

Chacune de ces valeurs de q, unie à la valeur de n correspondante, fournit une solution particulière de la forme (12); nous pouvons les distinguer entre elles par des indices et représenter par $w_n^{(s)}$ la solution qui correspond à $q_n^{(s)}$; nous aurons, en conséquence,

$$(15) \qquad \boxed{w_n^{(s)} = r^n \mathrm{U}_n^{(s)} \left[\mathrm{H}_n^{(s)} \cos n\theta + \mathrm{K}_n^{(s)} \sin \theta\right] \sin q_n^{(s)} ct.}$$

Les diverses solutions particulières s'obtiendront en faisant varier n depuis 0 jusqu'à ∞ et s depuis 1 jusqu'à ∞.

§ II. — *Lois des mouvements vibratoires simples.*

10. *Sons possibles de la membrane.* — Si nous nous reportons à la formule (12) ou à la formule (15), nous voyons que le mouvement simple correspondant à un couple de valeurs de n et de s est périodique; le temps de la période est

$$\mathfrak{T} = \frac{2\pi}{qc};$$

le nombre des vibrations par seconde, qui mesure la hauteur du son, est donc

$$\mathfrak{N} = \frac{c}{2\pi} q.$$

Ainsi, *la constante q mesure la hauteur du son du mouvement vibratoire simple auquel elle correspond.*

Pour classer tous les sons possibles de la membrane, il suffit donc de nommer *ut* le son le plus bas que la membrane peut rendre, et qui correspond à $q_0^{(1)}$, puis de prendre les rapports des autres valeurs de q à celle-là. On pourra alors classer facilement les nouveaux sons dans l'échelle musicale.

11. *Lignes nodales correspondantes aux divers sons.* — Les racines de l'équation (13) sont toutes distinctes, comme nous le démontrerons plus loin; il n'existe donc pas deux mouvements simples différents donnant le même son. Cela posé, nous trouverons la figure nodale affectée par la membrane dans un de ses mouvements simples, en cherchant toutes les fonctions de r et de θ qui annulent w, quel que soit t. Nous obtenons les équations :

$$r^n = 0, \tag{16}$$

$$U_n = 0, \tag{17}$$

$$H \cos n\theta + K \sin n\theta = 0. \tag{18}$$

La première donne $r = 0$, si n est différent de zéro; ainsi, dans ce cas, le centre de la membrane est toujours un point nodal. Si $n = 0$, la figure nodale est donnée par les équations (17) et (18) seules.

L'équation (17) conduit à une série de valeurs de r, différentes de zéro, qui donnent une série de cercles concentriques nodaux. Il faut remarquer que $U_n = 0$ a une infinité de racines, et qu'en posant $qr = \alpha$ elle donne

$$0 = 1 - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1.(n+1)} + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4}{1.2(n+1)(n+2)} - \ldots, \tag{19}$$

équation identique à l'équation (13),

$$0 = 1 - \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{1.(n+1)} + \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^4}{1.2(n+1)(n+2)} - \ldots,$$

qui a servi à déterminer les diverses valeurs de q. Supposons maintenant qu'ayant choisi une valeur pour n, nous ayons pris dans ϖ une des valeurs de q correspondantes, soit $q_n^{(s)}$; en résolvant l'équation (19) en α, nous trouverons

$$\alpha_1 = q_n^{(1)},\quad \alpha_2 = q_n^{(2)},\quad \alpha_3 = q_n^{(3)},\ldots,\quad \alpha_s = q_n^{(s)},\ldots.$$

Pour en déduire les valeurs de r qui déterminent les divers cercles nodaux, nous poserons $q_n^{(s)} r$ égal successivement aux diverses racines α précédentes, et comme r est toujours inférieur à l'unité, la série de nos rayons sera limitée aux suivants :

$$r_1 = \frac{q_n^{(1)}}{q_n^{(s)}},\quad r_2 = \frac{q_n^{(2)}}{q_n^{(s)}},\quad r_3 = \frac{q_n^{(3)}}{q_n^{(s)}},\ldots,\quad r_s = \frac{q_n^{(s)}}{q_n^{(s)}} = 1.$$

Le dernier rayon r_s est précisément celui de la membrane; il fait évidemment partie de la série des rayons des cercles nodaux. De cette analyse résulte la proposition suivante :

Quelle que soit la valeur de n adoptée, si l'on prend la $s^{\text{ième}}$ valeur de q correspondante, le nombre des cercles nodaux relatif à ce son sera s, en y comprenant le cercle formé par le cadre.

Enfin l'équation (18), en θ seulement, peut se mettre sous la forme

$$\tang n\theta = -\frac{H}{K} = \text{const}.$$

Désignons par φ le plus petit des angles positifs ayant $-\frac{H}{K}$ pour tangente, nous aurons pour déterminer les lignes nodales résultant de l'équation précédente

$$\theta = \frac{\varphi}{n} + j\frac{\pi}{n},$$

j désignant un nombre entier positif qui peut être zéro. Cette équation détermine les rayons équidistants :

$$\begin{array}{ll}
\theta_0 = \frac{\varphi}{n}, & \theta_n = \frac{\varphi}{n} + \pi = \theta_0 + \pi, \\
\theta_1 = \frac{\varphi}{n} + \frac{\pi}{n}, & \theta_{n+1} = \frac{\varphi}{n} + \frac{\pi}{n} + \pi = \theta_1 + \pi, \\
\theta_2 = \frac{\varphi}{n} + 2\frac{\pi}{n}, & \theta_{n+2} = \frac{\varphi}{n} + 2\frac{\pi}{n} + \pi = \theta_2 + \pi, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\theta_{n-1} = \frac{\varphi}{n} + (n-1)\frac{\pi}{n}, & \theta_{2n-1} = \frac{\varphi}{n} + (n-1)\frac{\pi}{n} + \pi = \theta_{n-1} + \pi.
\end{array}$$

Ces rayons sont au nombre de $2n$ et peuvent être regardés comme n diamètres équidistants dans leur ensemble. Dans le cas où $n=0$, cet ensemble de lignes nodales disparaît, il ne reste que les cercles concentriques.

En résumé, *les lignes nodales correspondantes aux mouvements simples définis par l'équation* (12) *sont, ou des cercles concentriques, ou des diamètres équidistants, ou des combinaisons de cercles et de diamètres; chacune de ces figures est indéformable.*

12. *Remarque.* — Si pour deux valeurs de n différentes, on avait deux valeurs égales de q, la ligne nodale du son correspondant ne serait plus unique : elle pourrait prendre, par des déformations successives et continues, une infinité de formes. En effet, cette ligne nodale serait, en général,

$$0 = r^n U_n(H\cos n\theta + K\sin n\theta) + r^{n'} U_{n'}(H'\cos n'\theta + K'\sin n'\theta),$$

puisque deux mouvements simples pourraient se produire simultanément et donner le même son. Si en vertu de l'état initial les coefficients H′ et K′ sont nuls, on retombe sur une figure composée de cercles et de diamètres; il en est de même si H et K sont nuls; dans le cas où les deux termes subsistent à la fois, la figure nodale a une forme très-complexe et variable avec les rapports des constantes H, K, H′, K′, qui sont déterminées par l'état initial.

Nous verrons que les nombres q sont tous différents; par suite, la circonstance que nous signalons ne se présente pas *mathématiquement parlant.* Cependant deux valeurs de q, très-voisines, doivent être regardées comme physiquement égales, parce que, d'après nos expériences, les membranes se mettent à l'unisson de sons voisins de ceux qu'elles peuvent rendre. Par là s'explique comment on obtient, sur les membranes circulaires, des figures autres que des cercles et des diamètres. Toutefois, si la théorie mathématique est exacte, ces figures étrangères doivent manquer de netteté, dans le plus grand nombre des cas.

§ III. — *Mouvement vibratoire général.*

13. *Relation entre deux intégrales de l'équation* (6). — Considérons deux valeurs de q différentes correspondantes à une même valeur de n, nous aurons les deux identités

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(q^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0,$$
$$\frac{d^2R'}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR'}{dr} + \left(q'^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R' = 0,$$

en nommant R et R′ les deux fonctions R correspondantes. Nous en déduisons

$$R'\frac{d^2R}{dr^2} - R\frac{d^2R'}{dr^2} + \frac{1}{r}\left(R'\frac{dR}{dr} - R\frac{dR'}{dr}\right) + (q^2 - q'^2)RR' = 0.$$

Multiplions par rdr et intégrons de 0 à 1, il viendra

$$\int_0^1\left(R'\frac{d^2R}{dr^2} - R\frac{d^2R'}{dr^2}\right)rdr + \int_0^1\left(R'\frac{dR}{dr} - R\frac{dR'}{dr}\right)dr + (q^2 - q'^2)\int_0^1 RR'rdr = 0.$$

Intégrons par parties dans le premier terme, nous trouverons

$$\left[\left(R'\frac{dR}{dr} - R\frac{dR'}{dr}\right)r\right]_0^1 - \int_0^1\left(R'\frac{dR}{dr} - R\frac{dR'}{dr}\right)dr,$$

ou

$$-\int_0^1\left(R'\frac{dR}{dr} - R\frac{dR'}{dr}\right)dr,$$

donc on a

$$\int_0^1 RR'rdr = 0, \tag{20}$$

relation caractéristique remarquable à laquelle nous voulions arriver.

14. *Formation de l'intégrale générale par une somme d'intégrales particulières.* — Nous avons vu que la formule (15)

$$w_n^{(s)} = R_n^{(s)}\left[H_n^{(s)}\cos n\theta + K_n^{(s)}\sin n\theta\right]\sin q_n^{(s)}ct$$

nous donne un des mouvements vibratoires possibles de la membrane. Faisons varier n de 0 à ∞ et s de 1 à ∞; ajoutons toutes les solutions correspondantes, nous aurons une nouvelle solution se rapportant à un état initial très-complexe; nous allons démontrer que les diverses constantes H et K peuvent être choisies de manière que l'état initial donné soit identique à celui que fournit la série, quand on y fait $t = 0$. Il suffit pour cela de démontrer qu'on peut avoir l'identité

$$F(r,\theta) = \sum_1^\infty{}_s \sum_0^\infty{}_n q_n^{(s)}cR_n^{(s)}\left[H_n^{(s)}\cos n\theta + K_n^{(s)}\sin n\theta\right],$$

$F(r,\theta)$ désignant une fonction arbitraire qui donne en chaque point la vitesse initiale.

Or, multiplions les deux membres par $R_n^{(s)}r\cos n\theta\, dr\, d\theta$, et intégrons pour θ

de o à 2π, pour r de o à 1, nous aurons simplement

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 F(r,\theta)\,R_n^{(s)}\,r\cos n\theta\,d\theta\,dr = q_n^{(s)}c\pi\,H_n^{(s)}\int_0^1 \left[R_n^{(s)}\right]^2 r\,dr,$$

car : 1° le multiplicateur de $K_n^{(s)}$ est nul, parce que

$$\int_0^{2\pi}\cos n\theta\sin n\theta\,d\theta = 0;$$

2° le multiplicateur de $H_n^{(s')}$ est nul, parce que

$$\int_0^1 R_n^{(s)}R_n^{(s')}\,r\,dr = 0;$$

3° celui de $K_n^{(s')}$ est nul pour la même raison; 4° le multiplicateur de $H_{n'}^{(s')}$ est nul, parce que

$$\int_0^{2\pi}\cos n\theta\cos n'\theta\,d\theta = 0;$$

5° celui de $K_{n'}^{(s')}$ est nul, parce que

$$\int_0^{2\pi}\sin n'\theta\cdot\cos n\theta\,d\theta = 0.$$

Nous verrions de même qu'en multipliant les deux membres par $R_n^{(s)}\,r\sin n\theta\,dr\,d\theta$, et intégrant entre les mêmes limites, on aurait

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 F(r,\theta)\,R_n^{(s)}\,r\sin n\theta\,dr\,d\theta = q_n^{(s)}c\pi\,K_n^{(s)}\int_0^1\left[R_n^{(s)}\right]^2 r\,dr.$$

Supprimons maintenant les indices, et désignons par q l'une quelconque des racines de l'équation (13) correspondante à la valeur choisie pour n; les coefficients H et K, qui déterminent l'amplitude du mouvement vibratoire simple relatif à ce groupe, seront donnés par les formules

(21) $$H = \frac{1}{\pi c q}\,\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1 F(r,\theta)\,R\,r\cos n\theta\,d\theta\,dr}{\displaystyle\int_0^1 R^2 r\,dr},$$

(22) $$K = \frac{1}{\pi c q}\,\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1 F(r,\theta)\,R\,r\sin n\theta\,d\theta\,dr}{\displaystyle\int_0^1 R^2 r\,dr}.$$

Les éléments de l'intégrale dénominateur sont tous positifs; quelques-uns sont nuls, parce que R s'annule entre o et 1 pour certaines valeurs déterminées de r; mais la somme de ceux qui subsistent donne nécessairement un résultat positif différent de zéro.

Les formules (21) et (22) démontrent que l'état vibratoire le plus général que puisse prendre une membrane à la suite d'un état initial quelconque peut être regardé comme résultant de la coexistence d'une infinité de mouvements simples à amplitudes diverses déterminées par l'état initial donné. Chacun de ces mouvements simples correspond à un son particulier, dont la hauteur est donnée par q et dont l'intensité est liée aux constantes H et K. Nous entendrions donc en général une infinité de sons, si la membrane du tympan pouvait vibrer en même temps à l'unisson de tous; mais, comme toute autre membrane, elle doit avoir des harmoniques formant une série spéciale à intervalles déterminés. En général, elle doit se placer instinctivement dans l'état de tension qui convient à la perception du son le plus intense; une fois cette tension acquise, les autres sons seront perçus, s'ils se trouvent dans la série de ses propres harmoniques et si leur intensité n'est pas masquée par celle du premier.

L'expérience démontre que l'intensité des sons rendus par une membrane est toujours assez faible, et que l'on n'entend bien distinctement qu'un son. Le plus souvent, c'est le même que celui du tuyau qui sert à la mettre en vibration; quelquefois, c'est un son différent. Quand on frappe une membrane à l'aide d'un petit marteau de liége, on entend seulement le son fondamental, si la membrane a de petites dimensions; mais si la membrane est grande, on perçoit en même temps, quoique un peu confusément, une foule d'harmoniques, comme la théorie l'indique.

§ IV. — *Calcul numérique des sons et des rayons des cercles nodaux.*

15. *Relation entre trois* U *consécutifs.* — Nous avons vu (9) que pour former la liste des sons possibles de la membrane il faut résoudre l'équation

$$U_n = 1 - \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{1(n+1)} + \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^4}{1.2.(n+1)(n+2)} - \ldots = 0.$$

Un des moyens les plus simples pour effectuer cette résolution consiste à substituer à q des nombres équidistants et à calculer les valeurs correspondantes de U_n; on sépare ainsi les racines, et on en obtient des valeurs approchées par une construction graphique. Si ce travail a été fait pour $n = 0$ et $n = 1$, on peut en déduire les tableaux des valeurs que prennent U_2, U_3, U_4, ... pour les mêmes valeurs de q, au moyen d'une relation qui lie les trois fonctions U_{n-1}, U_n, U_{n+1} pour la même valeur de la variable q.

Nous avons trouvé (7)

$$U_n = \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.2.3\ldots(2n+1)} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{2n}\omega \cos(q\cos\omega)\, d\omega,$$

en faisant $r = 1$. En appliquant au second membre l'intégration par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned} U_n = \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)} \frac{1}{\pi} \Big[(2n-1) \int_0^\pi \sin^{2n-2}\omega \cos(q\cos\omega)\, d\omega \\ - (2n-1) \int_0^\pi \sin^{2n}\omega \cos(q\cos\omega)\, d\omega \\ + q \int_0^\pi \sin^{2n}\omega \cos\omega \sin(q\cos\omega)\, d\omega \Big]. \end{aligned}$$

A la dernière intégrale du second membre appliquons encore l'intégration par parties en regardant les deux premiers facteurs comme une différentielle exacte, nous aurons

$$\begin{aligned} U_n = \frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n-1)} \frac{1}{\pi} \Big[(2n-1) \int_0^\pi \sin^{2n-2}\omega \cos(q\cos\omega)\, d\omega \\ - (2n-1) \int_0^\pi \sin^{2n}\omega \cos(q\cos\omega)\, d\omega \\ + \frac{q^2}{2n+1} \int_0^\pi \sin^{2n+2}\omega \cos(q\cos\omega)\, d\omega \Big]. \end{aligned}$$

De là on tire sans peine

(23) $$U_{n+1} = \frac{n(n+1)}{\left(\frac{q}{2}\right)^2} (U_n - U_{n-1}),$$

ou bien, en posant $x = \left(\frac{q}{2}\right)^2$,

(24) $$U_{n+1} = \frac{n(n+1)}{x} (U_n - U_{n-1}).$$

Il est facile de trouver aussi une expression simple de la dérivée de U_n par rapport à q. En effet, on a d'abord

$$\frac{dU_n}{dq} = -\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{2n}\omega \sin(q\cos\omega) \cos\omega\, d\omega.$$

puis l'intégration par parties donne

$$\frac{dU_n}{dq} = -\frac{q}{2n+2} U_{n+1}. \tag{25}$$

De l'équation (23) on conclut que si deux U consécutifs, U_n, U_{n-1}, s'annulent pour la même valeur α de q, tous les suivants s'annulent pour la même valeur de q. D'un autre côté, si nous différentions les deux membres de l'équation (25) par rapport à q, nous voyons que les dérivées successives de U_n s'expriment en fonction linéaire de U_{n+1}, U_{n+2}, U_{n+3}, ...

Cela posé, il nous est facile de démontrer le théorème suivant, sur lequel nous nous sommes appuyé au n° **12**.

Théorème. — *L'équation* (13) $U_n = 0$ *n'a pas de racines égales; il n'y a pas deux figures nodales différentes qui correspondent au même son.*

En effet, admettons que $U_n = 0$ ait deux racines égales à α; ce nombre, annulant $\frac{dU_n}{dq}$, annulerait aussi U_{n+1}. Mais alors, en vertu de l'équation (23), cette valeur α de q annulerait la série indéfinie des fonctions

$$U_{n+2},\ U_{n+3},\ U_{n-4}, \ldots;$$

par conséquent, en vertu de l'équation (25), la série des dérivées $\frac{d^2U_n}{dq^2}, \frac{d^3U_n}{dq^3}, \ldots$. Il résulterait de ce fait et du théorème de Maclaurin que U_n serait identiquement nul, quel que fût q, ce qui est absurde. Donc enfin $U_n = 0$ n'a pas de racines égales.

17. *Équation différentielle du second ordre à laquelle* U_n *satisfait.* — De l'équation (25) nous tirons

$$\frac{d^2U_n}{dq^2} = \frac{q^2}{(2n+2)(2n+4)} U_{n+2} - \frac{1}{2n+2} U_{n+1};$$

remplaçons U_{n+2} par sa valeur tirée de la relation générale (23) et U_{n+1} par sa valeur tirée de la relation (25), nous obtiendrons, après quelques réductions faciles,

$$\frac{d^2U_n}{dq^2} + \frac{2n+1}{q}\frac{dU_n}{dq} + U_n = 0. \tag{26}$$

Nous pourrions tirer encore cette relation de la valeur même de U_n exprimée en intégrale définie (7).

Nous pouvons imaginer que l'on prenne les dérivées successives des deux membres de l'équation (26), et nous voyons alors que si pour une valeur α de q, U_n et

$\frac{dU_n}{dq}$ étaient nuls, toutes les dérivées successives le seraient aussi. Nous retombons par conséquent sur les conclusions du paragraphe précédent.

Si nous posons

$$U_n = V_n q^{-n-\frac{1}{2}}, \tag{27}$$

l'équation (26) devient

$$\frac{d^2V_n}{dq^2} + \left[1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{q^2}\right] V_n = 0, \tag{28}$$

équation plus simple et identique à celle que Sturm traite à la page 174 de son Mémoire sur les équations différentielles du second ordre (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. I).

En nous rapportant aux conclusions de Sturm, nous pouvons donc dire immédiatement :

1° Si $n = 0$, V et par suite U s'évanouissent pour une infinité de valeurs de q, dont les différences consécutives vont en augmentant et convergent rapidement vers la limite π, sans pouvoir la dépasser; de plus on a pour la différence δ entre deux racines consécutives

$$\delta = \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{1}{4\mu^2}}},$$

μ étant un nombre compris entre les deux racines.

2° Si n est différent de zéro, V et U s'évanouissent encore pour une infinité de valeurs de q, dont les différences diminuent continuellement et tendent vers la constante π, qu'elles surpassent toujours; on a de plus

$$\delta = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{4n^2 - 1}{4\mu^2}}}.$$

Ces relations permettent de calculer très-rapidement les racines de l'équation (13), quand on a obtenu les plus faibles. Considérons, par exemple, le cas de $n = 0$ traité par Poisson. Nous trouvons à la page 522 des *Mémoires de l'Institut,* t. VIII, que les deux premières racines sont

$$q_1 = 2,4047, \quad q_2 = 5,5225;$$

donc la suivante sera

$$q_3 = 5,5225 + \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{1}{4\mu^2}}}.$$

μ est un nombre inconnu compris entre q_2 et q_3, plus grand que 5 par conséquent.

Prenons d'abord π pour correction, et par suite 8,6640 pour q_3; nous aurons une valeur approchée de μ, en prenant la moyenne des deux nombres 5,5225 et 8,6640: cette moyenne est 7,093; substituée dans q_3, elle nous conduit à

$$q_3 = 5,5225 + 3,1353 = 8,6578.$$

Nous trouverons par une autre voie $q_3 = 8,655$, résultat peu différent.

La différence δ peut, à plus forte raison, être regardée comme égale à π, à partir de q_3; par conséquent il est très-facile de trouver les diverses racines de l'équation $U = 0$ quand on connaît les deux ou trois plus faibles.

17. *Intégration de l'équation différentielle qui donne* V *lorsque* q *a une grande valeur.* — L'équation à intégrer est l'équation (28); supprimons l'indice n, elle devient

$$\frac{d^2V}{dq^2} + \left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{q^2}\right)V = 0. \tag{29}$$

Si q a une valeur considérable, le terme $\dfrac{n^2 - \frac{1}{4}}{q^2}$ est négligeable dans une première approximation, et nous avons simplement

$$\frac{d^2V}{dq^2} + V = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$V = P\cos q + Q\sin q.$$

P et Q étant des constantes arbitraires, prenons cette forme pour l'intégrale générale de l'équation complète; il faudra que P et Q satisfassent aux deux équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2P}{dq^2} + 2\frac{dQ}{dq} - \frac{4n^2 - 1}{4q^2}P = 0,\\ &\frac{d^2Q}{dq^2} - 2\frac{dP}{dq} - \frac{4n^2 - 1}{4q^2}Q = 0.\end{aligned}\right.$$

Pour intégrer ces deux dernières équations différentielles, nous suivrons la méthode des coefficients indéterminés, et, en admettant que P et Q soient développables en séries ordonnées suivant les puissances de q, nous poserons

$$P = Aq^m + A_1q^{m-1} + A_2q^{m-2} + \ldots,$$
$$Q = Bq^m + B_1q^{m-1} + B_2q^{m-2} + \ldots.$$

La substitution de ces valeurs dans les équations différentielles précédentes nous conduit aux relations

$$m = 0,$$

$$\begin{aligned}
&\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)A + 2B_1 = 0, &&\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)B - 2A_1 = 0,\\
&\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)A_1 + 4B_2 = 0, &&\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)B_1 - 4A_2 = 0,\\
&\left(n+\frac{5}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)A_2 + 6B_3 = 0, &&\left(n+\frac{5}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)B_2 - 6A_3 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, &&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

dont la loi est évidente.

On voit que toutes les constantes se trouvent déterminées en fonction de A et B, qui restent arbitraires. Posons, pour abréger,

$$\Pi_i = \frac{(2n+i)(2n-i)}{4(i+1)}; \tag{30}$$

nous aurons

$$\left\{\begin{aligned}
&A_1 = \Pi_1 B, &&B_1 = -\Pi_1 A,\\
&A_2 = -\Pi_1 \Pi_3 A, &&B_2 = -\Pi_1 \Pi_3 B,\\
&A_3 = -\Pi_1 \Pi_3 \Pi_5 B, &&B_3 = \Pi_1 \Pi_3 \Pi_5 A,\\
&A_4 = \Pi_1 \Pi_3 \Pi_5 \Pi_7 A, &&B_4 = \Pi_1 \Pi_3 \Pi_5 \Pi_7 B,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, &&\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}\right. \tag{31}$$

et si, changeant de constantes, nous faisons

$$A = H\cos\varphi, \quad B = H\sin\varphi, \tag{32}$$

il viendra

$$\begin{aligned}
&A_1 = H\,\Pi_1 \sin\varphi, &&B_1 = -H\,\Pi_1 \cos\varphi,\\
&A_2 = -H\,\Pi_1 \Pi_3 \cos\varphi, &&B_2 = -H\,\Pi_1 \Pi_3 \sin\varphi,\\
&A_3 = -H\,\Pi_1 \Pi_3 \Pi_5 \sin\varphi, &&B_3 = H\,\Pi_1 \Pi_3 \Pi_5 \cos\varphi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, &&\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

conséquemment,

$$\left\{\begin{aligned}
V = U q^{n+\frac{1}{2}} = \Big[&H\cos(q-\varphi)\left(1 - \frac{\Pi_1\Pi_3}{q^2} + \frac{\Pi_1\Pi_3\Pi_5\Pi_7}{q^4} - \ldots\right)\\
&- H\sin(q-\varphi)\left(\frac{\Pi_1}{q} - \frac{\Pi_1\Pi_3\Pi_5}{q^3} + \frac{\Pi_1\Pi_3\Pi_5\Pi_7\Pi_9}{q^5} - \ldots\right)\Big].
\end{aligned}\right. \tag{33}$$

Il reste à déterminer les deux constantes H et φ introduites par l'intégration.

Pour y arriver, il suffit de prendre la formule qui exprime U au moyen d'une intégrale définie, et de développer directement, par quelque artifice, cette intégrale en une série de termes semblable à celle que donne la formule (33). La comparaison des deux termes qui contiendront la puissance $n+\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{q}$ permettra de trouver A et B, ou, ce qui revient au même, H et φ.

18. *Développement direct de l'intégrale* U *suivant les puissances décroissantes de* q; *détermination des constantes* A *et* B, H *et* φ. — Si nous nous reportons à l'équation (8), qui donne U, nous remarquerons d'abord que l'intégrale

$$\int_0^\pi \sin^{2n}\omega \cos(q\cos\omega)\,d\omega$$

peut être regardée comme formée de deux parties égales chacune à l'intégrale prise de o à $\frac{\pi}{2}$; donc

$$\boxed{U = \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1}\,\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\omega \cos(q\cos\omega)\,d\omega.}$$

Mettons maintenant pour $\cos(q\cos\omega)$ sa valeur en exponentielles imaginaires, il viendra

$$U = \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\,\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\omega\, e^{iq\cos\omega}\,d\omega + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\omega\, e^{-iq\cos\omega}\,d\omega\right).$$

Nous pouvons maintenant développer chacune des intégrales du second membre en suivant la marche de Laplace dans l'évaluation des intégrales qui dépendent de grands nombres, ou de Hansen dans son Mémoire sur les perturbations absolues des planètes.

Première intégrale. — Pour transformer la première, posons

$$iq\cos\omega = iq - y^2;$$

nous en déduisons

$$\cos\omega = 1 - \frac{y^2}{iq},\quad \sin\omega = y\sqrt{\frac{2}{iq}}\sqrt{1-\frac{y^2}{2iq}},$$

$$d\omega = \sqrt{\frac{2}{iq}}\,\frac{dy}{\sqrt{1-\frac{y^2}{2iq}}}.$$

D'ailleurs, pour $\omega = 0$, on a $y = 0$; pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, on a $y = \sqrt{iq}$; donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\omega\, e^{iq\cos\omega}\,d\omega = \left(\frac{2}{iq}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{iq}\int_0^{\sqrt{iq}} y^{2n}\left(1-\frac{y^2}{2iq}\right)^{n-\frac{1}{2}} e^{-y^2}\,dy.$$

Nous apercevons en dehors de l'intégrale du second membre le facteur $q^{-n-\frac{1}{2}}$; donc il nous suffit de chercher le terme indépendant de q dans le développement de l'intégrale

$$\int_0^{\sqrt{iq}} y^{2n}\left(1-\frac{y^2}{2iq}\right)^{n-\frac{1}{2}} e^{-y^2}\,dy.$$

Nous remarquerons d'abord que le binôme $\left(1-\frac{y^2}{2iq}\right)^{n-\frac{1}{2}}$ est développable suivant les puissances du second terme, car ce second terme varie de o à $\frac{1}{2}$. Après ce développement, nous aurons à effectuer une série d'intégrales de la forme

$$\frac{A}{(2iq)^p}\int_0^{\sqrt{iq}} y^{2(n+p)}e^{-y^2}\,dy.$$

Le premier terme de cette série sera

$$\int_0^{\sqrt{iq}} y^{2n}e^{-y^2}\,dy.$$

Considérons cette dernière intégrale qui, à un facteur près, donnera la précédente en y changeant n en $n+p$. Or, l'intégration par parties donne la série des identités

$$\int_0^{\sqrt{iq}} y^{2n}e^{-y^2}\,dy = -\frac{1}{2}(iq)^{\frac{2n-1}{2}}e^{iq}+\frac{2n-1}{2}\int_0^{\sqrt{iq}} y^{2n-2}e^{-y^2}\,dy,$$

$$\int_0^{\sqrt{iq}} y^{2n-2}e^{-y^2}\,dy = -\frac{1}{2}(iq)^{\frac{2n-3}{2}}e^{-iq}+\frac{2n-3}{2}\int_0^{\sqrt{iq}} y^{2n-4}e^{-y^2}\,dy,$$

. . . .

$$\int_0^{\sqrt{iq}} y^{2}e^{-y^2}\,dy = -\frac{1}{2}(iq)^{\frac{1}{2}}e^{-iq}+\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{iq}} e^{-y^2}\,dy;$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{iq}} y^{2n}e^{-y^2}\,dy = -\frac{1}{2}e^{-iq}\Big[(iq)^{n-\frac{1}{2}}+\left(n-\frac{1}{2}\right)(iq)^{n-\frac{3}{2}}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)(iq)^{n-\frac{5}{2}}+\ldots\\ +\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{3}{2}(iq)^{\frac{1}{2}}\Big]\\ +\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\int_0^{\sqrt{iq}} e^{-y^2}\,dy.\end{aligned}$$

La première partie du second membre renferme q et ne nous intéresse pas;

l'intégrale que contient la seconde partie est égale à $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ diminuée d'une série de termes qui renferment tous q en dénominateur (*voir* LACROIX, t. III, p. 507); donc enfin, le seul terme indépendant de q dans cette intégrale est

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Dans le cas où p n'est pas nul, le facteur $\frac{A}{(2iq)^p}$ introduit q à tous les termes, et nous n'avons aucun terme indépendant de q; donc enfin, dans la première intégrale, le coefficient de $q^{-n-\frac{1}{2}}$ est

$$\left(\frac{1}{i}\right)^{n+\frac{1}{2}}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{iq}.$$

DEUXIÈME INTÉGRALE. — Sur la seconde intégrale que renferme U, opérons comme sur la première. Posons

$$-iq\cos\omega = -iq - y^2;$$

nous en déduisons

$$\cos\omega = 1 - \frac{iy^2}{q},\quad \sin\omega = y\sqrt{\frac{2i}{q}}\sqrt{1-\frac{iy^2}{2q}},$$

$$d\omega = \sqrt{\frac{2i}{q}}\,\frac{dy}{\sqrt{1-\frac{iy^2}{2q}}};$$

d'ailleurs, si $\omega = 0$, on a $y = 0$, et si $\omega = \frac{\pi}{2}$, on a $y = \sqrt{\frac{q}{i}}$; donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\omega\, e^{-iq\cos\omega}\,d\omega = \left(\frac{2i}{q}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-iq}\int_0^{\sqrt{\frac{q}{i}}} y^{2n}\left(1-\frac{iy^2}{2q}\right)^{n-\frac{1}{2}} e^{-y^2}\,dy.$$

Les raisonnements faits pour la première nous montrent que le coefficient de $q^{-n-\frac{1}{2}}$, dans le développement du second membre, sera

$$(2i)^{n+\frac{1}{2}}\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2^n}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-iq}.$$

Réunissons maintenant les deux résultats que nous venons d'obtenir, nous en déduirons

$$A\cos q + B\sin q = H\cos(q-\varphi) = 1.2\ldots n\,2^{n-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\left(\frac{1}{i}\right)^{n+\frac{1}{2}}e^{iq} + (i)^{n+\frac{1}{2}}e^{-iq}\right].$$

Mais il est facile de voir que

$$i^{n+\frac{1}{2}} = \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} + i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} = e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}},$$

$$\left(\frac{1}{i}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} - i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} = e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}};$$

donc

$$A\cos q + B\sin q = H\cos(q-\varphi) = 1.2.3\ldots n 2^{n-\frac{1}{2}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos\left[q - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right].$$

La comparaison des deux membres de cette identité nous permet de trouver les valeurs des constantes A, B, H, φ, et nous obtenons

$$(34)\quad \begin{cases} A = 1.2.3\ldots n 2^{n}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{2}, \\ B = 1.2.3\ldots n 2^{n}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

puis

$$(35)\quad \begin{cases} H = 1.2.3\ldots n 2^{n}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}, \\ \varphi = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Dans le cas où $n = 0$, nous avons $A = B = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, et nous retombons sur le résultat trouvé par Poisson (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XII, p. 350).

19. *Détermination des racines de l'équation* $U = 0$. — La formule (10), qui donne U exprimé en une série de termes ordonnés suivant les puissances entières de q, peut servir à séparer les racines de l'équation $U = 0$; il suffit de substituer pour q successivement

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\ \text{etc.},$$

et de calculer les valeurs correspondantes de la fonction U. Ce procédé est praticable pour les faibles valeurs de q; mais il est très-laborieux lorsque cette variable acquiert des valeurs un peu fortes.

Dans ce dernier cas on devra recourir à l'équation (33), qui donne U développé en une série très-convergente, si q a une valeur considérable, car elle se réduit sensiblement à ses deux premiers termes.

La séparation des racines effectuée, leur calcul approché peut se faire d'abord par une construction graphique et ensuite par approximations successives au moyen de la méthode de Newton. Une fois les premières trouvées, la remarque de Sturm faite plus haut permet d'en continuer immédiatement la série.

De la formule (33) nous pouvons tirer facilement une équation qui nous donnera les racines de l'équation $U = 0$ avec la plus grande rapidité. En égalant à o le second membre, nous avons

$$\cot\left[q - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\frac{\Pi_1}{q} - \frac{\Pi_1\Pi_3\Pi_5}{q^3} + \ldots}{1 - \frac{\Pi_1\Pi_3}{q^2} + \frac{\Pi_1\Pi_3\Pi_5\Pi_7}{q^4} - \ldots}.$$

Le second membre peut être mis sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de q; posons en effet

$$\frac{\Pi_1}{q} - \frac{\Pi_1\Pi_3\Pi_5}{q^3} + \frac{\Pi_1\Pi_3\Pi_5\Pi_7\Pi_9}{q^5} - \ldots = \left(1 - \frac{\Pi_1\Pi_3}{q^2} + \frac{\Pi_1\Pi_3\Pi_5\Pi_7}{q^4} - \ldots\right)\left(\frac{\lambda}{q} - \frac{\mu}{q^3} + \frac{\nu}{q^5} - \ldots\right),$$

nous en déduirons

$$(36)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda = \Pi_1, \\ \mu + \lambda\Pi_1\Pi_3 = \Pi_1\Pi_3\Pi_5, \\ \nu + \mu\Pi_1\Pi_3 + \lambda\Pi_1\Pi_3\Pi_5\Pi_7 = \Pi_1\Pi_3\Pi_5\Pi_7\Pi_9, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

et

$$\cot\left[q - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\lambda}{q} - \frac{\mu}{q^3} + \frac{\nu}{q^5} - \ldots,$$

et comme

$$\cot\left[q - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] = -\operatorname{tang}\left[q - \left(n + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right],$$

nous aurons

$$-\operatorname{tang}\left[q - \left(n + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\lambda}{q} - \frac{\mu}{q^3} + \frac{\nu}{q^5} - \ldots;$$

par suite,

$$q - \left(n + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2} = k\pi - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\lambda}{q} - \frac{\mu}{q^3} + \frac{\nu}{q^5} - \ldots\right).$$

Développons enfin le second membre suivant la formule connue, nous aurons l'équation

$$(37)\qquad q = \left(k + \frac{n}{2} + \frac{3}{4}\right)\pi - \frac{\lambda}{q} + \left(\mu + \frac{\lambda^3}{3}\right)\frac{1}{q^3} - \left(\nu + \lambda^2\mu + \frac{\lambda^5}{5}\right)\frac{1}{q^5} + \ldots,$$

qui fera connaître q très-rapidement par la méthode des approximations successives. Dans cette formule, k devra recevoir les valeurs entières à partir de la plus petite pour laquelle q sera positif; on le fera donc successivement égal aux nombres suivants :

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\ldots.$$

On voit que si q est très-grand, la différence entre deux racines est sensiblement égale à π; nous retombons donc sur le résultat donné par la méthode de Sturm.

Nous avons maintenant tous les moyens de calculer les sons qu'une membrane circulaire peut rendre et de contrôler les résultats obtenus; nous donnons dans les tableaux qui suivent les formules qui nous ont servi et les nombres que nous avons trouvés.

Dans le tableau **20** se trouvent les valeurs des diverses constantes qui entrent dans les séries (13), (33), (37); on pourra donc contrôler les résultats numériques suivants avec facilité.

Dans les tableaux **21**, **22**, etc., se trouvent les sons et les lignes nodales qui se rapportent à la membrane circulaire, classés suivant le nombre des diamètres que la figure nodale présente; ainsi le tableau **21**, dans lequel $n = 0$, donne tous les sons possibles de la membrane pour le cas où elle se divise par cercles concentriques; le tableau **22**, dans lequel $n = 1$, donne tous les sons possibles de la membrane pour le cas de figures nodales composées d'un diamètre et de cercles concentriques, etc.

Le son le plus bas que la membrane puisse rendre correspond au cas où elle vibre en totalité sans présenter de figure nodale; nous l'avons nommé *ut* et nous avons pris pour unité le nombre des vibrations correspondant à ce son. Les divers sons de la membrane sont incommensurables; ils ne peuvent donc pas être nommés avec exactitude. Les noms que nous leur avons donnés sont ceux des notes les plus rapprochées de la gamme tempérée. Lorsqu'on trouve deux noms, il faut entendre que le son de la membrane est à peu près à égale distance des deux. Lorsque le nom est suivi du signe +, c'est que le son de la membrane est légèrement supérieur; c'est le contraire si le nom est suivi du signe −.

Le dernier tableau classe les sons de la membrane dans la série des sons d'une gamme tempérée.

20. *Tableau des valeurs numériques des diverses constantes nécessaires au calcul des sons.*

n	0	1	2	3	4	5
$H_1 = \lambda$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{35}{8}$	$\frac{63}{8}$	$\frac{99}{8}$
$H_1 H_3$	$\frac{9}{128}$	$-\frac{15}{128}$	$\frac{105}{128}$	$\frac{945}{128}$	$\frac{3465}{128}$	$\frac{9009}{128}$
$H_1 H_3 H_5$	$-\frac{75}{1024}$	$\frac{105}{1024}$	$-\frac{315}{1024}$	$\frac{3465}{1024}$	$\frac{45045}{1024}$	$\frac{225225}{1024}$
$H_1 H_3 H_5 H_7$	$\frac{3675}{32768}$	$-\frac{4725}{32768}$	$\frac{10395}{32768}$	$-\frac{45045}{32768}$	$\frac{675675}{32768}$	$\frac{11486475}{32768}$
$H_1 H_3 H_5 H_7 H_9$	$-\frac{59535}{262144}$	$\frac{72765}{262144}$	$-\frac{135135}{262144}$	$\frac{405405}{262144}$	$-\frac{2297295}{262144}$	$\frac{43648605}{262144}$
H	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	$2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	$8\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	$48\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	$384\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	$3840\sqrt{\frac{2}{\pi}}$
φ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{4}$
μ	$-\frac{33}{512}$	$\frac{75}{512}$	$-\frac{945}{512}$	$-\frac{14805}{512}$	$-\frac{86625}{512}$	$-\frac{333333}{512}$
ν	$-\frac{3417}{16384}$	$\frac{5715}{16384}$	$\frac{6615}{16384}$	$\frac{3621555}{16384}$	$\frac{72234855}{16384}$	$\frac{682404723}{16384}$
λ	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{35}{8}$	$\frac{63}{8}$	$\frac{99}{8}$
$\mu + \frac{\lambda^3}{3}$	$-\frac{100}{1536}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{45}{128}$	$-\frac{385}{384}$	$-\frac{819}{128}$	$-\frac{2475}{128}$
$\nu + \lambda^2\mu + \frac{\lambda^5}{5}$	$-\frac{1073}{5120}$	$\frac{1899}{5120}$	$-\frac{1485}{1024}$	$-\frac{12145}{1024}$	$-\frac{134001}{5120}$	$-\frac{32373}{5120}$

21. *Sons et lignes nodales dans le cas où $n = 0$.*

FORMULES.

$$U_0 = 1 - \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{1^2} + \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^4}{1^2.2^2} - \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^6}{1^2.2^2.3^2} + \ldots,$$

$$V_0 = U_0 q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(q - \frac{\pi}{4}\right)\left(1 - \frac{9}{128}\frac{1}{q^2} + \frac{3675}{32768}\frac{1}{q^4} - \ldots\right)$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(q - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\frac{1}{q} - \frac{75}{1024}\frac{1}{q^3} + \frac{59535}{262144}\frac{1}{q^5} - \ldots\right)$$

$$q = \left(k + \frac{3}{4}\right)\pi + \frac{1}{8}\frac{1}{q} - \frac{25}{384}\frac{1}{q^3} + \frac{1073}{5120}\frac{1}{q^5} - \ldots.$$

Racines de $U_0 = 0$.	Sons correspondants.		Lignes nodales.
$q_0^{(1)} = 2,404$	1,000	ut_1	$[C_0 D_0]$
$q_0^{(2)} = 5,520$	2,296	$ré_2 \ldots ré_2^{*}$	$[C_1 D_0]$
$q_0^{(3)} = 8,654$	3,600	la_2^{*} +	$[C_2 D_0]$
$q_0^{(4)} = 11,792$	4,905	$ré_3^{*} \ldots mi$	$[C_3 D_0]$
$q_0^{(5)} = 14,931$	6,211	$sol_3 \ldots sol_3^{*}$	$[C_4 D_0]$
$q_0^{(6)} = 18,071$	7,517	si_3	$[C_5 D_0]$
$q_0^{(7)} = 21,212$	8,824	$ut_4^{*} \ldots ré_4$	$[C_6 D_0]$
$q_0^{(8)} = 24,353$	10,130	mi_4 +	$[C_7 D_0]$
$q_0^{(9)} = 27,494$	11,437	fa_4^{*}	$[C_8 D_0]$

RAYONS DES CERCLES NODAUX.

1 cercle.	2 cercles.	3 cercles.	4 cercles.
$r = 0,436$	$r_1 = 0,278$	$r_1 = 0,204$	$r_1 = 0,161$
	$r_2 = 0,638$	$r_2 = 0,468$	$r_2 = 0,370$
		$r_3 = 0,734$	$r_3 = 0,580$
			$r_4 = 0,790$

5 cercles.	6 cercles.	7 cercles.	8 cercles.
$r_1 = 0,133$	$r_1 = 0,113$	$r_1 = 0,099$	$r_1 = 0,087$
$r_2 = 0,305$	$r_2 = 0,260$	$r_2 = 0,227$	$r_2 = 0,201$
$r_3 = 0,479$	$r_3 = 0,408$	$r_3 = 0,355$	$r_3 = 0,315$
$r_4 = 0,653$	$r_4 = 0,556$	$r_4 = 0,484$	$r_4 = 0,429$
$r_5 = 0,826$	$r_5 = 0,704$	$r_5 = 0,613$	$r_5 = 0,543$
	$r_6 = 0,852$	$r_6 = 0,732$	$r_6 = 0,657$
		$r_7 = 0,861$	$r_7 = 0,771$
			$r_8 = 0,886$

22. *Sons et lignes nodales dans le cas où* $n = 1$.

FORMULES.

$$U_1 = 1 - \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^4}{1.2.2.3} - \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^6}{1.2\;3.2.3.4} + \ldots,$$

$$V_1 = U_1 q^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(q - \frac{3\pi}{4}\right)\left(1 + \frac{15}{128}\frac{1}{q^2} - \frac{4725}{32768}\frac{1}{q^4} + \ldots\right),$$

$$-2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(q - \frac{3\pi}{4}\right)\left(\frac{3}{8}\frac{1}{q} - \frac{105}{1024}\frac{1}{q^3} + \frac{72765}{262144}\frac{1}{q^5} \ldots\right.$$

$$q = \left(k + \frac{5}{4}\right)\pi - \frac{3}{8}\frac{1}{q} + \frac{21}{128}\frac{1}{q^3} - \frac{1899}{5120}\frac{1}{q^5} + \ldots,$$

Racines de $U_1 = 0$.	Sons correspondants.		Lignes nodales.
$q_1^{(1)} = 3,832$	1,594	sol_1^{*} +	$[C_0 D_1]$
$q_1^{(2)} = 7,016$	2,918	$fa_2^{*} \ldots sol_2$	$[C_1 D_1]$
$q_1^{(3)} = 10,173$	4,231	ut_3^{*}	$[C_2 D_1]$
$q_1^{(4)} = 13,323$	5,542	$fa_3 \ldots fa_3^{*}$	$[C_3 D_1]$
$q_1^{(5)} = 16,470$	6,851	la_3 +	$[C_4 D_1]$
$q_1^{(6)} = 19,616$	8,160	ut^4 +	$[C_5 D_1]$
$q_1^{(7)} = 22,760$	9,467	$ré_4^{*}$ —	$[C_6 D_1]$
$q_1^{(8)} = 25,903$	10,775	fa_4 +	$[C_7 D_1]$
$q_1^{(9)} = 29,047$	12,082	sol_4	$[C_8 D_1]$

RAYONS DES CERCLES NODAUX.

1 cercle.	2 cercles.	3 cercles.	4 cercles.
$r = 0,546$	$r_1 = 0,377$	$r_1 = 0,288$	$r_1 = 0,233$
	$r_2 = 0,690$	$r_2 = 0,527$	$r_2 = 0,426$
		$r_3 = 0,764$	$r_3 = 0,618$
			$r_4 = 0,809$

5 cercles.	6 cercles.	7 cercles.	8 cercles.
$r_1 = 0,195$	$r_1 = 0,168$	$r_1 = 0,148$	$r_1 = 0,132$
$r_2 = 0,358$	$r_2 = 0,308$	$r_2 = 0,271$	$r_2 = 0,242$
$r_3 = 0,519$	$r_3 = 0,447$	$r_3 = 0,393$	$r_3 = 0,350$
$r_4 = 0,679$	$r_4 = 0,585$	$r_4 = 0,514$	$r_4 = 0,459$
$r_5 = 0,840$	$r_5 = 0,724$	$r_5 = 0,636$	$r_5 = 0,567$
	$r_6 = 0,862$	$r_6 = 0,757$	$r_6 = 0,675$
		$r_7 = 0,879$	$r_7 = 0,784$
			$r_8 = 0,892$

23. *Sons et lignes nodales dans le cas où $n = 2$.*

FORMULES.

$$U_2 = 1 - \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{1.3} + \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^4}{1.2.3.4} - \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^6}{1.2.3.3.4.5} + \ldots,$$

$$V_2 = U_2 q^{\frac{5}{2}} = 8\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(q - \frac{5\pi}{4}\right)\left(1 - \frac{105}{128}\frac{1}{q^2} + \frac{10395}{32768}\frac{1}{q^4} - \ldots\right)$$

$$- 8\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(q - \frac{5\pi}{4}\right)\left(\frac{15}{8}\frac{1}{q} + \frac{315}{1024}\frac{1}{q^3} - \frac{135135}{262144}\frac{1}{q^5} + \ldots\right)$$

$$q = \left(k + \frac{7}{4}\right)\pi - \frac{35}{8}\frac{1}{q} - \frac{385}{384}\frac{1}{q^3} + \frac{12145}{1024}\frac{1}{q^5} - \ldots.$$

Racines de $U_2 = 0$.	Sons correspondants.	Lignes nodales.
$q_2^{(1)} = 5,135$	$2,136$ ut_2^{*} +	$[C_0 D_2]$
$q_2^{(2)} = 8,417$	$3,501$ $la_2 \ldots la_2^{*}$	$[C_1 D_2]$
$q_2^{(3)} = 11,620$	$4,833$ $ré_3^{*}$ +	$[C_2 D_2]$
$q_2^{(4)} = 14,796$	$6,155$ $sol_3 \ldots sol_3^{*}$	$[C_3 D_2]$
$q_2^{(5)} = 17,960$	$7,471$ si_3 —	$[C_4 D_2]$
$q_2^{(6)} = 21,117$	$8,784$ $ut_4^{*} \ldots ré_4$	$[C_5 D_2]$
$q_2^{(7)} = 24,270$	$10,096$ mi_4 +	$[C_6 D_2]$
$q_2^{(8)} = 27,421$	$11,406$ fa_4^{*} +	$[C_7 D_2]$
$q_2^{(9)} = 30,571$	$12,717$ sol_4^{*} +	$[C_8 D_2]$

RAYONS DES CERCLES NODAUX.

1 cercle.	2 cercles.	3 cercles.	4 cercles.
$r = 0,610$	$r_1 = 0,442$	$r_1 = 0,348$	$r_1 = 0,287$
	$r_2 = 0,724$	$r_2 = 0,569$	$r_2 = 0,469$
		$r_3 = 0,785$	$r_3 = 0,647$
			$r_4 = 0,824$

5 cercles.	6 cercles.	7 cercles.	8 cercles.
$r_1 = 0,243$	$r_1 = 0,212$	$r_1 = 0,187$	$r_1 = 0,168$
$r_2 = 0,398$	$r_2 = 0,347$	$r_2 = 0,307$	$r_2 = 0,275$
$r_3 = 0,550$	$r_3 = 0,479$	$r_3 = 0,424$	$r_3 = 0,380$
$r_4 = 0,701$	$r_4 = 0,610$	$r_4 = 0,540$	$r_4 = 0,484$
$r_5 = 0,850$	$r_5 = 0,740$	$r_5 = 0,655$	$r_5 = 0,587$
	$r_6 = 0,870$	$r_6 = 0,770$	$r_6 = 0,691$
		$r_7 = 0,885$	$r_7 = 0,794$
			$r_8 = 0,897$

24. *Sons et lignes nodales dans le cas où $n = 3$.*

FORMULES.

$$U_3 = 1 - \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{1.4} + \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^4}{1.2.4.5} - \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots,$$

$$V_3 = U_3 q^{\frac{1}{2}} = 48\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(q - \frac{7\pi}{4}\right)\left[1 - \frac{945}{128}\frac{1}{q^2} - \frac{45045}{32768}\frac{1}{q^4} + \ldots\right]$$

$$- 48\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(q - \frac{7\pi}{4}\right)\left[\frac{35}{8}\frac{1}{q} - \frac{3465}{1024}\frac{1}{q^3} + \frac{405405}{262144}\frac{1}{q^5} - \ldots\right],$$

$$q = \left(k + \frac{9}{4}\right)\pi - \frac{35}{8}\frac{1}{q} - \frac{385}{384}\frac{1}{q^3} + \frac{12145}{1024}\frac{1}{q^5} - \ldots$$

Racines de $U_3 = 0$.	Sons correspondants.	Lignes nodales.
$q_3^{(1)} = 6,379$	2,653 *fa*$_2$ —	$[C_0 D_3]$
$q_3^{(2)} = 9,760$	4,060 *ut*$_3$ +	$[C_1 D_3]$
$q_3^{(3)} = 13,017$	5,414 *fa*$_3$ +	$[C_2 D_3]$
$q_3^{(4)} = 16,224$	6,748 *la*$_3$ +	$[C_3 D_3]$
$q_3^{(5)} = 19,410$	8,074 *ut*$_4$ +	$[C_4 D_3]$
$q_3^{(6)} = 22,583$	9,394 *ré*$_4^{\#}$ —	$[C_5 D_3]$
$q_3^{(7)} = 25,749$	10,711 *fa*$_4$ +	$[C_6 D_3]$
$q_3^{(8)} = 28,909$	12,025 *sol*$_4$ +	$[C_7 D_3]$
$q_3^{(9)} = 32,050$	13,332 *la*$_4$	$[C_8 D_3]$

RAYONS DES CERCLES NODAUX.

1 cercle.	2 cercles.	3 cercles.	4 cercles.
$r = 0,654$	$r_1 = 0,490$	$r_1 = 0,393$	$r_1 = 0,329$
	$r_2 = 0,750$	$r_2 = 0,602$	$r_2 = 0,503$
		$r_3 = 0,802$	$r_3 = 0,671$
			$r_4 = 0,836$

5 cercles.	6 cercles.	7 cercles.	8 cercles.
$r_1 = 0,282$	$r_1 = 0,248$	$r_1 = 0,221$	$r_1 = 0,199$
$r_2 = 0,432$	$r_2 = 0,379$	$r_2 = 0,338$	$r_2 = 0,305$
$r_3 = 0,576$	$r_3 = 0,506$	$r_3 = 0,450$	$r_3 = 0,406$
$r_4 = 0,718$	$r_4 = 0,630$	$r_4 = 0,561$	$r_4 = 0,506$
$r_5 = 0,859$	$r_5 = 0,754$	$r_5 = 0,671$	$r_5 = 0,606$
	$r_6 = 0,877$	$r_6 = 0,781$	$r_6 = 0,705$
		$r_7 = 0,891$	$r_7 = 0,803$
			$r_8 = 0,901$

25. *Sons et lignes nodales dans le cas où* $n = 4$.

FORMULES.

$$U_4 = 1 - \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{1.5} + \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^4}{1.2.5.6} - \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^6}{1.2.3.5.6.7} + \ldots,$$

$$V_4 = U_4 q^{\frac{9}{2}} = 384\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(q - \frac{9\pi}{4}\right)\left[1 - \frac{3465}{128}\frac{1}{q^2} + \frac{675675}{32768}\frac{1}{q^4}\ldots\right]$$

$$- 384\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(q - \frac{9\pi}{4}\right)\left[\frac{63}{8}\frac{1}{q} - \frac{45045}{1024}\frac{1}{q^3} - \frac{2297495}{262144}\frac{1}{q^5}\ldots\right.$$

$$q = \left(k + \frac{11}{4}\right)\pi - \frac{63}{8}\frac{1}{q} - \frac{819}{128}\frac{1}{q^3} + \frac{134001}{5120}\frac{1}{q^5} + \ldots.$$

Racines de $U_4 = 0$.	Sons correspondants.		Lignes nodales.
$q_4^{(1)} = 7,586$	3,156	*sol*$_2^{*}$	$[C_0 D_4]$
$q_4^{(2)} = 11,064$	4,602	*ré*$_3$... *ré*$_3^{*}$	$[C_1 D_4]$
$q_4^{(3)} = 14,373$	5,979	*sol*$_3$	$[C_2 D_4]$
$q_4^{(4)} = 17,616$	7,328	*la*$_3^{*}$ +	$[C_3 D_4]$
$q_4^{(5)} = 20,827$	8,663	*ut*$_4^{*}$ +	$[C_4 D_4]$
$q_4^{(6)} = 24,018$	9,991	*mi*$_4$	$[C_5 D_4]$
$q_4^{(7)} = 27,200$	11,314	*fa*$_4^{*}$	$[C_6 D_4]$
$q_4^{(8)} = 30,371$	12,634	*sol*$_4^{*}$	$[C_7 D_4]$
$q_4^{(9)} = 33,512$	13,940	*la*$_4^{*}$	$[C_8 D_4]$

RAYONS DES CERCLES NODAUX.

1 cercle.	2 cercles.	3 cercles.	4 cercles.
$r = 0,686$	$r_1 = 0,528$	$r_1 = 0,431$	$r_1 = 0,364$
	$r_2 = 0,770$	$r_2 = 0,627$	$r_2 = 0,531$
		$r_3 = 0,816$	$r_3 = 0,691$
			$r_4 = 0,846$

5 cercles.	6 cercles.	7 cercles.	8 cercles.
$r_1 = 0,316$	$r_1 = 0,279$	$r_1 = 0,250$	$r_1 = 0,227$
$r_2 = 0,460$	$r_2 = 0,407$	$r_2 = 0,364$	$r_2 = 0,330$
$r_3 = 0,598$	$r_3 = 0,528$	$r_3 = 0,473$	$r_3 = 0,430$
$r_4 = 0,733$	$r_4 = 0,647$	$r_4 = 0,579$	$r_4 = 0,525$
$r_5 = 0,866$	$r_5 = 0,765$	$r_5 = 0,685$	$r_5 = 0,622$
	$r_6 = 0,882$	$r_6 = 0,790$	$r_6 = 0,717$
		$r_7 = 0,896$	$r_7 = 0,812$
			$r_8 = 0,907$

ons et lignes nodales dans le cas où $n = 5$.

FORMULES.

$$- \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{1.6} + \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^4}{1.2.6.7} - \frac{\left(\frac{q}{2}\right)^6}{1.2.3.6.7.8} + \ldots,$$

$$\mathrm{U}_5 q^{\frac{11}{2}} = 3840 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(q - \frac{11\pi}{4}\right)\left[1 - \frac{9009}{128}\frac{1}{q^2} + \frac{11486475}{32768}\frac{1}{q^4} - \ldots\right]$$

$$- 3840 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(q - \frac{11\pi}{4}\right)\left[\frac{99}{8}\frac{1}{q} - \frac{225225}{1024}\frac{1}{q^3} + \frac{43648605}{262144}\frac{1}{q^5}\right].$$

$$h + \frac{13}{4}\right)\pi - \frac{99}{8}\frac{1}{q} - \frac{2475}{128}\frac{1}{q^3} + \frac{32373}{5120}\frac{1}{q^5} - \ldots.$$

Racines de $\mathrm{U}_5 = 0$.	Sons correspondants.		Lignes nodales.
$q_5^{(1)} = 8,780$	3,652	*la*$_2^{\#}$ . . . *si*$_2$	[$\mathrm{C}_0 \mathrm{D}_5$]
$q_5^{(2)} = 12,339$	5,133	*mi*$_3$ . . *fa*$_3$	[$\mathrm{C}_1 \mathrm{D}_5$]
$q_5^{(3)} = 15,700$	6,531	*sol*$_3^{\#}$ . . . *la*$_3$	[$\mathrm{C}_2 \mathrm{D}_5$]
$q_5^{(4)} = 18,982$	7,896	*ut*$_4$ —	[$\mathrm{C}_3 \mathrm{D}_5$]
$q_5^{(5)} = 22,220$	9,243	*ré*$_4^{\#}$ —	[$\mathrm{C}_4 \mathrm{D}_5$]
$q_5^{(6)} = 25,431$	10,579	*fa*$_4$ —	[$\mathrm{C}_5 \mathrm{D}_5$]
$q_5^{(7)} = 28,628$	11,908	*sol*$_4$ —	[$\mathrm{C}_6 \mathrm{D}_5$]
$q_5^{(8)} = 31,813$	13,233	*sol*$_4^{\#}$ . . . *la*$_4$	[$\mathrm{C}_7 \mathrm{D}_5$]
$q_5^{(9)} = 34,983$	14,552	*la*$_4^{\#}$ . . . *si*$_4$	[$\mathrm{C}_8 \mathrm{D}_5$]

RAYONS DES CERCLES NODAUX.

1 cercle.	2 cercles.	3 cercles.	4 cercles.
$r = 0,712$	$r_1 = 0,559$	$r_1 = 0,463$	$r_1 = 0,395$
	$r_2 = 0,786$	$r_2 = 0,650$	$r_2 = 0,555$
		$r_3 = 0,827$	$r_3 = 0,706$
			$r_4 = 0,854$

5 cercles.	6 cercles.	7 cercles.	8 cercles.
$r_1 = 0,345$	$r_1 = 0,307$	$r_1 = 0,276$	$r_1 = 0,251$
$r_2 = 0,485$	$r_2 = 0,431$	$r_2 = 0,388$	$r_2 = 0,353$
$r_3 = 0,617$	$r_3 = 0,548$	$r_3 = 0,494$	$r_3 = 0,449$
$r_4 = 0,746$	$r_4 = 0,663$	$r_4 = 0,597$	$r_4 = 0,543$
$r_5 = 0,874$	$r_5 = 0,776$	$r_5 = 0,698$	$r_5 = 0,635$
	$r_6 = 0,888$	$r_6 = 0,799$	$r_6 = 0,727$
		$r_7 = 0,900$	$r_7 = 0,818$
			$r_8 = 0,909$

27. *Tableau des sons possibles d'une membrane circulaire.*

Ire Octave.

GAMME tempérée.	NOMBRE des vibrations.	SONS de la membrane.	LIGNES nodales.
ut	1,000	1,000	$C_0 D_0$
......	.....	.....	....
......	.....	.....	....
sol※ ..	1,597	1,594	$C_0 D_1$
......	.....	.....	....
ut	2		

IIe Octave.

GAMME tempérée.	NOMBRE des vibrations.	SONS de la membrane.	LIGNES nodales.
ut	2		
	2,030		
	2,060		
	2,089		
ut※...	2,118	2,136	$C_0 D_2$
	2,151		
	2,184		
	2,214		
ré	2,244		
	2,275	2,296	$C_1 D_0$
	2,307		
	2,342		
ré※...	2,378		
	2,414		
	2,451		
	2,484		
mi....	2,518		
	2,560		
	2,596		
	2,640	2,653	$C_0 D_3$
fa....	2,670		
	2,710		
	2,750		
	2,790		
fa※...	2,828		
	2,870		
	2,915	2,918	$C_1 D_1$
	2,960		
sol....	2,996		
	3,050		
	3,100		
	3,150	3,156	$C_0 D_4$

IIe Octave (suite).

GAMME tempérée.	NOMBRE des vibrations.	SONS de la membrane.	LIGNES nodales.
sol※ ..	3,174		
	3,220		
	3,265		
	3,315		
la	3,364		
	3,415		
	3,461	3,501	$C_1 D_2$
	3,516		
la※...	3,564	3,600	$C_2 D_0$
	3,620	3,652	$C_0 D_5$
	3,667		
	3,720		
si.....	3,776		
	3,838		
	3,893		
	3,950		
ut	4		

IIIe Octave.

GAMME tempérée.	NOMBRE des vibrations.	SONS de la membrane.	LIGNES nodales.
ut	4,000	4,060	$C_1 D_3$
	4,070		
	4,120	4,150	$C_0 D_6$
	4,176		
ut※...	4,236	4,231	$C_2 D_1$
	4,300		
	4,367		
	4,425		
ré	4,488		
	4,570	4,602	$C_1 D_4$
	4,625		
	4,700		
ré※...	4,756		
	4,825	4,833	$C_2 D_2$
	4,903	4,905	$C_3 D_0$
	4,980		
mi....	5,036		
	5,120	5,133	$C_1 D_5$
	5,191		
	5,275		
fa....	5,340	5,414	$C_2 D_3$
	5,425	5,450	$C_1 D_6$
	5,500	5,542	$C_3 D_1$
	5,580		

IIIe Octave (suite).

GAMME tempérée.	NOMBRE des vibrations.	SONS de la membrane.	LIGNES nodales.
fa※...	5,656		
	5,740		
	5,830		
	5,900		
sol....	5,992	5,979	$C_2 D_4$
	6,075	6,155	$C_3 D_2$
	6,170	6,211	$C_4 D_0$
	6,240		
sol※ ..	6,348		
	6,425	6,531	$C_2 D_5$
	6,541		
	6,620		
la	6,728	6,748	$C_3 D_3$
		6,750	$C_2 D_6$
	6,800	6,851	$C_4 D_1$
	6,932		
	7,000		
la※ ...	7,128		
	7,210	7,328	$C_3 D_4$
	7,344		
	7,425	7,471	$C_4 D_2$
si.....	7,552	7,517	$C_5 D_0$
	7,640		
	7,777		
	7,875		
ut	8,000	7,896	$C_3 D_5$

IVe Octave.

GAMME tempérée.	NOMBRE des vibrations.	SONS de la membrane.	LIGNES nodales.
ut	8,000	8,074	$C_4 D_3$
	8,120	8,160	$C_5 D_1$
	8,240		
	8,360		
ut※...	8,472		
	8,600	8,663	$C_4 D_4$
	8,734	8,784	$C_5 D_2$
	8,860	8,824	$C_6 D_0$
ré	8,976		
	9,120	9,243	$C_4 D_5$
	9,250		

§ V. — *Vérification expérimentale.*

28. Nous avons déjà dit dans l'Introduction que la vérification expérimentale des nombres qui précèdent est très-intéressante pour la théorie de l'élasticité. Les bases de cette science paraissent aujourd'hui solides, mais on a négligé dès le début des quantités regardées comme assez petites pour être sans influence dans l'ordre des phénomènes étudiés. Par là on a simplifié les équations et rendu plus faciles les solutions algébriques des problèmes. Il peut arriver cependant que, dans quelques cas particuliers, les quantités négligées aient une influence notable; on ne peut s'en apercevoir qu'en multipliant les comparaisons entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience. Dans ces cas particuliers, la théorie de l'élasticité se trouvera en présence d'un problème fort intéressant, analogue à celui de la Mécanique céleste, savoir, le calcul des perturbations ou des différences entre les résultats de l'expérience et ceux de l'analyse. L'explication des anomalies montrera sans réplique la justesse des hypothèses faites au début de la théorie de l'élasticité.

L'étude expérimentale du mouvement vibratoire des cordes a fait voir que les perturbations sont insensibles et qu'il y a accord à peu près complet entre le calcul et l'expérience. Celle des membranes carrées nous a révélé au contraire un désaccord marqué; la même perturbation se retrouve-t-elle dans le cas des membranes circulaires?

Un autre intérêt s'ajoute au précédent. Le nom de Savart est justement populaire parmi les physiciens et son habileté expérimentale est connue; or, il dit dans son Mémoire *sur les modes de division des corps en vibration* (*Annales de Chimie et de Physique*, t. XXXII, 1826, p. 388) : *Dans une membrane circulaire, trois lignes diamétrales peuvent passer graduellement à trois lignes parallèles, et ensuite à une seule diamétrale accompagnée d'une ligne circulaire; cinq diamétrales peuvent passer à cinq lignes parallèles, et de là à d'autres modes de division, par exemple, à deux lignes circulaires divisées par une seule diamétrale.* Savart donne des figures à l'appui de son assertion. Ces lois sont manifestement contraires aux lois déduites du calcul, et comme on ne peut pas révoquer en doute la justesse des expériences de cet illustre physicien, il faut savoir s'il a commis quelque erreur de déduction et quelle en est la source.

29. Au début des vérifications expérimentales on rencontre quelque difficulté à réaliser les conditions théoriques suivantes :

1° Homogénéité parfaite de la membrane; 2° tension égale en tous les points. De toutes les substances qu'on peut employer pour les membranes, les papiers à la mécanique m'ont paru les plus homogènes de constitution; j'ai fait usage avec succès de papier végétal, de papier à écrire ordinaire, de papier à dessiner. Il est moins facile d'avoir une tension bien égale, et si l'on ne prend pas les plus grandes précautions, on court le risque de voir se former deux axes d'élasticité qui rendent la membrane comparable à une membrane elliptique. Au reste, on s'en aperçoit immédiatement parce qu'il se forme à sa surface des ellipses nodales au lieu de cercles; et ce qui prouve que ces ellipses n'appartiennent pas aux membranes circulaires bien tendues, c'est qu'elles sont d'autant moins excentriques que la tension est plus uniforme. Le moyen qui m'a paru le plus simple pour atteindre à une tension bien égale, c'est de serrer uniformément la membrane entre deux cadres circulaires identiques s'appliquant exactement l'un sur l'autre.

Ces précautions prises, il convient d'avoir une série de tuyaux d'orgue distants environ d'un demi-ton, et de surmonter chacun d'un ajutage mobile qui permette de faire varier le son par degrés insensibles. Enfin, pour comparer avec facilité les nombres de vibrations qui se rapportent à deux figures nodales, j'ai cherché chaque fois les longueurs de cordes à l'unisson des tuyaux qui les donnaient. L'oreille apprécie facilement les unissons: cette méthode est donc d'une application facile et sûre; d'autre part, les nombres des vibrations sont en raison inverse des longueurs de cordes.

30. Voici maintenant la série des lois physiques que j'ai trouvées pour le mouvement vibratoire des membranes circulaires :

1° Une membrane circulaire ne vibre pas à l'unisson d'un son quelconque. Elle ne peut se mettre à l'unisson que de sons plus élevés que celui qu'elle fait entendre quand on frappe légèrement sur elle avec un petit marteau de liége.

2° Ces sons possibles sont, comme l'indique la théorie, séparés par des intervalles de plus en plus faibles à mesure que l'on s'élève.

3° Les lignes nodales ne se forment nettement que pour ces sons dont la hauteur est déterminée. Un peu en deçà et un peu au delà il y a trouble, et quand le son rendu par le tuyau est modifié sensiblement, la membrane reste inerte et immobile. Les lignes nodales ne se transforment pas les unes dans les autres, comme le croyait Savart, à mesure que le son change.

4° Les lignes nodales sont ou des cercles, ou des diamètres, ou des combinaisons de cercles et de diamètres, comme le veut la théorie. Toutefois, lorsque le nombre des diamètres surpasse deux, le sable s'accumule confusément vers le centre et ne dessine pas bien nettement les figures nodales; mais on peut penser que ces anomalies ne sont qu'apparentes : l'amplitude du mouvement vibratoire est trop faible au sommet des angles pour être accusée par le sable.

Ces quatre lois générales s'accordent avec celles que nous avons vérifiées, M. Félix Bernard et moi, dans le cas des membranes carrées. Les nouvelles expériences dont je résume les résultats démontrent encore bien nettement que la théorie de l'élasticité a raison contre Savart; que chaque système de corps élastiques admet une série déterminée d'harmoniques séparés par des intervalles finis, et que les figures nodales ne se transforment pas les unes dans les autres, lorsque le son varie par degrés insensibles.

On peut, malgré l'absence de tout détail expérimental, trouver la cause de l'erreur de cet habile expérimentateur.

Parmi les membranes étudiées, quelques-unes présentaient probablement deux axes d'élasticité fort différents; il est facile d'en former de pareilles. Dans ce cas il a dû observer des figures hyperboliques, et les branches peuvent être assez ouvertes pour présenter l'aspect de cordes.

D'un autre côté, que l'on se place dans la seconde octave du son fondamental de la membrane, ou dans la troisième, comme l'a fait Savart, et les sons possibles sont déjà assez voisins pour que les figures nodales se produisent successivement à la suite d'une confusion passagère du sable et paraissent se transformer les unes dans les autres. Une fois mis en garde contre cette illusion par la théorie, on aperçoit toujours que deux figures nodales nettes et différentes sont séparées par un état inerte de la membrane dans lequel tout est confus à sa surface.

5° Les lignes nodales ont bien la forme prédite par la théorie, elles en ont de plus les dimensions. J'ai été frappé de voir avec quelle précision le calcul s'accorde avec la mesure directe des diamètres des cercles nodaux formés. Lorsque la membrane est parfaitement tendue, que les cercles dessinés par le sable sont exactement réguliers, l'ouverture calculée d'un compas est bien celle que l'expérience donne, pour les diamètres des cercles. Je dois ajouter, toutefois, que cette évaluation ne comporte pas une approximation relative supérieure à $\frac{1}{100}$, en d'autres termes, sur un diamètre de 100 millimètres, on peut commettre une erreur de 1 millimètre, car les cercles nodaux dessinés par le sable ont au moins 1 millimètre d'épaisseur à la circonférence.

6° Les intervalles musicaux qui séparent deux figures nodales nettes ne sont pas ceux que la théorie indique, ils sont tous plus grands. J'ai nommé *perturbation* l'intervalle musical entre le son réellement rendu et le son théorique. Pour l'évaluer dans chaque cas, voici comment j'ai procédé : la membrane placée au-dessus d'un tuyau présente, par exemple, la figure $C_1 D_0$ bien nette, c'est-à-dire que le sable dessine à sa surface un cercle nodal concentrique au cadre; je cherche la longueur de corde à l'unisson de la membrane, je trouve 1244 millimètres; je cherche ensuite la longueur de la même corde à l'unisson du tuyau, je trouve 634. Ces deux longueurs étant en raison inverse des nombres de vibrations des sons correspondants, l'intervalle des deux sons est $\frac{1244}{634} = 1,97$. D'après la théorie, il devrait être 1,59; donc la membrane présente pour cette figure nodale une perturbation égale à

$$\frac{1,97}{1,59} = 1,24.$$

On voit par cet exemple, choisi parmi mes nombreuses expériences, que la perturbation est très-sensible et que les sons correspondants aux lignes nodales sont plus élevés que la théorie ne l'indique d'une quantité très-appréciable; 1,24 équivaut presque à l'intervalle de *ut* à *mi*.

Voici un tableau qui donne une idée nette de la perturbation que nous signalons; j'ai cru inutile de rapporter toutes les expériences que j'ai faites en variant la grandeur de la membrane et sa nature. Les résultats du tableau suivant se rapportent à la même membrane.

Tableau de quelques résultats d'expérience.

LIGNE NODALE.	LONGUEUR de corde à l'unisson de la membrane.	LONGUEUR de corde à l'unisson du tuyau.	INTERVALLE expérimental.	INTERVALLE théorique.	PERTURBATION.
$[C_0 D_1]$	1244^mm	634^mm	1,97	1,59	1,24
$[C_0 D_2]$	1230	410	3,00	2,14	1,40
$[C_1 D_0]$	1160	356	3,26	2,30	1,42
$[C_0 D_3]$	1150	292	3,94	2,65	1,48
$[C_1 D_1]$	1150	266	4,32	2,92	1,48
$[C_0 D_4]$	1150	240	4,79	3,16	1,51
$[C_1 D_2]$	1152	207	5,56	3,50	1,58
$[C_2 D_0]$	1150	204	5,65	3,60	1,57
$[C_0 D_5]$	1150	202	5,70	3,66	1,56

Ce tableau fait voir que la perturbation augmente à mesure que l'on s'élève dans la série des lignes nodales possibles; ce résultat n'a rien d'étonnant puisque c'est un fait d'expérience que deux lignes nodales quelconques sont en réalité séparées par un intervalle plus grand que ne le veut la théorie.

Il peut paraître étonnant que $(C_0 D_3)$ $(C_1 D_1)$, puis $(C_1 D_2)$ $(C_2 D_0)$ $(C_0 D_5)$ donnent la même perturbation. Il faut attribuer ce résultat à une erreur d'expérimentation. En se rapportant au tableau général des sons possibles, on voit que $(C_0 D_3)$ et $(C_1 D_1)$ doivent être à un intervalle d'un ton environ; ces deux lignes se produisant pour des sons peu différents, les longueurs de corde qui leur correspondent sont peu différentes aussi, et comme l'évaluation de ces longueurs comporte une erreur de 2 ou 3 millimètres, le dernier chiffre de la perturbation n'est qu'approché. Les trois dernières lignes nodales correspondent à peu près au même son, par conséquent on peut, à plus forte raison, commettre sur le dernier chiffre de la perturbation une légère erreur qui masque la loi de son accroissement. On corrigerait ces irrégularités en prenant des moyennes d'expériences nombreuses faites sur la même figure nodale dans les mêmes circonstances et aussi en évaluant la position de cette ligne relativement à une figure autre que $C_0 D_0$.

Dans un travail purement expérimental sur les membranes carrées, rectangulaires et circulaires, nous donnerons les lois physiques de cette perturbation, dont l'existence est mise aujourd'hui hors de doute.

Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. BOURGET *sur le Mouvement des membranes circulaires* (*).

(Commissaires : MM. Pouillet, Duhamel, Serret, Bertrand rapporteur.)

Le Mémoire de M. Bourget est relatif à une question importante de physique mathématique qui déjà, à plusieurs reprises, a attiré l'attention des géomètres. Poisson et notre confrère M. Lamé ont déterminé les divers sons que peut rendre une membrane carrée ou triangulaire. Dans le Mémoire qu'il a soumis au jugement de l'Académie, M. Bourget s'occupe seulement des membranes circulaires uniformément tendues, mais il conserve à la question toute la généralité qu'elle comporte, et ne suppose plus, comme Poisson l'avait fait en abordant le même problème, que les points situés à égale distance du centre soient à chaque instant animés d'un même mouvement.

L'équation différentielle qui représente un tel mouvement a été donnée depuis longtemps; M. Bourget s'applique à l'intégrer en satisfaisant aux conditions particulières que l'on nomme les *conditions aux limites* et les *conditions initiales*, et qui consistent en ce que le déplacement et la vitesse de chaque molécule aient à l'origine du mouvement des valeurs données pour chaque point de la membrane et soient nuls à chaque instant pour les points situés sur le contour.

Suivant la méthode bien connue et souvent appliquée aux questions de ce genre, M. Bourget satisfait d'abord à l'équation aux dérivées partielles, en prenant pour le déplacement de l'un des points le produit de trois fonctions dont chacune con-

(*) Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LX, séance du 5 juin 1865.

tient l'une seulement des trois variables dont il dépend. Deux de ces fonctions ont une forme simple et s'obtiennent aisément; la troisième dépend d'une équation différentielle du second ordre, dont l'intégration sous forme finie ne semble pas possible. M. Bourget, imitant une savante méthode due à Poisson, commence par développer l'intégrale en série dont il exprime ensuite chaque terme, puis la somme elle-même, par une intégrale définie.

Exprimant ensuite l'immobilité des points de la circonférence de la membrane, il en déduit une équation transcendante entre deux constantes que l'intégration laissait arbitraires, et dont l'une est un nombre entier pour chaque valeur duquel l'équation fournit pour l'autre constante un nombre infini de racines. Ce sont elles qui déterminent la hauteur des sons différents que la plaque est susceptible de rendre, et dont le nombre est, comme on voit, doublement infini. Chacun de ces sons, que M. Bourget nomme *simples*, correspond à un mode de division de la plaque dans lequel les lignes nodales sont des diamètres équidistants et des circonférences concentriques dont l'analyse détermine les rayons avec une grande précision. Chacune des intégrales ainsi trouvées est relative à un état initial de forme particulière, et pour satisfaire à la dernière condition, qui suppose un mouvement initial donné et quelconque, il faut ajouter un nombre infini de ces solutions simples en déterminant, comme les géomètres ont coutume de le faire dans les questions de ce genre, les coefficients numériques, arbitraires jusque-là, qui doivent multiplier chaque terme. Cette partie du problème, résolue par une méthode bien des fois employée, présentait cependant ici des difficultés particulières que M. Bourget a surmontées avec beaucoup d'habileté et de bonheur. L'étude de l'équation dont les racines servent à déterminer la loi des mouvements simples est faite également avec une grande élégance, et montre, avec un esprit d'invention qu'il faut signaler, la connaissance approfondie des théories mathématiques les plus élevées. Les résultats très-précis obtenus par M. Bourget sont susceptibles d'être vérifiés expérimentalement, et d'un grand intérêt, par conséquent, pour la théorie de l'élasticité. Les sons calculés, et que l'auteur classe d'après le nombre de diamètres nodaux, sont au nombre de 40; il détermine pour chacun d'eux, avec une grande précision, la hauteur théorique du son et les rayons des cercles nodaux.

Des expériences faites avec beaucoup d'habileté et de conscience confirment une partie seulement des résultats obtenus par le calcul. Nous devons louer l'habile et savant auteur d'avoir signalé avec grand soin les différences régulières et constantes qu'il a observées. Les lignes nodales qu'il obtient sont, comme le veut la théorie, des combinaisons de cercles et de diamètres, qui cependant ne sont nettement dessinés par le sable qui les trace que dans le cas où leur nombre ne surpasse pas 2. Les diamètres des cercles sont ceux que donne la théorie, et les différences très-petites sont de l'ordre des erreurs d'observation. C'est sur la hauteur des sons que le désaccord se manifeste, et les perturbations, trop considérables pour être accidentelles, rendent tous les sons observés plus graves que ceux qu'indique le calcul.

M. Bourget donne loyalement les chiffres observés sans y joindre aucun commentaire; mais les conditions dans lesquelles on opère sont évidemment trop différentes des suppositions théoriques pour que ce désaccord régulier puisse être considéré comme un argument contre la théorie de l'élasticité. L'immobilité absolue de la circonférence qui limite la membrane n'est pas, en effet, et ne peut pas être rigoureusement obtenue, et là sans doute est la cause de l'abaissement de tous les sons.

En résumé, le Mémoire de M. Bourget donne la solution élégante et complète d'un problème difficile et important; il doit intéresser à la fois et au même degré les physiciens et les géomètres, et nous proposons à l'Académie d'en ordonner l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers*.

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.