

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE MATHIEU

Réflexions sur les principes mathématiques de l'électrodynamique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2^e série, tome 9 (1880), p. 187-208

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1880_2_9__187_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉFLEXIONS

SUR LES

PRINCIPES MATHÉMATIQUES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE,

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

Ampère publia en 1823 son célèbre Mémoire dans lequel est donnée la loi de l'action qui s'exerce entre deux éléments de courants (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VI). Wilhelm Weber, plus tard, imagina de considérer l'action de chaque molécule d'électricité positive ou négative d'un des éléments de courant sur chaque molécule d'électricité de l'autre élément de courant, et, par de certaines considérations physiques jointes à la supposition que l'expression analytique de cette action soit d'une forme simple, il devina la loi qui porte son nom; il vérifia ensuite que cette loi s'accorde avec celle d'Ampère (*Mémoires de la Société royale des Sciences de Saxe*, 1846).

Mais ces deux lois, qui avaient été d'abord généralement admises, ont été ensuite niées par divers physiciens. Je citerai, par exemple, le Mémoire de M. Clausius *Sur la déduction d'un nouveau principe d'Électrodynamique*, publié dans le *Journal de Mathématiques* de M. Resal (t. IV, p. 63). M. Clausius y admet que dans un courant voltaïque l'électricité positive est seule en mouvement, tandis que l'électricité négative resterait liée aux atomes pondérables. Alors il fait remarquer que la loi de Weber ne peut plus être admise, parce qu'il en résulterait qu'un courant fermé constant aurait une action motrice sur de l'électricité statique placée dans son voisinage, ce qui est contraire aux faits connus. Par des considérations ingénieuses, il établit ensuite la formule de l'action élémentaire qui s'exercerait, suivant lui, entre deux molécules électriques prises dans deux courants. Mais, d'après la

loi qu'il propose, l'action d'une molécule électrique sur une autre n'aurait pas lieu suivant la droite qui les joint, et l'action de la seconde molécule sur la première ne serait pas une force égale et parallèle en sens contraire à la première action, ce qui paraît peu vraisemblable. Il arrive à de pareilles conséquences pour les actions de deux éléments de courants l'un sur l'autre.

Citons encore la loi que l'on trouve donnée pour l'action entre deux molécules électriques dans les Leçons de Riemann, intitulées *Schwere, Elektrizität und Magnetismus*, publiées en 1876 par Hattendorff. D'après cette loi, les actions de deux molécules électriques l'une sur l'autre seraient égales, parallèles et de sens contraires, mais elles ne seraient pas dirigées suivant la droite qui les joint.

Cette négation de lois admises à peu près universellement autrefois m'a engagé à rechercher quelle pourrait être l'action d'une molécule sur une autre si l'on accepte, dans les mouvements accomplis par les actions des courants, les principes suivants :

- I. Le principe de la conservation de la force vive ;
- II. Le principe de la réaction égale et directement opposée à l'action ;
- III. La supposition que les actions mutuelles de deux éléments de courants parallèles, de même sens et perpendiculaires à la droite qui joint leurs milieux varient en raison inverse du carré de cette distance ;
- IV. La supposition que les actions mutuelles entre deux éléments de courants linéaires donnés, en intensité et en position, ne varient pas avec leurs courbures.

Or voici les résultats auxquels je suis parvenu.

Si l'on suppose que chaque courant soit formé par deux mouvements égaux et opposés des deux électricités positive et négative, l'action entre deux molécules de fluide se compose de deux parties : l'une qui donne la force trouvée par Weber, et l'autre qui renferme une fonction arbitraire. Mais cette seconde partie disparaît dans l'action de deux éléments de courants, qui se trouve être celle que donne la loi d'Ampère. Ensuite, par la condition qu'un courant fermé et constant soit sans action sur de l'électricité statique, la loi de Weber se trouve avoir lieu nécessairement.

Si l'on suppose l'électricité positive seule en mouvement et une même quantité d'électricité négative fixée au corps conducteur, on trouve pareillement que deux molécules électriques ne peuvent agir l'une sur l'autre que suivant la loi de Weber et deux éléments de courants que suivant la loi d'Ampère. Toutefois, d'après cette théorie, un courant fermé constant agirait alors sur de l'électricité statique, à moins qu'on n'admette que l'action de l'électricité de courant sur de l'électricité statique ne peut pas se déduire de l'action de l'électricité de courant sur une pareille électricité, ce qui est peu vraisemblable.

Les principes I, II, III paraissent incontestables; le principe IV, au contraire, n'est pas du tout évident *a priori*. Si donc on voulait à toute force ne pas adopter les lois d'Ampère et de Weber dans l'étude des actions des courants, ce ne pourrait être qu'en mettant de côté seulement le principe IV, et la fin de la recherche qui suit serait seule modifiée.

Sur la forme à donner aux composantes de l'action d'une molécule électrique sur une autre, d'après le principe de la force vive.

1. Considérons d'abord un système de la nature de ceux qu'on a coutume d'examiner en Mécanique, et supposons que le principe de la conservation de la force vive ait lieu. Soient T la demi-force vive de ce système et U la fonction de forces. Si l'on désigne par δ la caractéristique des variations virtuelles, on sait que l'équation

$$(1) \quad \delta f(T + U) dt = 0$$

renferme toutes les équations différentielles du mouvement. Si l'on nomme q_1, q_2, \dots, q_n les variables du problème, et que l'on désigne par

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \dots$$

les équations entre ces variables, exprimant des liaisons indépendantes du temps t , on peut transformer l'équation (1) en un système de n équations de la forme

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \frac{dT}{dq_i} - \frac{dT}{dq_i} = \frac{dU}{dq_i} + \lambda_1 \frac{df_1}{dq_i} + \lambda_2 \frac{df_2}{dq_i} + \dots$$

i étant susceptible des valeurs 1, 2, ..., n et q'_i étant la dérivée de q_i par rapport à t ; $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ sont des fonctions inconnues à déterminer. Nous avons supposé que le principe de la force vive a lieu; mais, réciproquement, des n équations (2), on peut déduire l'équation des forces vives

$$(3) \quad T - U = h,$$

h étant une constante arbitraire.

En effet, multiplions l'équation (2) par dq_i et ajoutons toutes les équations semblables; nous aurons

$$\sum \frac{d}{dt} \frac{dT}{dq_i} dq_i - \sum \frac{dT}{dq_i} dq_i = dU.$$

Or on a

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dq_i} dq_i = d \left(\frac{dT}{dq_i} q'_i \right) - \frac{dT}{dq_i} dq'_i;$$

on a donc

$$(4) \quad \sum d \left(\frac{dT}{dq_i} q'_i \right) - \sum \frac{dT}{dq_i} dq'_i - \sum \frac{dT}{dq_i} dq_i = dU.$$

Comme T est une fonction homogène et du second degré par rapport aux dérivées q'_i , on a

$$\sum \frac{dT}{dq_i} q'_i = 2T;$$

ensuite les deuxième et troisième parties du premier membre de (4) forment $-dT$; on en conclut l'équation

$$dT - dU = 0$$

ou l'intégrale (3) des équations (2).

2. On ne considère généralement, en Mécanique, de forces dépendant des vitesses qu'autant qu'elles représentent des résistances, et alors le principe des forces vives n'a plus lieu. Mais la force qui s'exerce entre deux molécules électriques en mouvement dépend des vitesses de ces molécules, et il y a lieu cependant d'admettre que, dans

les déplacements des molécules électriques provenant de leurs actions mutuelles, le principe des forces vives a lieu néanmoins, c'est-à-dire que, dans le transport d'un système de molécules électriques d'une position dans une autre, le travail ne dépend que des positions initiales et finales de ces molécules et de leurs vitesses initiales et finales, mais aucunement de ces quantités dans le parcours de ces molécules.

Supposons mis en présence des conducteurs mobiles traversés par des courants et proposons-nous de former les équations différentielles du mouvement de ces conducteurs; mais, afin de simplifier la question, supposons ces conducteurs traversés par des courants qui restent permanents, de sorte que chaque partie très petite μ du conducteur renfermera toujours la même quantité d'électricité, bien que cette électricité soit en mouvement.

Soient μ, μ_1 deux particules des conducteurs et m, m_1 les quantités d'électricité qu'elles contiennent; si toutes les molécules d'électricité étaient en repos sur les conducteurs, la fonction de forces U se réduirait à

$$V = - \sum \frac{mm_1}{r},$$

r étant la distance entre m, m_1 . Mais au travail représenté par V il faut en ajouter un autre qui dépend à la fois des coordonnées des molécules et des composantes de leurs vitesses. Soit D la partie du travail électrodynamique qui provient de l'action entre m, m_1 ; ce travail pourra être représenté par ΣD . La première idée qui se présente est de remplacer dans les équations (2) U par $V + \Sigma D$; mais, après cette substitution, les équations (2) ne conduiraient plus au principe de la force vive. Posons

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots,$$

$\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \dots$ étant des fonctions homogènes, la première du premier degré par rapport aux q'_i , la deuxième du deuxième degré, etc. Si nous remplaçons \mathbf{T} par $\mathbf{T} - \mathbf{E}$ dans les équations (2), nous aurons, au lieu de l'équation (4),

$$\begin{aligned} \sum d \left(\frac{d\mathbf{T}}{dq'_i} q'_i \right) - \sum d \left(\frac{d\mathbf{E}_1}{dq'_i} q'_i \right) - \sum d \left(\frac{d\mathbf{E}_2}{dq'_i} q'_i \right) - \sum d \left(\frac{d\mathbf{E}_3}{dq'_i} q'_i \right) - \dots \\ - \sum \frac{d(\mathbf{T} - \mathbf{E})}{dq_i} dq_i - \sum \frac{d(\mathbf{T} - \mathbf{E})}{dq_i} dq_i = dV; \end{aligned}$$

il en résulte, d'après une propriété des fonctions homogènes,

$$\begin{aligned} d(2T) - dE_1 - 2dE_2 - 3dE_3 - \dots - dT + dE &= dV, \\ dT - dE_2 - 2dE_3 - 3dE_4 - \dots &= dV, \end{aligned}$$

$$(5) \quad T = V + E_2 + 2E_3 + 3E_4 + \dots + \text{const.}$$

Par suite du changement de T en $T - E$, les équations (2) deviennent

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \frac{dT}{dq_i} - \frac{dT}{dq_i} = \frac{d}{dt} \frac{dE}{dq_i} - \frac{dE}{dq_i} + \frac{dV}{dq_i} + \lambda_1 \frac{df_1}{dq_i} + \lambda_2 \frac{df_2}{dq_i} + \dots,$$

et, pour que ces équations soient celles du mouvement du système, il faut que, en désignant par X, Y, Z les composantes, suivant les axes des x, y, z des forces appliquées à la particule dont les coordonnées sont x, y, z , on ait

$$\sum \left(X \frac{dx}{dq_i} + Y \frac{dy}{dq_i} + Z \frac{dz}{dq_i} \right) = \frac{d}{dt} \frac{dE}{dq_i} - \frac{dE}{dq_i} + \frac{dV}{dq_i}.$$

Nous pouvons prendre pour les quantités q_1, q_2, \dots, q_n les coordonnées x, y, z des particules μ des conducteurs; alors nous aurons

$$T = \frac{1}{2} \sum \mu (x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

et l'équation (6) devient, en y faisant $q_i = x$,

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{dE}{dx} - \frac{dE}{dx} + \frac{dV}{dx} + \lambda_1 \frac{df_1}{dx} + \lambda_2 \frac{df_2}{dx} + \dots$$

On a donc, pour la composante suivant l'axe des x de toutes les forces appliquées à μ ,

$$(a) \quad X = \frac{d}{dt} \frac{dE}{dx} - \frac{dE}{dx} + \frac{dV}{dx},$$

et de même, pour les deux autres composantes,

$$(b) \quad Y = \frac{d}{dt} \frac{dE}{dy} - \frac{dE}{dy} + \frac{dV}{dy}, \quad Z = \frac{d}{dt} \frac{dE}{dz} - \frac{dE}{dz} + \frac{dV}{dz}.$$

Les forces étant ainsi prises, l'intégrale (5) des équations (6) représente le principe de la force vive; en désignant par l'indice zéro les quantités relatives au temps t_0 , on pourra écrire ainsi l'équation (5) :

$$T - T_0 = V - V_0 + E_2 + 2E_3 + 3E_4 + \dots - (E_2)_0 - 2(E_3)_0 - 3(E_4)_0 - \dots$$

La fonction $E_2 + 2E_3 + \dots - (E_2)_0 - 2(E_3)_0 \dots$ désigne le travail électrodynamique accompli depuis le temps t_0 jusqu'au temps t ; ce travail ne dépend que des positions et des vitesses des particules μ au premier et au dernier instant.

Il est aisé de voir qu'il n'y a pas d'autre moyen de satisfaire au principe de la conservation de la force vive.

3. D'après les formules (a), (b), il est évident que l'action électrodynamique d'une seule molécule m_1 sur une molécule m , dont les coordonnées sont x, y, z , aura trois composantes de cette forme :

$$\frac{d}{dt} \frac{dD}{dx'} - \frac{dD}{dx}, \quad \frac{d}{dt} \frac{dD}{dy'} - \frac{dD}{dy}, \quad \frac{d}{dt} \frac{dD}{dz'} - \frac{dD}{dz}.$$

La fonction D s'appelle le *potentiel électrodynamique* entre les deux molécules m, m_1 .

Remarques. — On arrive à la loi de Weber en faisant, a étant une constante,

$$D = \frac{1}{a^2} \frac{mm_1}{r} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \\ = \frac{1}{a^2} \frac{mm_1}{r^3} [(x - x_1)(x' - x'_1) + (y - y_1)(y' - y'_1) + (z - z_1)(z' - z'_1)]^2.$$

On obtient, pour la composante suivant l'axe des x de l'action de m_1 sur m ,

$$\frac{d}{dt} \frac{dD}{dx'} - \frac{dD}{dx} = \frac{mm_1}{a^2} \frac{x - x_1}{r} \left[-\frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{d^2 r}{dt^2} \right].$$

Ainsi les trois composantes de la force électrodynamique suivant trois axes rectangulaires sont proportionnelles à $\frac{x - x_1}{r}, \frac{y - y_1}{r}, \frac{z - z_1}{r}$; on

en conclut que cette force est dirigée suivant r et qu'elle a pour grandeur

$$\frac{mm_1}{a^2} \left[-\frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{d^2 r}{dt^2} \right].$$

Pour obtenir la loi de Riemann, on fait

$$D = \frac{mm_1}{a^2} \frac{1}{r} [(x' - x'_1)^2 + (y' - y'_1)^2 + (z' - z'_1)^2].$$

Riemann n'est pas au nombre des physiciens qui ne veulent pas accepter la loi d'Ampère relative à deux éléments de courants; Riemann, au contraire, démontre cette loi (§ 91 de son Ouvrage). Cependant il n'est pas vrai que sa loi puisse s'accorder avec celle d'Ampère, bien qu'on lise au § 104 : « *Danach zeigt sich, dass Weber's und Riemann's Grundgesetze mit Ampère's Gesetze im Einklang stehen.* »

Sur la détermination de la forme de la fonction D
au moyen du principe de la réaction.

4. Nous venons de voir que les trois composantes par rapport à trois axes rectangulaires de l'action électrodynamique de la molécule $m_1(x_1, y_1, z_1)$ sur la molécule $m(x, y, z)$ sont de la forme

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{dD}{dx'} - \frac{dD}{dx}, \dots$$

Cherchons à déterminer D de manière que cette force soit dirigée suivant la droite qui joint m à m_1 , et que de plus l'action de m sur m_1 lui soit égale et directement opposée.

Si nous prenons l'axe des z suivant la droite r qui joint les deux molécules m, m_1 , la composante suivant l'axe des z

$$\frac{d}{dt} \frac{dD}{dz'} - \frac{dD}{dz}$$

représentera la grandeur même de la force et les deux composantes

suivant les axes des x et des y seront nulles, en sorte qu'on aura

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \frac{dD}{dx'} - \frac{dD}{dx} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{dD}{dy'} - \frac{dD}{dy} = 0.$$

Imaginons la fonction D développée suivant les puissances de x, y, x', y' , et soit

$$\varepsilon = Cx^m y^n x'^p y'^q$$

un des termes de ce développement, C étant indépendant de x, y, x', y' , mais pouvant dépendre de z, z' et des quantités relatives à la seconde molécule; on aura

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{d\varepsilon}{dx'} - \frac{d\varepsilon}{dx} &= Cpmx^{m-1}y^n x'^p y'^q + Cpnx^m y^{n-1} x'^p y'^q + \\ &+ Cpx^m y^n \frac{d}{dt} (x'^{p-1} y'^q) - Cmx^{m-1} y^n x'^p y'^q, \end{aligned}$$

et, pour que cette quantité ne soit pas identiquement nulle, x, y étant nuls; il faut qu'on ait $m=1, n=0$, ou $m=0, n=1$, ou $m=0, n=0$. Dans toute autre hypothèse, le terme ε donnerait un résultat nul, non seulement par sa substitution dans la première expression (1), mais aussi dans les deux autres; il peut, par conséquent, être rejeté.

On peut donc poser

$$(3) \quad D = xf(x', y') + y\varphi(x', y') + \psi(x', y').$$

Imaginons $f(x', y'), \varphi(x', y')$ développés suivant les puissances de x', y' ; D sera la somme d'expressions homogènes. Supposons d'abord que D se réduise à une de ces expressions homogènes et qu'on ait

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} D = & x(Ax'^m + Bx'^{m-1}y' + Cx'^{m-2}y'^2 + Ex'^{m-3}y'^3 + \dots \\ & + Kx'^3y'^{m-3} + Lx'^2y'^{m-2} + Mx'y'^{m-1} + Ny'^m) \\ & + y(N_1x'^m + M_1y'^m x'^{m-1} + L_1y'^2x'^{m-2} + K_1y'^3x'^{m-3} + \dots \\ & + D_1x'^3y'^{m-3} + C_1x'^2y'^{m-2} + B_1x'y'^{m-1} + A_1y'^m). \end{aligned} \right.$$

On en tirera

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{dD}{dx'} = & x' [mAx'^{m-1} + (m-1)Bx'^{m-2}y' \\ & + (m-2)Cx'^{m-3}y'^2 + (m-3)Ex'^{m-4}y'^3 + \dots \\ & + 3Kx'^2y'^{m-3} + 2Lx'y'^{m-2} + My'^{m-1}] \\ & + y' [N_1mx'^{m-1} + (m-1)M_1x'^{m-2}y' \\ & + (m-2)L_1x'^{m-3}y'^2 + (m-3)K_1x'^{m-4}y'^3 + \dots \\ & + 3E_1x'^2y'^{m-3} + 2C_1x'y'^{m-2} + B_1y'^{m-1}] \\ & + \dots \end{aligned}$$

en ne marquant pas les termes qui renferment x ou y en facteur et qui, par suite, s'annulent pour $x = 0$, $y = 0$. D'après cela, la première équation (2) devient

$$\begin{aligned} mAx'^m + [(m-1)B + mN_1]x'^{m-1}y' + [(m-2)C + (m-1)M_1]x'^{m-2}y'^2 + \dots \\ + (2L + 3E_1)x'^2y'^{m-2} + (M + 2C_1)x'y'^{m-1} + B_1y'^m \\ = Ax'^m + Bx'^{m-1}y' + Cx'^{m-2}y'^2 + \dots + Lx'^2y'^{m-2} + Mx'y'^{m-1} + Ny'^m, \end{aligned}$$

et, comme elle doit être satisfaite identiquement, il en résulte

$$\begin{aligned} A = 0, \quad (m-2)B + mN_1 = 0, \quad (m-3)C + (m-1)M_1 = 0, \\ (m-4)E + (m-2)L_1 = 0, \quad \dots, \quad 2K + 4F_1 = 0, \quad L + 3E_1 = 0, \\ 2C_1 = 0, \quad B_1 = N. \end{aligned}$$

La seconde équation (2) donne des conditions qu'on déduit immédiatement de ces dernières en mettant l'indice 1 aux lettres qui ne l'ont pas et l'ôtant à celles qui l'ont, ce qui donne, en renversant l'ordre des égalités,

$$\begin{aligned} B = N_1, \quad 2C = 0, \quad L_1 + 3E = 0, \quad 2K_1 + 4F = 0, \quad \dots, \\ (m-3)C_1 + (m-1)M = 0, \quad (m-2)B_1 + mN = 0, \quad A_1 = 0. \end{aligned}$$

On en conclut facilement que tous les coefficients A, B, \dots sont nuls, à moins que m ne soit égal à 1.

Si nous développons la fonction $\psi(x', y')$ de la formule (3) suivant

les puissances de x' , y' , la fonction $\psi(x', y')$ sera représentée par une série d'expressions de cette forme :

$$(5) \quad Ax'^m + Bx'^{m-1}y' + Cx'^{m-2}y'^2 + \dots + Ly'^m.$$

En désignant cette expression par D et formant les équations (2), on trouve encore que tous les coefficients A, B, \dots sont nuls, à moins que m ne soit égal à 1.

L'expression la plus générale de D se compose d'une partie indépendante de x, y, x', y' et de la somme d'expressions des formes (4) et (5). Si l'on substitue l'expression générale de D dans les équations (2), les termes provenant de chacune des expressions (4) ou (5) doivent se détruire séparément. Il en résulte que la valeur générale de D ne peut dépendre de x, y, x', y' , si ce n'est dans des termes du premier degré par rapport à x', y' .

Le raisonnement que nous venons de faire relativement à la molécule m peut être repris pour la molécule m_1 , et il en résulte que, si l'on néglige les termes du premier degré par rapport à x', y', x'_1, y'_1 , on a

$$D = f(z, z_1, z', z'_1),$$

la fonction f ne renfermant que les quantités indiquées.

5. Pour achever de déterminer cette fonction, nous allons exprimer que les actions mutuelles sont égales et directement opposées. Il résulte de cette condition que l'on a

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \frac{dD}{dz'} - \frac{dD}{dz} = - \frac{d}{dt} \frac{dD}{dz'_1} + \frac{dD}{dz_1};$$

cette équation peut s'écrire

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 D}{dz dz'} z' + \frac{d^2 D}{dz'^2} z'' + \frac{d^2 D}{dz_1 dz'} z'_1 + \frac{d^2 D}{dz'_1 dz'} z''_1 - \frac{dD}{dz} \\ & = - \frac{d^2 D}{dz dz'_1} z'_1 - \frac{d^2 D}{dz' dz'_1} z''_1 - \frac{d^2 D}{dz_1 dz'_1} z'_1 - \frac{d^2 D}{dz'^2_1} z''_1 + \frac{dD}{dz_1}; \end{aligned}$$

Les coefficients de z'' doivent être égaux dans les deux membres et

de même ceux de z''_1 ; on a donc

$$\frac{d^2 D}{dz'^2} = - \frac{d^2 D}{dz' dz'_1} = \frac{d^2 D}{dz_1'^2},$$

et il en résulte

$$\frac{dD}{dz_1} = - \frac{dD}{dz'} + C,$$

C étant indépendant de z' , z'_1 . Supposons d'abord que D ne renferme aucune partie du premier degré par rapport à z' , z'_1 , on aura $C = 0$. On en conclut

$$\frac{dD}{dz_1} = - \frac{dD}{dz'}$$

et, d'après l'équation (6),

$$\frac{dD}{dz_1} = - \frac{dD}{dz}.$$

De ces deux équations on déduit

$$(7) \quad D = F(z - z_1, z' - z'_1).$$

On reconnaîtra facilement que, pour avoir égard aux termes du premier degré par rapport à x' , y' , z' , x'_1 , y'_1 , z'_1 , il faudrait ajouter à la fonction que nous venons de trouver pour D la suivante,

$$\begin{aligned} & x(Ax' + By') + y(Bx' + Cy') + x_1(A_1x'_1 + B_1y'_1) + y_1(B_1x'_1 + C_1y'_1) \\ & + ax' + by' + a_1x'_1 + b_1y'_1 + \theta(z, z_1)z' + \theta_1(z, z_1)z'_1, \end{aligned}$$

A, B, C, A₁, B₁, C₁, a, b, a₁, b₁ étant des constantes et θ , θ_1 deux fonctions liées entre elles par l'équation de condition

$$\frac{d\theta}{dz_1} = \frac{d\theta_1}{dz}.$$

Mais comme cette expression, étant substituée à la place de D dans les trois formules (1), donnerait trois résultats nuls, il s'ensuit qu'elle n'ajoute rien à l'expression des forces; elle peut donc être négligée, et, par conséquent, il est permis de réduire D à la formule (7).

Si nous prenons ensuite des axes de coordonnées quelconques, et que nous désignons par r la distance entre les deux molécules, nous

aurons

$$(8) \quad D = F \left(r, \frac{dr}{dt} \right).$$

Nous arrivons donc à ce résultat :

Pour que les actions entre deux molécules électriques soient dirigées suivant la droite qui les joint, égales et directement opposées, il faut que leur potentiel électrodynamique soit de la forme (8).

6. Il est aisé de vérifier que, réciproquement, l'expression (8) conduit à des actions mutuelles qui satisfont aux conditions que nous avons exigées.

En effet, en représentant $\frac{dr}{dt}$ par r' , nous avons

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2, \\ r' = (x - x_1)(x' - x'_1) + (y - y_1)(y' - y'_1) + (z - z_1)(z' - z'_1),$$

par suite

$$\frac{dD}{dx} = \frac{dF}{dr} \frac{x - x_1}{r} + \frac{dF}{dr'} \left(\frac{x' - x'_1}{r} - \frac{r'}{r} \frac{x - x_1}{r} \right), \\ \frac{dD}{dx'} = \frac{dF}{dr'} \frac{x - x_1}{r}, \\ \frac{d}{dt} \frac{dD}{dx'} = \left(\frac{d^2 F}{dr dr'} r' + \frac{d^2 F}{dr'^2} r'' \right) \frac{x - x_1}{r} + \frac{dF}{dr'} \left(\frac{x' - x'_1}{r} - \frac{x - x_1}{r^2} r' \right).$$

Il en résulte

$$\frac{d}{dt} \frac{dD}{dx'} - \frac{dD}{dx} = P \frac{x - x_1}{r},$$

avec

$$P = \frac{d^2 F}{dr dr'} r' + \frac{d^2 F}{dr'^2} r'' - \frac{dF}{dr}.$$

Les trois composantes de l'action de m_1 sur m sont entre elles comme $\frac{x - x_1}{r}$, $\frac{y - y_1}{r}$, $\frac{z - z_1}{r}$; donc cette force est dirigée suivant la droite r et sa grandeur est P . Si l'on permute x, y, z avec x_1, y_1, z_1 , ces composantes changent de signe; donc les deux actions sont égales et directement opposées.

On peut remarquer que la valeur de D qui conduit à la loi de Riemann n'est pas de la forme (8).

Calcul de la fonction $D = F(r, r')$ dans l'hypothèse des deux électricités en mouvement.

7. Nous supposons d'abord qu'un courant électrique soit formé de deux mouvements des électricités positive et négative, en sorte qu'en chaque partie très petite du courant les deux électricités soient en même quantité et aient des vitesses égales et directement opposées.

Concevons deux courants linéaires constants; soient s, s' les longueurs des lignes qu'ils parcourent, comptées à partir de deux points pris sur ces lignes; soient $m, -m$ les quantités d'électricités positive et négative qui se trouvent dans l'élément ds du premier courant, et de même $m', -m'$ les quantités des deux électricités qui se trouvent dans l'élément ds' . Représentons ensuite par

$$D = mm' \psi(r, r')$$

la fonction D relative à l'action entre les deux molécules m, m' ; nous aurons pour cette action

$$R = mm' \left(\frac{d}{dt} \frac{d\psi}{dr'} - \psi \right);$$

nous avons d'ailleurs

$$r' = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} + \frac{dr}{ds'} \frac{ds'}{dt},$$

et, si l'on désigne par v, v' les vitesses des deux courants, par θ, θ' les angles de ds, ds' avec la direction de r , il vient

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{ds'}{dt'} = v', \quad \frac{dr}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dr}{ds'} = \cos \theta',$$

$$r' = v \cos \theta + v' \cos \theta',$$

$$r'' = \frac{d^2 r}{ds^2} v^2 + 2 \frac{d^2 r}{ds ds'} v v' + \frac{d^2 r}{ds'^2} v'^2,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{d\psi}{dr'} = \psi''_{r,r}(r, r') r' + \psi'_{r,r'}(r, r') r''.$$

Posons

$$v \cos \theta + v' \cos \theta' = u, \quad v \cos \theta - v' \cos \theta' = u_1;$$

nous aurons : 1° pour l'action exercée par m' sur m ,

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = mm' & \left[\psi''_{r', r'}(r, u) u - \psi'_r(r, u) \right. \\ & \left. + \psi''_{r', r'}(r, u) \left(\frac{d^2 r}{ds^2} v^2 + 2 \frac{d^2 r}{ds ds'} v v' + \frac{d^2 r}{ds'^2} v'^2 \right) \right]; \end{aligned}$$

2° pour l'action de $-m'$ sur m , en changeant m' en $-m'$ et v' en $-v'$,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 = -mm' & \left[\psi''_{r', r'}(r, u_1) u_1 - \psi'_r(r, u_1) \right. \\ & \left. + \psi''_{r', r'}(r, u_1) \left(\frac{d^2 r}{ds^2} v^2 - 2 \frac{d^2 r}{ds ds'} v v' + \frac{d^2 r}{ds'^2} v'^2 \right) \right]; \end{aligned}$$

3° pour l'action de $+m'$ sur $-m$,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2 = -mm' & \left[-\psi''_{r', r'}(r, -u_1) u_1 - \psi'_r(r, -u_1) \right. \\ & \left. + \psi''_{r', r'}(r, -u_1) \left(\frac{d^2 r}{ds^2} v^2 - 2 \frac{d^2 r}{ds ds'} v v' + \frac{d^2 r}{ds'^2} v'^2 \right) \right]; \end{aligned}$$

4° pour l'action de $-m'$ sur $-m$,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_3 = mm' & \left[-\psi''_{r', r'}(r, -u) u - \psi'_r(r, -u) \right. \\ & \left. + \psi''_{r', r'}(r, -u) \left(\frac{d^2 r}{ds^2} v^2 + 2 \frac{d^2 r}{ds ds'} v v' + \frac{d^2 r}{ds'^2} v'^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

La somme de ces quatre forces donne l'action de l'élément de courant ds' sur l'élément de courant ds . Nous nous proposons de déterminer la fonction ψ par les deux conditions suivantes :

1° Si les deux éléments de courant sont parallèles entre eux et perpendiculaires à la droite qui joint leurs milieux, l'action de l'un sur l'autre varie en raison inverse du carré de cette distance.

2° Si deux éléments de courant linéaire sont donnés de position, leurs actions mutuelles ne varient pas avec la courbure de ces éléments.

8. Considérons d'abord le cas particulier où les courants dans ds , ds' sont parallèles, de même sens et perpendiculaires à r . On aura

$$\theta = \theta' = \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon = 0,$$

ε étant l'angle de ds et ds' ; on aura ensuite

$$R = mm' \left[\Psi''_{r', r'}(r, 0) \left(\frac{d^2 r}{ds^2} v^2 + 2 \frac{d^2 r}{ds ds'} v v' + \frac{d^2 r}{ds'^2} v'^2 \right) - \Psi'_r(r, 0) \right] = R_3,$$

$$R_1 = -mm' \left[\Psi''_{r', r'}(r, 0) \left(\frac{d^2 r}{ds^2} v^2 - 2 \frac{d^2 r}{ds ds'} v v' + \frac{d^2 r}{ds'^2} v'^2 \right) - \Psi'_r(r, 0) \right] = R_2;$$

donc l'action de ds' sur ds est

$$8mm' \frac{d^2 r}{ds ds'} v v' \Psi''_{r', r'}(r, 0).$$

Or on a, en général,

$$(A) \quad r \frac{d^2 r}{ds ds'} = -\frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} + \frac{d \left(r \frac{dr}{ds} \right)}{ds'} = -\cos \theta \cos \theta' + \cos \varepsilon;$$

cette quantité est donc égale à 1; il en résulte, pour cette force.

$$8mm' v v' \frac{1}{r} \Psi''_{r', r'}(r, 0).$$

Or, d'après la première hypothèse faite ci-dessus, cette force doit varier proportionnellement à $\frac{1}{r^2}$; on peut donc poser

$$(a) \quad \Psi''_{r', r'}(r, 0) = \frac{B}{r},$$

B étant une constante.

Supposons ensuite que les tangentes aux deux éléments ds , ds' soient parallèles, sans être perpendiculaires à la droite r .

Je dis d'abord que la quantité $\frac{d^2 r}{ds^2}$ qui est renfermée dans l'expression de R dépend de la courbure de l'arc s . En effet, l'arc ds étant supposé plan, soit ρ son rayon de courbure; on aura

$$\rho = \frac{ds}{d\tau},$$

τ étant l'angle de la tangente avec une droite fixe. Menons cette droite fixe par le milieu de ds' et désignons par ω l'angle de r avec cette droite; θ étant comme ci-dessus l'angle de r avec la tangente, nous aurons

$$\theta = \tau - \omega, \quad \sin \theta = r \frac{d\omega}{ds}, \quad \cos \theta = \frac{dr}{ds}.$$

En différentiant cette dernière équation, nous obtenons

$$-\sin \theta \left(\frac{d\tau}{ds} - \frac{d\omega}{ds} \right) = \frac{d^2 r}{ds^2}$$

ou

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = -\frac{\sin \theta}{\rho} + \frac{\sin^2 \theta}{r},$$

ce qui prouve que $\frac{d^2 r}{ds^2}$ dépend de la courbure de ds .

Si nous formons

$$F = R + R_1 + R_2 + R_3,$$

le coefficient de $\frac{d^2 r}{ds^2}$ dans F doit s'annuler, parce que nous avons supposé que la force F ne dépend pas des courbures des arcs s et s' . On en conclut

$$\psi''_{r',r'}(r, u) + \psi''_{r',r'}(r, -u) = \psi''_{r',r'}(r, u_1) + \psi''_{r',r'}(r, -u_1);$$

par conséquent, le premier membre est indépendant de u , et l'on peut poser

$$(b) \quad \psi''_{r',r'}(r, u) + \psi''_{r',r'}(r, -u) = f(r),$$

Faisons $u = 0$; nous aurons

$$2\psi''_{r',r'}(r, 0) = f(r),$$

et, d'après l'équation (a),

$$2\frac{B}{r} = f(r).$$

D'après cela, nous obtenons pour l'équation (b)

$$\psi''_{r',r'}(r, r') + \psi''_{r',r'}(r, -r') = 2\frac{B}{r}.$$

On peut ensuite évidemment poser

$$\psi''_{r',r'}(r, r') - \psi''_{r',r'}(r, -r') = 2J(r, r'),$$

$J(r, r')$ étant une fonction impaire en r' ; on en conclut, en ajoutant les deux dernières équations,

$$\psi''_{r',r'} = \frac{B}{r} + J(r, r').$$

Intégrons deux fois cette équation par rapport à r' , et nous aurons

$$(c) \quad \psi(r, r') = \frac{B r'^2}{2r} + I(r, r') + \chi(r),$$

$I(r, r')$, $\chi(r)$ étant deux fonctions arbitraires, mais dont la première est impaire par rapport à r' .

9. Si nous réduisons $\psi(r, r')$ à sa première partie $\frac{B r'^2}{2r}$, nous aurons

$$\begin{aligned} R = R_3 = & mm' \left[-\frac{B}{2r^2} (\nu \cos \theta + \nu' \cos \theta')^2 \right. \\ & \left. + 2 \frac{B}{r} \frac{d^2 r}{ds ds'} \nu \nu' + \frac{B}{r} \left(\frac{d^2 r}{ds^2} \nu^2 + \frac{d^2 r}{ds'^2} \nu'^2 \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 = R_2 = & -mm' \left[-\frac{B}{2r^2} (\nu \cos \theta - \nu' \cos \theta')^2 \right. \\ & \left. - 2 \frac{B}{r} \frac{d^2 r}{ds ds'} \nu \nu' + \frac{B}{r} \left(\frac{d^2 r}{ds^2} \nu^2 + \frac{d^2 r}{ds'^2} \nu'^2 \right) \right]; \end{aligned}$$

d'après la formule (A), nous avons donc

$$F = \frac{4mm'}{r^2} B \nu \nu' (-3 \cos \theta \cos \theta' + 2 \cos \varepsilon),$$

ce qui fournit la loi d'Ampère. On voit aussi que, si l'on adopte cette valeur de $\psi(r, r')$, l'action d'un élément de courant sur une molécule d'électricité statique est nulle.

Si nous réduisons l'expression de $\psi(r, r')$ à sa seconde partie $I(r, r')$, nous avons

$$\begin{aligned} R = & mm' \left[I''_{r',r'}(r, u) u + I''_{r',r'}(r, u) \left(\frac{d^2 r}{ds^2} \nu^2 + 2 \frac{d^2 r}{ds ds'} \nu \nu' + \frac{d^2 r}{ds'^2} \nu'^2 \right) - I'_r(r, u) \right], \\ R_1 = & -mm' \left[I''_{r',r'}(r, u_1) u_1 + I''_{r',r'}(r, u_1) \left(\frac{d^2 r}{ds^2} \nu^2 - 2 \frac{d^2 r}{ds ds'} \nu \nu' + \frac{d^2 r}{ds'^2} \nu'^2 \right) - I'_r(r, u_1) \right], \end{aligned}$$

et, comme nous avons

$$I_{r'}(r, -u) = I_{r'}(r, u), \quad I''_{r',r'}(r, -u) = I''_{r',r'}(r, u), \quad I'''_{r',r'}(r, -u) = -I'''_{r',r'}(r, u),$$

il en résulte

$$R_2 = -R_1, \quad R_3 = -R.$$

Donc la partie $I(r, r')$ de l'expression (c) ainsi que la partie $\chi(r)$ ne changent pas la valeur de l'action d'un élément de courant sur un élément de courant.

10. On sait que l'action d'un courant fermé constant sur une molécule d'électricité statique est nulle. Soient $m, -m$ les deux masses d'électricité positive et négative dans l'élément de courant ds , et m' une molécule d'électricité positive en repos. Nous aurons les actions de m et $-m$ sur m' en faisant, dans les expressions de R, R_2 ,

$$v' = 0, \quad u_1 = u,$$

ce qui donnera, en réduisant $\psi(r, r')$ à $I(r, r')$,

$$R = R_2 = mm' \left[I''_{r',r'} \left(r, v \frac{dr}{ds} \right) v \frac{dr}{ds} + I'''_{r',r'} \left(r, v \frac{dr}{ds} \right) \frac{d^2 r}{ds^2} v^2 - I'_r \left(r, v \frac{dr}{ds} \right) \right].$$

Ainsi la force entre l'élément de courant ds et la molécule m' est $2R$, et sa composante suivant l'axe des x est

$$(d) \quad 2R \frac{x - x_1}{r},$$

x, x_1 étant les abscisses de m et m' . Si nous supposons constante la section du conducteur du courant, nous aurons $m = h ds$, h étant constant; nous pourrions poser $R = F ds$, et, en intégrant l'expression (d) tout le long du conducteur fermé, on devrait avoir

$$\int F \frac{x - x_1}{r} ds = 0,$$

quelle que soit la forme de son contour, ce qui ne pourrait avoir lieu que si l'expression

$$F \frac{x - x_1}{r} ds$$

était une différentielle exacte. Or il est aisé de voir qu'on ne peut choisir

la fonction $I(r, r')$ de manière que cette expression soit une différentielle exacte, à moins de la faire nulle.

Ainsi, en négligeant l'action électrostatique, on doit réduire la formule (c) à l'expression

$$\psi(r, r') = \frac{B r'^2}{2r},$$

qui conduit à la loi de Weber (n° 3).

Calcul de la fonction D dans l'hypothèse d'une seule électricité
en mouvement.

11. Quand on suppose que les deux électricités positive et négative sont en mouvement, se trouvent en même quantité dans chaque partie très petite du courant et y ont en chaque point des vitesses égales et contraires, les deux électricités jouent un rôle tout semblable et il y a lieu d'admettre que la formule d'attraction ou de répulsion entre deux molécules électriques en mouvement est la même quel que soit le signe de leur électricité; mais il n'en est plus ainsi dès qu'on suppose l'électricité négative en repos.

Nous prendrons, d'après cela, des fonctions différentes pour D, suivant que nous voudrions représenter l'action entre deux molécules d'électricité positive ou entre deux molécules d'électricité de signe contraire.

Soient encore $m, -m$ les quantités des électricités positive et négative d'un élément de courant, $m', -m'$ celles d'un autre élément de courant; nous pourrions poser comme précédemment, pour l'action de m' sur m ,

$$R = mm' \left[\psi''_{r, r'}(r, v \cos \theta + v' \cos \theta') (v \cos \theta + v' \cos \theta') - \psi'_r(r, v \cos \theta + v' \cos \theta') + \psi''_{r, r'}(r, v \cos \theta + v' \cos \theta') \left(\frac{d^2 r}{ds^2} v^2 + 2 \frac{d^2 r}{ds ds'} v v' + \frac{d^2 r}{ds'^2} v'^2 \right) \right].$$

Pour avoir l'action R_1 de $-m'$ sur m , il faudra non seulement changer m' en $-m'$ et faire $v' = 0$, mais encore remplacer la fonction ψ par une autre χ . On aura ainsi

$$R_1 = -mm' \left[\chi''_{r, r'}(r, v \cos \theta) v \cos \theta - \chi'_r(r, v \cos \theta) + \chi''_{r, r'}(r, v \cos \theta) \frac{d^2 r}{ds^2} v^2 \right].$$

On aura enfin, pour l'action de m' sur $-m$,

$$R_2 = -mm' \left[\chi''_{r', r'}(r, v' \cos \theta') v' \cos \theta' - \chi'_r(r, v' \cos \theta') + \chi''_{r', r'}(r, v' \cos \theta') \frac{d^2 r}{ds'^2} v'^2 \right].$$

Il n'y a pas lieu de considérer l'action entre les deux molécules fixes $-m$, $-m'$ si l'on néglige l'action électrostatique.

Nous allons déterminer les deux fonctions ψ , χ d'après les deux hypothèses faites au n° 7 et d'après la supposition que l'action entre les deux éléments de courant varie proportionnellement à v , v' .

12. Prenons le cas particulier où les deux éléments de courant sont parallèles, de même sens et perpendiculaires à r ; nous aurons $\theta = \theta' = \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon = 0$, et il en résultera

$$\begin{aligned} R &= mm' \left[\psi''_{r', r'}(r, 0) \left(\frac{d^2 r}{ds^2} v^2 + 2 \frac{d^2 r}{ds ds'} v v' + \frac{d^2 r}{ds'^2} v'^2 \right) - \psi'_r(r, 0) \right], \\ R_1 &= -mm' \left[\chi''_{r', r'}(r, 0) \frac{d^2 r}{ds^2} v^2 - \chi'_r(r, 0) \right], \\ R_2 &= -mm' \left[\chi''_{r', r'}(r, 0) \frac{d^2 r}{ds'^2} v'^2 - \chi'_r(r, 0) \right]. \end{aligned}$$

On doit avoir identiquement

$$R + R_1 + R_2 = \frac{A v v'}{r^2};$$

donc les termes en v^2 , v'^2 y sont nuls, ainsi que les termes indépendants de v , v' , et l'on a

$$\begin{aligned} \psi''_{r', r'}(r, 0) - \chi''_{r', r'}(r, 0) &= 0, \\ -\psi'_r(r, 0) + 2\chi'_r(r, 0) &= 0, \end{aligned}$$

et il reste

$$\psi''_{r', r'}(r, 0) \frac{d^2 r}{ds ds'} = \frac{C}{r^2},$$

C étant une constante, ou

$$\psi''_{r', r'}(r, 0) = \frac{C}{r};$$

on a donc aussi

$$(e) \quad \chi'_r(r, 0) = \frac{1}{2} \psi'_r(r, 0), \quad \chi''_{r', r'}(r, 0) = \frac{C}{r}.$$

Supposons ensuite les deux éléments de courant situés dans un même plan, mais d'une manière arbitraire. L'action entre ces deux éléments ne dépendant pas de leurs courbures, les coefficients de $\frac{d^2 r}{ds^2}$, $\frac{d^2 r'}{ds'^2}$ dans $F = R + R_1 + R_2$ sont nuls séparément, et l'on a

$$\Psi''_{r',r'}(r, \nu \cos \theta + \nu' \cos \theta') = \chi''_{r',r'}(r, \nu \cos \theta) = \chi''_{r',r'}(r, \nu' \cos \theta');$$

ν et ν' étant quelconques, on en conclut, en ayant égard à la seconde équation (e),

$$\Psi''_{r',r'}(r, r') = \chi''_{r',r'}(r, r') = \frac{C}{r}.$$

En intégrant deux fois, on a

$$\begin{aligned} \Psi(r, r') &= \frac{Cr'^2}{2r} + \varphi(r)r' + \theta(r), \\ \chi(r, r') &= \frac{Cr'^2}{2r} + \varphi_1(r)r' + \theta_1(r). \end{aligned}$$

Les seconds termes $\varphi(r)r'$, $\varphi_1(r)r'$ de ces formules ne modifient pas l'expression des forces, comme on le voit immédiatement; on peut donc les supprimer. Comme de plus on a négligé l'action électrostatique, on doit supprimer aussi les derniers termes de ces formules, et il reste

$$\Psi(r, r') = \chi(r, r') = \frac{Cr'^2}{2r};$$

cette formule donne, pour l'action entre deux molécules, la loi de Weber, comme on a vu n° 3, et, en formant l'expression de F, on trouve

$$F = mm' \nu \nu' \frac{C}{r^2} (-3 \cos \theta \cos \theta' + 2 \cos \varepsilon)$$

pour l'action entre deux éléments de courant, ce qui est conforme à la loi d'Ampère.