ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ELLIOT

Sur la transformation des intégrales abéliennes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 9 (1880), p. 167-186
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1880_2_9__167_0>

SUR LA TRANSFORMATION

DES INTÉGRALES ABÉLIENNES,

PAR M. ELLIOT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BESANÇON.

Transformations réversibles.

1. Soit une équation algébrique irréductible de degré α en x et β en y

$$f(x,y)=0. \tag{1}$$

A chaque point (x,y) de cette courbe répond en général un seul point (x_1,y_1) défini par les formules

$$x_1=\frac{M(x,y)}{N(x,y)}, \tag{2}$$

$$y_1=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \tag{3}$$

M, N, P, Q étant des polynômes quelconques. La valeur de x_1 se présente sous une forme indéterminée pour un point m de f si les courbes $M=0$, $N=0$ passent par ce point. Mais, en supposant que le point (x,y) se rapproche du point m sur une branche déterminée de f [1], x_1 aura une limite qu'on trouvera en remplaçant y par une valeur approchée contenant un nombre suffisant de termes de son développement en série qui répond à la branche considérée. Autrement, les poly-

---

[1] J'appelle, pour abréger, *branche de la courbe* (1), l'ensemble des solutions x, y quand on a choisi une des racines de l'équation (1) qu'on suit par continuité.

nômes M et N auraient avec f une racine commune y, quel que soit x, et l'équation (1) ne serait pas irréductible. Si les coordonnées x et y du point m annulent les quatre polynômes M, N, P, Q, et si m est un point multiple de la courbe $f=0$, on pourra trouver différentes limites (x_1, y_1) suivant que l'on considère les différentes branches répondant à ce point; mais il y en aura toujours un nombre fini. Nous dirons qu'à une *solution analytique* (x, y) répond toujours un seul point (x_1, y_1), une solution analytique étant définie non seulement par les valeurs de x et y pour le point considéré, mais par le développement en série de y pour la branche considérée qui passe en ce point. L'ensemble des points (x_1, y_1) ainsi définis constitue une courbe $f_1(x_1, y_1) = 0$, qui est la transformée de (1) et dont nous allons chercher l'équation.

2. Remarquons que pour un point (x_1, y_1) de la courbe transformée les équations (2) et (3) ont une ou plusieurs solutions communes (x, y) appartenant à l'équation (1), outre les solutions communes répondant aux points de f dont les coordonnées annulent simultanément M, N, P, Q et qui sont indépendantes de x_1 et y_1.

Réciproquement, tout système (x_1, y_1), tel que les équations (2) et (3) aient parmi leurs solutions communes, en nombre fini ou infini dans certains cas [1], une solution appartenant à $f=0$, donne un point de la courbe transformée. Il n'y a exception que si pour la solution (x, y) en question l'une des formules (2) ou (3) se présente sous une forme indéterminée, car, d'après la définition, nous faisons correspondre à la solution (x, y) un seul point, ou du moins un nombre limité, et les formules (2) et (3) en donnent une infinité.

Pour trouver l'équation transformée, posons, en appelant λ une indéterminée,

$$x + \lambda y = t, \tag{4}$$

et éliminons x et y entre les équations (2), (3) et (4). L'équation (4)

---

[1] Ces équations n'auront un nombre infini de solutions communes que dans des cas exceptionnels, puisque le résultat de l'élimination de y, par exemple, devra se réduire à une identité, et que x_1 et y_1 sont les seules quantités variables. Le polynôme ψ, ordonné par rapport aux puissances de t et λ, devra avoir dans ce cas des coefficients qui, égalés à zéro, ont une solution commune (x_1, y_1).

étant du premier degré, on remplacera x par $t - \lambda y$ dans les équations (2) et (3), et l'on sera ramené à l'élimination d'une inconnue y entre deux équations algébriques. Soit

$$\varphi(t, \lambda, x_1, y_1) = 0$$

le résultat de l'élimination. Appelons ξ_1, η_1, ξ_2, η_2, ... les coordonnées des points de f qui annulent à la fois M, N, P, Q, c'est-à-dire les solutions communes aux équations (2) et (3) indépendantes de x_1 et y_1, et α_1, β_1, α_2, β_2, ... les autres solutions des équations (2) et (3). Il est clair que, pour une valeur quelconque attribuée à λ, l'équation en t, $\varphi = 0$, admettra les solutions

$$\xi_1 + \lambda\eta_1, \quad \xi_2 + \lambda\eta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_1 + \lambda\beta_1, \quad \alpha_2 + \lambda\beta_2, \quad \ldots.$$

Si maintenant on ordonne le polynôme φ par rapport aux différentes puissances de x_1 et de y_1, tous les coefficients contiendront un facteur commun en t et λ qui, égalé à zéro, donnera les solutions $\xi_1 + \lambda\eta_1$, $\xi_2 + \lambda\eta_2$, ... Après la suppression de ce facteur, qui n'exige que des recherches de plus grand commun diviseur, il restera un polynôme $\psi(t, \lambda, x_1, y_1)$ qui, égalé à zéro, n'admettra plus comme racines que

$$\alpha_1 + \lambda\beta_1, \quad \alpha_2 + \lambda\beta_2, \quad \ldots.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les équations (2) et (3) aient actuellement une ou plusieurs solutions communes appartenant à (1) est évidemment

$$f(\alpha_1, \beta_1) f(\alpha_2, \beta_2) \ldots = 0.$$

Ce produit est une fonction symétrique des solutions α_1, β_1, α_2, β_2, ... On pourra donc l'exprimer en fonction entière des coefficients des équations (1), (2), (3) par la méthode connue de Poisson, en se servant comme auxiliaire de l'équation $\psi = 0$ [1].

3. D'après la remarque faite au numéro précédent, le résultat auquel on parvient peut encore différer de l'équation de la courbe transformée

---

[1] SERRET, *Algèbre supérieure*, 2e édition, p. 597.

par un facteur qu'on devra supprimer, si les polynômes M et N ou bien P et Q s'annulent pour certains points de la courbe (1). Si par exemple M et N s'annulent pour les coordonnées x, y d'un point de la courbe (1), la fraction $\frac{P}{Q}$ prenant la valeur k, les équations (2) et (3) auront une solution commune appartenant à (1) pour $y_1 = k$, quel que soit x_1. Le résultat de l'élimination contiendra donc le facteur $y_1 - k$. Après la suppression de facteurs indépendants de x_1 ou de y_1, on arrivera enfin à une équation de degré α_1 en x_1, et β_1 en y_1,

$$f_1(x_1, y_1) = 0, \tag{5}$$

qui sera celle de la courbe cherchée.

4. Supposons que dans l'équation (5) on remplace x_1 et y_1 par leurs valeurs tirées des équations (2) et (3). Le résultat de la substitution s'annulera pour tous les systèmes (x, y) donnant à x_1 et y_1 des valeurs satisfaisant à l'équation (5), c'est-à-dire en particulier pour tous les points de la courbe $f = 0$. Mais il s'annulera pour une infinité de points étrangers à cette courbe; car, pour un système x_1, y_1 vérifiant l'équation (5), les équations (2) et (3) ont un certain nombre de solutions communes, dont une seule appartient, en général, à $f = 0$. On en conclut aisément, par les propriétés des polynômes entiers,

$$f_1\left(\frac{M}{N}, \frac{P}{Q}\right) = \frac{f(x, y)\,F(x, y)}{N^{\alpha_1} Q^{\beta_1}}, \tag{6}$$

F étant un polynôme dont le degré est généralement beaucoup plus élevé que celui de f.

On peut conclure de là que l'équation (5) est irréductible; car, si elle se décomposait en deux facteurs rationnels $f_1^{(1)}$ et $f_1^{(2)}$, on pourrait faire dans chacun d'eux la substitution précédente. Pour tous les points x_1, y_1 de $f_1^{(1)} = 0$, les équations (2) et (3) ont une solution commune appartenant à (1). Le numérateur du résultat de la substitution doit donc avoir une racine y commune avec f quel que soit x, et, comme f est irréductible, il doit être divisible par f. Il n'y aurait exception à ce raisonnement que si tous les points de $f_1^{(1)} = 0$ répondaient à des points en nombre limité de $f = 0$, c'est-à-dire si, pour certains points (x, y) de cette dernière courbe, x_1 ou y_1 se présentaient sous la forme $\frac{0}{0}$, et nous avons supprimé les facteurs correspondants. Il en résulte que les polynômes $f_1^{(1)}$ et $f_1^{(2)}$ s'annuleraient pour toutes les solutions x_1, y_1 répondant à *tous* les points de $f = 0$; ils seraient donc tous deux divisibles par f_1, ce qui est impossible, puisque ce sont des facteurs de f_1.

5. Pour une solution quelconque x_1, y_1 de l'équation transformée $f_1 = 0$, les équations (2) et (3) n'auront, en général, qu'une seule solution commune appartenant à $f = 0$. C'est à cette condition seulement que la transformation sera *réversible*. Rien n'empêche que, pour des valeurs particulières de x_1, y_1, les équations (2) et (3) aient plusieurs solutions communes appartenant à $f = 0$; c'est ce qui arrivera si les fonctions $\frac{M}{N}$, $\frac{P}{Q}$ reprennent leurs valeurs pour différents systèmes de valeurs x, y satisfaisant à l'équation (1).

On pourra, dans le cas d'une transformation réversible, exprimer x et y rationnellement par rapport à x_1 et y_1, en vertu du théorème suivant :

Quand trois équations algébriques à deux inconnues ont une seule solution commune, cette solution s'exprime rationnellement en fonction des coefficients.

Soient, en effet, $f = 0$, $f^{(1)} = 0$, $f^{(2)} = 0$ les trois équations contenant les inconnues x et y. Posons $y + \lambda x = t$, et éliminons successivement x et y d'abord entre cette dernière équation et $f = 0$, $f^{(1)} = 0$, puis entre cette même équation et $f = 0$, $f^{(2)} = 0$. Soient

$$P(t, \lambda) = 0, \quad Q(t, \lambda) = 0$$

les résultats de ces éliminations. Si l'on appelle x', y' la solution commune aux équations proposées, les équations $P = 0$, $Q = 0$ admettront évidemment, quel que soit λ, la racine commune $y' + \lambda x'$. Il faut démontrer qu'elles n'en admettent pas d'autres. Remarquons, pour cela, que toute racine de l'équation $P = 0$ est de la forme $\beta_1 + \lambda\alpha_1$, α_1, β_1 étant une solution commune aux équations $f = 0$, $f^{(1)} = 0$. De même, toute racine de l'équation $Q = 0$ est de la forme $\beta_2 + \lambda\alpha_2$, α_2, β_2 étant une solution commune aux deux équations $f = 0$, $f^{(2)} = 0$. Pour que les équations $P=0$, $Q=0$ aient une solution commune quel que soit λ, on doit avoir, quel que soit λ,

$$\beta_1+\lambda\alpha_1=\beta_2+\lambda\alpha_2,$$

et cela ne peut avoir lieu que si l'on a $\alpha_1=\alpha_2$, $\beta_1=\beta_2$, car on tire de l'équation précédente

$$\lambda=-\frac{\beta_2-\beta_1}{\alpha_2-\alpha_1}.$$

Le second membre est le coefficient angulaire changé de signe de la droite qui joint les deux points réels ou imaginaires (α_1,β_1), (α_2,β_2), et, comme il n'y a qu'un nombre limité de ces points, il faut que l'on ait séparément $\alpha_1=\alpha_2$, $\beta_1=\beta_2$. On voit donc que les équations proposées auront autant de solutions communes que les équations $P=0$, $Q=0$ auront de racines communes quel que soit λ. Il résulte de l'hypothèse que les équations $P=0$, $Q=0$ auront une seule racine commune; on pourra donc l'exprimer rationnellement par rapport à λ et aux coefficients des équations données. En faisant λ nul, on trouvera l'expression de y, et, en faisant λ infini, la valeur de $\frac{t}{\lambda}$ fournira l'expression de x. En prenant pour $f=0$, $f^{(1)}=0$, $f^{(2)}=0$ les équations (1), (2) et (3), on en conclura les expressions rationnelles

$$x=\frac{M_1(x_1,y_1)}{N_1(x_1,y_1)}, \tag{7}$$

$$y=\frac{P_1(x_1,y_1)}{Q_1(x_1,y_1)}. \tag{8}$$

6. Les équations (7) et (8) ont été déduites de la résolution de deux équations algébriques qui ont une racine commune. Or on sait que, quand le résultant a une racine double, l'équation du premier degré qui fournit la racine commune se réduit à une identité, et qu'il y a deux ou plusieurs racines communes égales ou inégales données par une équation du second degré ou d'un degré supérieur [1]. Nous pouvons donc faire sur les formules (7) et (8) les mêmes remarques que pour les formules (2), (3), c'est-à-dire que, pour certaines solutions de l'équa-

---

[1] Briot, *Algèbre*, 8e édition, p. 396.

tion $f_1 = 0$, ces formules se présenteront sous une forme indéterminée. Mais, comme y_1 est une fonction algébrique de x_1 qui sera déterminée quand on fera mouvoir le point (x_1, y_1) sur une branche connue de $f_1 = 0$, il y aura toujours pour x et y des limites qui, à cause de la continuité, appartiennent à la courbe $f = 0$.

Si dans l'équation $f = 0$ on substitue les valeurs de x et y tirées des équations (7) et (8), on trouvera, de même que précédemment,

$$f\left(\frac{M_1}{N_1}, \frac{P_1}{Q_1}\right) = \frac{f_1(x_1, y_1)\, F_1(x_1, y_1)}{N_1^\alpha Q_1^\beta}, \tag{9}$$

F_1 étant un polynôme entier.

Transformations rationnelles quelconques.

7. Reprenons l'équation

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

et supposons qu'on y remplace x et y en fonction de deux nouvelles variables x_1, y_1 au moyen des formules (7) et (8), mais où l'on suppose que M_1, N_1, P_1, Q_1 sont maintenant des polynômes quelconques. L'équation transformée résultera de la substitution, et l'on aura

$$f\left(\frac{M_1}{N_1}, \frac{P_1}{Q_1}\right) = \frac{F_1(x_1, y_1)}{N_1^\alpha Q_1^\beta}. \tag{10}$$

Pour toute solution x, y de l'équation (1), les équations (7) et (8) ont un certain nombre de solutions communes x_1, y_1 dont l'ensemble constitue la courbe transformée, et réciproquement, si dans les équations (7) et (8) on regarde x_1 et y_1 comme une solution de l'équation $F_1 = 0$, elles donneront pour x et y, d'après l'équation (10), une solution de $f = 0$. Si pour des valeurs convenablement choisies de x et y les équations (7) et (8) avaient une infinité de solutions communes, les solutions en question appartiendraient à une courbe dont on trouverait le premier membre en facteur dans le résultat de la substitution. Appelons f_1 le quotient de F_1 par ces facteurs qui donnent des courbes répondant à des points particuliers de $f = 0$, $f_1 = 0$ sera l'équation de la courbe transformée. On fait correspondre ainsi à un point (x, y) de $f = 0$ un nombre déterminé de points (x_1, y_1) de $f_1 = 0$.

8. L'équation $f_1 = 0$ peut être irréductible ou non. Si elle est réductible et se décompose par exemple en deux équations rationnelles $f_1^{(1)} = 0, f_1^{(2)} = 0$, on peut regarder indifféremment chacune des deux équations comme la transformée de $f = 0$. Nous allons prouver en effet que, en substituant dans les équations (7) et (8) l'ensemble des solutions x_1, y_1 répondant à la courbe $f_1^{(1)} = 0$, on obtiendra pour x et y *toutes* les solutions de $f = 0$. Cherchons, par la méthode de Poisson qui a été indiquée au n° 2, la condition pour que les équations (7), (8) et $f_1^{(1)} = 0$ aient une ou plusieurs solutions communes x_1, y_1; on arrivera à un polynôme entier en x et y qui, d'après la remarque faite au numéro précédent, ne peut avoir d'autres solutions que celles de $f = 0$. Ce polynôme, égalé à zéro, aura, quel que soit x, des racines communes y avec $f(x, y) = 0$ et, par suite, sera nécessairement f ou une puissance de f, puisque l'équation (1) est irréductible. Il n'y aurait exception à ce raisonnement que si la courbe $f_1^{(1)} = 0$ répondait à un nombre limité de points de $f = 0$, c'est-à-dire si, pour certains points (x, y) de $f = 0$, les équations (7) et (8) avaient une infinité de solutions communes, et nous avons écarté ces facteurs. On en conclut que, quand le point (x, y) décrit la courbe $f = 0$, un certain nombre de solutions des équations (7) et (8) décrivent la courbe $f_1^{(1)} = 0$, tandis que les autres décrivent la courbe $f_1^{(2)} = 0$. Même raisonnement s'il y avait décomposition de f_1 en un plus grand nombre de facteurs rationnels.

9. Ce qui précède permet d'éclaircir la notion des transformations réversibles. Il faudra d'abord que l'équation $f_1 = 0$ ne soit pas irréductible et en outre que l'une des courbes, $f_1^{(1)} = 0$ par exemple, qu'on peut regarder comme la transformée de $f = 0$, soit décrite par une seule solution des équations (7) et (8), sauf pour des valeurs particulières de x, y qui répondront à des points communs aux courbes $f_1^{(1)} = 0, f_1^{(2)} = 0, \ldots$. Dans ce cas, d'après le théorème du n° 5, on pourra exprimer rationnellement x_1, y_1 par rapport à x et y, et l'on rentrera dans le cas des transformations précédemment étudiées. Il

peut arriver que les solutions communes aux équations (7) et (8) soient indépendantes de x et y, sauf une seule. Dans ce cas, on peut tirer de ces équations x_1 et y_1 en fonction rationnelle de x et y sans se servir de l'équation $f=0$. C'est ce qui résulte immédiatement de la résolution de deux équations algébriques. Ces transformations sont celles de M. Cremona.

Supposons que l'équation $f_1=0$ soit irréductible, et cherchons, par la méthode de Poisson, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle ait des solutions communes avec les équations (7) et (8); on retrouvera la courbe $f=0$, mais pour chaque point (x, y) de $f=0$ il y aura plusieurs solutions communes appartenant à $f_1=0$. On voit donc qu'il était nécessaire, au n° 5, de faire entrer dans la définition des transformations réversibles la condition que les équations (2) et (3) eussent en général une seule solution commune.

Transformation des intégrales algébriques.

10. Nous allons étudier l'application des transformations précédentes aux intégrales qui dépendent d'une équation algébrique, et en particulier aux intégrales de première espèce.

Soit l'intégrale

$$\int_a^A \varphi(x)\,dx, \tag{11}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction déterminée de x. Substituons à la variable x une nouvelle variable x_1 liée à x par l'équation

$$x=\psi(x_1), \tag{12}$$

où ψ désigne une fraction rationnelle. On sait que, si l'on divise le chemin l d'intégration en un nombre infiniment grand de parties dont les extrémités sont $a, a', a'', \ldots, A$, l'intégrale (11) sera, par définition, la limite de la somme

$$(a'-a)\varphi(a)+(a''-a')\varphi(a')+\ldots. \tag{13}$$

Appelons $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les racines de l'équation (12) pour $x=a$, $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots$ les racines de cette équation pour $x=a'$, etc. Ces racines varient d'une façon continue avec x. Nous supposerons que a'_1 est la valeur infiniment voisine de a_1, a'_2 la valeur infiniment voisine de a_2, et ainsi de suite.

Si pour aucune valeur de x répondant au chemin l l'équation (12) n'a de racines multiples, le chemin l donnera les nouveaux chemins l_1, l_2, ..., qui ont leur origine aux points a_1, a_2, ..., et qu'on pourra suivre par continuité sans qu'ils se confondent jamais les uns avec les autres. La définition précise de l'intégrale transformée prise le long du chemin l_1 résultera des identités suivantes [1],

$$(14)\quad \begin{cases} a' - a = \psi(a'_1) - \psi(a_1) = (a'_1 - a_1)\left(\dfrac{d\psi}{da_1} + \varepsilon_1\right), \\ a'' - a' = \psi(a''_1) - \psi(a'_1) = (a''_1 - a'_1)\left(\dfrac{d\psi}{da'_1} + \varepsilon'_1\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

ε_1, ε'_1, ... étant des quantités infiniment petites.

L'intégrale transformée sera la limite de la somme

$$(a'_1 - a_1)\frac{d\psi}{da_1}\varphi[\psi(a_1)] + (a''_1 - a'_1)\frac{d\psi}{da'_1}\varphi[\psi(a'_1)] + \dots;$$

on pourra l'écrire

$$\int_{(l_1)} \varphi[\psi(x_1)]\frac{d\psi}{dx_1}\,dx_1,$$

et elle sera égale à la proposée.

Pour le chemin l_2, les identités (14) seront remplacées par les suivantes,

$$(15)\quad \begin{cases} a' - a = \psi(a'_2) - \psi(a_2) = (a'_2 - a_2)\left(\dfrac{d\psi}{da_2} + \varepsilon_2\right), \\ a'' - a' = \psi(a''_2) - \psi(a'_2) = (a''_2 - a'_2)\left(\dfrac{d\psi}{da'_2} + \varepsilon'_2\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

et ainsi de suite. Il est important de remarquer que les éléments de la nouvelle intégrale relatifs aux différents chemins l_1, l_2, ... et répondant à un même élément de la somme (13) peuvent être remplacés

---

[1] Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 126.

les uns par les autres sans changer la valeur de l'intégrale. Par exemple, on peut remplacer l'une par l'autre les expressions

$$(a'_1 - a_1)\frac{d\psi}{da_1}\varphi[\psi(a_1)], \quad (a'_2 - a_2)\frac{d\psi}{da_2}\varphi[\psi(a_2)],$$

car elles ne diffèrent de $(a'-a)\varphi(a)$ que par des quantités infiniment petites par rapport à elles. Ainsi l'on pourrait, sans changer la valeur de l'intégrale transformée, suivre d'abord le chemin l_1, puis continuer l'intégration en adoptant le chemin l_2 à partir du point correspondant, et ainsi de suite. Cela nous montre que, si le chemin l contient des valeurs de x pour lesquelles l'équation (12) a des racines multiples, c'est-à-dire si dans le cours de l'intégration les chemins l_1, l_2, ... viennent à se rencontrer, on pourra poursuivre avec une quelconque des racines de l'équation (12), ou plutôt, afin d'avoir un chemin continu, avec une de celles qui étaient égales au point considéré.

11. Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_{a,\,b}^{A,\,B} \varphi(x,y)\,dx, \tag{16}$$

où y est une fonction algébrique de x définie par l'équation

$$f(x,y) = 0. \tag{17}$$

Substituons à x et y de nouvelles variables x_1, y_1 définies par les formules

$$x = \psi(x_1, y_1), \tag{18}$$

$$y = \chi(x_1, y_1), \tag{19}$$

ψ et χ étant des fractions rationnelles. L'équation (17) aura pour transformée (n° 7) une autre équation algébrique

$$f_1(x_1, y_1) = 0. \tag{20}$$

Pour chaque point $x = a$, $y = b$ de la courbe (17), les équations (18) et (19) ont un certain nombre de solutions communes (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... qui appartiennent à la courbe (20), en sorte que dans la substitution on devra regarder y_1 comme une fonction de x_1 satisfaisant à cette équation (20). Nous avons vu qu'on pouvait toujours supposer fini le nombre des solutions (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... On sait de plus, par la résolution de deux équations algébriques à deux inconnues, que ces solutions varient d'une façon continue quand la solution (a, b) varie elle-même d'une façon continue.

Pour définir complètement l'intégrale (16), il faut se donner non seulement le chemin l d'intégration qui représente la succession des valeurs de la variable imaginaire x, mais encore pour chaque valeur de x la valeur de y correspondante; en d'autres termes, il faut se donner la suite des solutions analytiques qui constituent ce chemin. La fonction $\varphi(x, y)$ devient alors déterminée en chaque point de l, et l'on est ramené au cas précédent. Au chemin l répondront des chemins l_1, l_2, ... qui auront leur origine aux points analytiques (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... Si l'on adopte un de ces chemins, l_1 par exemple, la fonction $\psi(x_1, y_1)$ sera une fonction algébrique de x_1 ayant une dérivée déterminée, excepté si l'on arrive à des points de l pour lesquels les équations (18) et (19) ont plusieurs couples de solutions égales. Mais, d'après ce qui a été dit plus haut, on pourra continuer l'intégration en adoptant une quelconque des solutions qui étaient égales entre elles, sans changer la valeur de l'intégrale transformée.

Si l'intégrale (16) est de première espèce, elle a, par définition, la propriété de rester finie pour tous les chemins possibles d'intégration et pour toutes les racines de l'équation $f = 0$ qu'on veut adjoindre à x le long de ces chemins. L'intégrale transformée jouira évidemment de la même propriété.

12. Pour effectuer la transformation d'une intégrale de première espèce, nous la prendrons sous la forme ordinaire

$$\int \frac{\varphi(x, y)\,dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Soient les formules de transformation

$$(21)\qquad x = \frac{M_1(x_1, y_1)}{N_1(x_1, y_1)} = \psi_1(x_1, y_1),$$

$$(22)\qquad y = \frac{P_1(x_1, y_1)}{Q_1(x_1, y_1)} = \chi_1(x_1, y_1),$$

et

$$(23) \qquad f_1(x_1, y_1) = 0$$

l'équation transformée. On aura, par les formules de transformation,

$$(24) \qquad f(x, y) = f\left(\frac{M_1}{N_1}, \frac{P_1}{Q_1}\right) = f_1(x_1, y_1)\Phi_1(x_1, y_1),$$

Φ_1 étant une fraction rationnelle dont le dénominateur est $N_1^\alpha Q_1^\beta$. Si le résultat de la substitution est irréductible, le numérateur de Φ_1 se réduira à une constante (n° 7). Si le résultat de la substitution est réductible, on sait qu'il faut prendre un des facteurs f_1, qui, égalé à zéro, donnera par définition la courbe transformée ; le numérateur de Φ_1 sera le produit de tous les autres facteurs. Si la transformation est réversible, le numérateur de Φ_1 sera la fonction désignée par F_1 dans le n° 6.

On aura, en différentiant la formule (21),

$$dx = \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx_1}\right)dx_1.$$

Le point x_1, y_1 étant toujours, par hypothèse, sur la courbe $f_1 = 0$, on en conclut

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}},$$

et par suite

$$dx = \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial y_1} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\frac{dx_1}{\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}}.$$

Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, prenons les dérivées partielles par rapport à x_1 et y_1 de l'équation (24), en regardant x et y comme des fonctions de x_1, y_1 définies par les formules (21) et (22). On aura

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Phi_1 = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\chi_1}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\Phi_1 = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\chi_1}{\partial y_1},$$

et, en éliminant $\frac{\partial f}{\partial x}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}-\frac{\partial \chi_1}{\partial y_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\right)=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}-\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\right)\Phi_1,$$

d'où

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \chi_1}{\partial y_1}-\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}\frac{\partial \chi_1}{\partial x_1}}{\Phi_1}\frac{dx_1}{\frac{\partial f_1}{\partial y_1}},$$

et enfin

$$\frac{\varphi(x,y)\,dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{\varphi(\psi_1,\chi_1)\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \chi_1}{\partial y_1}-\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}\frac{\partial \chi_1}{\partial x_1}\right)}{\Phi_1}\frac{dx_1}{\frac{\partial f_1}{\partial y_1}}.$$

Le second membre ne contient plus que les variables nouvelles x_1 et y_1. L'intégrale de ce second membre a la propriété de rester finie pour toutes les valeurs de x_1. Pour prouver que c'est une des intégrales de première espèce de l'équation $f_1=0$, il suffit de montrer que l'on pourra profiter de l'équation $f_1=0$ de façon à rendre entière la fraction rationnelle qui multiplie $\frac{dx_1}{\frac{\partial f_1}{\partial y_1}}$.

13. Pour simplifier l'écriture, supprimons les indices et appelons $\frac{A}{B}$ la fraction rationnelle qui multiplie $\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ dans l'intégrale. On sait, par la théorie de l'élimination, qu'il est toujours possible de déterminer deux polynômes C et D en x et y tels que $CB+Df$ soit un polynôme X indépendant de y. Puisque x et y sont liés par l'équation $f(x,y)=0$, on pourra remplacer la fraction $\frac{A}{B}$ par $\frac{AC}{BC}$ ou par $\frac{AC}{X}$. On peut en outre, en se servant de l'équation $f(x,y)=0$, qui est du degré β en y, faire en sorte que le polynôme AC ne contienne plus que des puissances de y inférieures à β. L'intégrale aura alors la forme suivante,

$$\int\frac{h_{\beta-1}y^{\beta-1}+h_{\beta-2}y^{\beta-2}+\ldots+h_0}{X}\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

les coefficients $h_{\beta-1}, h_{\beta-2}, \ldots, h_0$ étant des polynômes en x. Soit $x = a$ une racine de X pour laquelle les β racines $y_1, y_2, \ldots, y_\beta$ tirées de l'équation $f = 0$ sont inégales. L'intégrale étant finie pour $x = a$, il faut que le polynôme numérateur s'annule pour $x = a$ et pour les β racines correspondantes de y. Comme il est seulement du degré $\beta - 1$, il faudra qu'il se réduise à une identité pour $x = a$, c'est-à-dire que les coefficients soient tous divisibles par $x - a$. Après la suppression du facteur $x - a$, on pourra répéter le même raisonnement pour les autres facteurs de X, différents ou non de $x - a$.

Supposons maintenant que pour $x = a$ l'équation $f = 0$ ait un certain nombre n de racines égales à b. Pour que la conclusion précédente subsiste, il suffit évidemment de faire voir que le polynôme numérateur et ses $n - 1$ premières dérivées par rapport à y doivent s'annuler pour $x = a$ et $y = b$. Or, l'intégrale proposée étant finie, il en est de même pour $x = a$ de la suivante :

$$\int \frac{h_{\beta-1} y^{\beta-1} + h_{\beta-2} y^{\beta-2} + \ldots + h_0}{x - a} \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

En posant $x = a + x'$, $y = b + y'$, les dérivées du polynôme numérateur par rapport à y sont, pour $x = a$, $y = b$, les coefficients des différentes puissances de y' dans les termes indépendants de x', et les coefficients des $n - 1$ premières puissances de y' doivent être nuls [1].

Il résulte de là que les polynômes $h_{\beta-1}, h_{\beta-2}, \ldots, h_0$ seront tous divisibles par X, et le coefficient de $\dfrac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ se réduira à un polynôme. Si l'∞ est un point ordinaire de la courbe $f = 0$, on aura $\alpha = \beta$, et le polynôme sera du degré $\alpha - 3$.

14. Nous venons de voir qu'une intégrale de première espèce de $f = 0$ se transformait toujours en une intégrale de première espèce de $f_1 = 0$. Mais on n'obtient pas ainsi *toutes* les intégrales de première espèce de $f_1 = 0$, à moins que la transformation ne soit réversible.

---

(1) *Voir* ma Thèse (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1877).

Soit, par exemple, la courbe

$$(25)\qquad y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2),$$

et faisons la substitution

$$x = x_1^2, \quad y = y_1.$$

La courbe transformée sera

$$(26)\qquad y_1^2 = (1 - x_1^4)(1 - k^2 x_1^4).$$

Cette équation est irréductible, en sorte que la transformation n'est pas réversible. La seule intégrale de première espèce relative à l'équation (25) est

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

et elle se transforme en

$$\int \frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{(1 - x_1^4)(1 - k^2 x_1^4)}},$$

qui est une intégrale de première espèce de l'équation (26). Mais l'intégrale

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{(1 - x_1^4)(1 - k^2 x_1^4)}}$$

est toujours finie et est une intégrale de première espèce de (26). Or, en revenant à la variable x, elle donne

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

qui a bien la propriété d'être toujours finie, mais qui n'appartient pas à la courbe (25), à cause du facteur $\sqrt{x}$ introduit par la résolution des équations de transformation.

15. Au contraire, si la transformation est réversible, on n'introduira, en revenant de la variable x_1 à la variable x, aucune autre irrationnelle que celle qui provient de l'équation $f = 0$. Toute intégrale de première espèce de $f = 0$ se transformera en une intégrale de première espèce de $f_1 = 0$, et réciproquement.

Une intégrale de première espèce de $f=0$ est de la forme

$$\alpha_1 I^{(1)} + \alpha_2 I^{(2)} + \ldots + \alpha_p I^{(p)}, \tag{27}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ étant des constantes arbitraires. Chacune des intégrales $I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots, I^{(p)}$ se changera en une intégrale de première espèce de $f_1 = 0$. On obtiendra ainsi les intégrales $I_1^{(1)}, I_1^{(2)}, \ldots, I_1^{(p)}$, qui sont distinctes les unes des autres, puisqu'on peut passer de ces dernières aux précédentes par une transformation rationnelle. Il n'y en aura pas d'autres distinctes, car la transformation donnerait une intégrale de première espèce de $f=0$, qui serait distincte de $I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots, I^{(p)}$. Le nombre p est donc le même dans les deux cas, et l'intégrale (27) aura pour transformée

$$\alpha_1 I_1^{(1)} + \alpha_2 I_1^{(2)} + \ldots + \alpha_p I_1^{(p)}.$$

16. Le théorème de Jacobi qui sert de base à la théorie de la transformation des fonctions elliptiques est un cas particulier de ce qui précède.

Soit en effet

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

l'intégrale de première espèce relative à la courbe

$$y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2).$$

Soient U_1 et V_1 deux polynômes en x_1, et effectuons la transformation

$$x = \frac{U_1}{V_1}, \quad y = y_1.$$

Admettons que les coefficients des polynômes U_1 et V_1 aient été choisis de telle façon que l'on ait

$$(V_1^2 - U_1^2)(V_1^2 - k^2 U_1^2) = P_1^2 Q_1, \tag{28}$$

P_1 et Q_1 étant des polynômes en x_1 dont le second est du quatrième degré. La courbe transformée aura pour équation

$$y_1^2 = \left(1 - \frac{U_1^2}{V_1^2}\right)\left(1 - k^2\frac{U_1^2}{V_1^2}\right) = \frac{P_1^2 Q_1}{V_1^2}.$$

Les intégrales relatives à cette dernière équation ne contiendront d'autre irrationnelle que $\sqrt{Q_1}$, et la seule intégrale de première espèce est

$$\int \frac{C\,dx_1}{\sqrt{Q_1}},$$

C étant une constante. L'équation (28) entraîne donc celle-ci :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = C\int \frac{dx_1}{\sqrt{Q_1}}.$$

17. Il existe un théorème analogue pour les radicaux cubiques portant sur un polynôme du troisième degré. Transformons la courbe

$$y^3 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \tag{29}$$

au moyen des formules

$$x = \frac{U_1}{V_1}, \quad y = y_1,$$

et supposons que les coefficients de U_1 et de V_1 aient été choisis de telle façon que l'on ait

$$AU_1^3 + BU_1^2V_1 + CU_1V_1^2 + DV_1^3 = P_1^3 Q_1, \tag{30}$$

P_1 et Q_1 étant des polynômes dont le second est du troisième degré.

L'équation de la courbe transformée sera

$$y_1^3 = \frac{P_1^3 Q_1}{V_1^3}. \tag{31}$$

On voit que la courbe (29) est du *genre* 1. Il n'y a donc qu'une seule intégrale de première espèce, qui est, d'après la règle générale,

$$\int \frac{dx}{y^2} = \int \frac{dx}{(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)^{\frac{2}{3}}}.$$

Les intégrales qui dépendent de la courbe (31) ne contiennent pas d'autre irrationnelle que $\sqrt[3]{Q_1}$. Il n'y a donc qu'une seule intégrale de première espèce pour la courbe transformée, et elle est

$$\int \frac{dx_1}{Q_1^{\frac{2}{3}}}.$$

L'équation (30) entraînera donc celle-ci,

$$\int \frac{dx}{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)^{\frac{2}{3}}} = k\int \frac{dx_1}{Q_1^{\frac{2}{3}}},$$

k étant une constante.

Il est facile de le vérifier, comme on le fait pour les radicaux carrés. En différentiant $x = \frac{U_1}{V_1}$, on trouve

$$dx = \frac{V_1 U'_1 - U_1 V'_1}{V_1^2}\,dx_1,$$

d'où

$$\frac{dx}{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)^{\frac{2}{3}}} = \frac{V_1 U'_1 - U_1 V'_1}{V_1^2}\,\frac{dx_1}{\left(A\frac{U_1^3}{V_1^3}+B\frac{U_1^2}{V_1^2}+C\frac{U_1}{V_1}+D\right)^{\frac{2}{3}}}$$
$$= \frac{(V_1 U'_1 - U_1 V'_1)\,dx_1}{P_1^2 Q_1^{\frac{2}{3}}},$$

et il suffit de montrer que le polynôme $V_1 U'_1 - U_1 V'_1$ est du même degré que P_1^2 et divisible par lui.

Posons

$$AU_1^3 + BU_1^2 V_1 + CU_1 V_1^2 + DV_1^3 = A(U_1 - \alpha V_1)(U_1 - \beta V_1)(U_1 - \gamma V_1),$$

α, β, γ étant supposés inégaux. Les polynômes $U_1 - \alpha V_1$, $U_1 - \beta V_1$, $U_1 - \gamma V_1$ n'ont pas de facteurs communs, car ces facteurs devraient appartenir à U_1 et V_1, et la fraction $\frac{U_1}{V_1}$ serait réductible, ce que nous ne supposerons pas. Il en résulte que tout facteur de P_1 entre au cube dans l'un des polynômes, dans $U_1 - \alpha V_1$ par exemple. Or on a identiquement

$$U_1 V'_1 - V_1 U'_1 = (U_1 - \alpha V_1)V'_1 - (U'_1 - \alpha V'_1)V_1,$$

ce qui montre que tout facteur de P_1 entre au carré dans $U_1 V'_1 - V_1 U'_1$. Si U_1 et V_1 sont tous deux du degré n_1 ou bien l'un d'eux du degré n_1 et l'autre du degré $n_1 - 1$, P_1 sera évidemment du degré $n_1 - 1$, et l'on voit aisément que $U_1 V'_1 - V_1 U'_1$ est du degré $2n_1 - 2$; il en résulte que le coefficient de $\dfrac{dx_1}{Q_1^{\frac{2}{3}}}$ est une constante. On en conclut que, pour toute autre hypothèse sur les degrés de U_1 et V_1, il est impossible de satisfaire à l'équation (30).