ÉMILE PICARD

# Mémoire sur les fonctions entières

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série*, tome 9 (1880), p. 145-166
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1880_2_9__145_0>

# MÉMOIRE

SUR

# LES FONCTIONS ENTIÈRES,

PAR M. É. PICARD.

1. Nous donnerons, avec M. Weierstrass, le nom de *fonctions entières d'une variable complexe* $z$ aux fonctions uniformes et continues dans toute l'étendue du plan; ce seront, par suite, des fonctions représentées par une série, toujours convergente, ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable. L'objet principal de ce travail est la démonstration de deux théorèmes généraux sur les fonctions entières. Dans le premier Chapitre, je montre qu'il ne peut y avoir plus d'une valeur finie que ne puisse prendre pour une valeur finie de la variable une fonction entière. La voie suivie dans la démonstration de ce théorème nous conduira sans peine à la solution du problème suivant : Trouver une expression analytique générale d'une fonction de $z$ n'ayant dans toute l'étendue du plan ou de la sphère que trois points singuliers. Je termine le premier Chapitre par quelques applications du théorème énoncé plus haut. Le second Chapitre est consacré à la démonstration d'une proposition plus générale, dont le théorème précédent peut être considéré comme un cas particulier, quoiqu'il y ait lieu de présenter séparément les deux démonstrations. Je fais voir qu'il ne peut y avoir plus d'une valeur finie $a$ pour laquelle l'équation $G(z) = a$, $G(z)$ étant une fonction entière, ait seulement un nombre limité de racines, à moins que $G(z)$ ne soit un polynôme. Je montre, en finissant, que les considérations employées dans ce travail permettent de compléter l'étude faite par M. Weierstrass sur la forme d'une fonction analytique uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel [1].

[1] Les recherches précédentes ont été communiquées à l'Académie des Sciences dans les séances des 28 avril, 19 mai et 20 octobre 1879 (voir *Comptes rendus*, loc. cit.).

## CHAPITRE I.

2. Commençons par rappeler quelques propriétés d'une transcendante importante dans la théorie des fonctions elliptiques, qui seront utiles pour notre démonstration. Soient $4K$ et $2iK'$ les périodes de la fonction elliptique; K et K' sont, comme on sait, représentés par des intégrales définies pour des valeurs réelles, comprises entre zéro et l'unité de $x = k^2$, en désignant, suivant l'usage, par $k$ le module de la fonction elliptique. En se servant de l'équation différentielle linéaire à laquelle satisfont K et K', on peut (Fuchs, *Journal de Borchardt*, t. 71) les définir pour des valeurs complexes quelconques de la variable $x$. Formons maintenant le rapport $\frac{K'i}{K}$, que nous désignerons par $\omega$. On peut considérer $\omega$ comme une fonction de $x$. Cette fonction $\omega$ de $x$ n'admet dans tout le plan que trois points critiques : ce sont les points $0$, $1$ et le point $\infty$. Dans toute région du plan à contour simple ne contenant aucun de ces trois points, la fonction est uniforme et continue. De plus, pour toute valeur de $x$ différente de $0$, $1$ et $\infty$, $\omega$ n'est jamais nul, et le coefficient de $i$ dans cette fonction, mise sous la forme ordinaire des quantités imaginaires, est toujours positif. La transcendante inverse $x$, considérée comme fonction de $\omega$, est uniforme, mais elle est seulement définie pour une moitié du plan des $\omega$. C'est à M. Hermite que l'on doit l'étude de cette transcendante importante, qu'il a désignée par $\varphi^8(\omega)$. Nous aurons besoin, dans la seconde Partie de cette étude, de nous appuyer sur une propriété de cette transcendante.

3. Il peut arriver qu'une fonction entière $G(z)$ ne puisse, pour aucune valeur finie de $z$, prendre une certaine valeur finie $a$. L'expression $e^{f(z)} + a$, par exemple, où $f(z)$ est une fonction entière, ne devient jamais égale à $a$. La circonstance qui se présente à l'égard de $a$ peut-elle se présenter pour une autre grandeur $b$? Peut-il, en d'autres termes, arriver que les équations $G(z) = a$ et $G(z) = b$ n'aient pas de racines?

Nous allons montrer qu'*une fonction* $G(z)$ *qui ne deviendrait jamais égale ni à a ni à b serait nécessairement une constante.*

Remarquons tout d'abord que nous pouvons supposer $a = 0$ et $b = 1$. Considérons, en effet, la fonction $\frac{G(z)-a}{b-a}$; elle ne deviendra, d'après nos hypothèses, jamais égale ni à zéro ni à l'unité. Nous allons raisonner sur cette fonction, que nous désignerons encore par $G(z)$, afin de ne pas multiplier les notations. Posons $x = G(z)$; la fonction $\omega$ de $x$, dont nous avons parlé plus haut, deviendra une fonction de $z$ que nous allons étudier. A une valeur quelconque $z_0$ de $z$ correspond une valeur $x_0$ de $x$, et, quand $z$ décrit un chemin quelconque C partant de $z_0$ et revenant à ce point, $x$ décrit une courbe fermée C′ pouvant, par des déformations continues, être ramenée au point $x_0$ sans franchir aucun des points 0 et 1. Déformons en effet la courbe C sans cesser de la faire passer par le point $z_0$; nous pouvons ainsi la réduire à ce point. Il est clair que, par ces déformations continues de C, nous réduirons la courbe correspondante C′ au point $x_0$ sans qu'elle traverse jamais aucun des points 0 et 1, puisque, par hypothèse, $G(z)$ ne prend jamais ces valeurs.

Cela posé, à la valeur $x_0$ de $x$ correspondent une infinité de déterminations de la fonction $\omega$. Considérons l'une d'elles, que nous désignerons par $\omega_0$. Lorsque $x$ partant de $x_0$ revient à ce point, après avoir décrit une courbe n'embrassant ni le point 0 ni le point 1, la fonction $\omega$ reprend la valeur $\omega_0$. Regardons maintenant $\omega$ comme une fonction de $z$. Nous partons de $z_0$ avec la valeur $\omega = \omega_0$, et, quand $z$ décrit un chemin quelconque et revient en $z_0$, $\omega$ reprend la valeur $\omega_0$, puisque, comme nous l'avons fait remarquer, à la courbe C correspond dans le plan des $x$ une courbe C′ n'embrassant aucun des points 0 et 1, c'est-à-dire pouvant, par des déformations continues, se ramener au point $x_0$ sans franchir aucun de ces points. Je dis maintenant que, $z$ allant de $z_0$ à un point quelconque $z_1$ du plan, $\omega$ prend toujours en ce point la même valeur, quel que soit le chemin suivi pour y arriver. Considérons en effet deux chemins $z_0 a z_1$, $z_0 b z_1$ allant du point $z_0$ au point $z_1$. Soit $\omega_1$ la valeur qu'acquiert $\omega$ quand on suit le chemin $z_0 a z_1$; en continuant suivant $z_1 b z_0$, on ramène la valeur initiale $\omega_0$; si maintenant on rétrograde suivant $z_0 b z_1$, la fonction repassera par la même valeur en chaque point et, par conséquent, elle acquerra en $z_1$, la valeur $u_1$ obtenue précédemment.

D'autre part, pour toute valeur de $z$, $\omega$ a une valeur finie, puisque à chaque valeur de $z$ correspond toujours une valeur de $x$ différente de zéro et de l'unité. Par conséquent, nous pouvons regarder $\omega$ comme une fonction de $z$ uniforme et continue dans toute l'étendue du plan, c'est-à-dire une fonction entière. Mais nous avons dit que le coefficient de $i$ dans $\omega$ mis sous la forme des imaginaires est positif. Nous avons donc alors une fonction entière $f(z)$ jouissant de la propriété précédente. Je dis que $f(z)$ ne peut être qu'une constante. Envisageons en effet l'expression $e^{if(z)}$. C'est une fonction entière dont le module est $e^{-\mathrm{Y}}$, en posant $f(z) = \mathrm{X} + \mathrm{Y}i$; mais, Y étant toujours positif, on voit que $e^{-\mathrm{Y}}$ sera toujours moindre que l'unité. La fonction $e^{if(z)}$, ayant pour toute valeur de $z$ un module moindre que 1, est une constante; il en est, par suite, de même de $f(z)$. Notre fonction $\omega[\mathrm{G}(z)]$ est donc une constante; mais $\omega$ est une véritable fonction de $x$, et, si elle reste constante, c'est que $x$ reste constant. On voit alors que $\mathrm{G}(z)$ ne peut être qu'une constante.

4. Considérons maintenant une fonction multiforme $f(x)$ d'une variable complexe $x$, n'ayant dans toute l'étendue du plan ou de la sphère que trois points singuliers. Pour toute autre valeur de la variable, cette fonction reste finie et continue et elle est uniforme dans toute région du plan à contour simple ne contenant aucun de ces trois points. Telle serait, par exemple, une intégrale d'une équation différentielle linéaire ayant trois points singuliers. Je me propose de montrer comment on peut trouver un développement de la fonction valable pour tous les points du plan, quel que soit d'ailleurs le chemin suivi par la variable.

Nous pouvons supposer, sans restreindre en rien la généralité du problème, que les trois points singuliers de la fonction sont les points $x = 0$, $x = 1$ et le point $\infty$. J'avais pensé tout d'abord à rechercher une fonction entière $\mathrm{G}(z)$, qui ne pût pour aucune valeur finie devenir égale à zéro et à l'unité. En posant $x = \mathrm{G}(z)$, notre fonction $f(x)$ ou plutôt chacune de ses déterminations serait devenue une fonction uniforme de $z$. Mais la fonction $\mathrm{G}(z)$ ne peut exister, comme nous venons de le voir, et c'est même par la substitution $x = G(z)$ dans une fonction de $x$ ayant pour points singuliers o, 1 et $\infty$ que nous avons démontré cette impossibilité.

Revenons à la fonction $\omega = \frac{K'i}{K}$. Nous avons dit que le coefficient de $i$ dans cette expression mise sous la forme ordinaire des imaginaires est toujours positif; quand $x$ tend vers o, 1 ou $\infty$, $\omega$ tend vers une valeur réelle et rationnelle, ou augmente indéfiniment de manière que le coefficient de $i$ soit positif et lui-même infiniment grand. Pour toute valeur de $x$, distincte des points critiques, le coefficient de $i$ dans $\omega$ n'est jamais nul. Supposons en effet que, pour $x = x_0$, $\omega$ ait une valeur réelle $\omega_0$; on aura, puisque la fonction est uniforme et continue pour toute valeur de $x$ différente de o, 1 et $\infty$,

$$\omega = \omega_0 + (x - x_0)^m [A + B(x - x_0) + \ldots],$$

$m$ étant un entier positif qui n'est pas nul. Or le coefficient de $i$ dans le second terme du second membre peut évidemment avoir un signe quelconque dans le voisinage de $x_0$; le coefficient de $i$ dans $\omega$ n'aurait pas alors un signe invariable, ce qui est inexact.

Posons maintenant $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}} = e^{\pi\omega i}$. On peut considérer $q$ comme une fonction de $x$, qui a les mêmes points critiques que $\omega$. Pour toute valeur de $x$ distincte de ces points critiques, le module de $q$ est moindre que l'unité, et quand $x$ arrive, après avoir suivi un chemin quelconque, à l'un des points o, 1, $\infty$, $q$ tend soit vers zéro, soit vers un point d'une circonférence C décrite du point o comme centre avec un rayon égal à l'unité. M. Fuchs a montré (*Journal de Borchardt*, t. 83) que la fonction inverse $x = \varphi(q)$, définie par la relation $q = e^{\pi\omega i}$, est une fonction holomorphe de $q$ à l'intérieur du cercle C. Pour $q = 0$, $x$ est nul, et, pour toute autre valeur de $q$ à l'intérieur de C, $x$ est différent de o ou 1. J'ajoute une remarque importante pour l'objet que nous avons en vue : si $q$ part d'une valeur $q_0$ et revient à ce point, après avoir décrit une courbe Q (située, bien entendu, à l'intérieur du cercle C) ne comprenant pas l'origine à son intérieur, $x$ part du point correspondant $x_0$ et revient à ce point après avoir décrit un chemin n'embrassant aucun des points o et 1. Déformons en effet la courbe Q d'une manière continue, de manière à la ramener au point $q_0$. On peut effectuer cette déformation de manière que Q ne traverse pas l'origine. La courbe correspondante dans le plan des $x$ se trouvera ramenée au point $x_0$ sans avoir traversé aucun des points 0 et 1, puisque, comme nous l'avons vu, $x$ ne prend aucune de ces valeurs pour un point situé à l'intérieur de C, à l'exception de $q = 0$.

Cela posé, faisons dans notre fonction $f(x)$ le changement de variable $x = \varphi(q)$. Cette fonction deviendra une fonction $F(q)$, n'ayant dans le cercle C d'autre point singulier que l'origine. Il résulte en effet immédiatement de la dernière remarque que $F(q)$ est uniforme et continu dans toute région du plan à contour simple ne comprenant pas l'origine.

5. La question revient donc maintenant à trouver une expression analytique générale d'une fonction d'une variable $z$, n'ayant à l'intérieur d'un cercle donné d'autre point singulier que le centre de ce cercle. Nous supposerons que ce centre est l'origine des coordonnées et que de plus le rayon du cercle est plus petit que l'unité, cette dernière circonstance pouvant toujours se réaliser par un changement de variable $z_1 = kz$, où $k$ est un nombre positif suffisamment petit. Cela posé, je fais la transformation

$$z' = \frac{1}{\log z}.$$

Cherchons quelle est la portion du plan des $z'$ correspondant au cercle C décrit, dans le plan des $z$ de l'origine comme centre avec un rayon égal à $r$. En désignant par $\theta$ l'argument d'un point de ce cercle et par $lr$ le logarithme arithmétique de $r$, nous avons, en posant $z' = x' + iy'$,

$$x' + iy' = \frac{1}{lr + \theta i};$$

donc

$$x' = \frac{lr}{(lr)^2 + \theta^2}, \quad y' = \frac{-\theta}{(lr)^2 + \theta^2},$$

et l'on a, par suite, en éliminant $\theta$,

$$(x'^2 + y'^2)\, lr - x' = 0, \tag{C'}$$

équation d'un cercle passant à l'origine et dont le centre est le point $x' = \frac{1}{2lr}$. De plus, si $r$ est, comme nous le supposons, moindre que l'unité, aux points à l'intérieur du cercle C correspondront les points à l'intérieur du cercle C'. La fonction $f(z)$ deviendra une fonction $F(z')$. A toute courbe fermée située à l'intérieur du cercle C' correspondra une courbe fermée située dans C, qui ne comprendra pas l'origine à son intérieur. Par suite, la fonction $F(z')$ sera uniforme et continue à l'intérieur de C', et l'on pourra la développer en une série procédant suivant les puissances croissantes de $z' - \frac{1}{2lr}$. Nous aurons, par suite, pour $f(z)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left( \frac{1}{\log z} - \frac{1}{2lr} \right)^n,$$

où les $A_n$ sont des constantes. Ce développement est valable pour tous les points du cercle C. Aux déterminations multiples de $\log z$ correspondront les déterminations multiples de la fonction quand la variable $z$, partant d'un point, décrit à l'intérieur de C un chemin embrassant une ou plusieurs fois l'origine.

6. Revenons à la fonction $F(q)$ dont il a été question plus haut. Posons seulement $q = \lambda q'$, où $\lambda$ désigne un nombre réel positif plus grand que l'unité; nous aurons de cette manière une fonction $F(\lambda q')$ de $q'$, n'ayant à l'intérieur d'un cercle ayant l'origine pour centre et un rayon $\frac{1}{\lambda}$ plus petit que l'unité d'autre point singulier que l'origine. Nous pouvons appliquer à cette fonction le développement indiqué (n° 5). On aura ainsi

$$F(\lambda q') = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left( \frac{1}{\log q'} + \frac{1}{2l\lambda} \right)^n$$

ou

$$F(q) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left( \frac{1}{\log q - l\lambda} + \frac{1}{2l\lambda} \right)^n,$$

les $A_n$ étant des constantes. Remplaçons enfin $q$ par $e^{\pi\omega i}$, cette formule deviendra

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{1}{\pi\omega i - l\lambda} + \frac{1}{2l\lambda}\right)^n.$$

Tel est le développement de la fonction $f(z)$ valable pour tous les points du plan, quel que soit le chemin suivi par la variable. Les déterminations multiples de $\omega$ nous donnent les déterminations multiples de la fonction.

7. J'envisage maintenant une fonction de $z$ n'ayant dans toute l'étendue du plan d'autres points singuliers que des pôles. Elle pourra se mettre sous la forme

$$f(z) = \frac{G_1(z)}{G_2(z)},$$

$G_1(z)$ et $G_2(z)$ étant des fonctions entières; ce théorème important est dû à M. Weierstrass.

Je dis qu'*il ne peut y avoir plus de deux valeurs finies $a$ et $b$ que ne puisse prendre une telle fonction pour une valeur finie de la variable*. Cherchons d'abord l'expression générale d'une fonction $f(z)$, de la forme précédente, qui ne pourrait jamais devenir égale à $a$ et $b$. Dans ce cas, l'expression $G_1(z) - aG_2(z)$ ne pourra s'annuler pour aucune valeur de $z$. On aura, par suite,

$$G_1(z) - aG_2(z) = e^{P(z)},$$

$P(z)$ étant une fonction entière, et de même

$$G_1(z) - bG_2(z) = e^{Q(z)},$$

$Q(z)$ étant également une fonction entière.

De ces deux relations on conclut immédiatement les valeurs de $G_1$ et $G_2$, et par suite

$$f(z) = \frac{ae^{Q(z)} - be^{P(z)}}{e^{Q(z)} - e^{P(z)}}.$$

Nous allons voir maintenant que cette fonction peut prendre une valeur finie quelconque $c$, différente de $a$ et $b$.

On aura, en effet, l'équation

$$ae^{Q(z)} - be^{P(z} = c(e^{Q(z)} - e^{P(z)}).$$

ou

$$e^{Q(z)-P(z)} = \frac{b-c}{a-c} = A.$$

La constante A du second membre n'est pas nulle, puisque $c$ est différent de $b$. Par conséquent, il faut voir si l'on pourra trouver une valeur de $z$ telle que

$$Q(z) - P(z) = \log A + 2m\pi i,$$

$m$ étant un entier quelconque et $\log A$ une des déterminations du logarithme.

Mais il ne peut y avoir plus d'une valeur finie que ne puisse prendre la fonction entière $Q(z) - P(z)$ pour une valeur finie de la variable ($n^o$ 3); or, le second membre de l'équation précédente peut prendre une infinité de valeurs : il s'ensuit qu'il y aura certainement une infinité de racines pour l'équation $f(z) = c$. Cela suppose que la différence $Q(z) - P(z)$ ne soit pas une constante; mais on voit immédiatement, dans ce cas, que $f(z)$ est elle-même une constante.

8. La proposition que nous avons démontrée ($n^o$ 3) sur les fonctions entières fournit une démonstration immédiate du théorème fondamental de la théorie des équations, à savoir que toute équation $P(z) = 0$, où $P(z)$ est un polynôme, a une racine.

Il est tout d'abord évident qu'une équation de cette forme ne peut avoir une infinité de racines. Cela posé, soit $P(z)$ un polynôme qui n'a pas de racines. Le quotient $\frac{P'(z)}{P(z)}$ sera alors une fonction entière, et, par suite, on pourra écrire

$$P(z) = e^{G(z)},$$

$G(z)$ étant une fonction entière. Mais cela est impossible, car alors l'équation $P(z) = a$, $a$ étant une constante quelconque différente de zéro, aurait une infinité de racines. L'équation $e^{G(z)} = a$ peut en effet s'écrire

$$G(z) = \log a + 2m\pi i,$$

$m$ étant un entier quelconque, et il suit du théorème fondamental qu'il ne peut y avoir plus d'une valeur $m$ pour laquelle l'équation précédente n'ait pas de racines.

# CHAPITRE II.

9. Je me propose de démontrer maintenant qu'il ne peut y avoir plus d'une valeur finie $a$ pour laquelle l'équation $G(z) = a$, $G(z)$ étant une fonction entière, ait seulement un nombre limité de racines, à moins que $G(z)$ ne soit un polynôme. Nous allons montrer en effet que, $a$ et $b$ désignant deux quantités finies, $G(z)$ est un polynôme si les équations $G(z) = a$ et $G(z) = b$ ont un nombre limité de racines.

Nous nous sommes servi, dans le Chapitre I, de la transcendante $x = \varphi^8(\omega)$ de M. Hermite. Il sera préférable pour notre objet d'employer ici une transcendante un peu différente, quoique présentant avec la première une grande analogie. Posons

$$v = \frac{4}{27}\,\frac{(x+\varepsilon)^3(x+\varepsilon^2)^3}{x^2(1-x)^2},$$

où $\varepsilon$ désigne la racine cubique imaginaire de l'unité $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $x = \varphi^8(\omega)$ ; $v$ ainsi défini est une fonction de $\omega$, seulement définie dans une moitié du plan, comme la fonction $x$, et uniforme. Elle a été plusieurs fois employée par M. Hermite dans son travail célèbre sur les équations modulaires, et dans ces derniers temps son étude a été reprise à un autre point de vue par M. Dedekind (*Journal de Borchardt*, t. 83). Nous dirons que deux nombres $\omega$ et $\omega_0$ tels que

$$\omega = \frac{\nu + \rho\omega_0}{\lambda + \mu\omega_0}, \tag{1}$$

$\lambda, \mu, \nu$ et $\rho$ étant quatre entiers réels satisfaisant à la relation $\lambda\rho - \mu\nu = 1$, sont équivalents. La fonction $v(\omega)$ reprend la même valeur pour des valeurs équivalentes de $\omega$ ; de plus, $v$ prend respectivement les valeurs $0, 1$ et $\infty$ pour $\omega = \varepsilon$, $\omega = i$, et enfin $\omega$ infiniment grand, de telle manière que le coefficient de $i$ soit positif et lui-même infiniment grand. Considérons maintenant $\omega$ comme fonction de la variable $v$; elle n'aura dans tout le plan des $v$ que les trois points critiques o, 1 et le point $\infty$ ; pour toute valeur de $v$, le coefficient de $i$ dans $\omega$ mis sous la forme ordinaire des quantités imaginaires sera positif; de plus, $\omega$ a pour une valeur quelconque de $v$ une infinité de valeurs, et, $\omega_0$ désignant l'une quelconque d'entre elles, toutes les autres sont comprises dans la formule (1).

**10.** Nous pouvons évidemment supposer que les quantités désignées au début par $a$ et $b$ sont zéro et l'unité. Soit donc $G(z)$ une fonction entière telle que les équations $G(z) = 0$ et $G(z) = 1$ n'aient qu'un nombre limité de racines.

Dans la fonction $\omega$ de $v$ considérée dans le paragraphe précédent, posons $v = G(z)$; $\omega$ deviendra une fonction $F(z)$ de $z$, dont les points critiques seront les points racines des équations $G(z) = 0$ et $G(z) = 1$, tous situés à distance finie puisque leur nombre est limité, et le point $\infty$. Je considère un cercle C ayant l'origine pour centre et comprenant à son intérieur tous les points critiques de $F(z)$ situés à distance finie, et j'appelle *domaine du point* $\infty$ la partie du plan extérieure à ce cercle; c'est dans ce domaine que nous allons étudier la forme de la fonction.

Désignons par $\omega$ une des déterminations de la fonction dans le domaine du point $\infty$. Quand la variable aura fait dans le sens positif le tour complet du cercle C, $\omega$ se transformera en une expression équivalente que nous désignerons par $\frac{\nu + \rho\omega}{\lambda + \mu\omega}$. Je cherche tout d'abord si l'on peut déterminer les cinq constantes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ et $k$ de manière que $\frac{\alpha + \beta\omega}{\gamma + \delta\omega}$ se reproduise multiplié par $k$ après cette circulation.

On aurait alors

$$\frac{\alpha(\lambda + \mu\omega) + \beta(\nu + \rho\omega)}{\gamma(\lambda + \mu\omega) + \delta(\nu + \rho\omega)} = k\frac{\alpha + \beta\omega}{\gamma + \delta\omega},$$

quel que soit $\omega$; on obtient ainsi les relations

$$(\text{I}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu\alpha\delta + \beta[\delta\rho(1 - k) - k\gamma\mu] = 0, \\ [\gamma\lambda(1 - k) - k\nu\delta]\alpha + \nu\gamma\beta = 0, \\ -[\mu\gamma(k - 1) + k\rho\delta - \lambda\delta]\alpha + [\rho\gamma + (1 - k)\nu\delta - k\lambda\gamma]\beta = 0. \end{array} \right.$$

L'élimination de $\alpha$ et $\beta$ entre les deux premières équations donne

$$\mu\nu\delta\gamma + [k\mu\gamma + (k-1)\rho\delta][\gamma\lambda(1-k) - k\nu\delta] = 0$$

ou

$$(1-k)[k\mu\lambda\gamma^2 + \lambda\rho\delta\gamma(1-k) + k\nu\rho\delta^2 + (1+k)\mu\nu\delta\gamma] = 0.$$

De même, l'élimination de $\alpha$ et $\beta$ entre la première et la troisième équation donne

$$(1-k)[\mu\nu\delta^2 + \mu\rho\delta\gamma(k-1) + \rho\delta^2(k\rho-\lambda) + k\mu^2\gamma^2 + \mu\rho\gamma\delta(k+1)] = 0.$$

Laissons de côté la solution évidente $k = 1$, qui conduit à $\beta\gamma - \alpha\delta = 0$ et est par suite inutile, puisque alors $\dfrac{\alpha+\beta\omega}{\gamma+\delta\omega}$ ne dépend plus de $\omega$.

Les équations précédentes peuvent s'écrire, en tenant compte de la relation $\lambda\rho - \mu\nu = 1$,

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} k(\mu\gamma+\rho\delta)^2 = \delta^2, \\ k(\mu\gamma+\rho\delta)(\lambda\gamma+\nu\delta) = \delta\gamma. \end{cases}$$

En éliminant enfin $k$, on obtient l'équation suivante homogène entre $\gamma$ et $\delta$ :

$$\text{(III)} \qquad \nu\delta^2 + (\lambda-\rho)\delta\gamma - \mu\gamma^2 = 0.$$

Si $(\lambda+\rho)^2$ est supérieur à 4, les racines de cette équation seront réelles, et les racines seront égales si $(\lambda+\rho)^2 = 4$. Cherchons maintenant dans quel cas la valeur de $k$ correspondant à un système de valeurs de $\gamma$ et $\delta$ sera égale à l'unité. On aurait alors simultanément

$$(\mu\gamma+\delta)^2 = \delta^2 \quad \text{et} \quad (\mu\gamma+\delta\rho)(\lambda\gamma+\delta\nu) = \gamma\delta.$$

L'élimination de $\gamma$ et $\delta$ entre ces équations donne de suite

$$(\lambda+\rho)^2 = 4.$$

Par suite, si les racines de l'équation (III) sont inégales, la valeur correspondante de $k$ déduite de l'une ou l'autre des équations (II) ne sera pas égale à l'unité. C'est dans cette hypothèse que nous allons d'abord nous placer. Dans ce cas, $\mu\nu$ est différent de zéro, car autrement $\lambda = \rho = \pm 1$, et par suite $(\lambda+\rho)^2 = 4$. Aucune des valeurs $\gamma$ et $\delta$ n'est égale à zéro, et une quelconque des équations (I) fait connaître le rapport de $\alpha$ à $\beta$.

**11.** Soit d'abord supposé $(\lambda+\rho)^2>4$. Les racines de l'équation (III) sont réelles; prenons l'une quelconque d'entre elles : la valeur correspondante de $k$ sera réelle et positive, comme le montre la première des relations (II), et les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ seront elles-mêmes réelles. Désignons par $a$ le logarithme arithmétique de $k$; $z^{\frac{a}{2\pi i}}$ se reproduit multiplié par $k$ quand $z$ fait le contour complet du cercle C. Par suite, $\frac{\alpha+\beta\omega}{\gamma+\delta\omega}:z^{\frac{a}{2\pi i}}$ reprend la même valeur après un tour complet, et l'on peut écrire

$$\frac{\alpha+\beta\omega}{\gamma+\delta\omega}=z^{\frac{a}{2\pi i}}\varphi(z),$$

la fonction $\varphi(z)$ étant uniforme dans le domaine du point $\infty$. Elle n'aura dans ce domaine d'autre point singulier que le point $\infty$, car le dénominateur $\gamma+\delta\omega$ ne peut jamais devenir nul, puisque $\gamma$ et $\delta$ sont réels. De plus, $\varphi(z)$ ne s'annulera jamais, puisque $\alpha+\beta\omega$ ne s'annule pas, la fonction $\omega$ ne pouvant prendre une valeur réelle pour une valeur de $\varphi$ distincte de o, 1 ou l'infini. Par suite, le quotient $\varphi'(z):\varphi(z)$ est uniforme et continu dans le domaine du point $\infty$, à l'exception de ce point. On a donc

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\ldots+\frac{A_2}{z^2}+\frac{A_1}{z}+A+Bz+\ldots,$$

série double procédant suivant les puissances croissantes de $z$. En intégrant, on voit de suite que $A_1$ doit être un entier $m$ positif ou négatif, puisque $\varphi(z)$ est uniforme, et, par suite, on peut écrire

$$\varphi(z)=z^m e^{P(z)},$$

$P(z)$ étant uniforme et continu dans le domaine du point $\infty$, à l'exception de ce point. Nous avons donc

$$\frac{\alpha+\beta\omega}{\gamma+\delta\omega}=z^{\frac{a}{2\pi i}+m}e^{P(z)}.$$

Or le coefficient de $i$ dans le premier membre a un signe invariable, car, en posant $\omega=A+Bi$, ce coefficient se réduit à

$$\frac{B(\beta\gamma-\alpha\delta)}{(\gamma+\delta A)^2+\delta^2B^2},$$

et, B étant toujours positif, cette quantité a le signe de $\beta\gamma-\alpha\delta$. Je dis maintenant que le coefficient de $i$ dans le second membre ne peut avoir un signe invariable. On a, en effet,

$$z^{\frac{a}{2\pi i}+m} e^{P(z)} = e^{\left(\frac{a}{2\pi i}+m\right)\log z + P(z)}.$$

Si dans le premier membre le coefficient de $i$ a un signe invariable, que nous pouvons supposer être le signe $+$, le coefficient de $i$ dans $\left(\frac{a}{2\pi i}+m\right)\log z + P(z)$ devra rester compris entre $2k\pi$ et $(2k+1)\pi$, c'est-à-dire deux limites fixes. Posons

$$\left(\frac{a}{2\pi i}+m\right)\log z + P(z) = U + iV.$$

Il est tout d'abord évident que, si $m$ n'est pas nul, V ne peut rester entre deux limites fixes, car une rotation autour du cercle C augmente V de $2m\pi$.

Supposons donc $m = 0$; la relation précédente pourra s'écrire

$$\log z + \frac{2\pi i}{a} P(z) = -\frac{2\pi V}{a} + \frac{2\pi i U}{a},$$

ou

$$(1)\qquad z e^{\frac{2\pi i}{a} P(z)} = e^{-\frac{2\pi V}{a}} e^{\frac{2\pi i U}{a}}.$$

Mais le module du second membre reste compris entre deux limites déterminées. Il faudrait qu'il en fût de même du premier membre. Or on peut écrire $P(z) = P_1(z) + P_2(z)$, $P_1(z)$ étant une fonction entière et $P_2(z)$ une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{z}$, qui s'annule pour $z = \infty$. La fonction entière $z e^{\frac{2\pi i}{a} P_1(z)}$ peut devenir infiniment grande dans le domaine du point $\infty$; le premier membre de (1) ne peut donc avoir son module compris entre deux limites fixes. L'hypothèse faite que $(\lambda + \rho)^2$ est supérieur à 4 est donc inadmissible. Nous avons donc à examiner les cas de $(\lambda + \rho)^2 = 0$ et 1.

**12.** Soit $(\lambda + \rho) = 0$. On trouve de suite, en résolvant l'équation (III) (n° **10**),

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{-\lambda \pm i}{\nu},$$

et nous prendrons $\gamma = \nu$, $\delta = -\lambda + i$.

On a alors $k = -1$ d'après l'une quelconque des équations (II), et il vient enfin

$$\alpha = -\nu \quad \text{et} \quad \beta = \lambda + i.$$

La fonction $\dfrac{\alpha + \beta\omega}{\gamma + \delta\omega}$ se reproduisant changée de signe après un tour complet, on peut écrire

$$\frac{-\nu + (\lambda + i)\omega}{\nu - (\lambda - i)\omega} = \sqrt{z}\,\varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant uniforme dans le domaine du point $\infty$. Nous pouvons évidemment supposer $\nu$ négatif, car on peut changer les signes des quatre nombres $\lambda$, $\mu$, $\nu$ et $\rho$ sans qu'ils cessent de satisfaire aux deux relations $\lambda\rho - \mu\nu = 1$ et $\lambda + \rho = 0$. Il suit de là que la fonction $\varphi(z)$ n'aura pas de pôles dans le domaine du point $\infty$, $\omega$ ne pouvant devenir égal à $\dfrac{\nu}{\lambda - i}$, quantité où le coefficient de $i$ est négatif. Nous pouvons donc poser

$$\varphi(z) = \mathrm{P}(z) + \mathrm{Q}(z),$$

$\mathrm{P}(z)$ étant une fonction entière et $\mathrm{Q}(z)$ une fonction uniforme représentée par une série de la forme $\dfrac{\mathrm{A}_1}{z} + \dfrac{\mathrm{A}_2}{z^2} + \ldots$ procédant suivant les puissances décroissantes de $z$, convergente dans le domaine du point $\infty$, et qui tend vers zéro quand $z$ augmente indéfiniment. Je dis que $\mathrm{P}(z)$ est identiquement nul. On a, en effet,

$$\frac{-\nu + (\lambda + i)\omega}{\nu - (\lambda - i)\omega} = \sqrt{z}\,\mathrm{P}(z) + \sqrt{z}\,\mathrm{Q}(z).$$

Il est évident que pour des valeurs convenables de $z$, dans le domaine du point $\infty$, le module du second membre pourra devenir aussi grand que l'on veut si $\mathrm{P}(z)$ n'est pas identiquement nul; donc, pour ces valeurs, $\omega$ différerait très peu de $\dfrac{\nu}{\lambda - i}$, ce qui est inadmissible, puisque le coefficient de $i$ dans cette expression est négatif. On a, par suite,

$$\frac{-\nu + (\lambda + i)\omega}{\nu - (\lambda - i)\omega} = \sqrt{z}\,\mathrm{Q}(z).$$

Donc, de quelque manière que $z$ augmente indéfiniment, $\omega$ tend vers

$\frac{\nu}{\lambda+i}$, car le second membre tend vers zéro, d'après la forme de $Q(z)$. Or $\frac{\nu}{\lambda+i}$ est équivalent à $i$, et de la relation $G(z) = \varphi(\omega)$ on conclut immédiatement que $G(z)$ tend vers l'unité quand $z$ se rapproche d'une manière quelconque du point $\infty$, conclusion inadmissible. Par conséquent $\lambda + \rho$ ne peut être nul.

**13.** Soit maintenant $(\lambda+\rho)^2 = 1$; reprenons les équations (II) (n° **10**)

$$k(\mu\gamma+\rho\delta)^2 = \delta^2, \quad k(\mu\gamma+\rho\delta)(\lambda\gamma+\nu\delta) = \gamma\delta,$$

et l'équation obtenue en éliminant $k$

$$\nu\delta^2 + (\lambda-\rho)\gamma\delta - \mu\gamma^2 = 0,$$

qui donne

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\lambda-\rho \pm i\sqrt{3}}{2\mu}.$$

Nous pouvons supposer $\mu$ positif, car nous pouvons changer les signes des quatre nombres $\lambda$, $\mu$, $\nu$ et $\rho$ sans qu'ils cessent de satisfaire aux relations $\lambda\rho - \mu\nu = 1$ et $(\lambda+\rho)^2 = 1$. Prenons

$$\gamma = \lambda - \rho - i\sqrt{3}, \quad \delta = 2\mu;$$

on aura alors

$$k = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

si $\lambda + \rho = 1$ et

$$k = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

si $\lambda + \rho = -1$.

Plaçons-nous dans la première hypothèse. On trouvera de suite

$$\beta = 2\mu, \quad \alpha = 1 + i\sqrt{3}.$$

Le quotient $\frac{\alpha+\beta\omega}{\gamma+\delta\omega} : z^{\frac{1}{3}}$ reprend la même valeur après une circulation autour du cercle C, car $z^{\frac{1}{3}}$ se reproduit aussi multiplié par $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. On peut donc écrire

$$\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega} = z^{-\frac{1}{3}}\varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant uniforme dans le domaine du point $\infty$. La fonction $\varphi(z)$ n'aura pas de pôles dans ce domaine, car la seule inspection des valeurs de $\alpha$ et $\beta$ montre que le coefficient de $i$ dans $-\frac{\alpha}{\beta}$ est négatif; par suite, $\alpha+\beta\omega$ ne peut s'annuler.

Partageons, comme précédemment, $\varphi(z)$ en deux parties $P(z)+Q(z)$. Je dis qu'ici $P(z)$ doit se réduire à une constante, car, autrement, pour des valeurs convenables de $z$, le second membre serait infiniment grand, ce qui est impossible. Par suite, le second membre ayant la forme $z^{-\frac{1}{3}}[A+Q(z)]$, où A est une constante, tend vers zéro avec $\frac{1}{z}$, et, par suite, $\omega$ tend vers $\frac{\rho-\lambda+i\sqrt{3}}{2\mu}$ de quelque manière que $z$ augmente indéfiniment. Or cette expression est équivalente à $\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ (*voir*, pour ce point, Dedekind, Mémoire cité); donc, de la relation $G(z)=\nu(\omega)$ on conclut immédiatement que $G(z)$ tend vers zéro, de quelque manière que $z$ se rapproche du point $\infty$, conclusion inadmissible. On arrive au même résultat en traitant le cas où $\lambda+\rho=-1$. Nous ne pouvons donc pas supposer que $(\lambda+\rho)^2=1$.

**14.** Nous devons donc maintenant nécessairement supposer que $(\lambda+\rho)^2=4$. Les racines de l'équation (III) (n° **10**) sont alors égales, et nous ne pouvons plus suivre la même méthode.

Dans ce cas, on peut trouver quatre entiers réels $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ satisfaisant à la relation $\beta\gamma-\alpha\delta=1$ et un nombre entier M tels que $\frac{\alpha+\beta\omega}{\gamma+\delta\omega}$ se transforme en $\frac{\alpha+\beta\omega}{\gamma+\delta\omega}+M$ après un tour complet. On devra avoir à cet effet

$$\frac{\alpha(\lambda+\mu\omega)+\beta(\nu+\rho\omega)}{\gamma(\lambda+\mu\omega)+\delta(\nu+\rho\omega)}=\frac{\alpha+\beta\omega}{\gamma+\delta\omega}+M$$

quel que soit $\omega$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\mu(\alpha\delta-\beta\gamma)&=M\delta(\gamma\mu+\delta\rho),\\ -\nu(\alpha\delta-\beta\gamma)&=M\gamma(\gamma\lambda+\delta\nu),\\ (\lambda-\rho)(\alpha\delta-\beta\gamma)&=M\,[\gamma^2\mu+\gamma\delta(\lambda+\rho)+\delta^2\nu].\end{aligned}$$

En éliminant M et $\alpha\delta-\beta\gamma$ entre les deux premières, on a

$$\nu\rho\delta^2+2\mu\nu\delta\gamma+\mu\lambda\gamma^2=0,$$

puis, en éliminant les mêmes quantités entre la première et la troisième,

$$(1-\rho^2)\delta^2 - 2\mu\rho\gamma\delta - \mu^2\gamma^2 = 0.$$

La condition pour que ces deux équations du second degré en $\frac{\delta}{\gamma}$ aient une racine commune est précisément $(\lambda+\rho)^2 = 4$, qui, par hypothèse, est vérifiée.

Effectuons les calculs, en supposant $\lambda+\rho = +2$. La racine commune $\frac{\delta}{\gamma}$ sera alors

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{1-\lambda}{\nu} = \frac{\mu}{1-\rho} = \frac{m}{n},$$

$m$ et $n$ étant premiers entre eux. Nous prendrons

$$\delta = m, \quad \gamma = n,$$

puis pour $\alpha$ et $\beta$ deux entiers satisfaisant à la relation

$$\beta n - \alpha m = 1,$$

et enfin

$$M = \frac{\mu}{\delta(\gamma\mu + \delta\rho)}.$$

Il est facile de voir que cette valeur de M est un nombre entier. On a en effet

$$1-\lambda = gm, \quad \nu = gn,$$

$g$ étant un entier, donc

$$\lambda = 1 - gm, \quad \text{et par suite} \quad \rho = 1 + gm.$$

La relation $\lambda\rho - \mu\nu = 1$ donne enfin

$$\mu = \frac{-g^2 m^2}{gn} = -\frac{gm^2}{n},$$

$\nu$ étant entier; on a $g = kn$, $k$ étant entier. On a donc

$$\lambda = 1 - kmn, \quad \mu = -km^2, \quad \nu = kn^2, \quad \rho = 1 + kmn,$$

et enfin

$$M = \frac{-km^2}{m[-km^2 n + m(1+kmn)]} = -k.$$

Considérons maintenant la différence

$$\frac{\alpha+\beta\omega}{\gamma+\delta\omega}-\frac{\mathrm{M}\log z}{2\pi i};$$

ce sera une fonction uniforme de $z$ dans le domaine du point $\infty$, puisque chaque terme de cette différence éprouve le même accroissement par un tour complet autour du cercle C. On peut donc poser

$$\text{(I)} \qquad \frac{\alpha+\beta\omega}{\gamma+\delta\omega}=\frac{\mathrm{M}\log z}{2\pi i}+\varphi(z);$$

$\varphi(z)$ n'ayant pas de pôle dans le domaine du point $\infty$, on pourra, comme précédemment, poser

$$\varphi(z)=\mathrm{P}(z)+\mathrm{Q}(z),$$

$\mathrm{P}(z)$ étant une fonction entière et $\mathrm{Q}(z)$ une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de $z$ Soit

$$\frac{\mathrm{M}\log z}{2\pi i}+\varphi(z)=\mathrm{A}+\mathrm{B}i,$$

où B est toujours positif; on aura par suite

$$z^{\mathrm{M}}e^{2\pi i\varphi(z)}=e^{2\pi i\mathrm{A}-2\pi\mathrm{B}}.$$

Le module du second membre est inférieur à l'unité; il ne peut en être de même dans le premier que si M est négatif et si, dans $\varphi(z)$, $\mathrm{P}(z)$ se réduit à une constante, c'est-à-dire que le point $\infty$ est pour $\varphi(z)$ un point ordinaire. Donc $\frac{\alpha+\beta\omega}{\gamma+\delta\omega}$ augmente indéfiniment avec $z$, de manière que le coefficient de $i$ soit positif et lui-même infiniment grand, car, $\varphi(z)$ tendant vers une limite finie, le second membre de (I) devient infiniment grand comme $\frac{\mathrm{M}\log z}{2\pi i}$, quantité dans laquelle le coefficient de $i$ est positif pour $z$ très grand, puisque M est négatif. Or $\frac{\alpha+\beta\omega}{\gamma+\delta\omega}$ est une des déterminations de $\omega$, $[\mathrm{G}(z)]$ est de la relation $\mathrm{G}(z)=\nu(\omega)$; on conclut alors que le module de $\mathrm{G}(z)$ augmente indéfiniment de quelque manière que $z$ se rapproche du point $\infty$. Or cela suffit à établir que $\mathrm{G}(z)$ est un polynôme. On sait en effet (Weierstrass, *Zur Theorie der* *eindeutigen Functionen*) que, quelque grand que soit R, $G(z)$ étant une fonction transcendante entière et $a$ une constante quelconque, il existe au moins une valeur de $z$ de module supérieur à R, telle que le module de $G(z) - a$ soit moindre qu'un nombre donné aussi petit que l'on voudra. Si donc $G(z)$ est très grand pour toute valeur de $z$ d'un module supérieur à R, cette fonction ne peut être transcendante et est donc un polynôme; c'est précisément ce que nous voulions établir.

Les considérations précédentes supposent essentiellement que $\mu$ et $\nu$ ne sont pas nuls à la fois. Dans ce cas, en effet, $\omega$ serait uniforme dans le domaine du point $\infty$. Cherchons quelles seraient les conséquences de cette hypothèse. On aurait alors

$$\omega = P(z) + Q(z),$$

$P(z)$ étant une fonction entière, et $Q(z)$ une série procédant suivant les puissances décroissantes de $z$, et dont le premier terme contient $\frac{1}{z}$. Je dis d'abord que $P(z)$ doit nécessairement être une constante, dans laquelle le coefficient de $i$ est positif et différent de zéro. Si $P(z)$ ne se réduit pas en effet à une constante, il est impossible que, dans le domaine du point $\infty$, le coefficient de $i$ dans $P(z)$ soit toujours positif, et il en serait par suite de même dans $\omega$, puisque $Q(z)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{z}$. D'autre part, $P(z)$ ne peut se réduire à une constante réelle, car, le signe de $i$ dans $Q(z)$ n'étant pas évidemment invariable dans la région considérée, il en serait encore de même dans $\omega$, ce qui est impossible. La relation $G(z) = \varphi(\omega)$ nous montre enfin que $G(z)$ tendrait vers une constante déterminée de quelque manière que $z$ augmente indéfiniment; cette fonction serait, par suite, une constante.

Le théorème énoncé au commencement de ce Chapitre est donc complètement établi.

**15.** Je me propose de montrer, en terminant, que les considérations employées dans la démonstration du théorème précédent peuvent être employées pour compléter l'étude d'une fonction analytique uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel. On sait que M. Weierstrass, dans son Mémoire *Sur les fonctions analytiques uniformes* (Académie de Berlin, 1876), partage en deux classes les points singuliers d'une fonction uniforme $f(x)$: ce sont les pôles et les points singuliers essentiels. L'illustre géomètre donne l'expression générale d'une fonction uniforme ayant un nombre fini de points singuliers essentiels et des pôles en nombre quelconque. Il montre que, dans le voisinage d'un point singulier essentiel A, la fonction peut s'approcher autant que l'on veut de toute valeur donnée. Je me propose de compléter ce dernier théorème en montrant que dans ce voisinage il y a une infinité de valeurs de $x$ pour lesquelles $f(x)$ devient rigoureusement égale à $a$, une exception pouvant seulement se produire pour deux valeurs particulières de $a$.

Supposons d'abord que $f(x)$ n'ait pas, dans le voisinage de A, un nombre infini de pôles. Je dis qu'il ne peut y avoir plus d'une valeur finie $a$ pour laquelle l'équation $f(x)=a$ n'ait pas autour de A un nombre infini de racines. Admettons, en effet, que les équations $f(x)=a$ et $f(x)=b$, où nous pouvons évidemment supposer $a=0$ et $b=1$, n'aient pas de racines dans un certain cercle C ayant A pour centre, le cercle C ne contenant d'ailleurs aucun pôle de $f(x)$. Je poserai, comme précédemment, $v=G(x)$; $\omega$ deviendra une fonction de $x$ dont on fera l'étude dans le cercle C, en suivant la méthode employée dans la démonstration précédente pour étudier une fonction analogue dans le domaine du point $\infty$. Cette étude conduit à la conclusion suivante : A doit être un pôle ou un point ordinaire pour $f(x)$, ce qui est contre notre hypothèse. Les deux équations $f(x)=a$ et $f(x)=b$ ne peuvent donc avoir toutes deux un nombre limité de racines autour de A.

Considérons maintenant une fonction $f(x)$ ayant un nombre infini de pôles dans le voisinage de A. Nous aurons (Weierstrass, *loc. cit.*)

$$f(x)=\frac{G_1(x)}{G_2(x)}, \tag{I}$$

$G_1(x)$ et $G_2(x)$ ayant en A un point singulier essentiel, mais n'ayant pas de pôles dans un certain domaine C autour de ce point. Je dis qu'il ne peut y avoir plus de deux valeurs finies $a$ et $b$ pour lesquelles les équations $f(x)=a$ et $f(x)=b$ n'aient pas de racines dans C. En mettant en effet $f(x)$ sous la forme (I), on devrait avoir (*voir* le raisonnement du n° **11**), en désignant par $\alpha$ l'affixe de A,

$$G_1(x)-aG_2(x)=(x-\alpha)^m e^{P(x)},$$

et de même

$$\text{(II)} \qquad G_1(x) - b\,G_2(x) = (x-\alpha)^n e^{Q(x)},$$

$m$ et $n$ étant deux entiers positifs ou négatifs, $P(x)$ et $Q(x)$ deux fonctions uniformes qui n'ont dans le domaine C d'autre point singulier que A.

Les équations (I) et (II) donnent de suite

$$f(x) = \frac{b - a(x-\alpha)^{n-m} e^{Q(x)-P(x)}}{1-(x-\alpha)^{n-m} e^{Q(x)-P(x)}}.$$

Il est aisé maintenant de voir que l'équation $f(x) = c$, $c$ étant une quantité finie différente de $a$ et de $b$, a dans C une infinité de solutions. Elle peut, en effet, s'écrire

$$(x-\alpha)^{n-m} e^{Q(x)-P(x)} = \frac{b-c}{a-c}.$$

Or la fonction formant le premier membre rentre dans la classe de celles que nous avons d'abord considérées; de plus, elle ne peut devenir nulle dans C; par suite, d'après ce que nous avons établi, l'équation obtenue en l'égalant à une constante quelconque différente de zéro, telle que $\frac{b-c}{a-c}$, a une infinité de solutions. Cela suppose toutefois que la fonction $Q(x) - P(x)$ ne soit pas régulière en A; mais alors on voit de suite que ce point ne serait pas pour $f(x)$ un point singulier essentiel.