ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. PUISEUX

Sur l'accélération séculaire du mouvement de la Lune

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 8 (1879), p. 361-444
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1879_2_8__361_0>

SUR L'ACCÉLÉRATION SÉCULAIRE

DU

MOUVEMENT DE LA LUNE,

PAR M. P. PUISEUX,

AGRÉGÉ-PRÉPARATEUR A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

I. — Résumé des travaux antérieurs sur l'accélération du mouvement de la Lune. — État de la question.

L'accélération séculaire du mouvement de la Lune a été signalée par l'observation longtemps avant qu'on fût en mesure d'en assigner la cause par la théorie. De tous les phénomènes astronomiques, les éclipses de Soleil et de Lune sont ceux qui ont le plus attiré l'attention des anciens. Ptolémée nous a fait connaître, dans l'*Almageste,* un grand nombre d'éclipses de Lune observées soit par les Babyloniens, soit par Hipparque, soit par lui-même. Malheureusement les nombres qu'il donne sont peu précis, et il y a lieu de craindre qu'ils n'aient subi des altérations. Les observations arabes qui nous sont parvenues paraissent mériter plus de confiance. C'est par l'étude des éclipses de Soleil observées en Asie par Albaténius, à la fin du IXe siècle de notre ère, que Halley a pu s'assurer, en 1695, de l'existence d'une équation séculaire dans la longitude de la Lune. Il ne se crut pas autorisé, toutefois, à en fixer la valeur numérique. Ce progrès fut accompli cinquante ans plus tard par Dunthorne et Mayer. Aux observations déjà considérées par Halley, ils joignirent deux éclipses de Soleil observées au Caire par Ibn Junis à la fin du Xe siècle, ainsi qu'un grand nombre de documents plus récents. Dunthorne fut ainsi conduit à attribuer au moyen mouvement de la Lune une accélération de 10″ par siècle. Après une discussion qui paraît avoir été plus complète, Mayer adopta le chiffre de 6″, 7. Dans la dernière édition de ses Tables de la Lune, il le porta à 9″, sans que l'on sache bien les raisons qui ont déterminé ce changement.

Aucun de ces chiffres, toutefois, ne permettait d'établir un accord satisfaisant entre les observations et les Tables. Frappé de ces divergences, Lalande proposa de ne faire entrer dans la discussion qu'une seule des éclipses de Ptolémée, en y joignant les deux observations faites par Ibn Junis, les seules dont l'heure puisse être regardée comme connue avec précision. Il obtint de la sorte une confirmation du résultat de Dunthorne. Lagrange fut plus réservé dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences en 1774. Après avoir cherché vainement à rendre compte par la théorie du fait de l'accélération séculaire, il émit des doutes sur la réalité même de cette accélération. Selon lui, les observations anciennes sont trop vagues et trop discordantes pour justifier les conclusions de ses devanciers.

La question historique, délaissée pendant plusieurs années, entra dans une phase nouvelle lorsque M. Baily eut signalé en 1811, dans les éclipses totales, un nouveau et précieux moyen de contrôle pour les Tables de la Lune. Cette fois, ce n'est plus aux astronomes, c'est aux historiens de l'antiquité qu'il faut s'adresser. Les éclipses totales étant excessivement rares en un point donné de notre globe, il suffit d'une indication même approchée de temps et de lieu pour identifier l'éclipse chronologique avec une de celles qui sont indiquées par les Tables; à une condition toutefois, c'est qu'il ne subsiste pas une trop grande incertitude sur la valeur même de l'accélération séculaire. En adoptant pour valeur approchée 10″ et en faisant usage des Tables de Damoiseau, M. Airy fut conduit à élever cette valeur à 10″, 72. Enfin, dans son Mémoire de 1857, l'illustre Astronome royal d'Angleterre, se servant des Tables construites par M. Hansen, a trouvé que la valeur de l'accélération séculaire, qui rend le mieux compte des éclipses totales de l'antiquité, est de 12″,989, soit à peu près 13″. Aucune des déterminations théoriques effectuées jusqu'à présent n'atteint un chiffre aussi élevé.

Les géomètres, cependant, ne s'étaient point laissé décourager par l'insuccès de Lagrange. Bossut avait déjà, en 1762, présenté une explication fondée sur l'hypothèse d'un milieu très-raréfié, mais résistant, dont l'influence serait plus sensible sur la Lune que sur les planètes. Lagrange avait écarté cette explication comme démentie par le ralentissement de Saturne. Laplace montra qu'il suffirait de supposer que la transmission de la force attractive de la Terre à la Lune ne fût pas instantanée pour introduire une équation séculaire dans le mouvement de notre satellite. Il signala également ce fait capital, qu'un ralentissement dans la rotation de la Terre sur elle-même, fût-il seulement de $0^s,01$ depuis le temps d'Hipparque, amènerait dans le mouvement de la Lune une accélération apparente supérieure à celle que semblaient exiger les observations. C'était déplacer la question, mais non la résoudre, car aucune cause connue ne semblait devoir affecter l'invariabilité du jour sidéral. Lagrange, revenant sur la question en 1783, dans un travail inséré dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, montra que les variations séculaires de l'excentricité, de l'inclinaison, de la longitude du nœud ou du périhélie d'une planète, pouvaient produire une équation séculaire dans le mouvement d'un astre voisin, au moins lorsqu'on avait égard aux secondes puissances des excentricités et des inclinaisons. Faisant l'application de sa théorie aux actions réciproques de Jupiter et de Saturne, il n'obtint que des résultats négligeables, et, par une conclusion trop hâtive, il admit qu'il en serait de même pour toutes les autres planètes de notre système. C'est ainsi qu'il se laissa enlever par Laplace l'honneur d'une découverte contenue implicitement dans ses formules.

C'est en travaillant à la théorie des satellites de Jupiter que Laplace fut mis sur la voie de l'explication si longtemps cherchée. Il reconnut qu'une variation séculaire dans l'excentricité de l'orbite de cette planète produisait une accélération dans les mouvements moyens des satellites. Ce résultat, transporté à la Lune, lui donna une équation séculaire peu différente de celle qui avait été déduite des seules observations. Une circonstance analogue se présente dans les mouvements du nœud et du périgée de l'orbite lunaire. Cette importante découverte fut communiquée à l'Académie des Sciences de Paris le 19 novembre 1787, et publiée avec détail l'année suivante dans le volume de l'*Histoire de l'Académie* pour 1786. La première partie du calcul développé dans les pages suivantes reproduit, en ce qu'elle a de plus essentiel, l'analyse du grand géomètre. Laplace s'en était tenu à la première puissance de la force perturbatrice du Soleil, et encore n'avait-il conservé que la partie principale du résultat. En présence de l'accord satisfaisant du chiffre obtenu avec celui que Dunthorne et Lalande avaient cru pouvoir déduire des observations, Laplace n'avait pas jugé nécessaire d'examiner s'il ne serait pas modifié par une approximation ultérieure.

En 1820, MM. Plana et Damoiseau reprirent la question. Le premier, adoptant la forme algébrique pour les inégalités lunaires, calcula jusqu'aux quantités du septième ordre la série qui multiplie l'intégrale $\int e'^2 dt$ dans le coefficient de l'accélération séculaire. C'est sous cette forme, comme nous le verrons plus loin, que se présente le résultat, e' désignant l'excentricité de l'orbite terrestre. Il trouva ainsi 10″,58 au lieu du nombre 10″,18 que donnait le terme de Laplace pris seul. Par une voie différente, M. Damoiseau obtint 10″,72. Enfin M. Hansen a porté ce coefficient successivement à 11″,47 et à 12″,18. La méthode employée par lui n'a pas été publiée *in extenso*, et ce résultat emprunte par conséquent toute son autorité à l'exactitude reconnue des Tables de la Lune publiées par son auteur. Il est bon d'ajouter, cependant, que l'accord des Tables de M. Hansen avec les observations modernes ne serait pas altéré par une modification apportée au coefficient de l'accélération séculaire. Ce n'est qu'à une époque reculée que l'influence de cette correction se ferait sentir, et il n'est pas encore absolument démontré, au jugement de MM. Airy et Delaunay, que les observations anciennes ne puissent être représentées par les Tables actuelles, avec une valeur différente de l'accélération.

Toutes ces déterminations s'accordaient à fournir pour le coefficient considéré une valeur un peu supérieure à 10″, lorsque M. Adams, dans un Mémoire lu à la Société royale de Londres le 16 juin 1853, vint signaler un vice de méthode dans les recherches de MM. Plana et Damoiseau. Dans les équations différentielles qui définissent le mouvement de la Lune, ces deux savants avaient traité l'excentricité de l'orbite terrestre, et par suite le moyen mouvement de la Lune, comme des constantes, pour ne leur attribuer le caractère de variables qu'après l'intégration faite. Ce procédé, légitime quand on n'a égard, comme l'avait fait Laplace, qu'à la première puissance de la force perturbatrice, cesse de l'être quand on passe aux approximations suivantes. La supposition contraire, la seule conforme aux faits, introduit dans l'expression de la longitude moyenne de la Lune de nouveaux termes proportionnels au carré du temps, et le résultat primitif se trouve profondément modifié. Cette conclusion imprévue, dont nous trouverons une confirmation nouvelle dans les calculs qui vont suivre, a été parfaitement mise en évidence par MM. Adams et Delaunay. Nous renverrons, pour plus de détails, au Mémoire inséré par M. Delaunay dans la *Connaissance des Temps* pour 1864. On trouvera dans ce même travail une confirmation du résultat de M. Adams, obtenue par la méthode dont M. Delaunay a fait la base d'une nouvelle théorie de la Lune. De ces recherches, et des calculs plus complets dont M. Delaunay a donné le résultat dans le tome LXXII des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, il résulte que le coefficient de l'accélération séculaire doit être réduit à 6″, 176. C'est, on le voit, la moitié du chiffre de M. Hansen. Il convient d'ajouter que la seule cause invoquée dans ces travaux pour rendre compte de l'accélération séculaire a été la variation de l'excentricité de l'orbite terrestre.

Les recherches que nous venons de citer ont reçu depuis l'assentiment d'un grand nombre de géomètres. M. Plana, à la suite d'une longue controverse, a été amené à reconnaître la nécessité de modifier ses calculs dans le sens indiqué par M. Adams. MM. Lubbock et Cayley ont obtenu séparément une confirmation entière de la théorie nouvelle. M. Le Verrier, cependant, a longtemps combattu la modification proposée comme inconciliable avec les observations anciennes. Il faut répondre, avec M. Delaunay, que cet argument ne saurait être décisif dans une question d'analyse, et que, si la divergence annoncée est réelle, la cause doit en être cherchée dans quelque influence physique mal étudiée. M. Le Verrier alléguait moins, du reste, ses propres recherches que l'autorité de M. Hansen, qui affirmait avoir obtenu par la théorie seule son coefficient de 12″. A dire vrai, l'effet produit par cette déclaration a dû être un peu atténué par la publication d'une lettre de M. Hansen à M. Warren de la Rue, président de la Société

(¹) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXII, p. 704.

astronomique de Londres [1]. Dans ce document, M. Hansen, tout en maintenant le chiffre proposé par lui comme le plus conforme aux observations, reconnaît comme exacte l'analyse de M. Adams; l'éminent astronome de Gotha attribue la divergence à ce qu'il aurait, dans ses propres calculs, traité comme constante une certaine quantité Ξ, dont la variation est liée à celle du moyen mouvement de la Lune. Nous retombons, on le voit, dans l'hypothèse fautive de M. Plana. En vain M. Hansen insiste sur la concordance remarquable que l'hypothèse $\Xi = 0$ établirait entre le calcul et l'observation. Un tel accord ne saurait racheter une lacune dans la théorie. Pour s'en faire une arme contre le résultat de M. Adams, si bien confirmé par tous les procédés de l'analyse, il faudrait avoir établi clairement que la cause dont on a tenu compte est la seule qui puisse modifier le moyen mouvement de la Lune.

Rien n'est moins démontré, et M. Hansen lui-même donne, avec M. Airy, son assentiment aux vues de M. Delaunay, qui a cherché dans une nouvelle cause physique agissant sur la Lune l'explication du désaccord. Déjà Laplace avait signalé l'influence qu'aurait sur le mouvement apparent de la Lune une altération, si petite qu'elle fût, de la durée du jour sidéral. Dans une Communication faite à l'Académie des Sciences [1], M. Delaunay a montré, avec sa clarté ordinaire, que le retard de la marée sur le passage de la Lune au méridien doit produire un couple résistant qui ralentit la rotation de la Terre sur elle-même, accroît dans la suite des siècles la durée du jour sidéral, et entraîne une accélération apparente dans le moyen mouvement de la Lune. S'il est aisé de se rendre compte de l'existence d'une pareille cause, il l'est beaucoup moins de la soumettre au calcul et de se faire une idée, même approchée, de la grandeur de ses effets.

Le dernier travail important qui ait été publié, à notre connaissance, sur ce sujet, a paru en 1873 dans le *Recueil des Mémoires présentés à l'Académie des Sciences*, t. XXI. Dans ce Mémoire, mon père a démontré, en poussant l'approximation plus loin que ne l'avait fait Laplace, que la variation séculaire de l'inclinaison de l'orbite terrestre est sans effet,

---

[1] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXI, p. 1023.

dans les limites des temps historiques, sur l'accélération du mouvement de la Lune. Par là même se trouve écartée l'hypothèse d'une équation séculaire due au déplacement progressif du nœud de l'orbite terrestre. On voit en effet, à l'inspection de la fonction perturbatrice de la Lune, que l'hypothèse qui consiste à regarder comme nulle l'inclinaison de l'orbite terrestre, supposition permise dans la recherche de l'équation séculaire, fait évanouir à la fois tous les termes où figure la longitude du nœud. Reste le déplacement du périhélie de l'orbite terrestre, que Lagrange avait signalé comme pouvant produire une équation séculaire de la Lune. Mais un coup d'œil jeté sur la fonction perturbatrice montre qu'il n'en est rien. La longitude du périhélie, qui dans nos formules sera désignée par ϖ', n'entre en effet que dans les termes périodiques, et, si l'on suppose nulle l'inclinaison de l'orbite terrestre, elle se trouvera partout associée aux longitudes moyennes de la Terre et de la Lune, qui ont une variation bien plus rapide. Le seul effet du déplacement du périhélie sera donc de modifier légèrement les périodes des inégalités de la Lune; il ne peut en résulter d'équation séculaire dans la longitude.

II. — Calcul de l'accélération séculaire du mouvement de la Lune par la méthode de Poisson.

1. L'objet propre de ce travail est l'application à la recherche de l'accélération séculaire du mouvement de la Lune de la méthode de Poisson. Dans un Mémoire lu à l'Académie des Sciences le 17 juin 1833, l'illustre géomètre a signalé une marche analytique nouvelle comme éminemment propre à fournir la détermination des inégalités de notre satellite. Laplace, et après lui Plana et Damoiseau, avaient adopté la longitude vraie comme variable indépendante, soit dans la fonction perturbatrice, soit dans les équations différentielles qui font connaître les éléments de l'orbite lunaire. Conformément aux vues émises antérieurement par M. Lubbock, Poisson prend le temps pour variable indépendante. Partant, comme première approximation, du mouvement elliptique obtenu en négligeant l'action du Soleil en comparaison de celle de la Terre, il exprime les dérivées par rapport au temps des éléments de l'orbite au moyen des dérivées partielles de la fonction

perturbatrice. Aux équations ainsi obtenues, il applique la méthode de la variation des constantes arbitraires, mais avec une modification importante qui sera expliquée quelques pages plus loin, quand nous aurons à tenir compte de la seconde puissance de la force perturbatrice.

La méthode de Poisson, malgré les caractères d'élégance et d'uniformité qu'elle présente à un haut degré, n'a jamais servi de base à une théorie proprement dite de la Lune. Indépendamment des applications peu nombreuses données par l'auteur, elle a été employée, dans la question qui nous occupe, comme moyen de démonstration plutôt que de recherche. Préoccupé surtout d'éclaircir la discussion, alors vivement engagée, sur le résultat de M. Adams, M. Delaunay a entrepris le calcul de l'accélération séculaire de la Lune par la méthode de Poisson. Son analyse, qui n'occupe qu'un très-petit nombre de pages dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1862, s'arrête aux termes du second ordre par rapport à la fonction perturbatrice, c'est-à-dire au point où commence à s'accuser la divergence des résultats. Elle suffit sans doute pour décider la question en faveur de M. Adams contre MM. Plana et Damoiseau, mais il s'en faut bien qu'elle fasse connaître avec une exactitude suffisante la partie de l'accélération séculaire qui est due à la variation de l'excentricité de l'orbite terrestre. Nous avons entrepris, dans les pages qui suivent, de combler cette lacune. S'il n'en résulte pas pour l'équation séculaire de la Lune une valeur plus exacte que celles qui sont déjà connues, au moins sera-t-il établi, contrairement aux idées émises par M. de Pontécoulant et par quelques autres géomètres, que la méthode de Poisson se prête à des applications de quelque étendue.

On sera sans doute frappé de la complication apparente de la formule définitive que nous avons eu à réduire en nombres, surtout si on la compare à l'expression plus complète que M. Delaunay, après plusieurs années de recherches, a donnée dans le tome LXXII des *Comptes rendus de l'Académie*. En réalité, cette complication tient à un avantage de la méthode, qui compense largement en exactitude et en sûreté le léger surcroît de travail imposé par le calcul numérique. Il se présente ici une circonstance analogue à celle qui avait déterminé Poisson à choisir le temps comme variable indépendante. Les coordonnées du

Soleil en fonction du temps, ou, ce qui revient au même, les éléments de l'orbite terrestre, sont données par la théorie du mouvement de la Terre, et restent les mêmes dans tout le cours des opérations. Cet avantage n'existait pas pour Laplace et ses disciples, qui, prenant la longitude vraie pour variable indépendante, voyaient les coordonnées du Soleil se modifier à chaque approximation nouvelle et exiger l'introduction de termes correctifs. De même, en conduisant le calcul, par la méthode de Poisson, jusqu'aux termes de l'ordre du cube de la fonction perturbatrice, nous avons pu éviter les développements en série pénibles et peu convergents substitués par M. Delaunay aux vitesses moyennes du nœud, du périgée et de la Lune elle-même. Jusque dans les formules définitives, nous retrouverons soit les éléments de l'orbite, soit les coefficients du temps dans ces éléments. Or toutes ces quantités sont aujourd'hui bien connues, et les nombres adoptés par M. Hansen ont subi avec succès l'épreuve des observations.

2. Dans ce qui suit, on regardera le mouvement du Soleil autour de la Terre comme connu. Ainsi l'excentricité de l'orbite terrestre sera traitée comme une fonction connue du temps. On sait qu'elle peut être représentée pendant une longue suite de siècles par une expression de la forme $e'_0 + \alpha t + \beta t^2$, où α et β désignent des constantes.

Prenons pour origine d'axes rectangulaires, de direction invariable, le centre de la Terre. Appelons

x, y, z les coordonnées de la Lune, supposée réduite à un point matériel;
x', y', z' les coordonnées du Soleil;
r, r' les rayons vecteurs de la Lune et du Soleil;
μ la somme des masses de la Terre et de la Lune;
m' la masse du Soleil, comprenant, ainsi que μ, le coefficient d'attraction désigné d'habitude par f;
R la fonction perturbatrice

$$m'\left[\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right].$$

On trouve aisément, pour les équations différentielles du mouvement de la Lune par rapport aux axes choisis,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

3. Ces équations ne se prêtent pas à une intégration rigoureuse. Nous substituerons à la fonction perturbatrice R un développement en série ordonné suivant les puissances ascendantes du rapport $\frac{r}{r'}$, qui est à peu près $\frac{1}{400}$.

Appelons s le cosinus de l'angle compris entre les rayons vecteurs de la Lune et du Soleil. On a immédiatement

$$s = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}$$

et

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = r^2 - 2rr's + r'^2 = r'^2\left(\frac{r^2}{r'^2} - 2\frac{r}{r'}s + 1\right),$$

par suite

$$R = m'\left[\frac{rs}{r'^2} - \frac{1}{r'}\left(1 - 2\frac{r}{r'}s + \frac{r^2}{r'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right],$$

ou, en développant la quantité entre parenthèses par la formule du binôme,

$$\frac{r'}{m'}R = \frac{r}{r'}s - 1 - \frac{r}{r'}s + \frac{1}{2}\frac{r^2}{r'^2} - \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{2r}{r'}s - \frac{r^2}{r'^2}\right)^2 - \ldots$$

ou

$$R = \frac{m'}{r'}\left(-1 + \frac{1 - 3s^2}{2}\frac{r^2}{r'^2} + \frac{3s - 5s^3}{2}\frac{r^3}{r'^3} + \ldots\right).$$

La fonction perturbatrice n'entre dans la suite des calculs que par ses dérivées partielles relatives aux éléments de la Lune; on peut donc dans la parenthèse supprimer le terme -1. Occupons-nous maintenant d'exprimer s, r et r' en fonction des éléments qui servent à déterminer, pour le Soleil ou pour la Lune, la position de l'orbite dans l'espace et de l'astre sur son orbite.

Soient

l la longitude moyenne de la Lune, comptée à partir d'un point fixe de l'écliptique, tel que l'équinoxe moyen du printemps au 1[er] janvier 1850;

ϖ la longitude du périgée;

θ la longitude du nœud;

v la longitude vraie de la Lune dans son orbite;

e l'excentricité de l'orbite lunaire;

φ l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique.

Nous admettrons comme connus les développements en série du rayon vecteur et de la longitude vraie suivant les puissances ascendantes de l'excentricité. En désignant par a le grand axe de l'orbite, on aura

$$\begin{aligned}\frac{r}{a} = {} & 1 + \frac{e^2}{2} - \left(e - \frac{3}{8}e^3 + \ldots\right)\cos(l - \varpi) \\ & - \left(\frac{1}{2}e^2 + \ldots\right)\cos(2l - 2\varpi) - \left(\frac{3}{8}e^3 + \ldots\right)\cos(3l - 3\varpi) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v = {} & l + \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \ldots\right)\sin(l - \varpi) \\ & + \left(\frac{5}{4}e^2 + \ldots\right)\sin(2l - 2\varpi) + \left(\frac{13}{12}e^3 - \ldots\right)\sin(3l - 3\varpi) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Supposons que l'on ait choisi pour plan des xy le plan de l'écliptique à l'origine du temps et pour axe des x la droite qui va du centre de la Terre au point fixe origine des longitudes. Si l'on considère les triangles sphériques ayant respectivement pour sommets les trois points où les axes de coordonnées choisis rencontrent la sphère céleste et pour base commune la portion de l'orbite lunaire comprise entre l'astre et le nœud, l'application de la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique donnera

$$\frac{x}{r} = \cos\theta\cos(v - \theta) - \sin\theta\sin(v - \theta)\cos\varphi,$$

$$\frac{y}{r} = \sin\theta\cos(v - \theta) + \cos\theta\sin(v - \theta)\cos\varphi,$$

$$\frac{z}{r} = \sin(v - \theta)\sin\varphi.$$

Remplaçons dans ces formules $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ par leurs développements en série suivant les puissances ascendantes de φ, qui est à peu près $\frac{1}{11}$. On trouvera

$$\frac{x}{r} = \cos v + \frac{\varphi^2}{2}\sin\theta\sin(v-\theta) - \ldots,$$

$$\frac{y}{r} = \sin v - \frac{\varphi^2}{2}\cos\theta\sin(v-\theta) + \ldots,$$

$$\frac{z}{r} = \sin(v-\theta)\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \ldots\right).$$

Les valeurs de $\frac{x'}{r'}$, $\frac{y'}{r'}$, $\frac{z'}{r'}$ se déduisent des précédentes en accentuant les lettres qui figurent au second membre. Si l'on forme les produits $\frac{x}{r}\frac{x'}{r'}$, $\frac{y}{r}\frac{y'}{r'}$, $\frac{z}{r}\frac{z'}{r'}$, on trouvera, après avoir remplacé les produits de lignes trigonométriques par des sommes,

$$s = \cos(v - v') + \Sigma \mathrm{A}\varphi^f\varphi'^{f'}\cos(iv + i'v' + j\theta + j'\theta').$$

Les anomalies vraies v et v' s'expriment en fonction des anomalies moyennes $l - \varpi$, $l' - \varpi'$. Nous avons vu que l'on pouvait représenter v par $l + x$, l désignant la longitude moyenne, x un développement de la forme

$$\mathrm{A}\sin(l - \varpi) + \mathrm{B}\sin(2l - 2\varpi) + \ldots,$$

où A et B sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de e. Chaque terme de s peut être regardé comme rentrant dans la formule $\mathrm{M}\cos(u + ix)$; mais on a, par la formule de Taylor,

$$\cos(u + ix) = \cos u - \frac{ix}{1}\sin u - \frac{i^2x^2}{1.2}\cos u + \ldots.$$

On développe les différentes puissances de x par la formule du binôme; on remplace encore les produits de lignes trigonométriques par des sommes. On trouve ainsi, pour le développement de s,

$$s = \cos(l - l') + \Sigma \mathrm{A}\varphi^f\varphi'^{f'}e^g e'^{g'}\cos(il + i'l' + j\varpi + j'\varpi' + k\theta + k'\theta').$$

On substituera dans R les valeurs trouvées pour r, r' et s, on remplacera les produits de lignes trigonométriques par des sommes et l'on aura ainsi le développement définitif. Suivant l'approximation que l'on aura en vue, on s'arrêtera à des puissances déterminées de φ, φ', e, e'.

4. Pour évaluer l'ordre de chaque terme, on conviendra de regarder e, φ, e' comme du premier ordre. Le rapport des grands axes $\frac{a}{a'}$ sera une petite quantité du second ordre. L'inclinaison φ' de l'orbite terrestre est actuellement très-petite et ne pourra varier, comme l'a établi Le Verrier, qu'entre des limites restreintes. Si l'on embrasse une longue période, φ' sera regardée comme du premier ordre.

Il est aisé de se faire une idée de la grandeur de la force perturbatrice R, comparée à la force principale, qui produirait le mouvement elliptique. Désignons par m_1 la masse de la Terre, multipliée par le coefficient d'attraction. On sait que

$$n'^2 a'^3 = m' + m_1,$$

ou, en négligeant la masse de la Terre en comparaison de celle du Soleil,

$$n'^2 a'^3 = m'.$$

L'expression de la force perturbatrice devient

$$\mathrm{R} = n'^2 a^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{r'}{a'}\right)^{-3} \left(\frac{1 - 3s^2}{2} + \frac{3s - 5s^3}{2}\frac{r}{r'} + \ldots\right).$$

Comparons R et $\frac{\mu}{r}$, c'est-à-dire les quantités qui ont respectivement pour dérivées partielles les composantes de la force perturbatrice et celles de la force principale. On sait que

$$\mu = n^2 a^3.$$

Donc $\frac{\mu}{r}$ est de l'ordre de $n^2 a^2$. Par suite, le rapport de R à $\frac{\mu}{r}$ est comparable au carré du rapport $\frac{n'}{n}$, qui est à peu près $\frac{1}{13}$. Ainsi la fonction perturbatrice R est du second ordre.

Les différentes parties de la fonction perturbatrice dont nous avons eu à faire usage ont été extraites du développement donné par M. Delaunay dans le Chapitre II de sa *Théorie de la Lune*. Pour passer de la fonction perturbatrice de M. Delaunay à celle dont nous avons indiqué la formation, il faut exécuter les changements suivants :

1° Supprimer la constante $\frac{\mu}{2a}$;

2° Changer de signe tous les autres termes;

3° Remplacer γ par $\sin\frac{\varphi}{2}$ ou plutôt par le développement en série de $\sin\frac{\varphi}{2}$ suivant les puissances ascendantes de φ;

4° Remplacer l, qui dans M. Delaunay désigne l'anomalie moyenne de la Lune, par $l-\varpi$. De même g sera remplacé par $\varpi-\theta$ et h par θ. Des changements correspondants devront être faits sur les lettres accentuées qui se rapportent au Soleil.

Dans tous les calculs qui suivent, nous supposerons nulle l'inclinaison de l'orbite terrestre. On sait que cette supposition est sans influence sur l'accélération séculaire du mouvement de la Lune.

5. Nous allons d'abord, en nous limitant, comme l'a fait Laplace, à la première approximation relativement à la force perturbatrice, chercher le coefficient du carré du temps dans la longitude moyenne. Nous ne conserverons dans la fonction perturbatrice que les termes non périodiques du second et du quatrième ordre.

On trouve ainsi

$$R=n'^2a^2\left(-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}e^2-\frac{3}{8}e'^2+\frac{3}{8}\varphi^2\right).$$

l désignant la longitude moyenne, posons $l=nt+\varepsilon$; ε sera la longitude moyenne de l'époque. Nous admettrons comme connue la formule qui donne la dérivée de ε par rapport au temps :

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}-\frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial\varphi}.$$

Cette formule fait partie d'un ensemble d'équations dont nous donnerons le tableau un peu plus loin. On peut y réduire les coefficients des dérivées partielles $\frac{\partial R}{\partial e}$, $\frac{\partial R}{\partial\varphi}$ à leur partie principale. On trouve ainsi

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{e}{2na^2}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\varphi}{2na^2}\frac{\partial R}{d\varphi}.$$

D'ailleurs,

$$\frac{\partial R}{\partial a} = n'^2 a\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4}e'^2 + \frac{3}{4}\varphi^2\right),$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = -\frac{3}{4}n'^2 a^2 e, \quad \frac{\partial R}{\partial \varphi} = \frac{3}{4}n'^2 a^2 \varphi.$$

Substituons; il viendra

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{n'^2}{n}\left(-1 - \frac{9}{8}e^2 - \frac{3}{2}e'^2 + \frac{9}{8}\varphi^2\right).$$

Examinons comment cette formule pourra fournir par l'intégration un terme proportionnel au carré du temps. Les éléments de l'orbite lunaire, e et φ, doivent être traités comme constants dans le second membre, attendu qu'ils n'ont pas d'inégalités séculaires. La théorie de la Terre montre que le moyen mouvement du Soleil n' n'a que des inégalités périodiques. On peut donc aussi le traiter comme une constante dans la recherche de l'équation séculaire de la longitude. Mais l'excentricité e' se compose d'une partie constante e'_0 et d'une partie proportionnelle au temps. Remplaçons dans la formule précédente e' par $e'_0 + \alpha t$ et intégrons; il vient

$$l = l_0 + Nt - \frac{3}{2}\frac{n'^2}{n}e'_0 \alpha t^2.$$

Si t est exprimé en siècles, $-\frac{3}{2}\frac{n'^2}{n}e'_0\alpha$ est le coefficient de l'accélération séculaire. Dans la réduction de cette formule en nombres, on prendra :

Pour n' l'angle décrit par le Soleil en cent ans, c'est-à-dire, en secondes, $129600000''$;

Pour $\frac{n'}{n}$ le rapport des moyens mouvements du Soleil et de la Lune, c'est-à-dire $0,07439$;

Pour α la diminution en cent ans de l'excentricité de l'orbite terrestre, diminution qui est de $-0,0004339$;

Pour e'_0 la valeur à l'origine du temps de l'excentricité de l'orbite terrestre, c'est-à-dire $e'_0 = 0{,}01677$.

Le calcul donne pour le coefficient de t^2, en secondes, le nombre $+10'',52$.

Ainsi, on voit que le mouvement de la Lune en longitude s'accélère, et que cette accélération, au degré d'approximation dont nous nous sommes contenté, diffère peu de celle qui a été donnée par Laplace.

Deuxième approximation. — Principe de la méthode.

6. Nous supposerons connues les équations qui donnent les dérivées par rapport au temps des éléments de l'orbite lunaire en fonction des dérivées partielles de la fonction perturbatrice par rapport à ces mêmes éléments. Ces formules, démontrées, depuis Lagrange, par un grand nombre de géomètres, sont les suivantes :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{\partial R}{\partial\theta} + \frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial\varpi} + \frac{\partial R}{\partial\varepsilon}\right),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{\partial R}{\partial\varphi},$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial\varpi} + \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial\varepsilon},$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial\varphi} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e},$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial\varepsilon},$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{\sqrt{1-e^2}-1+e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial\varphi}.$$

Nous rappellerons que

$$\frac{dl}{dt} = n + \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{\partial R}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial R}{\partial l}.$$

De l'équation qui donne $\frac{da}{dt}$, jointe à la relation connue $n^2a^3 = \mu$, il résulte immédiatement

$$\frac{dn}{dt} = \frac{3}{a^2}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}.$$

Nous profiterons de ce que e et φ sont de petites quantités pour remplacer dans ces formules les radicaux et les lignes trigonométriques par des développements en série, limités, suivant les cas, à leur premier ou à leur second terme. Ainsi $\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$ sera remplacé par $1+\frac{e^2}{2}$, $\tang\frac{\varphi}{2}$ par $\frac{\varphi}{2}+\frac{\varphi^3}{24}$, et ainsi de suite. Les termes qui seraient de l'ordre du carré de la fonction perturbatrice pourront être négligés dans les dérivées partielles. Toutefois l'excentricité e' de l'orbite terrestre, qui joue un rôle particulier dans la question, sera traitée comme une quantité de l'ordre zéro.

Dans les seconds membres de ces équations, on regardera les éléments de l'orbite de la Lune comme des constantes données par une première approximation; les seconds membres deviennent ainsi des fonctions explicites du temps, à la condition de remplacer les longitudes moyennes l et l' de la Lune et du Soleil respectivement par $nt+\varepsilon$, $n't+\varepsilon'$. Si alors on représente les équations par les formules

$$(\alpha) \qquad \frac{da}{dt} = A, \quad \frac{de}{dt} = E, \quad \ldots,$$

l'intégration s'effectue immédiatement, et l'on trouve

$$a = a_0 + \int_{t_0}^{t} A\,dt, \quad e = e_0 + \int_{t_0}^{t} E\,dt, \quad \ldots.$$

Ces formules constituent une nouvelle approximation. Aux valeurs précédemment adoptées pour les éléments de l'orbite, on substituera les nouvelles, mais on ne devra plus négliger dans les dérivées partielles que les termes de l'ordre du cube de la fonction perturbatrice. On appliquera le même procédé autant de fois qu'il sera nécessaire pour l'objet que l'on a en vue.

Cette méthode, suffisante en général pour l'étude des perturbations des planètes, est en défaut quand il s'agit de la Lune. La force perturbatrice provenant du Soleil est ici une fraction très-appréciable de l'attraction de la Terre, et l'hypothèse du mouvement elliptique est trop éloignée de la réalité. Il en résulte dans les approximations successives un défaut de convergence qui rend la méthode impraticable. Pour remédier à cet inconvénient, Poisson a proposé de regarder dès le début les éléments angulaires de la Lune comme formés d'une partie constante et d'une partie proportionnelle au temps. Ainsi l'on remplacera θ, ϖ, ε respectivement par $\theta + ht$, $\varpi + it$, $\varepsilon + jt$. Les seconds membres des équations (α) seront toujours des fonctions explicites du temps, dont l'intégration n'offrira nulle difficulté. On regardera h, i, j comme représentant complétement le coefficient du temps dans les expressions définitives des éléments. Si donc les corrections subséquentes que l'on est amené à leur faire subir renferment une partie variable avec le temps, on écrira que le coefficient du temps y est nul. On aura ainsi, après un petit nombre d'opérations, le nombre d'équations nécessaire pour déterminer h, i, j. Si l'on a seulement en vue, comme c'est ici le cas, de déterminer le terme proportionnel au carré du temps dans la longitude de la Lune, il est clair que l'on pourra négliger les parties proportionnelles au temps qui se présenteront dans le courant du calcul, en se réservant d'adopter, pour l'expression définitive du moyen mouvement, la valeur exacte fournie par les observations.

Proposons-nous maintenant d'obtenir la partie séculaire dans la longitude moyenne de la Lune, en tenant compte des termes périodiques de la fonction perturbatrice dont l'ordre est égal ou supérieur d'une unité à celui du terme principal. Dans l'évaluation de l'ordre des termes, on fera abstraction de e'. Toutefois, on exclura les termes où e' n'entrerait qu'avec un exposant supérieur à 2.

Le mode de calcul que nous allons employer repose sur la remarque suivante : à ce degré d'approximation, toute partie non périodique introduite dans la dérivée de la longitude moyenne peut être regardée comme fournie par un terme unique de la fonction perturbatrice.

En effet, un terme périodique quelconque, dans l'expression primitive de $\frac{dl}{dt}$, sera de la forme $A\cos\alpha$, α désignant un des arguments qui figurent dans la fonction perturbatrice. La correction apportée par le calcul d'approximation sera formée de termes périodiques tels que

$B\cos\beta$, β désignant encore un des arguments de la fonction perturbatrice. Si l'on veut que la valeur corrigée de $\frac{dl}{dt}$ renferme une partie séculaire, il faudra que l'argument résultant $\alpha\pm\beta$ ne contienne aucun des angles l, l', ϖ, θ, dont les périodes sont comprises entre vingt-sept jours et dix-huit ans. D'ailleurs, la supposition $\varphi'=0$ a fait évanouir tous les termes où figure l'angle θ'. Il faudrait donc que $\alpha\pm\beta$ fût un multiple de ϖ' seul, ce qui est impossible, puisque, dans un argument quelconque, la somme des multiplicateurs des arcs est toujours nulle. On doit donc avoir $\alpha\pm\beta=0$; par suite, α et β ne sont qu'un seul et même argument de la fonction perturbatrice.

Ainsi, un terme quelconque de la fonction perturbatrice ne fournira d'inégalité séculaire dans la longitude de la Lune que s'il est combiné avec lui-même. Il en résulte que, dans la recherche de cette inégalité séculaire, on pourra réduire successivement la fonction perturbatrice à chacun de ses termes.

8. Nous avons déjà énoncé la règle qui présidera au choix des termes dans la fonction perturbatrice. Un terme quelconque ne renferme que des puissances toutes paires ou toutes impaires de e'. En excluant les puissances de e' supérieures à la seconde, on fera rentrer tous les coefficients dans l'une des deux formes

$$Ae' \quad\text{et}\quad A_1+B_1e'^2.$$

Dans l'expression de la dérivée de la longitude, limitée à sa partie non périodique, ces coefficients n'entreront que par leur carré, où l'on devra considérer seulement le terme en e'^2. Un terme de la première forme donnera $A^2e'^2$; un terme de la seconde forme donnera $2A_1B_1e'^2$. Pour obtenir des résultats comparables, il est clair qu'on devra prendre A, A_1, B_1 avec le même degré d'approximation. On s'arrêtera partout aux termes d'ordre 0 ou 1 en e et φ.

Ces restrictions posées, la fonction perturbatrice se réduit aux vingt termes qui suivent :

$$(0)\qquad R=n'^2a^2\Big[\Big(-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}e'^2\Big)\cos(0)$$

$$(1)\qquad +\Big(-\frac{3}{4}+\frac{15}{8}e'^2\Big)\cos(2l-2l')$$

(2) $$-\frac{3}{4}e'\cos(l'-\varpi')$$

(3) $$+\left(\frac{1}{2}e+\frac{3}{4}ee'^2\right)\cos(l-\varpi)$$

(4) $$+\frac{3}{8}e'\cos(2l-l'-\varpi')$$

(5) $$-\frac{21}{8}e'\cos(2l-3l'+\varpi')$$

(6) $$+\left(\frac{9}{4}e-\frac{45}{8}ee'^2\right)\cos(-l-\varpi+2l')$$

(7) $$+\left(-\frac{3}{4}e+\frac{15}{8}ee'^2\right)\cos(3l-\varpi-2l'$$

(8) $$-\frac{9}{8}e'^2\cos(2l'-2\varpi')$$

(9) $$+\frac{3}{4}ee'\cos(l-\varpi+l'-\varpi')$$

(10) $$+\frac{3}{4}ee'\cos(l-\varpi-l'+\varpi')$$

(11) $$-\frac{51}{8}e'^2\cos(2l-4l'+2\varpi')$$

(12) $$-\frac{9}{8}ee'\cos(-l-\varpi+l'+\varpi')$$

(13) $$+\frac{63}{8}ee'\cos(-l-\varpi+3l'-\varpi')$$

(14) $$+\frac{3}{8}ee'\cos(3l-\varpi-l'-\varpi')$$

(15) $$-\frac{21}{8}ee'\cos(3l-\varpi-3l'+\varpi')$$

(16) $$+\frac{9}{8}ee'^2\cos(l-\varpi+2l'-2\varpi')$$

(17) $$+\frac{153}{8}ee'^2\cos(-l-\varpi+4l'-2\varpi')$$

(18) $$-\frac{51}{8}ee'^2\cos(3l-\varpi-4l'+2\varpi')$$

(19) $$+\frac{9}{8}ee'^2\cos(l-\varpi-2l'+2\varpi')\Big].$$

9. Cherchons en premier lieu si le terme non périodique donnera, par une seconde approximation, une partie séculaire dans la longitude de la Lune. La fonction perturbatrice réduite à ce terme donne, par l'application des formules du n° 6,

$$\frac{dn}{dt} = 0, \quad \frac{dl}{dt} = n - \frac{n'^2}{n}\left(1 + \frac{3}{2}e'^2\right).$$

On voit que n doit être traité comme une constante. Pour obtenir l'accroissement du premier ordre de $\frac{dl}{dt}$, il faut, dans la partie principale, attribuer à n son accroissement du premier ordre qui est nul. On a donc simplement

$$\frac{d\delta_1 l}{dt} = -\frac{n'^2}{n}\left(1 + \frac{3}{2}e'^2\right).$$

C'est en intégrant cette formule, où e'^2 est regardé comme fonction du temps, que nous avons obtenu une première valeur de l'accélération séculaire. Si l'on veut trouver l'accroissement du second ordre de $\frac{dl}{dt}$, il faut donner à n dans la partie principale son accroissement du second ordre et dans l'autre partie son accroissement du premier ordre; on trouve ainsi

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = \delta_2 n + \frac{n'^2}{n^2}\left(1 + \frac{3}{2}e'^2\right)\delta_1 n.$$

Mais $\delta_1 n$ et $\delta_2 n$ sont nuls l'un et l'autre. Il suit de là que le terme non périodique de la fonction perturbatrice ne modifie en rien le coefficient trouvé pour l'accélération séculaire.

10. Passons maintenant aux termes de la fonction perturbatrice qui ne contiennent pas e en facteur. Ces termes sont de la forme

$$n'^2 a^2 A \cos(il + i'l' + \alpha),$$

où A désigne une fonction de e', α un multiple de ϖ' dont il est inutile de spécifier la valeur. On pourra négliger le coefficient du temps dans α en comparaison des coefficients du temps dans l et dans l'. On pourra aussi admettre que la partie proportionnelle au temps dans l est précisément nt, supposition qui n'est exacte que dans le mouvement elliptique. Le coefficient du temps dans l'argument se réduira alors à $in + i'n'$. Posons

$$R = n'^2 a^2 A \cos u.$$

On en déduit, par l'application des formules du n° 6,

$$\frac{dn}{dt} = -3in'^2 A \sin u, \quad \frac{dl}{dt} = n + \frac{4n'^2}{n} A \cos u.$$

La première formule, intégrée, nous donne

$$\delta_1 n = -3in'^2 \int A \sin u \, dt.$$

Intégrons par parties, en remarquant que $\frac{de'}{dt}$ et par suite $\frac{dA}{dt}$ peuvent être traités comme des constantes,

$$\delta_1 n = \frac{3in'^2}{in + i'n'} A \cos u - \frac{3in'^2}{(in + i'n')^2} \frac{dA}{dt} \sin u.$$

L'accroissement du premier ordre de $\frac{dl}{dt}$ s'obtiendra en donnant à n dans la partie principale son accroissement du premier ordre et conservant sans changement la seconde partie; il vient

$$\frac{d\delta_1 l}{dt} = \delta_1 n + \frac{4n'^2}{n} A \cos u$$

ou

$$\frac{d\delta_1 l}{dt} = \left(\frac{3in'^2}{in + i'n'} + \frac{4n'^2}{n}\right) A \cos u - \frac{3in'^2}{(in + i'n')^2} \frac{dA}{dt} \sin u;$$

on en déduit, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \delta_1 l = & \left[\frac{3in'^2}{(in + i'n')^2} + \frac{4n'^2}{n(in + i'n')}\right] A \sin u \\ & + \left[\frac{6in'^2}{(in + i'n')^3} + \frac{4n'^2}{n(in + i'n')^2}\right] \frac{dA}{dt} \cos u. \end{aligned}$$

La correction du second ordre, pour n, se déduit de la formule qui donne $\frac{dn}{dt}$, en y attribuant à l son accroissement du premier ordre. On trouve ainsi

$$\frac{d\delta_2 n}{dt} = -3in'^2 A \cos u . i \delta_1 l,$$

ou, en se bornant à la partie non périodique,

$$\frac{d\delta_2 n}{dt} = -\left[\frac{9 i^3 n'^4}{(in+i'n')^3} + \frac{6 i^2 n'^4}{n(in+i'n')^2}\right] \mathrm{A}\,\frac{d\mathrm{A}}{dt},$$

et, en intégrant,

$$\delta_2 n = -\left[\frac{9 i^3 n'^4}{2(in+i'n')^3} + \frac{3 i^2 n'^4}{n(in+i'n')^2}\right] \mathrm{A}^2.$$

L'expression de $\frac{dl}{dt}$ fournit de même

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = \delta_2 n - 4\,\frac{n'^2}{n^2}\,\mathrm{A}\cos u.\delta_1 n - 4\,\frac{n'^2}{n}\,\mathrm{A}\sin u.i\delta_1 l.$$

Substituons, en ne conservant que la partie non périodique;

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = -\mathrm{A}^2\left[\frac{9 i^3 n'^4}{2(in+i'n')^3} + \frac{9 i^2 n'^4}{n(in+i'n')^2} + \frac{14\, in'^4}{n^2(in+i'n')}\right].$$

On fera l'application de cette formule aux termes de la fonction perturbatrice qui rentrent dans le type choisi. Dans le coefficient A^2, on ne gardera que le terme en e'^2. Pour déduire de la formule précédente la portion introduite par chaque terme dans le coefficient de t^2, il suffira de remplacer e'^2 par $e'_0\alpha$, α désignant la diminution en un siècle de l'excentricité de l'orbite terrestre.

Il sera inutile de considérer les termes qui, dans notre développement de la fonction perturbatrice, portent les numéros (8) et (11). Ces termes introduiraient en effet dans la longitude moyenne des parties contenant en facteur e'^4. Il suffira d'appliquer la formule précédente aux termes qui portent les numéros (1), (2), (4), (5). Pour le calcul numérique, il sera commode de poser $\frac{n'}{n} = \nu$; la formule générale devient

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = -\mathrm{A}^2\nu^3 n'\left[\frac{9}{2\left(1+\frac{i'}{i}\nu\right)^3} + \frac{9}{\left(1+\frac{i'}{i}\nu\right)^2} + \frac{14}{\left(1+\frac{i'}{i}\nu\right)}\right].$$

Le Tableau suivant fait connaître l'application de cette formule aux différents termes :

NUMÉROS des termes.	i.	i'.	A.	A^2.	PARTIE PROPORTIONNELLE A t^2 DANS LA LONGITUDE MOYENNE.
(1)	2	-2	$-\frac{3}{4}+\frac{15}{8}e'^2$	$-\frac{45}{16}e'^2$	$\frac{45}{16}\nu^3 e'_0 \alpha t . n't\left[\frac{9}{2(1-\nu)^3}+\frac{9}{(1-\nu)^2}+\frac{14}{1-\nu}\right]$
(2)	0				0
(4)	2	-1	$\frac{3}{8}e'$	$\frac{9}{64}e'^2$	$-\frac{9}{64}\nu^3 e'_0 \alpha t . n't\left[\frac{9}{2\left(1-\frac{1}{2}\nu\right)^3}+\frac{9}{\left(1-\frac{1}{2}\nu\right)^2}+\frac{14}{1-\frac{1}{2}\nu}\right]$
(5)	2	-3	$-\frac{21}{8}e'$	$\frac{441}{64}e'^2$	$-\frac{441}{64}\nu^3 e'_0 \alpha t . n't\left[\frac{9}{2\left(1-\frac{3}{2}\nu\right)^3}+\frac{9}{\left(1-\frac{3}{2}\nu\right)^2}+\frac{14}{1-\frac{3}{2}\nu}\right]$

Pour la réduction en nombres, nous ferons usage des données qui ont déjà servi dans la première approximation. On trouve ainsi, pour la partie du coefficient de t^2 relative à chacun des termes considérés,

$$C_1^{(1)} = -3'',4180,$$
$$C_1^{(2)} = 0,$$
$$C_1^{(4)} = +0'',1599,$$
$$C_1^{(5)} = +8'',9827.$$

11. Passons maintenant aux termes de la fonction perturbatrice qui contiennent e en facteur. On posera

$$R = n'^2 a^2 e \mathrm{A} \cos(il + i'l' - \varpi + \alpha),$$

α étant un multiple de ϖ', A une fonction de e'. Pour simplifier l'écriture, nous désignerons, comme tout à l'heure, l'argument par u. L'application des formules du n° 6 donne immédiatement

$$\frac{de}{dt} = \frac{n'^2}{n}\mathrm{A}\sin u, \qquad \frac{d\varpi}{dt} = -\frac{n'^2}{n}\frac{1}{e}\mathrm{A}\cos u.$$

Intégrons, en remarquant que $\frac{d\mathrm{A}}{dt}$ peut être traité comme une constante; il vient

$$\delta_1 e = -\frac{n'^2}{n(in+i'n')}\mathrm{A}\cos u + \frac{n'^2}{n(in+i'n')^2}\frac{d\mathrm{A}}{dt}\sin u,$$
$$\delta_1 \varpi = -\frac{n'^2}{ne(in+i'n')}\mathrm{A}\sin u - \frac{n'^2}{ne(in+i'n')^2}\frac{d\mathrm{A}}{dt}\cos u.$$

Par le même procédé, l'équation

$$\frac{dn}{dt} = -3in'^2 e A \sin u$$

nous donnera

$$\delta_1 n = \frac{3in'^2 e}{in+i'n'} A \cos u - \frac{3in'^2 e}{(in+i'n')^2}\frac{dA}{dt}\sin u.$$

On n'a pas à se préoccuper de $\delta_1 l$, qui fournirait des termes contenant au moins e^2 en facteur, et par conséquent sans influence sur le résultat que nous avons en vue. L'équation qui fait connaître $\frac{dn}{dt}$ donne, par la différentiation,

$$\frac{d\delta_2 n}{dt} = -3in'^2 A \sin u\, \delta_1 e + 3in'^2 e A \cos u\, \delta_1 \varpi.$$

Substituons, supprimons les parties périodiques et intégrons; il viendra

$$\delta_2 n = -\frac{3in'^4}{2n(in+i'n')^2} A^2.$$

On trouvera de même, en différentiant la formule qui fait connaître $\frac{dl}{dt}$,

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = \delta_2 n + \frac{7n'^2}{2n} A \cos u\, \delta_1 e + \frac{7n'^2}{2n} e A \sin u\, \delta_1 \varpi.$$

On en déduit, par la substitution des valeurs de $\delta_1 e$ et $\delta_1 \varpi$ et par la suppression des termes périodiques,

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = -A^2\left[\frac{3in'^4}{2n(in+i'n')^2} + \frac{7n'^4}{2n^2(in+i'n')}\right],$$

ou, en posant comme précédemment $\frac{n'}{n} = \nu$,

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = -A^2 \nu^3 n'\left[\frac{3i}{2(i+i'\nu)^2} + \frac{7}{2(i+i'\nu)}\right].$$

Dans A^2 on ne devra conserver que la partie qui contient en facteur e'^2. Il suit de là que les termes que nous avons inscrits dans la fonction perturbatrice avec les numéros (16), (17), (18), (19) n'ajoutent rien, dans la seconde approximation, au coefficient de l'accélération séculaire.

Il suffira d'appliquer la formule précédente aux termes qui sont désignés dans la fonction perturbatrice par les numéros (3), (6), (7), (9), (10), (12), (13), (14), (15). Le Tableau suivant donne le résultat de ce calcul :

NUMÉROS des termes.	i.	i'.	A.	A^2.	PARTIE PROPORTIONNELLE A t^2 dans la longitude moyenne.
(3)	1	0	$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e'^2$	$\frac{3}{4}e'^2$	$-\frac{3}{4}\,e'_0\nu^3\alpha t.n't\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{2}\right)$
(6)	-1	2	$\frac{9}{4}-\frac{45}{8}e'^2$	$-\frac{405}{16}e'^2$	$-\frac{405}{16}\,e'_0\nu^3\alpha t.n't\left[\frac{3}{2(1-2\nu)^2}+\frac{7}{2(1-2\nu)}\right]$
(7)	3	-2	$-\frac{3}{4}+\frac{15}{8}e'^2$	$-\frac{45}{16}e'^2$	$\frac{45}{16}\,e'_0\nu^3\alpha t.n't\left[\frac{9}{2(3-2\nu)^2}+\frac{7}{2(3-2\nu)}\right]$
(9)	1	1	$\frac{3}{4}e'$	$\frac{9}{16}e'^2$	$-\frac{9}{16}\,e'_0\nu^3\alpha t.n't\left[\frac{3}{2(1+\nu)^2}+\frac{7}{2(1+\nu)}\right]$
(10)	1	-1	$\frac{3}{4}e'$	$\frac{9}{16}e'^2$	$-\frac{9}{16}\,e'_0\nu^3\alpha t.n't\left[\frac{3}{2(1-\nu)^2}+\frac{7}{2(1-\nu)}\right]$
(12)	-1	1	$-\frac{9}{8}e'$	$\frac{81}{64}e'^2$	$\frac{81}{64}\,e'_0\nu^3\alpha t.n't\left[\frac{3}{2(1-\nu)^2}+\frac{7}{2(1-\nu)}\right]$
(13)	-1	3	$\frac{63}{8}e'$	$\frac{3969}{64}e'^2$	$\frac{3969}{64}\,e'_0\nu^3\alpha t.n't\left[\frac{3}{2(1-3\nu)^2}+\frac{7}{2(1-3\nu)}\right]$
(14)	3	-1	$\frac{3}{8}e'$	$\frac{9}{64}e'^2$	$-\frac{9}{64}\,e'_0\nu^3\alpha t.n't\left[\frac{9}{2(3-\nu)^2}+\frac{7}{2(3-\nu)}\right]$
(15)	3	-3	$-\frac{21}{8}e'$	$\frac{441}{64}e'^2$	$-\frac{441}{64}\,e'_0\nu^3\alpha t.n't\left[\frac{1}{2(1-\nu)^2}+\frac{7}{6(1-\nu)}\right]$

Le calcul numérique de chaque terme a donné en secondes les résultats suivants :

$$C_2^{(3)} = +0,1456 \qquad C_2^{(9)} = +0,0991 \qquad C_2^{(13)} = -16,8314$$
$$C_2^{(6)} = +6,0748 \qquad C_2^{(10)} = +0,1208 \qquad C_2^{(14)} = +0,0094$$
$$C_2^{(7)} = -0,1945 \qquad C_2^{(12)} = -0,2718 \qquad C_2^{(15)} = +0,4933$$

Si l'on réunit ces nombres à ceux qui ont été fournis par les termes indépendants de e, ainsi que par le terme non périodique de la fonction perturbatrice, on trouve, pour le coefficient de l'accélération séculaire,

$$C = 5'',89.$$

C'est, à 0″,2 près, le résultat d'abord annoncé par M. Adams. En faisant dans les dénominateurs de nos formules $\nu = 0$, on retrouverait la valeur que M. Delaunay a obtenue par une marche analogue à celle que nous avons suivie, mais en négligeant le coefficient du temps dans la longitude moyenne de la Terre (*voir* les *Additions à la Connaissance des Temps pour* 1862).

12. Nous allons maintenant, sans sortir de la deuxième approximation, apporter dans le calcul une précision plus grande. A la partie déjà considérée de la fonction perturbatrice nous joindrons les termes du quatrième et du cinquième ordre, le terme principal étant regardé comme du second ordre et e' étant traité comme une quantité de l'ordre zéro. Cette extension n'apportera, du reste, aucun changement dans la méthode suivie. Nous continuerons à supposer nulle l'inclinaison de l'orbite terrestre; mais nous aurons égard à la partie proportionnelle au temps dans la longitude du périgée lunaire. Provisoirement on négligera toutes les parties de la fonction perturbatrice qui contiennent en facteur e'^2. Les termes qui en résulteraient dans la longitude moyenne de la Lune seraient, en effet, multipliés par $\int e'^4\,dt$.

Les termes de la fonction perturbatrice qui rentrent dans les conditions posées sont au nombre de trente-cinq. En voici la liste :

$$\text{(0)}\quad R = n'^2 a^2 \Big\{ \left[-\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\varphi^2 - \frac{3}{8}e^2 + e'^2\left(-\frac{3}{8} + \frac{9}{16}\varphi^2 - \frac{9}{16}e^2\right)\right]\cos(0)$$

$$\text{(1)}\quad + \left[-\frac{3}{4} + \frac{3}{8}\varphi^2 + \frac{15}{8}e^2 + e'^2\left(\frac{15}{8} - \frac{15}{16}\varphi^2 - \frac{75}{16}e^2\right)\right]\cos(2l - 2l')$$

$$\text{(2)}\quad + e\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\varphi^2 - \frac{1}{16}e^2 + e'^2\left(\frac{3}{4} - \frac{9}{8}\varphi^2 - \frac{3}{32}e^2\right)\right]\cos(l - \varpi)$$

$$\text{(3)}\quad + e\left[\frac{9}{4} - \frac{9}{8}\varphi^2 - \frac{39}{32}e^2 + e'^2\left(-\frac{45}{8} + \frac{45}{16}\varphi^2 + \frac{195}{64}e^2\right)\right]\cos(l + \varpi - 2l')$$

$$\text{(4)}\quad + e\left[-\frac{3}{4} + \frac{3}{8}\varphi^2 + \frac{57}{32}e^2 + e'^2\left(\frac{15}{8} - \frac{15}{16}\varphi^2 - \frac{285}{64}e^2\right)\right]\cos(3l - \varpi - 2l')$$

$$\text{(5)}\quad + e'\left(-\frac{21}{8} + \frac{21}{16}\varphi^2 + \frac{105}{16}e^2\right)\cos(2l - 3l' + \varpi')$$

$$\text{(6)}\quad + e'\left(\frac{3}{8} - \frac{3}{16}\varphi^2 - \frac{15}{16}e^2\right)\cos(2l - l' - \varpi')$$

(7) $$+e'\left(-\frac{3}{4}+\frac{9}{8}\varphi^2-\frac{9}{8}e^2\right)\cos(l'-\varpi')$$

(8) $$+ee'\left(\frac{3}{4}-\frac{9}{8}\varphi^2-\frac{3}{32}e^2\right)\cos(l-\varpi+l'-\varpi')$$

(9) $$+ee'\left(\frac{3}{4}-\frac{9}{8}\varphi^2-\frac{3}{32}e^2\right)\cos(l-\varpi-l'+\varpi')$$

(10) $$+ee'\left(-\frac{9}{8}+\frac{9}{16}\varphi^2+\frac{39}{64}e^2\right)\cos(l+\varpi-l'-\varpi')$$

(11) $$+ee'\left(\frac{63}{8}-\frac{63}{16}\varphi^2-\frac{273}{64}e^2\right)\cos(l+\varpi-3l'+\varpi')$$

(12) $$+ee'\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{16}\varphi^2-\frac{57}{64}e^2\right)\cos(3l-\varpi-l'-\varpi')$$

(13) $$+ee'\left(-\frac{21}{8}+\frac{21}{16}\varphi^2+\frac{399}{64}e^2\right)\cos(3l-\varpi-3l'+\varpi')$$

(14) $$+e^2\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{16}e'^2\right)\cos(2l-2\varpi)$$

(15) $$+e^2\left(-\frac{3}{4}+\frac{15}{8}e'^2\right)\cos(4l-2\varpi-2l')$$

(16) $$+e^2\left(-\frac{15}{8}+\frac{75}{16}e'^2\right)\cos(-2\varpi+2l')$$

(17) $$+\varphi^2\left(-\frac{3}{8}-\frac{9}{16}e'^2\right)\cos(2l-2\theta)$$

(18) $$+\varphi^2\left(-\frac{3}{8}+\frac{15}{16}e'^2\right)\cos(-2\theta+2l')$$

(19) $$+\frac{a}{a'}\left(-\frac{3}{8}-\frac{3}{4}e'^2\right)\cos(l-l')$$

(20) $$+\frac{a}{a'}\left(-\frac{5}{8}+\frac{15}{4}e'^2\right)\cos(3l-3l')$$

(21) $$+\frac{3}{16}e^2e'\cos(2l-2\varpi-l'+\varpi')$$

(22) $$+\frac{15}{16}e^2e'\cos(-2\varpi+l'+\varpi')$$

(23) $$-\frac{105}{16}e^2e'\cos(-2\varpi+3l'-\varpi')$$

(24) $$+\frac{3}{8}e^2e'\cos(4l-2\varpi-l'-\varpi')$$

(25) $- \frac{21}{8} e^2 e' \cos(4l - 2\varpi - 3l' + \varpi')$

(26) $+ \frac{3}{16} e^2 e' \cos(2l - 2\varpi + l' - \varpi')$

(27) $- \frac{9}{16} \varphi^2 e' \cos(2l - 2\theta + l' - \varpi')$

(28) $- \frac{9}{16} \varphi^2 e' \cos(2l - 2\theta - l' + \varpi')$

(29) $+ \frac{3}{16} \varphi^2 e' \cos(-2\theta + l' + \varpi')$

(30) $- \frac{21}{16} \varphi^2 e' \cos(-2\theta + 3l' - \varpi')$

(31) $- \frac{3}{8} \frac{a}{a'} e' \cos(l - \varpi')$

(32) $- \frac{9}{8} \frac{a}{a'} e' \cos(l - 2l' + \varpi')$

(33) $+ \frac{5}{8} \frac{a}{a'} e' \cos(3l - 2l' - \varpi')$

(34) $- \frac{25}{8} \frac{a}{a'} e' \cos(3l - 4l' + \varpi') \Big\}.$

13. Comme dans les calculs qui précèdent, on a le droit de considérer isolément chaque terme de la fonction perturbatrice. Demandons-nous en premier lieu si les parties en e^2 et φ^2 introduites dans le terme non périodique modifient la valeur fournie par ce terme pour le coefficient de l'accélération séculaire.

Posons

$$R = n'^2 a^2 \left[-\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\varphi^2 - \frac{3}{8} e^2 + e'^2 \left(-\frac{3}{8} + \frac{9}{16}\varphi^2 - \frac{9}{16} e^2 \right) \right];$$

on en déduit, par l'application des formules du n° 6,

$$\frac{dn}{dt} = 0, \quad \frac{de}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

$$\frac{dl}{dt} = n + \frac{n'^2}{n} \left[-1 + \frac{9}{8}\varphi^2 - \frac{9}{8} e^2 + e'^2 \left(-\frac{3}{2} + \frac{63}{32}\varphi^2 - \frac{45}{16} e^2 \right) \right].$$

Pour appliquer la méthode de Poisson, il faudrait prendre les variations du premier ordre de n, e et φ en intégrant les valeurs de $\frac{dn}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$. On voit que n, e et φ doivent être regardés comme des constantes. Donc, l'expression précédente de $\frac{dl}{dt}$ n'est pas modifiée par la seconde approximation. La partie proportionnelle à e'^2 dans $\frac{dl}{dt}$ reste donc

$$\frac{n'^2}{n} e'^2\left(-\frac{3}{2}+\frac{63}{32}\varphi^2-\frac{45}{16}e^2\right),$$

du moins en se bornant aux puissances de e et de φ que nous avons conservées.

14. Occupons-nous maintenant du terme désigné dans la nouvelle fonction perturbatrice par le n° 1 et qui a pour argument $2l-2l'$. Pour plus d'uniformité dans les calculs, on posera, en remplaçant les coefficients numériques par des lettres,

$$R = n'^2a^2[A + B\varphi^2 + Ce^2 + e'^2(A' + B'\varphi^2 + C'e^2)]\cos(2l-2l').$$

Nous abrégerons l'écriture en représentant par u l'argument $2l-2l'$ et par p le coefficient du temps dans cet argument.

De l'expression de R on déduit

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \varpi} = 0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial l} = -2n'^2a^2[A + B\varphi^2 + Ce^2 + e'^2(A' + B'\varphi^2 + C'e^2)]\sin u,$$

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi} = 2n'^2a^2\varphi(B + B'e'^2)\cos u,$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = 2n'^2a^2e(C + C'e'^2)\cos u,$$

$$\frac{\partial R}{\partial a} = 2n'^2a[A + B\varphi^2 + Ce^2 + e'^2(A' + B'\varphi^2 + C'e^2)]\cos u.$$

On en déduit, par l'application des formules du n° 6,

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{n'^2}{n}\varphi\left\{A + \left(B + \frac{A}{12}\right)\varphi^2 + \left(C + \frac{A}{2}\right)e^2 + e'^2\left[A' + \left(B' + \frac{A'}{12}\right)\varphi^2 + \left(C' + \frac{A'}{2}\right)e^2\right]\right\}\sin u,$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{n'^2}{n}e\left\{A + B\varphi^2 + \left(C - \frac{A}{4}\right)e^2 + e'^2\left[A' + B'\varphi^2 + \left(C' - \frac{A'}{4}\right)e^2\right]\right\}\sin u,$$

$$\frac{dl}{dt} = n + \frac{n'^2}{n}[4A + 3B\varphi^2 + 3Ce^2 + e'^2(4A' + 3B'\varphi^2 + 3C'e^2)\cos u],$$

$$\frac{dn}{dt} = -6n'^2[A + B\varphi^2 + Ce^2 + e'^2(A' + B'\varphi^2 + C'e^2)]\sin u.$$

Intégrons cette dernière formule, en nous rappelant que $\frac{d.e'^2}{dt}$ peut être regardé comme une constante. On trouve, pour la variation du premier ordre $\delta_1 n$,

$$\delta_1 n = \frac{6n'^2}{p}[A + B\varphi^2 + Ce^2 + e'^2(A' + B'\varphi^2 + C'e^2)]\cos u$$
$$- \frac{6n'^2}{p^2}(A' + B'\varphi^2 + C'e^2)\frac{d.e'^2}{dt}\sin u.$$

D'ailleurs

$$\frac{d\delta_1 l}{dt} = \delta_1 n + \frac{n'^2}{n}[4A + 3B\varphi^2 + 3Ce^2 + e'^2(4A' + 3B'\varphi^2 + 3C'e^2)]\cos u.$$

En intégrant, il vient

$$\delta_1 l = \frac{12n'^2}{p^3}(A' + B'\varphi^2 + C'e^2)\frac{d.e'^2}{dt}\cos u$$
$$+ \frac{6n'^2}{p^2}[A + B\varphi^2 + Ce^2 + e'^2(A' + B'\varphi^2 + C'e^2)]\sin u$$
$$+ \frac{n'^2}{np}[4A + 3B\varphi^2 + 3Ce^2 + e'^2(4A' + 3B'\varphi^2 + 3C'e^2)]\sin u$$
$$+ \frac{n'^2}{np^2}(4A' + 3B'\varphi^2 + 3C'e^2)\frac{d.e'^2}{dt}\cos u.$$

On trouve de même, en intégrant les formules qui donnent $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$,

$$\begin{aligned}\delta_1 e = {} & \frac{n'^2}{np} e \left\{ A + B\varphi^2 + \left(C - \frac{A}{4}\right) e^2 + e'^2 \left[A' + B'\varphi^2 + \left(C' - \frac{A'}{4}\right) e^2 \right] \right\} \cos u \\ & - \frac{n'^2}{np^2} e \left[A' + B'\varphi^2 + \left(C' - \frac{A'}{4}\right) e^2 \right] \frac{d.e'^2}{dt} \sin u,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_1 \varphi = {} & \frac{n'^2}{np} \varphi \left\{ A + \left(B + \frac{A}{12}\right) \varphi^2 + \left(C + \frac{A}{2}\right) e^2 + e'^2 \left[A' + \left(B' + \frac{A'}{12}\right) \varphi^2 + \left(C' + \frac{A'}{2}\right) e^2 \right] \right\} \cos u \\ & - \frac{n'^2}{np^2} \varphi \left[A' + \left(B' + \frac{A'}{12}\right) \varphi^2 + \left(C' + \frac{A'}{2}\right) e^2 \right] \frac{d.e'^2}{dt} \sin u.\end{aligned}$$

Pour obtenir la variation du second ordre de n, il faut, dans la formule qui fait connaître $\frac{dn}{dt}$, attribuer à l, e, φ leurs variations du premier ordre. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d\delta_2 n}{dt} = {} & -12 n'^2 [A + B\varphi^2 + Ce^2 + e'^2 (A' + B'\varphi^2 + C'e^2)] \cos u \, \delta_1 l \\ & - 12 n'^2 \varphi (B + B'e'^2) \sin u \, \delta_1 \varphi - 12 n'^2 e (C + C'e'^2) \sin u \, \delta_1 e,\end{aligned}$$

ou, en remplaçant $\delta_1 l$, $\delta_1 \varphi$, $\delta_1 e$ par leurs valeurs, supprimant les parties périodiques et intégrant,

$$\begin{aligned}\delta_2 n = {} & -\frac{72 n'^4}{p^3} [AA' + (AB' + BA')\varphi^2 + (AC' + CA')e^2] e'^2 \\ & - \frac{6 n'^4}{np^2} [4AA' + 3(AB' + BA')\varphi^2 + 3(AC' + CA')e^2] e'^2.\end{aligned}$$

Cherchons pour $\frac{dl}{dt}$ la variation du second ordre; il faut, dans le terme principal, attribuer à n sa variation du second ordre, et, dans le terme perturbateur, donner à n, l, e, φ leurs variations du premier ordre. On aura ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d\delta_2 l}{dt} = {} & \delta_2 n - \frac{n'^2}{n^2} [4A + 3B\varphi^2 + 3Ce^2 + e'^2 (4A' + 3B'\varphi^2 + 3C'e^2)] \cos u \, \delta_1 n \\ & - \frac{2n'^2}{n^2} [4A + 3B\varphi^2 + 3Ce^2 + e'^2 (4A' + 3B'\varphi^2 + 3C'e^2)] \sin u \, \delta_1 l \\ & + \frac{2n'^2}{n} \varphi (3B + 3B'e'^2) \cos u \, \delta_1 \varphi + \frac{2n'^2}{n} e (3C + 3C'e'^2) \cos u \, \delta_1 e.\end{aligned}$$

Remplaçons $\delta_2 n$, $\delta_1 n$, $\delta_1 l$, $\delta_1 \varphi$, $\delta_1 e$ par leurs valeurs. On ne doit conserver que les parties qui contiennent en facteur e'^2. On négligera les termes périodiques et on limitera le multiplicateur de e'^2 aux termes qui seront d'un ordre égal ou inférieur à celui de $\frac{n'^4}{n^3}e^2$. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d\delta_2 l}{dt} = &-\frac{72 n'^4}{p^3}[AA' + (AB' + BA')\varphi^2 + (AC' + CA')e^2]e'^2\\ &-\frac{6n'^4}{np^2}[12AA' + 10(AB' + BA')\varphi^2 + 10(AC' + CA')e^2]e'^2\\ &-\frac{n'^4}{n^2 p}[56AA' + 42(AB' + BA')\varphi^2 + 42(AC' + CA')e^2]e'^2.\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à réduire cette formule en nombres et à remplacer $n'e'^2$ par $n't.e'_0\alpha t$ pour obtenir en secondes le coefficient de l'accélération séculaire fourni par le terme d'argument $2l - 2l'$. Il est bien clair que, en supposant $e = 0$, $\varphi = 0$, on devrait retrouver le nombre précédemment obtenu.

15. Un même calcul peut donner à la fois les résultats qui se rapportent aux termes de la fonction perturbatrice désignés par les numéros (2), (3) et (4). Il suffira de poser

$$R = n'a^2 e[A + B\varphi^2 + Ce^2 + e'^2(A' + B'\varphi^2 + C'e^2)]\cos(il - \varpi + i'l')$$

et d'attribuer aux lettres A, B, C, A', B', C', i, i' des valeurs convenables pour représenter successivement chacun de ces termes. Comme tout à l'heure, nous désignerons par u l'argument et par p le coefficient du temps dans l'argument.

On trouve, par la différentiation,

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0,\quad \frac{\partial R}{\partial \varpi} = n'^2 a^2 e[A + B\varphi^2 + Ce^2 + (A' + B'\varphi^2 + C'e^2)e'^2]\sin u,$$

$$\frac{\partial R}{\partial l} = -i\frac{\partial R}{\partial \varpi},\quad \frac{\partial R}{\partial \varphi} = n'a^2 e\varphi(2B + 2B'e'^2)\cos u,$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = n'^2 a^2[A + B\varphi^2 + 3Ce^2 + (A' + B'\varphi^2 + 3C'e^2)e'^2]\cos u,$$

$$\frac{\partial R}{\partial a} = 2n'^2 ae[A + B\varphi^2 + Ce^2 + (A' + B'\varphi^2 + C'e^2)e'^2]\cos u.$$

Il en résulte, par l'application des formules du n° 6,

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{n'^2}{n}(1-i)\frac{e\varphi}{2}(A+A'e'^2)\sin u,$$

$$\frac{de}{dt}=\frac{n'^2}{n}\left\{A+B\varphi^2+\left(C-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}Ai\right)e^2+\left[A'+B'\varphi^2+\left(C'-\frac{1}{2}A'-\frac{1}{2}A'i\right)e^2\right]e'^2\right\}\sin u,$$

$$\frac{d\varpi}{dt}=-\frac{n'^2}{ne}\left\{A+B\varphi^2+\left(3C-\frac{1}{2}A\right)e^2+\left[A'+B'\varphi^2+\left(3C'-\frac{1}{2}A'\right)e^2\right]e'^2\right\}\cos u,$$

$$\frac{dl}{dt}=n+\frac{n'^2}{n}e\left\{\frac{7}{2}A+\frac{5}{2}B\varphi^2+\left(\frac{5}{2}C+\frac{1}{8}A\right)e^2+\left[\frac{7}{2}A'+\frac{5}{2}B'\varphi^2+\left(\frac{5}{2}C'+\frac{1}{8}A'\right)e^2\right]e'^2\right\}\cos u,$$

$$\frac{dn}{dt}=-3in'^2e[A+B\varphi^2+Ce^2+(A'+B'\varphi^2+C'e^2)e'^2]\sin u.$$

Ces équations, intégrées conformément aux explications données dans les pages précédentes, conduisent aux formules

$$\begin{aligned}
\delta_1 n = {} & \frac{3in'^2}{p}e[A+B\varphi^2+Ce^2+(A'+B'\varphi^2+C'e^2)e'^2]\cos u \\
& -\frac{3in'^2}{p^2}e(A'+B'\varphi^2+C'e^2)\frac{d.e'^2}{dt}\sin u,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1 l = {} & \frac{6in'^2}{p^3}e(A'+B'\varphi^2+C'e^2)\frac{d.e'^2}{dt}\cos u \\
& +\frac{3in'^2}{p^2}e[A+B\varphi^2+Ce^2+(A'+B'\varphi^2+C'e^2)e'^2]\sin u \\
& +\frac{n'^2}{np}e\left\{\frac{7}{2}A+\frac{5}{2}B\varphi^2+\left(\frac{5}{2}C+\frac{1}{8}A\right)e^2+\left[\frac{7}{2}A'+\frac{5}{2}B'\varphi^2+\left(\frac{5}{2}C'+\frac{1}{8}A'\right)e^2\right]e'^2\right\}\sin u \\
& +\frac{n'^2}{np^2}e\left[\frac{7}{2}A'+\frac{5}{2}B'\varphi^2+\left(\frac{5}{2}C'+\frac{1}{8}A'\right)e^2\right]\frac{d.e'^2}{dt}\cos u,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1 e = {} & -\frac{n'^2}{np}\left\{A+B\varphi^2+\left(C-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}Ai\right)e^2+\left[A'+B'\varphi^2+\left(C'-\frac{1}{2}A'-\frac{1}{2}A'i\right)e^2\right]e'^2\right\}\cos u \\
& +\frac{n'^2}{np^2}\left[A'+B'\varphi^2+\left(C'-\frac{1}{2}A'-\frac{1}{2}A'i\right)e^2\right]\frac{d.e'^2}{dt}\sin u,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1 \varpi = {} & -\frac{n'^2}{npe}\left\{A+B\varphi^2+\left(3C-\frac{1}{2}A\right)e^2+\left[A'+B'\varphi^2+\left(3C'-\frac{1}{2}A'\right)e^2\right]e'^2\right\}\sin u \\
& -\frac{n'^2}{np\,e}\left[A'+B'\varphi^2+\left(3C'-\frac{1}{2}A'\right)e^2\right]\frac{d.e'^2}{dt}\cos u,
\end{aligned}$$

$$\delta_1\varphi=-\frac{n'^2}{np}\frac{1-i}{2}e\varphi(A+A'e'^2)\cos u+\frac{n'^2}{np^2}\frac{1-i}{2}e\varphi A'\frac{d.e'^2}{dt}\sin u$$

Passons à la recherche des inégalités du second ordre. La formule qui fait connaître $\frac{dn}{dt}$ donne, par la différentiation,

$$\begin{aligned}\frac{d\delta_2 n}{dt} = &- 3i^2n'^2e[A + B\varphi^2 + Ce^2 + (A' + B'\varphi^2 + C'e^2)e'^2]\cos u\,\delta_1 l\\ &+ 3in'^2e\,[A + B\varphi^2 + Ce^2 + (A' + B'\varphi^2 + C'e^2)e'^2]\cos u\,\delta_1\varpi\\ &- 3in'^2\,[A + B\varphi^2 + 3Ce^2 + (A' + B'\varphi^2 + 3C'e^2)e'^2]\sin u\,\delta_1 e\\ &- 3in'^2e\varphi(2B + 2B'e'^2)\sin u\,\delta_1\varphi.\end{aligned}$$

On en tire, après la substitution des valeurs de $\delta_1 l$, $\delta_1\varpi$, $\delta_1 e$, $\delta_1\varphi$ et la suppression des parties périodiques,

$$\begin{aligned}\delta_2 n = &- \frac{9i^3n'^4}{p^3}AA'e^2e'^2\\ &- \frac{3in'^4}{2np^2}[2AA' + 2(BA' + AB')\varphi^2 + (3AA'i + 4CA' + 4AC' - AA')e^2]e'^2.\end{aligned}$$

On a d'ailleurs, en se reportant à la valeur trouvée pour $\frac{dl}{dt}$,

$$\begin{aligned}\frac{d\delta_2 l}{dt} = \delta_2 n &- \frac{n'^2}{n^2}e\left\{\frac{7}{2}A + \frac{5}{2}B\varphi^2 + \left(\frac{5}{2}C + \frac{1}{8}A\right)e^2 + \left[\frac{7}{2}A' + \frac{5}{2}B'\varphi^2 + \left(\frac{5}{2}C' + \frac{1}{8}A'\right)e^2\right]e'^2\right\}\cos u\,\delta_1 n\\ &- \frac{in'^2}{n}e\left\{\frac{7}{2}A + \frac{5}{2}B\varphi^2 + \left(\frac{5}{2}C + \frac{1}{8}A\right)e^2 + \left[\frac{7}{2}A' + \frac{5}{2}B'\varphi^2 + \left(\frac{5}{2}C' + \frac{1}{8}A'\right)e^2\right]e'^2\right\}\sin u\,\delta_1 l\\ &+ \frac{n'^2}{n}e\left\{\frac{7}{2}A + \frac{5}{2}B\varphi^2 + \left(\frac{5}{2}C + \frac{1}{8}A\right)e^2 + \left[\frac{7}{2}A' + \frac{5}{2}B'\varphi^2 + \left(\frac{5}{2}C' + \frac{1}{8}A'\right)e^2\right]e'^2\right\}\sin u\,\delta_1\varpi\\ &+ \frac{n'^2}{n}\left\{\frac{7}{2}A + \frac{5}{2}B\varphi^2 + \left(\frac{15}{2}C + \frac{3}{8}A\right)e^2 + \left[\frac{7}{2}A' + \frac{5}{2}B'\varphi^2 + \left(\frac{15}{2}C' + \frac{3}{8}A'\right)e^2\right]e'^2\right\}\cos u\,\delta_1 e\\ &+ \frac{n'^2}{n}[5B + 5B'e'^2]e\varphi\cos u\,\delta_1\varphi.\end{aligned}$$

Aux variations $\delta_2 n$, $\delta_1 n$, $\delta_1 l$, $\delta_1\varpi$, $\delta_1 e$, $\delta_1\varphi$ substituons les valeurs trouvées antérieurement. On obtiendra, après quelques réductions faciles,

$$\begin{aligned}\frac{d\delta_2 l}{dt} = &- \frac{9i^3n'^4}{p^3}AA'e^2e'^2\\ &- \frac{3in'^4}{2np^2}[2AA' + 2(BA' + AB')\varphi^2 + (10AA'i + 4CA' + 4AC' - AA')e^2]e'^2\\ &- \frac{n'^4}{2n^2p}[14AA' + 12(AB' + BA')\varphi^2 + (24AC' + 24CA' - 6AA' + 42AA'i)e^2]e'^2.\end{aligned}$$

Cette équation fera connaître en même temps les résultats numériques relatifs aux termes (2), (3), (4) de la fonction perturbatrice.

16. Nous pouvons aussi regarder les termes (5), (6), (7) comme compris dans la formule

$$R = n'^2 a^2 e'(A + B\varphi^2 + Ce^2)\cos(il + \alpha).$$

Il en résulte

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \varpi} = 0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial l} = -in'^2 a^2 e'(A + B\varphi^2 + Ce^2)\sin u,$$

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi} = n'^2 a^2 e' \times 2B\varphi\cos u,$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = n'^2 a^2 e' \times 2Ce\cos u,$$

$$\frac{\partial R}{\partial a} = 2n'^2 ae'(A + B\varphi^2 + Ce^2)\cos u,$$

et, par suite,

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{in'^2}{n}\varphi e'\left[\frac{1}{2}A + \left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{24}A\right)\varphi^2 + \frac{1}{2}Ce^2\right]\sin u,$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{in'^2}{n}ee'\left[\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\varphi^2 + \left(\frac{1}{2}C - \frac{1}{8}A\right)e^2\right]\sin u,$$

$$\frac{dl}{dt} = n + \frac{n'^2}{n}e'(4A + 3B\varphi^2 + 3Ce^2)\cos u,$$

$$\frac{dn}{dt} = -3in'^2 e'(A + B\varphi^2 + Ce^2)\sin u.$$

Calculons les accroissements du premier ordre

$$\delta_1 n = \frac{3in'^2}{p}e'(A + B\varphi^2 + Ce^2)\cos u - \frac{3in'^2}{p^2}(A + B\varphi^2 + Ce^2)\frac{de'}{dt}\sin u,$$

$$\begin{aligned}\delta_1 l = {} & \frac{6in'^2}{p^3}(A + B\varphi^2 + Ce^2)\frac{de'}{dt}\cos u + \frac{3in'^2}{p^2}e'(A + B\varphi^2 + Ce^2)\sin u \\ & + \frac{n'^2}{np}e'(4A + 3B\varphi^2 + 3Ce^2)\sin u + \frac{n'^2}{np^2}(4A + 3B\varphi^2 + 3Ce^2)\frac{de'}{dt}\cos u,\end{aligned}$$

$$\delta_1\varphi = \frac{in'^2}{np}\varphi\left[\frac{1}{2}A + \left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{24}A\right)\varphi^2 + \frac{1}{2}Ce^2\right]e'\cos u$$
$$- \frac{in'^2}{np^2}\varphi\left[\frac{1}{2}A + \left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{24}A\right)\varphi^2 + \frac{1}{2}Ce^2\right]\frac{de'}{dt}\sin u,$$

$$\delta_1 e = \frac{in'^2}{np}e\left[\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\varphi^2 + \left(\frac{1}{2}C - \frac{1}{8}A\right)e^2\right]e'\cos u$$
$$- \frac{in'^2}{np^2}e\left[\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\varphi^2 + \left(\frac{1}{2}C - \frac{1}{8}A\right)e^2\right]\frac{de'}{dt}\sin u.$$

Substituons ces valeurs dans la formule

$$\frac{d\delta_2 n}{dt} = -3in'^2e'(A + B\varphi^2 + Ce^2)\cos u\,\delta_1 l$$
$$- 3in'^2e' \times 2B\varphi\sin u\,\delta_1\varphi - 3in'^2e' \times 2Ce\sin u\,\delta_1 e.$$

On trouvera, en intégrant,

$$\delta_2 n = -\frac{9i^3n'^4}{2p^3}(A^2 + 2AB\varphi^2 + 2ACe^2)e'^2$$
$$- \frac{3i^2n'^4}{4np^2}(4A^2 + 6AB\varphi^2 + 6ACe^2)e'^2.$$

Nous avons ainsi tous les éléments nécessaires pour calculer l'expression

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = \delta_2 n - \frac{n'^2}{n^2}e'(4A + 3B\varphi^2 + 3Ce^2)\cos u\,\delta_1 n$$
$$- \frac{in'^2}{n}e'(4A + 3B\varphi^2 + 3Ce^2)\sin u\,\delta_1 l$$
$$+ \frac{n'^2}{n}e' \times 6B\varphi\cos u\,\delta_1\varphi + \frac{n'^2}{n}e' \times 6Ce\cos u\,\delta_1 e.$$

La substitution des valeurs de $\delta_2 n$, $\delta_1 n$, $\delta_1 l$, $\delta_1\varphi$, $\delta_1 e$ donne, pour le coefficient de e'^2,

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = -\frac{9i^3n'^4}{p^3}\left(\frac{1}{2}A^2 + AB\varphi^2 + ACe^2\right)e'^2$$
$$- \frac{3i^2n'^4}{2np^2}(6A^2 + 10AB\varphi^2 + 10ACe^2)e'^2$$
$$- \frac{in'^4}{2n^2p}(28A^2 + 42AB\varphi^2 + 42ACe^2)e'^2.$$

Telle est la formule dont on fera l'application aux termes (5), (6), (7) de la fonction perturbatrice.

17. Les termes désignés par les numéros (8), (9), (10), (11), (12), (13) ont pour expression analytique commune

$$R = n'^2 a^2 e e' (A + B\varphi^2 + Ce^2)\cos(il - \varpi + \alpha).$$

Les dérivées partielles dont nous aurons à faire usage sont

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \varpi} = n'^2 a^2 e e' (A + B\varphi^2 + Ce^2)\sin u, \quad \frac{\partial R}{\partial l} = -i\frac{\partial R}{\partial \varpi},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi} = n'^2 a^2 e e' \times 2B\varphi\cos u, \quad \frac{\partial R}{de} = n'^2 a^2 (A + B\varphi^2 + 3Ce^2) e'\cos u,$$

$$\frac{\partial R}{\partial a} = 2n'^2 ae(A + B\varphi^2 + Ce^2)e'\cos u.$$

On en tire, comme précédemment,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{n'^2}{n}\frac{e\varphi}{2}(1 - i)Ae'\sin u,$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{n'^2}{n}\left[A + B\varphi^2 + \left(C - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}Ai\right)e^2\right]e'\sin u,$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{n'^2}{ne}\left[A + B\varphi^2 + \left(3C - \frac{1}{2}A\right)e^2\right]e'\cos u,$$

$$\frac{dl}{dt} = n + \frac{n'^2}{n}e\left[\frac{7}{2}A + \frac{5}{2}B\varphi^2 + \left(\frac{5}{2}C + \frac{1}{8}A\right)e^2\right]e'\cos u,$$

$$\frac{dn}{dt} = -3in'^2 e(A + B\varphi^2 + Ce^2)e'\sin u.$$

Il en résulte, pour les variations du premier ordre,

$$\begin{aligned}\delta_1 n = {} & \frac{3in'^2}{p}e(A + B\varphi^2 + Ce^2)e'\cos u \\ & - \frac{3in'^2}{p^2}e(A + B\varphi^2 + Ce^2)\frac{de'}{dt}\sin u,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1 l = {} & \frac{6in'^2}{p^3} e(A + B\varphi^2 + Ce^2) \frac{de'}{dt} \cos u \\
& + \frac{3in'^2}{p^2} e(A + B\varphi^2 + Ce^2) e' \sin u \\
& + \frac{n'^2}{np} e \left[\frac{7}{2} A + \frac{5}{2} B\varphi^2 + \left(\frac{5}{2} C + \frac{1}{8} A \right) e^2 \right] e' \sin u \\
& + \frac{n'^2}{np^2} e \left[\frac{7}{2} A + \frac{5}{2} B\varphi^2 + \left(\frac{5}{2} C + \frac{1}{8} A \right) e^2 \right] \frac{de'}{dt} \cos u,
\end{aligned}$$

$$\delta_1 \varphi = - \frac{n'^2}{np} \frac{e\varphi}{2} (1 - i) A e' \cos u + \frac{n'^2}{np^2} \frac{e\varphi}{2} (1 - i) A \frac{de'}{dt} \sin u,$$

$$\begin{aligned}
\delta_1 e = {} & - \frac{n'^2}{np} \left[A + B\varphi^2 + \left(C - \frac{1}{2} A - \frac{1}{2} A i \right) e^2 \right] e' \cos u \\
& + \frac{n'^2}{np^2} \left[A + B\varphi^2 + \left(C - \frac{1}{2} A - \frac{1}{2} A i \right) e^2 \right] \frac{de'}{dt} \sin u,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1 \varpi = {} & - \frac{n'^2}{npe} \left[A + B\varphi^2 + \left(3C - \frac{1}{2} A \right) e^2 \right] e' \sin u \\
& - \frac{n'^2}{np^2 e} \left[A + B\varphi^2 + \left(3C - \frac{1}{2} A \right) e^2 \right] \frac{de'}{dt} \cos u.
\end{aligned}$$

L'expression de $\frac{dn}{dt}$ nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta_2 n}{dt} = {} & - 3in'^2 e(A + B\varphi^2 + Ce^2) e' \cos u \, \delta_1 l \\
& + 3in'^2 e(A + B\varphi^2 + Ce^2) e' \cos u \, \delta_1 \varpi \\
& - 3in'^2 e \times 2B\varphi e' \sin u \, \delta_1 \varphi \\
& - 3in'^2 (A + B\varphi^2 + 3Ce^2) e' \sin u \, \delta_1 e.
\end{aligned}$$

On voit aisément que la partie qui est multipliée par $\delta_1 \varphi$ peut être négligée. Il vient

$$\delta_2 n = - \frac{9 i^2 n'^4}{2p^3} A^2 e^2 e'^2 - \frac{3in'^4}{2np^2} \left[A^2 + 2AB\varphi^2 + \left(4AC - \frac{1}{2} A^2 + \frac{3}{2} A^2 i \right) e^2 \right] e'^2.$$

On écrira de même, à l'inspection de la valeur de $\frac{dl}{dt}$,

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta_2 l}{dt} = \delta_2 n &+ \frac{n'^2}{n} e \left[\frac{7}{2}\mathrm{A} + \frac{5}{2}\mathrm{B}\varphi^2 + \left(\frac{5}{2}\mathrm{C} + \frac{1}{8}\mathrm{A}\right)e^2\right] e' \sin u\,\delta_1\varpi \\
&- \frac{n'^2}{n^2} e \left[\frac{7}{2}\mathrm{A} + \frac{5}{2}\mathrm{B}\varphi^2 + \left(\frac{5}{2}\mathrm{C} + \frac{1}{8}\mathrm{A}\right)e^2\right] e' \cos u\,\delta_1 n \\
&- \frac{in'^2}{n} e \left[\frac{7}{2}\mathrm{A} + \frac{5}{2}\mathrm{B}\varphi^2 + \left(\frac{5}{2}\mathrm{C} + \frac{1}{8}\mathrm{A}\right)e^2\right] e' \sin u\,\delta_1 l \\
&+ \frac{n'^2}{n} \left[\frac{7}{2}\mathrm{A} + \frac{5}{2}\mathrm{B}\varphi^2 + \left(\frac{15}{2}\mathrm{C} + \frac{3}{8}\mathrm{A}\right)e^2\right] e' \cos u\,\delta_1 e \\
&+ \frac{n'^2}{n} \times 5\mathrm{B}\varphi e e' \cos u\,\delta_1\varphi.
\end{aligned}$$

Si aux accroissements du premier ordre on substitue les valeurs trouvées, on obtiendra, après quelques réductions,

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta_2 l}{dt} = &- \frac{9i^3 n'^4}{2p^3} \mathrm{A}^2 e^2 e'^2 \\
&- \frac{3in'^4}{2np^2}\left[\mathrm{A}^2 + 2\mathrm{AB}\varphi^2 + \left(4\mathrm{AC} - \frac{1}{2}\mathrm{A}^2 + 5\mathrm{A}^2 i\right)e^2\right]e'^2 \\
&- \frac{n'^4}{2n^2 p}\left[7\mathrm{A}^2 + 12\mathrm{AB}\varphi^2 + (24\mathrm{AC} - 3\mathrm{A}^2 + 21\mathrm{A}^2 i)e^2\right]e'^2.
\end{aligned}$$

18. Nous comprendrons les trois termes suivants, qui portent les numéros (14), (15), (16), dans la formule

$$\mathrm{R} = n'^2 a^2 e^2(\mathrm{A} + \mathrm{B}e'^2)\cos(il - 2\varpi + \alpha).$$

On en tire immédiatement

$$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \varpi} = 2n'^2 a^2 e^2(\mathrm{A} + \mathrm{B}e'^2)\sin u,$$

$$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial l} = -in'^2 a^2 e^2(\mathrm{A} + \mathrm{B}e'^2)\sin u,$$

$$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial e} = 2n'^2 a^2 e(\mathrm{A} + \mathrm{B}e'^2)\cos u,$$

$$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial a} = 2n'^2 a e^2(\mathrm{A} + \mathrm{B}e'^2)\cos u.$$

Il en résulte, pour les dérivées des éléments par rapport au temps,

$$\frac{de}{dt} = \frac{n'^2}{n} e\left[2A - Ae^2\left(1+\frac{i}{2}\right) + 2Be'^2 - Be^2\left(1+\frac{i}{2}\right)e'^2\right]\sin u,$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{n'^2}{n}(2A - Ae^2 + 2Be'^2 - Be^2e'^2)\cos u,$$

$$\frac{dl}{dt} = n + \frac{3n'^2}{n}e^2(A + Be'^2)\cos u,$$

$$\frac{dn}{dt} = -3in'^2e^2(A + Be'^2)\sin u.$$

Les accroissements du premier ordre auront, par conséquent, pour expressions :

$$\delta_1 n = \frac{3in'^2}{p}(Ae^2 + Be^2e'^2)\cos u - \frac{3in'^2}{p^2}Be^2\frac{d.e'^2}{dt}\sin u,$$

$$\delta_1 l = \frac{6in'^2}{p^3}Be^2\frac{d.e'^2}{dt}\cos u + \frac{3in'^2}{p^2}e^2(A + Be'^2)\sin u$$
$$+ \frac{3n'^2}{np}e^2(A + Be'^2)\sin u + \frac{3n'^2}{np^2}Be^2\frac{d.e'^2}{dt}\cos u,$$

$$\delta_1 e = -\frac{n'^2}{np}e\left[2A - Ae^2\left(1+\frac{i}{2}\right) + 2Be'^2 - Be^2\left(1+\frac{i}{2}\right)e'^2\right]\cos u$$
$$+ \frac{n'^2}{np^2}e\left[2B - Be^2\left(1+\frac{i}{2}\right)\right]\frac{d.e'^2}{dt}\sin u,$$

$$\delta_1\varpi = -\frac{n'^2}{np}(2A - Ae^2 + 2Be'^2 - Be^2e'^2)\sin u - \frac{n'^2}{np^2}(2B - Be^2)\frac{d.e'^2}{dt}\cos u.$$

De la formule qui donne $\frac{dn}{dt}$, on tire

$$\frac{d\delta_1 n}{dt} = 6in'^2e^2(A + Be'^2)\cos u\,\delta_1\varpi$$
$$- 3i^2n'^2e^2(A + Be'^2)\cos u\,\delta_1 l$$
$$- 6in'^2e(A + Be'^2)\sin u\,\delta_1 e.$$

En ne conservant que les parties non périodiques, on voit que le terme provenant de $\delta_1 l$ contiendrait en facteur e^4, ce qui permet de le négliger. Les deux autres termes s'ajoutent et donnent, par l'intégration,

$$\partial_2 n = -\frac{3in'^4}{np^2} \times 4ABe^2e'^2.$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned}\frac{d\partial_2 l}{dt} = \partial_2 n &- \frac{3n'^2}{n^2} e^2(A + Be'^2)\cos u\, \partial_1 n \\ &- \frac{3in'^2}{n} e^2(A + Be'^2)\sin u\, \partial_1 l \\ &+ \frac{6n'^2}{n} e^2(A + Be'^2)\sin u\, \partial_1 \varpi \\ &+ \frac{6n'^2}{n} e\,(A + Be'^2)\cos u\, \partial_1 e.\end{aligned}$$

Les termes en $\partial_1 n$ et $\partial_1 l$ peuvent être négligés; il reste

$$\frac{d\partial_2 l}{dt} = -\frac{3in'^4}{np^2} \times 4ABe^2e'^2 - \frac{3n'^4}{n^2p} \times 8ABe^2e'^2.$$

19. Les deux termes suivants, désignés dans la fonction perturbatrice par les numéros (17) et (18), peuvent se mettre sous la forme

$$R = n'^2a^2\varphi^2(A + Be'^2)\cos(il - 2\theta + \alpha).$$

La partie de la longitude moyenne qui est relative à ces termes s'obtient par une analyse à peu près identique à celle qui vient d'être développée, les éléments e et ϖ étant remplacés par les éléments φ et θ. Nous transcrirons seulement le résultat,

$$\frac{d\partial_2 l}{dt} = -\frac{12in'^4}{np^2} \times AB\varphi^2e'^2 - \frac{24n'^4}{n^2p} \times AB\varphi^2e'^2.$$

20. Les deux termes suivants, qui portent dans la fonction perturbatrice les numéros (19) et (20), rentrent dans la formule

$$R = n'^2a^2\frac{a}{a'}(A + Be'^2)\cos(il + \alpha),$$

α désignant un multiple de l' qu'il est inutile de spécifier. Formons les dérivées partielles

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \varpi} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial e} = 0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial l} = -\, i n'^2 a^2 \frac{a}{a'} (A + B e'^2) \sin u,$$

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \quad 3 n'^2 a \frac{a}{a'} (A + B e'^2) \cos u.$$

On en déduit, pour les dérivées des éléments par rapport au temps,

$$\frac{da}{dt} = \quad \frac{2 i n'^2}{n} a \frac{a}{a'} (A + B e'^2) \sin u,$$

$$\frac{dl}{dt} = \quad n + \frac{6 n'^2}{n} \frac{a}{a'} (A + B e'^2) \cos u,$$

$$\frac{dn}{dt} = -\, 3 i n'^2 \frac{a}{a'} (A + B e'^2) \sin u,$$

ce qui donne, pour les accroissements du premier ordre,

$$\delta_1 n = \frac{3 i n'^2}{p} \frac{a}{a'} (A + B e'^2) \cos u - \frac{3 i n'^2}{p^2} \frac{a}{a'} B \frac{d.e'^2}{dt} \sin u,$$

$$\delta_1 l = \frac{6 i n'^2}{p^3} \frac{a}{a'} B \frac{d.e'^2}{dt} \cos u + \frac{3 i n'^2}{p^2} \frac{a}{a'} (A + B e'^2) \sin u$$
$$+ \frac{6 n'^2}{np} \frac{a}{a'} (A + B e'^2) \sin u + \frac{6 n'^2}{np^2} \frac{a}{a'} B \frac{d.e'^2}{dt} \cos u,$$

$$\delta_1 a = -\frac{2 i n'^2}{np} a \frac{a}{a'} (A + B e'^2) \cos u + \frac{2 i n'^2}{np^2} a \frac{a}{a'} B \frac{d.e'^2}{dt} \sin u.$$

Les accroissements du second ordre seront donnés par les formules

$$\frac{d\delta_2 n}{dt} = -3 i^2 n'^2 \frac{a}{a'} (A + B e'^2) \cos u \, \delta_1 l - 3 i n'^2 \frac{1}{a'} (A + B e'^2) \sin u \, \delta_1 a$$

et

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = \delta_2 n - \frac{6 n'^2}{n^2} \frac{a}{a'} (A + B e'^2) \cos u \, \delta_1 n + \frac{6 n'^2}{n} \frac{1}{a'} (A + B e'^2) \cos u \, \delta_1 a.$$

Il est clair que, en substituant dans ces équations les accroissements du premier ordre, on trouverait partout en facteur $\left(\frac{a}{a'}\right)^2$. Les termes ainsi introduits dans l'expression de la longitude moyenne seraient d'un ordre supérieur de deux unités à ceux que nous avons conservés jusqu'ici. On devra donc les négliger absolument.

21. Les six termes suivants, désignés dans la fonction perturbatrice par les numéros (21), (22), (23), (24), (25), (26), sont des cas particuliers de l'expression

$$R = n'^2 a^2 e^2 A e' \cos(il - 2\varpi + \alpha),$$

où α désigne une somme de multiples de l' et de ϖ'. On en tire

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial \varpi} = 2n'^2 a^2 e^2 A e' \sin u, \quad \frac{\partial R}{\partial l} = -\, i n'^2 a^2 e^2 A e' \sin u,$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = 2n'^2 a^2 A e e' \cos u, \quad \frac{\partial R}{\partial a} = \quad 2n'^2 a e^2 A e' \cos u,$$

d'où, en vertu des formules du n° 6,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{n'^2}{n} A \left(1 - \frac{i}{2}\right) \varphi e^2 e' \sin u,$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{n'^2}{n} A \left(2 - e^2 - \frac{ie^2}{2}\right) e e' \sin u,$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{2n'^2}{n} A \left(1 - \frac{e^2}{2}\right) e' \cos u,$$

$$\frac{dl}{dt} = n + \frac{3n'^2}{n} A e^2 e' \cos u,$$

$$\frac{dn}{dt} = -\, 3 i n'^2 A e^2 e' \sin u.$$

Les accroissements du premier ordre seront

$$\delta_1 n = \frac{3in'^2}{p} A e^2 e' \cos u - \frac{3in'^2}{p^2} A e^2 \frac{de'}{dt} \sin u,$$

$$\delta_1 l = \frac{6in'^2}{p^3} A e^2 \frac{de'}{dt} \cos u + \frac{3in'^2}{p^2} A e^2 e' \sin u + \frac{3n'^2}{np} A e^2 e' \sin u + \frac{3n'^2}{np^2} A e^2 \frac{de'}{dt} \cos u,$$

$$\delta_1 \varphi = -\frac{n'^2}{np} \mathrm{A}\left(1 - \frac{i}{2}\right) \varphi e^2 e' \cos u + \frac{n'^2}{np^2} \mathrm{A}\left(1 - \frac{i}{2}\right) \varphi e^2 \frac{de'}{dt} \sin u,$$

$$\delta_1 e = -\frac{n'^2}{np} \mathrm{A}\left(2 - e^2 - \frac{ie^2}{2}\right) ee' \cos u + \frac{n'^2}{np^2} \mathrm{A}\left(2 - e^2 - \frac{ie^2}{2}\right) e \frac{de'}{dt} \sin u,$$

$$\delta_1 \varpi = -\frac{n'^2}{np} \mathrm{A}(2 - e^2) e' \sin u - \frac{n'^2}{np^2} \mathrm{A}(2 - e^2) \frac{de'}{dt} \cos u.$$

L'accroissement du second ordre de $\frac{dn}{dt}$ est donné par l'équation

$$\frac{d\delta_2 n}{dt} = -3in'^2 \mathrm{A} e^2 e' \cos u \delta_1 l + 6in'^2 \mathrm{A} e^2 e' \cos u \delta_1 \varpi - 6in'^2 \mathrm{A} ee' \sin u \delta_1 e.$$

La partie qui est multipliée par $\delta_1 l$ peut être négligée. Les deux autres termes nous donnent

$$\delta_2 n = -\frac{3in'^4}{np^2} \times 2\mathrm{A}^2 e^2 e'^2.$$

On aura de même

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = \delta_2 n - \frac{3n'^2}{n^2} \mathrm{A} e^2 e' \cos u \delta_1 n + \frac{6n'^2}{n} \mathrm{A} e^2 e' \sin u \delta_1 \varpi + \frac{6n'^2}{n} \mathrm{A} ee' \cos u \delta_1 e.$$

On peut négliger le terme en $\delta_1 n$. Les trois autres donnent, en se bornant à la partie non périodique,

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = -\frac{6in'^4}{np^2} \mathrm{A}^2 e^2 e'^2 - \frac{12n'^4}{n^2 p} \mathrm{A}^2 e^2 e'^2.$$

22. Le résultat relatif aux quatre termes qui figurent dans la fonction perturbatrice avec les numéros (27), (28), (29), (30) s'obtient par une analyse toute semblable. Les éléments e et ϖ seront remplacés par φ et θ. Si l'on adopte, pour l'expression analytique de ces quatre termes,

$$\mathrm{R} = n'^2 a^2 \varphi^2 \mathrm{A} e' \cos(il - 2\theta + \alpha),$$

on sera conduit, par un calcul entièrement analogue à celui qui vient d'être développé, à la formule

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = -\frac{6in'^4}{np^2} \mathrm{A}^2 \varphi^2 e'^2 - \frac{12n'^4}{n^2 p} \mathrm{A}^2 \varphi^2 e'^2.$$

23. Les quatre derniers termes que nous avons inscrits dans la fonction perturbatrice sous les numéros (31), (32), (33), (34) sont de la forme

$$R = n'^2 a^2 \frac{a}{a'} A e' \cos(il + \alpha).$$

Un calcul entièrement semblable à celui qui a été fait au n° **20** montre que les portions fournies par ces termes dans $\frac{d\delta_2 l}{dt}$ contiendraient en facteur le carré de la fraction $\frac{a}{a'}$. Les termes ainsi introduits dans la longitude moyenne seraient d'un ordre supérieur de deux unités à ceux que nous avons considérés jusqu'ici. On devra donc les négliger absolument dans le résultat.

24. Si l'on se reporte au développement de la fonction perturbatrice tel qu'il est donné dans l'Ouvrage de M. Delaunay, on y trouvera des termes du même ordre que les parties en e^3 et en $e\varphi^2$ que nous avons conservées dans plusieurs termes de notre développement, par exemple dans le terme d'argument $l - \varpi$.

Ces termes rentreraient dans l'une des formes suivantes :

$$R = n'^2 a^2 e^3 A e' \cos(il - 3\varpi + \alpha),$$

$$R = n'^2 a^2 e\varphi^2 A e' \cos(il - \varpi \pm 2\theta + \alpha).$$

Si l'on adopte, par exemple, la première forme, on s'assurera, par un calcul tout semblable à celui qui a été développé au n° **21**, que la partie provenant de ce terme dans $\frac{d\delta_2 l}{dt}$ contiendrait partout e^4 en facteur. Elle ne modifie donc en rien le résultat obtenu, au degré d'approximation dont nous nous sommes contentés.

On s'assurerait de même que tous les autres termes de la fonction perturbatrice n'influeraient en rien sur le résultat obtenu.

Troisième approximation.

25. Les calculs précédents nous ont fait connaître, dans la partie de la longitude moyenne qui est proportionnelle au carré du temps, les

termes qui, avec e^2 ou φ^2, contiennent en facteur la troisième puissance du rapport $\frac{n'}{n}$. Il est indispensable, pour compléter cette recherche, de trouver les termes qui, ne contenant ni e^2 ni φ^2, sont multipliés par la cinquième puissance du rapport $\frac{n'}{n}$. Ces termes constituent la partie principale de la troisième approximation fournie par une application nouvelle de la méthode de Poisson.

Auparavant, il convient de reprendre le calcul de la portion de $\frac{d\varepsilon}{dt}$, qui s'obtient en limitant la fonction perturbatrice à son terme non périodique. Nous adopterons pour ce terme l'expression donnée par M. Delaunay dans sa *Théorie de la Lune* (Chap. II). Il suffit, pour notre objet, de transcrire la partie qui contient en facteur e'^2. La lettre γ^2, qui dans l'Ouvrage de M. Delaunay désigne $\sin^2\frac{\varphi}{2}$, sera remplacée par $\frac{\varphi^2}{4}-\frac{\varphi^4}{48}$, la lettre γ^4 par $\frac{\varphi^4}{16}$. Cette substitution est évidemment permise quand on limite l'approximation, dans la parenthèse, aux termes du quatrième ordre.

On trouve ainsi

$$\mathrm{R}=n'^2a^2e'^2\left(-\frac{3}{8}+\frac{9}{16}\varphi^2-\frac{9}{16}e^2-\frac{3}{16}\varphi^4+\frac{27}{32}e^2\varphi^2-\frac{45}{64}\frac{a^2}{a'^2}\right).$$

L'application des formules du n° 6 donne alors, par un calcul facile,

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{n'^2}{n}e'^2\left(-\frac{3}{2}+\frac{27}{16}\varphi^2-\frac{27}{16}e^2-\frac{27}{64}\varphi^4+\frac{45}{32}e^2\varphi^2-\frac{9}{64}e^4-\frac{45}{8}\frac{a^2}{a'^2}\right).$$

On trouvera plus loin les données et les explications nécessaires pour la réduction de cette formule en nombres.

26. Dans la recherche des termes contenant en facteur la cinquième puissance de $\frac{n'}{n}$, il sera permis de supposer nulles l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite lunaire; si l'on a seulement en vue de trouver le coefficient de e'^2, on pourra aussi négliger tous les termes où e' figure à des puissances supérieures à la seconde.

Ces restrictions posées, la fonction perturbatrice se réduit à sept termes, dont voici la liste :

$$\begin{aligned}
R = {} & n'^2 a^2 \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{8} e'^2\right) \\
& + n'^2 a^2 \left(-\frac{3}{4} + \frac{15}{8} e'^2\right) \cos(2l - 2l') \\
& + n'^2 a^2 \left(-\frac{3}{4} e'\right) \cos(l' - \varpi') \\
& + n'^2 a^2 \left(+\frac{3}{8} e'\right) \cos(2l - l' - \varpi') \\
& + n'^2 a^2 \left(-\frac{21}{8} e'\right) \cos(2l - 3l' + \varpi') \\
& + n'^2 a^2 \left(-\frac{9}{8} e'^2\right) \cos(2l' - 2\varpi') \\
& + n'^2 a^2 \left(-\frac{51}{8} e'^2\right) \cos(2l - 4l' + 2\varpi').
\end{aligned}$$

Comme nous aurons à effectuer sur cette formule trois calculs d'approximations successives, des parties non périodiques pourront s'introduire par la combinaison de trois arguments. Il ne sera donc plus permis de considérer isolément chaque terme de la fonction perturbatrice, et l'on devra, dans les formules du n° 6, substituer les dérivées partielles de l'expression R complète, telle que nous venons de l'écrire.

De ces dérivées partielles, deux seulement ne sont pas nulles; ce sont

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial a} = n'^2 a \Big[& -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} e'^2 + \left(-\frac{3}{2} + \frac{15}{4} e'^2\right) \cos(2l - 2l') \\
& - \frac{3}{2} e' \cos(l' - \varpi') + \frac{3}{4} e' \cos(2l - l' - \varpi') - \frac{21}{4} e' \cos(2l - 3l' + \varpi') \\
& - \frac{9}{4} e'^2 \cos(2l' - 2\varpi') - \frac{51}{4} e'^2 \cos(2l - 4l' + 2\varpi') \Big]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial l} = n'^2 a^2 \Big[& \left(\frac{3}{2} - \frac{15}{4} e'^2\right) \sin(2l - 2l') \\
& - \frac{3}{4} e' \sin(2l - l' - \varpi') + \frac{21}{4} e' \sin(2l - 3l' + \varpi') \\
& + \frac{51}{4} e'^2 \sin(2l - 4l' + 2\varpi') \Big].
\end{aligned}$$

On en déduit, par l'application des formules du n° 6,

$$\begin{aligned}\frac{dn}{dt} = 3n'^2\Big[&\left(\frac{3}{2} - \frac{15}{4}e'^2\right)\sin(2l - 2l') \\ &- \frac{3}{4}e'\sin(2l - l' - \varpi') + \frac{21}{4}e'\sin(2l - 3l' + \varpi') \\ &+ \frac{51}{4}e'^2\sin(2l - 4l' + 2\varpi')\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dl}{dt} = n + \frac{n'^2}{n}\Big[&-1 - \frac{3}{2}e'^2 + \left(-3 + \frac{15}{2}e'^2\right)\cos(2l - 2l') \\ &- 3e'\cos(l' - \varpi') + \frac{3}{2}e'\cos(2l - l' - \varpi') \\ &- \frac{21}{2}e'\cos(2l - 3l' + \varpi') - \frac{9}{2}e'^2\cos(2l' - 2\varpi') \\ &- \frac{51}{2}e'^2\cos(2l - 4l' + 2\varpi')\Big].\end{aligned}$$

L'intégration de ces formules introduira en diviseur le coefficient du temps dans les différents arguments de la fonction perturbatrice. Au degré d'approximation que nous voulons atteindre, il n'est plus permis de confondre n, qui est le moyen mouvement de la Lune dans son orbite elliptique, avec le coefficient du temps dans la longitude moyenne, tel qu'il est donné par les observations. Provisoirement, nous désignerons ce coefficient par N, et nous en emprunterons la valeur numérique aux Tables de M. Hansen.

n' continuera à représenter le coefficient du temps dans l', longitude moyenne du Soleil. Le coefficient du temps dans ϖ' pourra être absolument négligé en comparaison de N et de n'.

27. Les accroissements du premier ordre, tels qu'ils résultent de l'intégration des formules précédentes, seront

$$\begin{aligned}\delta_1 n = 3n'^2\Big[&-\frac{1}{N - n'}\left(\frac{3}{4} - \frac{15}{8}e'^2\right)\cos(2l - 2l') - \frac{1}{(N - n')^2}\,\frac{15}{16}\,\frac{d.e'^2}{dt}\sin(2l - 2l') \\ &+ \frac{1}{2N - n'}\,\frac{3}{4}\,e'\cos(2l - l' - \varpi') - \frac{1}{(2N - n')^2}\,\frac{3}{4}\,\frac{de'}{dt}\sin(2l - l' - \varpi') \\ &- \frac{1}{2N - 3n'}\,\frac{21}{4}\,e'\cos(2l - 3l' + \varpi') + \frac{1}{(2N - 3n')^2}\,\frac{21}{4}\,\frac{de'}{dt}\sin(2l - 3l' + \varpi')\Big].\end{aligned}$$

La suite du calcul montrera qu'il est inutile de conserver les termes d'arguments $2l - 4l' + 2\varpi'$ et $2l' - 2\varpi'$. Les parties non périodiques que ces termes pourraient introduire dans l'expression définitive seraient multipliées par des puissances de e' supérieures à la seconde.

En intégrant la formule

$$\frac{d\delta_1 l}{dt} = \delta_1 n + \frac{n'^2}{n}\Big[-1 - \frac{3}{2}e'^2 + \left(-3 + \frac{15}{2}e'^2\right)\cos(2l - 2l') - 3e'\cos(l' - \varpi') + \frac{3}{2}e'\cos(2l - l' - \varpi') - \frac{21}{2}e'\cos(2l - 3l' + \varpi')\Big],$$

on trouvera

$$\begin{aligned}\delta_1 l = 3n'^2\Big[&-\frac{1}{(N-n')^2}\left(\frac{3}{8} - \frac{15}{16}e'^2\right)\sin(2l - 2l') + \frac{1}{(N-n')^3}\frac{15}{16}\frac{d.e'^2}{dt}\cos(2l - 2l')\\ &+\frac{1}{(2N-n')^2}\frac{3}{4}e'\sin(2l - l' - \varpi') + \frac{1}{(2N-n')^3}\frac{3}{2}\frac{de'}{dt}\cos(2l - l' - \varpi')\\ &-\frac{1}{(2N-3n')^2}\frac{21}{4}e'\sin(2l - 3l' + \varpi') - \frac{1}{(2N-3n')^3}\frac{21}{2}\frac{de'}{dt}\cos(2l - 3l' + \varpi')\Big]\\ +\frac{n'^2}{n}\Big[&-\frac{3}{2}\int e'^2 dt - \frac{1}{N-n'}\left(\frac{3}{2} - \frac{15}{4}e'^2\right)\sin(2l - 2l') + \frac{1}{(N-n')^2}\frac{15}{8}\frac{d.e'^2}{dt}\cos(2l - 2l')\\ &-\frac{3}{n'}e'\sin(l' - \varpi') - \frac{1}{n'^2}3\frac{de'}{dt}\cos(l' - \varpi')\\ &+\frac{1}{2N-n'}\frac{3}{2}e'\sin(2l - l' - \varpi') + \frac{1}{(2N-n')^2}\frac{3}{2}\frac{de'}{dt}\cos(2l - l' - \varpi')\\ &-\frac{1}{2N-3n'}\frac{21}{2}e'\sin(2l - 3l' + \varpi') - \frac{1}{(2N-3n')^2}\frac{21}{2}\frac{de'}{dt}\cos(2l - 3l' + \varpi')\Big].\end{aligned}$$

28. Cherchons maintenant les accroissements du second ordre. Pour obtenir $\frac{d\delta_2 n}{dt}$ il faudra, dans l'expression de $\frac{dn}{dt}$, donner à l l'accroissement $\delta_1 l$. On trouve

$$\frac{d\delta_2 n}{dt} = 3n'^2\Big[\left(3 - \frac{15}{2}e'^2\right)\cos(2l - 2l') - \frac{3}{2}e'\cos(2l - l' - \varpi') + \frac{21}{2}e'\cos(2l - 3l' + \varpi')\Big]\delta_1 l.$$

Remplaçons $\delta_1 l$ par sa valeur, en négligeant les puissances de e' supérieures à la seconde. On trouve

$$
\begin{aligned}
\frac{d\delta_2 n}{dt} = 3n'^4 \Bigg[& \frac{1}{(N-n')^3}\frac{135}{32} + \frac{1}{n(N-n')^2}\frac{45}{16} \\
& - \frac{1}{(2N-n')^3}\frac{27}{16} - \frac{1}{n(2N-n')^2}\frac{9}{16} \\
& - \frac{1}{(2N-3n')^3}\frac{1323}{16} - \frac{1}{n(2N-3n')^2}\frac{441}{16}\Bigg]\frac{d.e'^2}{dt} \\
& - 54\frac{n'^3}{n}e'^2\sin(2l-2l') - \frac{81}{4}\frac{n'^2}{n}\frac{d.e'^2}{dt}\cos(2l-2l') \\
& - \frac{27}{2}\frac{n'^3}{n}e'\sin(2l-l'-\varpi') - \frac{27}{2}\frac{n'^2}{n}\frac{de'}{dt}\cos(2l-l'-\varpi') \\
& + \frac{27}{2}\frac{n'^3}{n}e'\sin(2l-3l'+\varpi') - \frac{27}{2}\frac{n'^2}{n}\frac{de'}{dt}\cos(2l-3l'+\varpi') \\
& + \Bigg[\frac{81}{8}\frac{n'^4}{(2N-n')^2} + \frac{567}{8}\frac{n'^4}{(2N-3n')^2} + \frac{27}{4}\frac{n'^4}{n(2N-n')} \\
& \quad - \frac{81}{32}\frac{n'^4}{(N-n')^2} - \frac{27}{8}\frac{n'^4}{n(N-n')} - \frac{567}{32}\frac{n'^4}{(N-n')^2} \\
& \quad - \frac{189}{8}\frac{n'^4}{n(N-n')} + \frac{189}{4}\frac{n'^4}{n(2N-3n')}\Bigg]e'\sin(l'-\varpi') \\
& + \Bigg[\frac{81}{4}\frac{n'^4}{(2N-n')^3} + \frac{27}{4}\frac{n'^4}{n(2N-n')^2} \\
& \quad - \frac{189}{4}\frac{n'^4}{n(2N-3n')^2} - \frac{567}{4}\frac{n'^4}{(2N-3n')^3}\Bigg]\frac{de'}{dt}\cos(l'-\varpi') \\
& - \frac{27}{2}\frac{n'^4}{n}\cos(2l-2l')\int e'^2 dt.
\end{aligned}
$$

On verra facilement, par l'usage que nous aurons à faire de $\delta_2 n$, que nous avons écrit tous les termes qui pourront nous être utiles pour la formation de l'expression définitive.

29. Nous allons intégrer cette formule, en transformant toutefois le dernier terme de manière à éviter l'introduction des intégrales doubles.

Posons $P = \int e'^2 dt$. On pourra regarder $\frac{d^2P}{dt^2}$ comme une constante.

On aura donc, d'après la règle ordinaire de l'intégration par parties,

$$\int \mathrm{P}\cos(mt+\alpha)\,dt = \frac{1}{m}\mathrm{P}\sin(mt+\alpha) - \frac{1}{m}\int \frac{d\mathrm{P}}{dt}\sin(mt+\alpha)\,dt,$$

$$\int \frac{d\mathrm{P}}{dt}\sin(mt+\alpha)\,dt = -\frac{1}{m}\frac{d\mathrm{P}}{dt}\cos(mt+\alpha) + \frac{1}{m}\int \frac{d^2\mathrm{P}}{dt^2}\cos(mt+\alpha)\,dt,$$

$$\int \frac{d^2\mathrm{P}}{dt^2}\cos(mt+\alpha)\,dt = \frac{1}{m}\frac{d^2\mathrm{P}}{dt^2}\sin(mt+\alpha).$$

Ajoutons ces trois équations multipliées respectivement par 1, $-\frac{1}{m}$ et $-\frac{1}{m^2}$. Il vient

$$\int \mathrm{P}\cos(mt+\alpha)\,dt = \frac{1}{m}\mathrm{P}\sin(mt+\alpha) + \frac{1}{m^2}\frac{d\mathrm{P}}{dt}\cos(mt+\alpha) - \frac{1}{m^3}\frac{d^2\mathrm{P}}{dt^2}\sin(mt+\alpha).$$

Joignons-y la formule suivante, qui se démontre de la même manière, et dont nous aurons à faire usage un peu plus loin :

$$\int \mathrm{P}\sin(mt+\alpha)\,dt = -\frac{1}{m}\mathrm{P}\cos(mt+\alpha) + \frac{1}{m^2}\frac{d\mathrm{P}}{dt}\sin(mt+\alpha) + \frac{1}{m^3}\frac{d^2\mathrm{P}}{dt^2}\cos(mt+\alpha).$$

Intégrons la valeur précédemment trouvée pour $\frac{d\delta_2 n}{dt}$. Il viendra

$$\begin{aligned}
\delta_2 n = 3n'^4 \Big[& \frac{135}{32}\frac{1}{(\mathrm{N}-n')^3} - \frac{27}{16}\frac{1}{(2\mathrm{N}-n')^3} - \frac{1323}{16}\frac{1}{(2\mathrm{N}-3n')^3} \\
& + \frac{45}{16}\frac{1}{n(\mathrm{N}-n')^2} - \frac{9}{16}\frac{1}{n(2\mathrm{N}-n')^2} - \frac{441}{16}\frac{1}{n(2\mathrm{N}-3n')^2}\Big] e'^2 \\
& + 27\frac{n'^3}{n(\mathrm{N}-n')} e'^2\cos(2l-2l') \\
& + \left[-\frac{27}{2}\frac{n'^3}{n(\mathrm{N}-n')^2} - \frac{81}{8}\frac{n'^2}{n(\mathrm{N}-n')}\right]\frac{d.e'^2}{dt}\sin(2l-2l') \\
& + \frac{27}{2}\frac{n'^3}{n(2\mathrm{N}-n')} e'\cos(2l-l'-\varpi') \\
& - \left[\frac{27}{2}\frac{n'^3}{n(2\mathrm{N}-n')^2} + \frac{27}{2}\frac{n'^2}{n(2\mathrm{N}-n')}\right]\frac{de'}{dt}\sin(2l-l'-\varpi') \\
& - \frac{27}{2}\frac{n'^3}{n(2\mathrm{N}-3n')} e'\cos(2l-3l'+\varpi')
\end{aligned}$$

$$+\left[\frac{27}{2}\frac{n'^3}{n(2N-3n')^2}-\frac{27}{2}\frac{n'^2}{n(2N-3n')}\right]\frac{de'}{dt}\sin(2l-3l'+\varpi')$$

$$-\frac{27}{4}\frac{n'^4}{n(N-n')}\sin(2l-2l')\int e'^2dt$$

$$-\frac{27}{8}\frac{n'^4}{n(N-n')^2}e'^2\cos(2l-2l')$$

$$+\frac{27}{16}\frac{n'^4}{n(N-n')^3}\frac{d.e'^2}{dt}\sin(2l-2l')$$

$$\begin{aligned}+\Big[&-\frac{81}{8}\frac{n'^3}{(2N-n')^2}-\frac{27}{4}\frac{n'^3}{n(2N-n')}-\frac{567}{8}\frac{n'^3}{(2N-3n')^2}\\&-\frac{189}{4}\frac{n'^3}{n(2N-3n')}+\frac{81}{4}\frac{n'^3}{(N-n')^2}+27\frac{n'^3}{n(N-n')}\Big]e'\cos(l'-\varpi')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}+\Big[&\frac{81}{8}\frac{n'^2}{(2N-n')^2}+\frac{27}{4}\frac{n'^2}{n(2N-n')}+\frac{567}{8}\frac{n'^2}{(2N-3n')^2}\\&+\frac{189}{4}\frac{n'^2}{n(2N-3n')}-\frac{81}{4}\frac{n'^2}{(N-n')^2}-27\frac{n'^2}{n(N-n')}\\&+\frac{81}{4}\frac{n'^3}{(2N-n')^3}+\frac{27}{4}\frac{n'^3}{n(2N-n')^2}-\frac{567}{4}\frac{n'^3}{(2N-3n')^3}\\&-\frac{189}{4}\frac{n'^3}{n(2N-3n')^2}\Big]\frac{de'}{dt}\sin(l'-\varpi').\end{aligned}$$

30. L'expression que nous venons de trouver pour $\delta_2 n$ constitue la première partie de $\frac{d\delta_2 l}{dt}$. Pour obtenir la deuxième partie, que nous désignerons par $\frac{d\delta_2 l}{dt}(2)$, il faut, dans le second terme de $\frac{dl}{dt}$, donner à n son accroissement du premier ordre.

On trouve ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d\delta_2 l}{dt}(2)=-\frac{n'^2}{n^2}\Big[&-1-\frac{3}{2}e'^2-\left(3-\frac{15}{2}e'^2\right)\cos(2l-2l')\\&-3e'\cos(l'-\varpi')+\frac{3}{2}e'\cos(2l-l'-\varpi')\\&-\frac{21}{2}e'\cos(2l-3l'+\varpi')\Big]\delta_1 n.\end{aligned}$$

Nous avons trouvé plus haut (n° 27) l'expression de $\delta_1 n$; en effectuant la multiplication, remplaçant comme précédemment les produits de lignes trigonométriques par des sommes et négligeant les puissances de e' supérieures à la seconde, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d\delta_2 l}{dt}(2) = -\frac{3n'^4}{n^2}\Bigg\{ & \frac{9}{8}\frac{1}{N-n'} + e'^2\left(-\frac{45}{8}\frac{1}{N-n'} + \frac{9}{16}\frac{1}{2N-n'} + \frac{441}{16}\frac{1}{2N-3n'}\right)\\
& + \cos(2l-2l')\left[\frac{3}{4}\frac{1}{N-n'} + e'^2\left(-\frac{3}{4}\frac{1}{N-n'} - \frac{9}{8}\frac{1}{2N-2n'} + \frac{63}{8}\frac{1}{2N-3n'}\right)\right]\\
& + \sin(2l-2l')\left[\frac{15}{16}\frac{1}{(N-n')^2} + \frac{9}{16}\frac{1}{(2N-n')^2} - \frac{63}{16}\frac{1}{(2N-3n')^2}\right]\frac{d.e'^2}{dt}\\
& + \cos(2l-l'-\varpi')\left[-\frac{3}{4}\frac{1}{2N-n'} + \frac{9}{8}\frac{1}{N-n'}\right]e'\\
& + \sin(2l-l'-\varpi')\frac{3}{4}\frac{1}{(2N-n')^2}\frac{de'}{dt}\\
& + \cos(2l-3l'+\varpi')\left[\frac{21}{4}\frac{1}{2N-3n'} + \frac{9}{8}\frac{1}{N-n'}\right]e'\\
& - \sin(2l-3l'+\varpi')\left[\frac{1}{(2N-3n')^2}\frac{21}{4}\frac{de'}{dt}\right]\Bigg\}.\end{aligned}$$

On verra plus loin, par l'usage que nous ferons de $\delta_2 l$, que les termes écrits sont les seuls dont il soit utile de tenir compte.

31. La troisième et dernière partie de $\dfrac{d\delta_2 l}{dt}$ s'obtiendra en donnant à l, dans l'expression de $\dfrac{dl}{dt}$, son accroissement du premier ordre. On aura

$$\begin{aligned}\frac{d\delta_2 l}{dt}(3) = \frac{n'^2}{n}\Bigg[& \left(6 - \frac{15}{2}e'^2\right)\sin(2l-2l')\\
& - 3e'\sin(2l-l'-\varpi') + 21e'\sin(2l-3l'+\varpi')\Bigg]\delta_1 l.\end{aligned}$$

Nous avons écrit au n° 27 la valeur de $\delta_1 l$. Effectuons le produit et remplaçons les produits de lignes trigonométriques par des sommes.

Il viendra

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta_2 l}{dt}(3) = \frac{3n'^4}{n}\Big\{ & -\frac{9}{8}\frac{1}{(N-n')^2} + e'^2\Big[\frac{45}{8}\frac{1}{(N-n')^2} \\
& -\frac{9}{8}\frac{1}{(2N-n')^2} - \frac{441}{8}\frac{1}{(2N-3n')^2}\Big]\Big\} \\
& + \frac{n'^4}{n^2}\Big[-\frac{9}{2}\frac{1}{N-n'} + e'^2\Big(\frac{45}{2}\frac{1}{N-n'} - \frac{9}{4}\frac{1}{2N-n'} - \frac{441}{4}\frac{1}{2N-3n'}\Big)\Big] \\
& - 9\frac{n'^4}{n^2}\sin(2l-2l')\int e'^2\,dt \\
& + \frac{n'^4}{n^2}\Big[\cos(2l-2l')\Big(\frac{9}{2}\frac{1}{n'} + \frac{63}{2}\frac{1}{n'}\Big)e'^2 \\
& \quad + \sin(2l-2l')\Big(\frac{9}{4}\frac{1}{n'^2} - \frac{63}{4}\frac{1}{n'^2}\Big)\frac{d.e'^2}{dt} \\
& \quad + \cos(2l-l'-\varpi').\,9\frac{1}{n'}e' \\
& \quad - \sin(2l-l'-\varpi').\,9\frac{1}{n'^2}\frac{de'}{dt} \\
& \quad - \cos(2l-3l'+\varpi').\,9\frac{1}{n'}e' \\
& \quad - \sin(2l-3l'+\varpi').\,9\frac{1}{n'^2}\frac{de'}{dt}\Big].
\end{aligned}$$

32. Nous allons maintenant réunir les trois parties de $\frac{d\delta_2 l}{dt}$ et intégrer. On appliquera à l'intégrale $\int P\sin(2l-2l')\,dt$ la formule de réduction établie au n° 29.

D'après la manière dont nous avons procédé, les seuls arguments qui subsisteront dans $\delta_2 l$ sont ceux qui contiennent l avec le multiplicateur 2. On s'assurera plus loin, d'après la manière dont $\delta_2 l$ entre dans la composition de l'expression définitive, que ces termes sont bien les seuls dont il soit utile de tenir compte.

L'intégration des formules qui précèdent conduit au résultat suivant :

$$\begin{aligned}
\delta_2 l = & \left[\frac{405}{32}\frac{n'^4}{(N-n')^3} - \frac{81}{16}\frac{n'^4}{(2N-n')^3} - \frac{3969}{16}\frac{n'^4}{(2N-3n')^3}\right. \\
& + \frac{405}{16}\frac{n'^4}{n(N-n')^2} - \frac{81}{16}\frac{n'^4}{n(2N-n')^2} - \frac{3969}{16}\frac{n'^4}{n(2N-3n')^2} \\
& \left. + \frac{315}{8}\frac{n'^4}{n^2(N-n')} - \frac{63}{16}\frac{n'^4}{n^2(2N-n')} - \frac{3087}{16}\frac{n'^4}{n^2(2N-3n')}\right]\int e'^2 dt \\
& + \sin(2l-2l') \\
& \times \left\{ -\frac{9}{8}\frac{n'^4}{n^2(N-n')^2} + \left[\frac{27}{2}\frac{n'^3}{n(N-n')^2} - \frac{27}{16}\frac{n'^4}{n(N-n')^3}\right.\right. \\
& \qquad + \frac{9}{8}\frac{n'^4}{n^2(N-n')^2} + \frac{27}{16}\frac{n'^4}{n^2(2N-n')(N-n')} \\
& \qquad \left.\left. - \frac{189}{16}\frac{n'^4}{n^2(2N-3n')(N-n')} + 18\frac{n'^3}{n^2(N-n')}\right] e'^2 \right\} \\
& + \cos(2l-2l') \\
& \times \left[\frac{27}{4}\frac{n'^3}{n(N-n')^3} + \frac{81}{16}\frac{n'^2}{n(N-n')^2}\right. \\
& \quad + \frac{45}{32}\frac{n'^4}{n^2(N-n')^3} - \frac{27}{32}\frac{n'^4}{n(N-n')^4} + \frac{27}{32}\frac{n'^4}{n^2(N-n')(2N-n')^2} \\
& \quad - \frac{189}{32}\frac{n'^4}{n^2(2N-3n')^2(N-n')} + \frac{27}{4}\frac{n'^2}{n^2(N-n')} + \frac{27}{4}\frac{n'^3}{n(N-n')^3} \\
& \quad - \frac{27}{32}\frac{n'^4}{n(N-n')^4} + \frac{9}{16}\frac{n'^4}{n^2(N-n')^3} + \frac{27}{32}\frac{n'^4}{n^2(2N-n')(N-n')^2} \\
& \quad \left. - \frac{189}{32}\frac{n'^4}{n^2(2N-3n')(N-n')^2} + 9\frac{n'^3}{n^2(N-n')^2}\right]\frac{d.e'^2}{dt} \\
& + \sin(2l-l'-\varpi') \\
& \times \left[\frac{27}{2}\frac{n'^3}{n(2N-n')^2} + 9\frac{n'^3}{n^2(2N-n')}\right. \\
& \quad \left. + \frac{9}{4}\frac{n'^4}{n^2(2N-n')^2} - \frac{27}{8}\frac{n'^4}{n^2(N-n')(2N-n')}\right] e'
\end{aligned}$$

$$+\cos(2l-l'-\varpi')$$
$$\times\left[\frac{27}{2}\frac{n'^3}{n(2N-n')^3}+\frac{27}{2}\frac{n'^2}{n(2N-n')^2}\right.$$
$$+\frac{9}{4}\frac{n'^4}{n^2(2N-n')^3}+9\frac{n'^2}{n^2(2N-n')}+\frac{27}{2}\frac{n'^3}{n(2N-n')^3}$$
$$\left.+9\frac{n'^3}{n^2(2N-n')^2}+\frac{9}{4}\frac{n'^4}{n^2(2N-n')^3}-\frac{27}{8}\frac{n'^4}{n^2(N-n')(2N-n')^2}\right]\frac{de'}{dt}$$
$$+\sin(2l-3l'+\varpi')$$
$$\times\left[-\frac{27}{2}\frac{n'^3}{n(2N-3n')^2}-\frac{63}{4}\frac{n'^4}{n^2(2N-3n')^2}\right.$$
$$\left.-\frac{27}{8}\frac{n'^4}{n^2(N-n')(2N-3n')}-9\frac{n'^3}{n^2(2N-3n')}\right]e'$$
$$+\cos(2l-3l'+\varpi')$$
$$\times\left[-\frac{27}{2}\frac{n'^3}{n(2N-3n')^3}+\frac{27}{2}\frac{n'^2}{n(2N-3n')^2}\right.$$
$$-\frac{63}{4}\frac{n'^4}{n^2(2N-3n')^3}+9\frac{n'^2}{n^2(2N-3n')}-\frac{27}{2}\frac{n'^3}{n(2N-3n')^3}$$
$$\left.-\frac{63}{4}\frac{n'^4}{n^2(2N-3n')^3}-\frac{27}{8}\frac{n'^4}{n^2(N-n')(2N-3n')^2}-9\frac{n'^3}{n^2(2N-3n')^2}\right]\frac{de'}{dt}.$$

33. Nous sommes maintenant en mesure de déterminer les accroissements du troisième ordre. Il faudra, dans $\frac{dn}{dt}$, changer l en $l+\delta_1 l+\delta_2 l$ et supprimer du résultat les parties dont il a déjà été tenu compte dans l'approximation précédente. Si l'on remarque que $\frac{dn}{dt}$ est de la forme

$$\frac{dn}{dt}=\Sigma 3n'^2 A\sin(2l+\alpha),$$

on aura, par la formule de Taylor,

$$\frac{d\delta_3 n}{dt}=\Sigma 6n'^2 A\cos(2l+\alpha)\delta_2 l-\Sigma 6n'^2 A\sin(2l+\alpha)\delta_1 l^2.$$

On doit, dans le résultat, ne conserver que les termes non périodiques. Il suffira donc de prendre dans $\delta_2 l$ les termes de la forme

$M\cos(2l+\alpha)$. Dans $\delta_1 l^2$ on devra, pour la même raison, se borner aux termes de la forme $M\sin(2l+\alpha)$. Nous allons calculer cette partie de $\delta_1 l^2$. On trouve

$$\begin{aligned}
\delta_1 l^2 = {} & \sin(2l-2l') \\
& \times\left[-\frac{27}{8}\frac{n'^2}{n(2N-n')^2}+\frac{27}{4}\frac{n'^3}{n(2N-n')^3}\right. \\
& \quad +\frac{9}{4}\frac{n'^3}{n^2(2N-n')^2}-\frac{9}{4}\frac{n'^2}{n^2(2N-n')}+\frac{189}{4}\frac{n'^3}{n(2N-3n')^3} \\
& \quad \left.+\frac{189}{8}\frac{n'^2}{n(2N-3n')^2}+\frac{63}{4}\frac{n'^3}{n^2(2N-3n')^2}+\frac{63}{4}\frac{n'^2}{n^2(2N-3n')}\right]\frac{d.e'^2}{dt} \\
& +\sin(2l-2l')\left[\frac{27}{8}\frac{n'^4}{n(N-n')^2}+\frac{9}{2}\frac{n'^4}{n^2(N-n')}\right]\int e'^2 dt \\
& +\sin(2l-l'-\varpi')\left[\frac{27}{8}\frac{n'^2}{n(N-n')^2}+\frac{9}{2}\frac{n'^2}{n^2(N-n')}\right]\frac{de'}{dt} \\
& +\sin(2l-3l'+\varpi')\left[\frac{27}{8}\frac{n'^2}{n(N-n')^2}+\frac{9}{2}\frac{n'^2}{n^2(N-n')}\right]\frac{de'}{dt}.
\end{aligned}$$

34. Si l'on se reporte à l'expression de $\frac{dn}{dt}$, on verra facilement quels sont les multiplicateurs qu'il faut associer, dans $\delta_2 l$ et dans $\delta_1 l^2$, à chacun des arguments de la forme $2l+\alpha$ pour obtenir la partie non périodique de $\frac{d\delta_3 n}{dt}$. On trouve, en intégrant,

$$\begin{aligned}
\delta_3 n = \int\!\!\int e'^2 dt & \left[\frac{243}{16}\frac{n'^6}{n(N-n')^2}+\frac{81}{4}\frac{n'^6}{n^2(N-n')}\right. \\
& \quad \left.-\frac{243}{16}\frac{n'^6}{n(N-n')^2}-\frac{81}{4}\frac{n'^6}{n^2(N-n')}\right] \\
+ e'^2 & \left[-\frac{243}{64}\frac{n'^6}{n(N-n')^4}-\frac{81}{16}\frac{n'^6}{n^2(N-n')^3}+\frac{243}{8}\frac{n'^5}{n(N-n')^3}\right. \\
& \quad +\frac{729}{32}\frac{n'^4}{n(N-n')^2}+\frac{405}{64}\frac{n'^6}{n^2(N-n')^3}-\frac{243}{64}\frac{n'^6}{n(N-n')^4} \\
& \quad +\frac{243}{64}\frac{n'^6}{n^2(N-n')(2N-n')^2}-\frac{1701}{64}\frac{n'^6}{n^2(2N-3n')^2(N-n')}+\frac{243}{8}\frac{n'^4}{n^2(N-n')} \\
& \quad +\frac{243}{8}\frac{n'^5}{n(N-n')^3}-\frac{243}{64}\frac{n'^6}{n(N-n')^4}+\frac{81}{32}\frac{n'^6}{n^2(N-n')^3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{243}{64}\frac{n'^6}{n^2(2N-n')(N-n')^2}-\frac{1701}{64}\frac{n'^6}{n^2(2N-3n')(N-n')^2}+\frac{81}{2}\frac{n'^5}{n^2(N-n')^2}\\
&-\frac{243}{16}\frac{n'^5}{n(2N-n')^3}-\frac{243}{16}\frac{n'^4}{n(2N-n')^2}-\frac{81}{32}\frac{n'^6}{n^2(2N-n')^3}\\
&-\frac{81}{8}\frac{n'^4}{n^2(2N-n')}-\frac{243}{16}\frac{n'^5}{n(2N-n')^3}-\frac{81}{8}\frac{n'^5}{n^2(2N-n')^2}\\
&-\frac{81}{32}\frac{n'^6}{n^2(2N-n')^3}+\frac{243}{64}\frac{n'^6}{n^2(N-n')(2N-n')^2}-\frac{1701}{16}\frac{n'^5}{n(2N-3n')^3}\\
&+\frac{1701}{16}\frac{n'^4}{n(2N-3n')^2}-\frac{3969}{32}\frac{n'^6}{n^2(2N-3n')^3}+\frac{567}{8}\frac{n'^4}{n^2(2N-3n')}\\
&-\frac{1701}{16}\frac{n'^5}{n(2N-3n')^3}-\frac{3969}{32}\frac{n'^6}{n^2(2N-3n')^3}-\frac{1701}{64}\frac{n'^6}{n^2(N-n')(2N-3n')^2}\\
&-\frac{567}{8}\frac{n'^5}{n^2(2N-3n')^2}+\frac{243}{16}\frac{n'^4}{n(2N-n')^2}-\frac{243}{8}\frac{n'^5}{n(2N-n')^3}\\
&-\frac{81}{8}\frac{n'^5}{n^2(2N-n')^2}+\frac{81}{8}\frac{n'^4}{n^2(2N-n')}-\frac{1701}{8}\frac{n'^5}{n(2N-3n')^3}\\
&-\frac{1701}{16}\frac{n'^4}{n(2N-3n')^2}-\frac{567}{8}\frac{n'^5}{n^2(2N-3n')^2}-\frac{567}{8}\frac{n'^4}{n^2(2N-3n')}\\
&\left.+\frac{243}{64}\frac{n'^4}{n(N-n')^2}+\frac{81}{16}\frac{n'^4}{n^2(N-n')}-\frac{1701}{64}\frac{n'^4}{n(N-n')^2}-\frac{567}{16}\frac{n'^4}{n^2(N-n')}\right].
\end{aligned}
$$

35. Nous pouvons dès maintenant justifier, en ce qui concerne $\delta_3 n$, la suppression des termes d'argument $2l'-2\varpi'$ ou $2l-4l'+2\varpi'$ dans la fonction perturbatrice.

Prenons par exemple, dans la fonction perturbatrice, le terme d'argument $2l'-2\varpi'$. Il contient en facteur e'^2; il en sera de même dans $\delta_1 l$, où le terme d'argument $2l'-2\varpi'$ sera multiplié par e'^2 ou par $\frac{d.e'^2}{dt}$.

Examinons maintenant comment ce terme intervient dans la formation de $\frac{d\delta_2 n}{dt}$. La première formule du n° 28 montre que, pour éviter l'introduction de puissances de e' supérieures à la seconde, il faudra associer l'argument $2l'-2\varpi'$, dans $\delta_1 l$, avec l'argument $2l-2l'$ seul. On obtiendra ainsi des termes d'argument $2l-2\varpi'$ ou $2l-4l'+2\varpi'$, contenant en facteur soit e'^2, soit $\frac{d.e'^2}{dt}$. L'introduction du terme d'argument $2l' - 2\varpi'$ amènerait exactement le même résultat dans les deux autres parties de $\delta_2 l$.

Pour la même raison, le terme d'argument $2l' - 2\varpi'$ ne pourra être combiné dans $\delta_1 l^2$, qu'avec le terme d'argument $2l - 2l'$. On aura ainsi des termes d'argument $2l - 2\varpi'$ ou $2l - 4l' + 2\varpi'$, contenant en facteur soit e'^2, soit $\frac{d.e'^2}{dt}$.

Reportons-nous maintenant à l'expression analytique de $\frac{d\delta_3 n}{dt}$, donnée au début du n° 33. Il est clair que l'argument $2l - 2\varpi'$, ne se trouvant pas dans $\frac{dn}{dt}$, ne saurait fournir dans $\delta_3 n$ une partie non périodique. L'argument $2l - 4l' + 2\varpi'$ ne donnera une partie non périodique dans $\delta_3 n$ qu'à la condition d'être combiné avec lui-même; mais il entre avec le facteur e'^2 dans $\frac{dn}{dt}$. Le résultat serait donc multiplié soit par e'^4, soit par $e'^2 \frac{d.e'^2}{dt}$, et devra, par conséquent, être entièrement rejeté.

Un raisonnement tout semblable montre que l'on peut, sans altérer la valeur de $\delta_3 n$, se dispenser d'inscrire l'argument $2l - 4l' + 2\varpi'$ dans la fonction perturbatrice.

36. La valeur de $\delta_3 n$, que nous venons d'obtenir, constitue la première partie de $\frac{d\delta_3 l}{dt}$. Les autres parties s'obtiendront par l'application de la formule de Taylor, étendue aux fonctions de plusieurs variables. Posons

$$\frac{dl}{dt} = n + \frac{n'^2}{n}[A + \Sigma B \cos(2l + \alpha)],$$

A comprenant les termes dont l'argument ne contient pas l. Pour obtenir $\frac{d\delta_3 l}{dt}$, il faut, dans le terme principal, changer n en $n + \delta_1 n + \delta_2 n + \delta_3 n$, et, dans le terme perturbateur, changer n en $n + \delta_1 n + \delta_2 n$, l en $l + \delta_1 l + \delta_2 l$, s'arrêter dans le développement aux secondes dimensions des accroissements, et supprimer les parties dont il a déjà été tenu compte dans le calcul de $\delta_1 l$ et de $\delta_2 l$. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d\delta_3 l}{dt} = \delta_3 n - \frac{n'^2}{n^2}[A + \Sigma B\cos(2l+\alpha)]\delta_2 n \\ - \frac{2n'^2}{n}\Sigma B\sin(2l+\alpha)\delta_2 l \\ - \frac{2n'^2}{n}\Sigma B\cos(2l+\alpha)\delta_1 l^2 \\ + \frac{2n'^2}{n^2}\Sigma B\sin(2l+\alpha)\delta_1 n\,\delta_1 l \\ + \frac{n'^2}{n^3}[A + \Sigma B\cos(2l+\alpha)]\delta_1 n^2.\end{aligned}$$

On devra effectuer les multiplications indiquées de manière à ne conserver que les parties non périodiques. Les accroissements $\delta_3 n$, $\delta_2 n$, $\delta_2 l$ ont déjà été calculés d'une manière suffisamment complète pour l'objet que nous avons en vue. Nous allons chercher dans $\delta_1 l^2$ les termes de la forme $M\cos(2l+\alpha)$, les seuls qui puissent nous donner dans le résultat une partie non périodique.

En se reportant à la valeur de $\delta_1 l$ donnée au nº **27**, on trouve aisément

$$\begin{aligned}\delta_1 l^2 = \cos(2l-2l')\Big[-\frac{n'^3}{n(2N-n')^2}\frac{27}{4} - \frac{n'^3}{n^2(2N-n')}\frac{9}{2} \\ - \frac{n'^3}{n(2N-3n')^2}\frac{189}{4} - \frac{n'^3}{n^2(2N-3n')}\frac{63}{2}\Big]e'^2 \\ + \cos(2l-l'-\varpi')\Big[-\frac{n'^3}{n(N-n')^2}\frac{27}{8} - \frac{n'^3}{n^2(N-n')}\frac{9}{2}\Big]e' \\ + \cos(2l-3l'+\varpi')\Big[\frac{n'^3}{n(N-n')^2}\frac{27}{8} + \frac{n'^3}{n^2(N-n')}\frac{9}{2}\Big]e'.\end{aligned}$$

On voit aisément, à l'inspection de la valeur de $\frac{dl}{dt}$, quels sont les multiplicateurs qu'il convient d'affecter à chacun des arguments de la formule précédente pour obtenir dans le résultat la partie non périodique.

Pour la même raison, il suffira, dans le produit $\delta_1 n\,\delta_1 l$, de former les termes dont les arguments sont de la forme $2l+\alpha$; il sera même inutile de considérer les cosinus de ces angles. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}\delta_1 n\,\delta_1 l = &\sin(2l-2l')\left[\frac{n'^3}{n(2N-n')}\frac{27}{8}+\frac{n'^3}{n(2N-3n')}\frac{189}{8}\right]e'^2\\ &+\sin(2l-l'-\varpi')\frac{27}{8}\frac{n'^3}{n(N-n')}e'\\ &+\sin(2l-3l'+\varpi')\left[-\frac{n'^3}{n(N-n')}\frac{27}{8}\right]e'.\end{aligned}$$

Enfin, dans $\delta_1 n^2$, il suffira de calculer la partie non périodique et le terme en $\cos(l'-\varpi')$. L'inspection de la valeur de $\delta_1 n$, donnée au n° **27**, montre en effet que $\delta_1 n^2$ ne peut contenir aucun terme dont l'argument soit de la forme $2l+\alpha$. On prendra donc

$$\begin{aligned}\delta_1 n^2 = &\frac{n'^4}{(N-n')^2}\left(\frac{81}{32}-\frac{405}{32}e'^2\right)+\frac{81}{32}\frac{n'^4}{(2N-n')^2}e'^2+\frac{3969}{32}\frac{n'^4}{(2N-3n')^2}e'^2\\ &+\cos(l'-\varpi')\left[-\frac{81}{16}\frac{n'^4}{(N-n')(2N-n')}+\frac{567}{16}\frac{n'^4}{(N-n')(2N-3n')}\right]e'.\end{aligned}$$

L'expression de $\frac{dl}{dt}$ montre quels sont les multiplicateurs qui doivent être associés à chaque argument dans $\delta_1 n\,\delta_1 l$ et dans $\delta_1 n^2$, pour donner, dans $\frac{d\delta_3 l}{dt}$, les parties non périodiques qui doivent composer le résultat.

37. Si l'on effectue les multiplications indiquées, il vient, après quelques réductions faciles :

1° Pour la partie de $\frac{d\delta_3 l}{dt}$ qui provient de $\delta_2 n$,

$$\begin{aligned}e'^2\Bigg[&\frac{405}{32}\frac{n'^6}{n^2(N-n')^3}-\frac{81}{16}\frac{n'^6}{n^2(2N-n')^3}-\frac{3969}{16}\frac{n'^6}{n^2(2N-3n')^3}\\ &+\frac{135}{16}\frac{n'^6}{n^3(N-n')^2}-\frac{27}{16}\frac{n'^6}{n^3(2N-n')^2}-\frac{1323}{16}\frac{n'^6}{n^3(2N-3n')^2}\\ &+\frac{81}{2}\frac{n'^5}{n^3(N-n')}-\frac{81}{16}\frac{n'^6}{n^3(N-n')^2}\\ &-\frac{81}{8}\frac{n'^5}{n^3(2N-n')}-\frac{567}{8}\frac{n'^5}{n^3(2N-3n')}\end{aligned}$$

$$- \frac{243}{16} \frac{n'^5}{n^2(2N - n')^2} - \frac{81}{8} \frac{n'^5}{n^3(2N - n')} - \frac{1701}{16} \frac{n'^5}{n^2(2N - 3n')^2}$$
$$- \frac{567}{8} \frac{n'^5}{n^3(2N - 3n')} + \frac{243}{8} \frac{n'^5}{n^2(N - n')^2} + \frac{81}{2} \frac{n'^5}{n^3(N - n')} \Bigg];$$

2° Pour la partie de $\frac{d\delta_3 l}{dt}$ qui provient de $\delta_2 l$,

$$e'^2 \Bigg[- \frac{81}{16} \frac{n'^6}{n^2(N - n')^3} - \frac{27}{4} \frac{n'^6}{n^3(N - n')^2} + \frac{81}{2} \frac{n'^5}{n^2(N - n')^2}$$
$$+ 54 \frac{n'^5}{n^3(N - n')} + \frac{27}{8} \frac{n'^6}{n^3(N - n')^2} - \frac{81}{16} \frac{n'^6}{n^2(N - n')^3}$$
$$+ \frac{81}{16} \frac{n'^6}{n^3(N - n')(2N - n')} - \frac{567}{16} \frac{n'^6}{n^3(2N - 3n')(N - n'}$$
$$- \frac{81}{4} \frac{n'^5}{n^2(2N - n')^2} - \frac{27}{2} \frac{n'^5}{n^3(2N - n')} - \frac{27}{8} \frac{n'^6}{n^3(2N - n')^2}$$
$$+ \frac{81}{16} \frac{n'^6}{n^3(N - n')(2N - n')} - \frac{567}{4} \frac{n'^5}{n^2(2N - 3n')^2} - \frac{1323}{8} \frac{n'^6}{n^3(2N - 3n')^2}$$
$$- \frac{567}{16} \frac{n'^6}{n^3(N - n')(2N - 3n')} - \frac{189}{2} \frac{n'^5}{n^3(2N - 3n')} \Bigg];$$

3° Pour la partie de $\frac{d\delta_3 l}{dt}$ qui provient de $\delta_1 l^2$,

$$e'^2 \Bigg[- \frac{81}{4} \frac{n'^5}{n^2(2N - n')^2} - \frac{27}{2} \frac{n'^5}{n^3(2N - n')} - \frac{567}{4} \frac{n'^5}{n^2(2N - 3n')^2}$$
$$- \frac{189}{2} \frac{n'^5}{n^3(2N - 3n')} + \frac{81}{16} \frac{n'^5}{n^2(N - n')^2} + \frac{27}{4} \frac{n'^5}{n^3(N - n')}$$
$$+ \frac{567}{16} \frac{n'^5}{n^2(N - n')^2} + \frac{189}{4} \frac{n'^5}{n^3(N - n')} \Bigg];$$

4° Pour la partie de $\frac{d\delta_3 l}{dt}$ qui est relative au produit $\delta_1 n \delta_1 l$,

$$e'^2 \Bigg[- \frac{81}{8} \frac{n'^5}{n^3(2N - n')} - \frac{567}{8} \frac{n'^5}{n^3(2N - 3n')}$$
$$+ \frac{81}{16} \frac{n'^5}{n^3(N - n')} + \frac{567}{16} \frac{n'^5}{n^3(N - n')} \Bigg];$$

5° Pour la partie de $\frac{d\delta_3 l}{dt}$ qui est due à $\delta_1 n^2$,

$$e'^2\left[\frac{567}{64}\frac{n'^6}{n^3(N-n')^2}-\frac{81}{32}\frac{n'^6}{n^3(2N-n')^2}-\frac{3969}{32}\frac{n'^6}{n^3(2N-3n')^2}\right.$$
$$\left.+\frac{243}{32}\frac{n'^6}{n^3(N-n')(2N-n')}-\frac{1701}{32}\frac{n'^6}{n^3(N-n')(2N-3n')}\right].$$

38. Aux cinq développements ainsi calculés joignons celui de $\delta_3 n$, et réduisons ensemble les termes qui ne diffèrent que par le coefficient numérique. On trouvera, comme résultat définitif de la troisième approximation,

$$\frac{d\delta_3 l}{dt}=e'^2\left[\frac{n'^5}{n(N-n')^3}\frac{243}{4}+\frac{n'^5}{n^2(N-n')^2}\frac{1215}{8}\right.$$
$$+\frac{n'^5}{n^3(N-n')}\frac{459}{2}-\frac{n'^5}{n(2N-n')^3}\frac{243}{4}-\frac{n'^5}{n^2(2N-n')^2}\frac{1215}{16}$$
$$-\frac{n'^5}{n^3(2N-n')}\frac{459}{8}-\frac{n'^5}{n(2N-3n')^3}\frac{1701}{4}-\frac{n'^5}{n^2(2N-3n')^2}\frac{8505}{16}$$
$$-\frac{n'^5}{n^3(2N-3n')}\frac{3213}{8}=\frac{n'^6}{n(N-n')^4}\frac{729}{64}+\frac{n'^6}{n^2(N-n')^3}\frac{405}{64}$$
$$+\frac{n'^6}{n^3(N-n')^2}\frac{1107}{64}-\frac{n'^6}{n^2(2N-n')^3}\frac{81}{8}-\frac{n'^6}{n^3(2N-n')^2}\frac{243}{32}$$
$$-\frac{n'^6}{n^2(2N-3n')^3}\frac{3969}{8}-\frac{n'^6}{n^3(2N-3n')^2}\frac{11907}{32}$$
$$+\frac{n'^6}{n^2(N-n')(2N-n')^2}\frac{243}{32}-\frac{n'^6}{n^2(N-n')(2N-3n')^2}\frac{1701}{32}$$
$$+\frac{n'^6}{n^2(2N-n')(N-n')^2}\frac{243}{64}-\frac{n'^6}{n^2(2N-3n')(N-n')^2}\frac{1701}{64}$$
$$\left.+\frac{n'^6}{n^3(N-n')(2N-n')}\frac{567}{32}-\frac{n'^6}{n^3(N-n')(2N-3n')}\frac{3969}{32}\right].$$

39. Cette valeur de $\frac{d\delta_3 l}{dt}$ donne lieu à plusieurs remarques importantes.

Les termes de $\delta_3 n$ où figurait l'intégrale double $\int\int e'^2\,dt$ se sont détruits rigoureusement. On sait que M. Adams a signalé, dans la discordance des valeurs numériques attribuées par différents astronomes à cette intégrale, une cause qui rend ses propres résultats peu comparables à ceux qui ont été obtenus par MM. Hansen et Plana pour l'équation séculaire de la Lune.

L'incertitude provenant de l'intégrale $\int e'^2 dt$ ne saurait d'ailleurs être entièrement évitée, puisqu'elle entre en facteur dans l'expression de la longitude moyenne, après que l'on a écarté la partie proportionnelle au temps. Il est aisé de se faire une idée de l'influence qu'elle peut exercer sur le résultat total. M. Hansen paraît avoir employé pour l'intégrale $\int (e'^2 - e_0'^2) n dt$ la valeur $-1212'',5 t^2$. M. Plana l'a supposée égale à $-1264'' t^2$, et plus tard à $-1297'',7 t^2$. M. Adams adopte le nombre $-1270'' t^2$. Enfin, par l'emploi de la valeur donnée par Le Verrier pour la variation de l'excentricité de l'orbite terrestre, on est conduit à attribuer à cette intégrale la valeur $-1240'',6 t^2$. On voit qu'entre les valeurs extrêmes, celles de MM. Hansen et Plana, il existe une différence de $85''$, supérieure à $\frac{1}{15}$ de la valeur totale. Il en résulterait une modification de quatre ou cinq unités sur le chiffre des dixièmes de seconde dans le coefficient de l'accélération séculaire.

Les termes en n'^4, qui avaient apparu dans le coefficient de e'^2 par suite de l'introduction en dénominateur du facteur n'^2 dans un certain nombre de termes, se détruisent rigoureusement. Si cette circonstance ne s'était pas présentée, l'existence des termes en n'^4 eût rendu illusoire, jusqu'à un certain point, la seconde approximation, qui nous avait fourni pour le coefficient de l'accélération séculaire $5'',89$.

L'expression trouvée pour $\frac{d\delta_3 l}{dt}$ ne contient qu'en apparence des termes en n'^5. Si, en effet, on remplace dans les dénominateurs N par n, et si l'on y néglige n' en comparaison de n, ces termes, ainsi réduits à leur partie principale, se détruisent exactement. L'ensemble des termes en n'^5 doit donc avoir une valeur numérique faible, en comparaison de la valeur individuelle de chacun des termes, et comparable à l'ensemble des termes en n'^6. C'est ce que le calcul permet de vérifier.

Ainsi, l'expression fournie par cette nouvelle application de la méthode de Poisson est bien du même ordre que la partie provenant de l'approximation précédente et contenant en facteur, avec $\left(\frac{n'}{n}\right)^3 n'$, le carré de l'excentricité ou de l'inclinaison de l'orbite lunaire.

Par des raisonnements entièrement semblables à ceux qui ont été faits au n° 35, on pourra se convaincre que les termes négligés, soit dans la fonction perturbatrice, soit dans le calcul de $\delta_2 l$, n'auraient pu modifier en rien le résultat obtenu.

40. Réunissons maintenant à la valeur obtenue pour $\frac{d\delta_3 l}{dt}$ celle que nous avons trouvée antérieurement pour $\frac{d\delta_2 l}{dt}$, après avoir remplacé par leurs valeurs numériques les lettres qui représentent les coefficients des différents termes de la fonction perturbatrice. On trouvera, pour l'expression définitive de la partie multipliée par e'^2 dans la dérivée de la longitude moyenne,

$$\begin{aligned}
\frac{dl}{dt} = n'e'^2 \Bigg[& \frac{n'}{n}\left(-\frac{3}{2}+\frac{27}{16}\varphi^2-\frac{27}{16}e^2-\frac{27}{64}\varphi^4+\frac{45}{32}e^2\varphi^2-\frac{9}{64}e^4-\frac{45}{8}\frac{a^2}{a'^2}\right)\\
& +\frac{n'^3}{(\mathrm{N}-n')^3}\left(\frac{405}{32}-\frac{405}{32}\varphi^2-\frac{2025}{32}e^2\right)\\
& +\frac{n'^3}{n(\mathrm{N}-n')^2}\left(\frac{405}{16}-\frac{675}{32}\varphi^2-\frac{3375}{32}e^2\right)\\
& +\frac{n'^3}{n^2(\mathrm{N}-n')}\left(\frac{315}{8}-\frac{945}{32}\varphi^2-\frac{4725}{32}e^2\right)\\
& +\frac{n'^3}{(\mathrm{N}-j)^3}\left(-\frac{27}{8}e^2\right)+\frac{n'^3}{n(\mathrm{N}-j)^2}\left(-\frac{9}{8}+\frac{27}{8}\varphi^2-\frac{297}{64}e^2\right)\\
& +\frac{n'^3}{n^2(\mathrm{N}-j)}\left(-\frac{21}{8}+\frac{27}{4}\varphi^2-\frac{189}{32}e^2\right)+\frac{n'^3}{(3\mathrm{N}-j-2n')^3}\left(\frac{10935}{32}e^2\right)\\
& +\frac{n'^3}{n(3\mathrm{N}-j-2n')^2}\left(\frac{405}{32}-\frac{405}{32}\varphi^2+\frac{2025}{32}e^2\right)\\
& +\frac{n'^3}{n^2(3\mathrm{N}-j-2n')}\left(\frac{315}{32}-\frac{135}{16}\varphi^2+\frac{135}{32}e^2\right)\\
& +\frac{n'^3}{(\mathrm{N}+j-2n')^3}\left(\frac{3645}{32}e^2\right)\\
& +\frac{n'^3}{n(\mathrm{N}+j-2n')^2}\left(-\frac{1215}{32}+\frac{1215}{32}\varphi^2+\frac{9315}{32}e^2\right)\\
& +\frac{n'^3}{n^2(\mathrm{N}+j-2n')}\left(-\frac{2835}{32}+\frac{1215}{16}\varphi^2+\frac{14985}{32}e^2\right)
\end{aligned}$$

$$+\frac{n'^3}{(2N-3n')^3}\left(-\frac{3969}{16}+\frac{3969}{16}\varphi^2+\frac{19845}{16}e^2\right)$$
$$+\frac{n'^3}{n(2N-3n')^2}\left(-\frac{3969}{16}+\frac{6615}{32}\varphi^2+\frac{33075}{32}e^2\right)$$
$$+\frac{n'^3}{n^2(2N-3n')}\left(-\frac{3087}{16}+\frac{9261}{64}\varphi^2+\frac{46305}{64}e^2\right)$$
$$+\frac{n'^3}{(2N-n')^3}\left(-\frac{81}{16}+\frac{81}{16}\varphi^2+\frac{405}{16}e^2\right)$$
$$+\frac{n'^3}{n(2N-n')^2}\left(-\frac{81}{16}+\frac{135}{32}\varphi^2+\frac{675}{32}e^2\right)$$
$$+\frac{n'^3}{n^2(2N-n')}\left(-\frac{63}{16}+\frac{189}{64}\varphi^2+\frac{945}{64}e^2\right)+\frac{n'^3}{(N-j+n')^3}\left(-\frac{81}{32}e^2\right)$$
$$+\frac{n'^3}{n(N-j+n')^2}\left(-\frac{27}{32}+\frac{81}{32}\varphi^2-\frac{27}{8}e^2\right)$$
$$+\frac{n'^3}{n^2(N-j+n')}\left(-\frac{63}{32}+\frac{81}{16}\varphi^2-\frac{135}{32}e^2\right)$$
$$+\frac{n'^3}{(N-j-n')^3}\left(-\frac{81}{32}e^2\right)+\frac{n'^3}{n(N-j-n')^2}\left(-\frac{27}{32}+\frac{81}{32}\varphi^2-\frac{27}{8}e^2\right)$$
$$+\frac{n'^3}{n^2(N-j-n')}\left(-\frac{63}{32}+\frac{81}{16}\varphi^2-\frac{135}{32}e^2\right)$$
$$+\frac{n'^3}{(3N-j-3n')^3}\left(-\frac{107163}{128}e^2\right)$$
$$+\frac{n'^3}{n(3N-j-3n')^2}\left(-\frac{3969}{128}+\frac{3969}{128}\varphi^2-\frac{19845}{128}e^2\right)$$
$$+\frac{n'^3}{n^2(3N-j-3n')}\left(-\frac{3087}{128}+\frac{1323}{64}\varphi^2-\frac{1323}{128}e^2\right)$$
$$+\frac{n'^3}{(3N-j-n')^3}\left(-\frac{2187}{128}e^2\right)$$
$$+\frac{n'^3}{n(3N-j-n')^2}\left(-\frac{81}{128}+\frac{81}{128}\varphi^2-\frac{405}{128}e^2\right)$$
$$+\frac{n'^3}{n^2(3N-j-n')}\left(-\frac{63}{128}+\frac{27}{64}\varphi^2-\frac{27}{128}e^2\right)$$
$$+\frac{n'^3}{(N+j-3n')^3}\left(-\frac{35721}{128}e^2\right)$$

$$+\frac{n'^3}{n(\mathrm{N}+j-3n')^2}\left(\frac{11907}{128}-\frac{11907}{128}\varphi^2-\frac{91287}{128}e^2\right)$$

$$+\frac{n'^3}{n^2(\mathrm{N}+j-3n')}\left(\frac{27783}{128}-\frac{11907}{64}\varphi^2-\frac{146853}{128}e^2\right)$$

$$+\frac{n'^3}{(\mathrm{N}+j-n')^3}\left(-\frac{729}{128}e^2\right)$$

$$+\frac{n'^3}{n(\mathrm{N}+j-n')^2}\left(\frac{243}{128}-\frac{243}{128}\varphi^2-\frac{1863}{128}e^2\right)$$

$$+\frac{n'^3}{n^2(\mathrm{N}+j-n')}\left(\frac{567}{128}-\frac{243}{64}\varphi^2-\frac{2997}{128}e^2\right)$$

$$+\frac{n'^3}{n(2\mathrm{N}-j-n')^2}\left(\frac{135}{8}e^2\right)+\frac{n'^3}{n^2(2\mathrm{N}-j-n')}\left(\frac{135}{8}e^2\right)$$

$$+\frac{n'^3}{n^2(n'-j)}\left(\frac{3375}{32}e^2\right)$$

$$+\frac{n'^3}{n(2\mathrm{N}-2j+n')^2}\left(-\frac{27}{64}e^2\right)+\frac{n'^3}{n^2(2\mathrm{N}-2j+n')}\left(-\frac{27}{64}e^2\right)$$

$$+\frac{n'^3}{n(2\mathrm{N}-2j-n')^2}\left(-\frac{27}{64}e^2\right)+\frac{n'^3}{n^2(2\mathrm{N}-2j-n')}\left(-\frac{27}{64}e^2\right)$$

$$+\frac{n'^3}{n(4\mathrm{N}-2j-3n')^2}\left(-\frac{1323}{8}e^2\right)+\frac{n'^3}{n^2(4\mathrm{N}-2j-3n')}\left(-\frac{1323}{16}e^2\right)$$

$$+\frac{n'^3}{n(4\mathrm{N}-2j-n')^2}\left(-\frac{27}{8}e^2\right)+\frac{n'^3}{n^2(4\mathrm{N}-2j-n')}\left(-\frac{27}{16}e^2\right)$$

$$+\frac{n'^3}{n^2(3n'-2j)}\left(-\frac{33075}{64}e^2\right)+\frac{n'^3}{n^2(n'-2j)}\left(-\frac{675}{64}e^2\right)$$

$$+\frac{n'^3}{n(2\mathrm{N}-2h+n')^2}\left(-\frac{243}{64}\varphi^2\right)+\frac{n'^3}{n^2(2\mathrm{N}-2h+n')}\left(-\frac{243}{64}\varphi^2\right)$$

$$+\frac{n'^3}{n(2\mathrm{N}-2h-n')^2}\left(-\frac{243}{64}\varphi^2\right)+\frac{n'^3}{n^2(2\mathrm{N}-2h-n')}\left(-\frac{243}{64}\varphi^2\right)$$

$$+\frac{n'^3}{n^2(3n'-2h)}\left(-\frac{1323}{64}\varphi^2\right)+\frac{n'^3}{n^2(n'-2h)}\left(-\frac{27}{64}\varphi^2\right)$$

$$+\frac{n'^3}{n(\mathrm{N}-h)^2}\left(-\frac{81}{64}\varphi^2\right)+\frac{n'^3}{n^2(\mathrm{N}-h)}\left(-\frac{81}{32}\varphi^2\right)$$

$$+\frac{n'^3}{\ldots}\left(\frac{135}{\ldots}\varphi^2\right)+\frac{n'^4}{\ldots}\ \frac{243}{\ldots}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{n'^4}{n^2(\mathrm{N}-n')^2}\,\frac{1215}{8}+\frac{n'^4}{n^3(\mathrm{N}-n')}\,\frac{459}{2}\\
&-\frac{n'^4}{n(2\mathrm{N}-n')^3}\,\frac{243}{4}-\frac{n'^4}{n^2(2\mathrm{N}-n')^2}\,\frac{1215}{16}-\frac{n'^4}{n^3(2\mathrm{N}-n')}\,\frac{459}{8}\\
&-\frac{n'^4}{n(2\mathrm{N}-3n')^3}\,\frac{1701}{4}-\frac{n'^4}{n^2(2\mathrm{N}-3n')^2}\,\frac{8505}{16}-\frac{n'^4}{n^3(2\mathrm{N}-3n')}\,\frac{3213}{8}\\
&-\frac{n'^5}{n(\mathrm{N}-n')^4}\,\frac{729}{64}+\frac{n'^5}{n^2(\mathrm{N}-n')^3}\,\frac{405}{64}+\frac{n'^5}{n^3(\mathrm{N}-n')^2}\,\frac{1107}{64}\\
&-\frac{n'^5}{n^2(2\mathrm{N}-n')^3}\,\frac{81}{8}-\frac{n'^5}{n^3(2\mathrm{N}-n')^2}\,\frac{243}{32}\\
&-\frac{n'^5}{n^2(2\mathrm{N}-3n')^3}\,\frac{3969}{8}-\frac{n'^5}{n^3(2\mathrm{N}-3n')^2}\,\frac{11907}{32}\\
&+\frac{n'^5}{n^2(\mathrm{N}-n')(2\mathrm{N}-n')^2}\,\frac{243}{32}-\frac{n'^5}{n^2(\mathrm{N}-n')(2\mathrm{N}-3n')^2}\,\frac{1701}{32}\\
&+\frac{n'^5}{n^2(\mathrm{N}-n')^2(2\mathrm{N}-n')}\,\frac{243}{64}-\frac{n'^5}{n^2(\mathrm{N}-n')^2(2\mathrm{N}-3n')}\,\frac{1701}{64}\\
&\left.+\frac{n'^5}{n^3(\mathrm{N}-n')(2\mathrm{N}-n')}\,\frac{567}{32}-\frac{n'^5}{n^3(\mathrm{N}-n')(2\mathrm{N}-3n')}\,\frac{3969}{32}\right].
\end{aligned}
$$

Dans cette formule, N désigne le coefficient du temps dans la longitude moyenne de la Lune, telle qu'elle résulte des observations.

n est le moyen mouvement de la Lune dans son orbite elliptique, abstraction faite de la force perturbatrice du Soleil.

n', j, h désignent les coefficients du temps respectivement dans l', ϖ, θ. Comme ϖ' varie avec une lenteur extrême, on a pu négliger partout le coefficient du temps dans ϖ', en présence des coefficients du temps dans l et dans l'.

41. Pour réduire la formule précédente en nombres avec toute l'exactitude que comportent nos calculs, il sera nécessaire d'employer des données numériques plus précises que celles dont nous avons fait usage dans la seconde approximation. Nous emprunterons aux Tables de M. Hansen les valeurs des éléments de l'orbite lunaire. Il faut observer toutefois que les longitudes sont comptées dans cet Ouvrage à partir de l'équinoxe moyen mobile, au lieu que celles qui entrent dans nos cal-

culs ont pour origine l'équinoxe moyen du 1er janvier 1850. Pour passer d'un système à l'autre, il faudra tenir compte de la précession.

Soit P la précession générale, l, ϖ, θ conservant la signification que nous leur avons attribuée jusqu'ici. On a, d'après M. Hansen, pour 1800 janvier 0, Greenwich, l'unité de temps étant l'année julienne,

$$\begin{aligned} l-\varpi &= 110^\circ 19' 33'',64 + (13 \times 360^\circ + 331158'',3715)(t-1800) \\ &\quad + 49'',435\left(\frac{t-1800}{100}\right)^2, \\ \varpi-\theta &= 192^\circ 7' 21'',91 + 216115'',2207(t-1800) - 44'',323\left(\frac{t-1800}{100}\right)^2, \\ \theta+\mathrm{P} &= 33^\circ 16' 31'',15 - 69629'',3961(t-1800) + 8'',189\left(\frac{t-1800}{100}\right)^2, \\ \mathrm{P} &= 50'',2230(t-1800) + 1'',121\left(\frac{t-1800}{100}\right)^2. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \theta &= 33^\circ 16' 31'',15 - 69679'',6191(t-1800) + 7'',068\left(\frac{t-1800}{100}\right)^2, \\ \varpi &= 225^\circ 23' 53'',06 + 146435'',6016(t-1800) - 37'',255\left(\frac{t-1800}{100}\right)^2, \\ l &= 335^\circ 43' 26'',70 + 17325593'',9731(t-1800) + 12'',180\left(\frac{t-1800}{100}\right)^2. \end{aligned}$$

Prenons les dérivées par rapport au temps; il viendra

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -\quad 69679'',6191 + 0'',14136\,\frac{t-1800}{100}, \\ \frac{d\varpi}{dt} &= \quad 146435'',6016 - 0'',74510\,\frac{t-1800}{100}, \\ \frac{dl}{dt} &= 17325593'',9731 + 0'',24360\,\frac{t-1800}{100}. \end{aligned}$$

Prenons pour origine du temps $t = 1850$ janvier 0, Greenwich. Les accroissements en une année julienne seront :

Pour la longitude moyenne de la Lune....	17325594'',0949
Pour la longitude du périgée....	146435'',2291
Pour la longitude du nœud...............	— 69679'',5484

Il suffira de diviser les nombres précédents par 365,25 pour obtenir les mouvements en un jour solaire moyen.

On trouve ainsi, pour l'époque de 1850,

$$\begin{aligned} N &= 47434'',889, \\ j &= 400'',918, \\ h &= -190'',772. \end{aligned}$$

Nous adopterons pour le mouvement moyen du Soleil en un jour le nombre donné par Le Verrier :

$$n' = 3548'',193.$$

42. Cherchons maintenant à déterminer n. On a vu que, si l'on réduit la fonction perturbatrice à sa partie non périodique, il existe entre N, n et n' la relation

$$N = n + \frac{n'^2}{n}\left(-1 - \frac{9}{8}e^2 - \frac{3}{2}e'^2 + \frac{9}{8}\varphi^2\right).$$

La valeur fournie par cette équation pour n ne serait pas encore assez exacte pour notre objet. Nous allons, en appliquant la méthode de Poisson, trouver la partie principale de la correction introduite par les termes périodiques de la fonction perturbatrice.

On a, en négligeant les excentricités et les inclinaisons,

$$R = -\frac{1}{4}n'^2a^2 - \frac{3}{4}n'^2a^2\cos(2l - 2l').$$

On en déduit, par les formules du n° 6,

$$\frac{dn}{dt} = \frac{9}{2}n'^2\sin(2l - 2l'),$$

$$\frac{dl}{dt} = n - \frac{n'^2}{n} - \frac{3n'^2}{n}\cos(2l - 2l').$$

Intégrons la valeur de $\frac{dn}{dt}$. Il viendra

$$\delta_1 n = -\frac{9}{4}\frac{n'^2}{N - n'}\cos(2l - 2l').$$

D'ailleurs,

$$\frac{d\delta_1 l}{dt} = \delta_1 n - \frac{3n'^2}{n}\cos(2l-2l') = -\left(\frac{9}{4}\frac{n'^2}{N-n'} + \frac{3n'^2}{n}\right)\cos(2l-2l'),$$

et, en intégrant,

$$\delta_1 l = -\left[\frac{9}{8}\frac{n'^2}{(N-n')^2} + \frac{3}{2}\frac{n'^2}{n(N-n')}\right]\sin(2l-2l').$$

La valeur de $\frac{dn}{dt}$ donne, en différentiant,

$$\frac{d\delta_2 n}{dt} = 9n'^2\cos(2l-2l')\delta_1 l = -\left[\frac{81}{16}\frac{n'^4}{(N-n')^2} + \frac{27}{4}\frac{n'^4}{n(N-n')}\right]\sin(4l-4l').$$

On pourra laisser de côté $\delta_2 n$, qui sera entièrement périodique. Les deux autres parties de la correction seront

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = \frac{3n'^2}{n^2}\cos(2l-2l')\delta_1 n + \frac{6n'^2}{n}\sin(2l-2l')\delta_1 l,$$

ou, en substituant,

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = -\frac{27}{8}\frac{n'^4}{n^2(N-n')} - \frac{27}{8}\frac{n'^4}{n(N-n')^2} - \frac{9}{2}\frac{n'^4}{n^2(N-n')},$$

et, en réduisant,

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = -\frac{63}{8}\frac{n'^4}{n^2(N-n')} - \frac{27}{8}\frac{n'^4}{n(N-n')^2}.$$

On est donc conduit, pour déterminer n, à l'équation suivante :

$$N = n - \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{8}\varphi^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + \frac{63}{8}\frac{n'^2}{n(N-n')} + \frac{27}{8}\frac{n'^2}{(N-n')^2}\right].$$

Cette équation peut s'écrire

$$n = N + \frac{n'^2}{n}\left[1 - \frac{9}{8}\varphi^2 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + \frac{63}{8}\frac{n'^2}{n(N-n')} + \frac{27}{8}\frac{n'^2}{(N-n')^2}\right].$$

Si l'on calcule le second membre en adoptant pour valeur approchée de $\frac{n'}{n}$ le nombre 0,07439, on trouve

$$n = 47715,78.$$

Le calcul, repris en substituant ce nombre à n dans le second membre, donne

$$n = 47715,66.$$

Les approximations suivantes ne modifiant pas ce nombre, nous l'adopterons dans la suite des calculs.

43. Pour obtenir en secondes la valeur du coefficient de l'accélération séculaire il faudra, dans la formule donnée au n° **40**, remplacer e' par $e'_0 + \alpha t$ et ne conserver que la partie qui donne par l'intégration un terme proportionnel au carré du temps. Pour atteindre ce résultat et effectuer en même temps l'intégration, il suffira de multiplier la quantité entre parenthèses par $n't.e'_0\alpha t$. Dans cette formule :

$n't$ doit être pris égal au moyen mouvement du Soleil en cent années juliennes. Ce nombre est, d'après Le Verrier, égal à

$$129\,597\,745''.$$

αt représente la diminution en cent années juliennes de l'excentricité de l'orbite terrestre.

e'_0 est l'excentricité de l'orbite terrestre à l'époque choisie pour origine du temps. On a, d'après Le Verrier, en prenant pour unité de temps l'année julienne,

$$e' = 3459'',28 - 0'',08755\,t - 0'',00000282\,t^2.$$

Nous ne nous occuperons que de la diminution accusée par le terme en t. Nous vérifierons plus loin que l'influence du terme en t^2 est négligeable dans les limites des temps historiques. Des nombres qui précèdent, on déduit, pour la valeur de l'excentricité exprimée en parties du rayon,

$$e'_0 = 0,016771 \quad \text{et} \quad \alpha t = 0,000042445.$$

Enfin, pour l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite lunaire, nous adopterons les nombres de M. Hansen. On trouve

$$\varphi = 18519'',96$$

ou, en parties du rayon,

$$\varphi = 0,089787 \quad \text{et} \quad e = 0,054908.$$

On a ainsi tous les éléments nécessaires pour réduire en nombres la formule du n° 40.

44. Le Tableau suivant, dans lequel chaque terme de cette formule est désigné, pour abréger, par un de ses facteurs, donne en secondes la partie correspondante du coefficient de l'accélération séculaire :

Termes.		Termes.	
$\frac{n'}{n}$	$+10'',23206$	$\frac{n'^3}{(2N-3n')^3}$	$+1'',67139$
$\frac{n'^3}{(N-n')^3}$	$-0,60277$	$\frac{n'^3}{n(2N-3n')^2}$	$+2,96190$
$\frac{n'^3}{n(N-n')^2}$	$-1,11317$	$\frac{n'^3}{n^2(2N-3n')}$	$+1,07439$
$\frac{n'^3}{n^2(N-n')}$	$-1,59578$	$\frac{n'^3}{(2N-n')^3}$	$+0,02676$
$\frac{n'^3}{(N-j)^3}$	$+0,00040$	$\frac{n'^3}{n(2N-n')^2}$	$+0,05142$
$\frac{n'^3}{n(N-j)^2}$	$+0,04341$	$\frac{n'^3}{n^2(2N-n')}$	$+0,07669$
$\frac{n'^3}{n^2(N-j)}$	$+0,09961$	$\frac{n'^3}{(N-j+n')^3}$	$+0,00024$
$\frac{n'^3}{(3N-j-2n')^3}$	$-0,00173$	$\frac{n'^3}{n(N-j+n')^2}$	$+0,02814$
$\frac{n'^3}{n(3N-j-2n')^2}$	$-0,06057$	$\frac{n'^3}{n^2(N-j+n')}$	$+0,06914$
$\frac{n'^3}{n^2(3N-j-2n')}$	$-0,13143$	$\frac{n'^3}{(N-j-n')^3}$	$+0,00038$
$\frac{n'^3}{(N+j-2n')^3}$	$-0,02093$	$\frac{n'^3}{n(N-j-n')^2}$	$+0,03807$
$\frac{n'^3}{n(N+j-2n')^2}$	$+1,91421$	$\frac{n'^3}{n^2(N-j-n')}$	$+0,08078$
$\frac{n'^3}{n^2(N+j-2n')}$	$+3,84626$	$\frac{n'^3}{(3N-j-3n')^3}$	$+0,00460$

Termes.		Termes.	
$\dfrac{n'^3}{n(3N-j-3n')^2}$	$+0'',15653$	$\dfrac{n'^3}{n^2(4N-2j-n')}$	$+0'',00005$
$\dfrac{n'^3}{n^2(3N-j-3n')}$	$+0,33070$	$\dfrac{n'^3}{n^2(3n'-2j)}$	$+0,28653$
$\dfrac{n'^3}{(3N-j-n')^3}$	$+0,00008$	$\dfrac{n'^3}{n^2(n'-2j)}$	$+0,02096$
$\dfrac{n'^3}{n(3N-j-n')^2}$	$+0,00288$	$\dfrac{n'^3}{n(2N-2h+n')^2}$	$+0,00027$
$\dfrac{n'^3}{n^2(3N-j-n')}$	$+0,00640$	$\dfrac{n'^3}{n^2(2N-2h+n')}$	$+0,00056$
$\dfrac{n'^3}{(N+j-3n')^3}$	$+0,06740$	$\dfrac{n'^3}{n(2N-2h-n')^2}$	$+0,00031$
$\dfrac{n'^3}{n(N+j-3n')^2}$	$-5,62736$	$\dfrac{n'^3}{n^2(2N-2h-n')}$	$+0,00060$
$\dfrac{n'^3}{n^2(N+j-3n')}$	$-10,32236$	$\dfrac{n'^3}{n^2(3n'-2h)}$	$+0,02736$
$\dfrac{n'^3}{(N+j-n')^3}$	$+0,00081$	$\dfrac{n'^3}{n^2(n'-2h)}$	$+0,00157$
$\dfrac{n'^3}{n(N+j-n')^2}$	$-0,08099$	$\dfrac{n'^3}{n(N-h)^2}$	$+0,00039$
$\dfrac{n'^3}{n^2(N+j-n')}$	$-0,17696$	$\dfrac{n'^3}{n^2(N-h)}$	$+0,00078$
$\dfrac{n'^3}{n(2N-j-n')^2}$	$-0,00053$	$\dfrac{n'^3}{n^2(n'-h)}$	$-0,01646$
$\dfrac{n'^3}{n^2(2N-j-n')}$	$+0,00101$	$\dfrac{n'^4}{n(N-n')^3}$	$-0,22024$
$\dfrac{n'^3}{n^2(n'-j)}$	$-0,18287$	$\dfrac{n'^4}{n^2(N-n')^2}$	$-0,50642$
$\dfrac{n'^3}{n(2N-2j+n')^2}$	$+0,00001$	$\dfrac{n'^4}{n^3(N-n')}$	$-0,70385$
$\dfrac{n'^3}{n^2(2N-2j+n')}$	$+0,00002$	$\dfrac{n'^4}{n(2N-n')^3}$	$+0,02444$
$\dfrac{n'^3}{n(2N-2j-n')^2}$	$+0,00001$	$\dfrac{n'^4}{n^2(2N-n')^2}$	$+0,05848$
$\dfrac{n'^3}{n^2(2N-2j-n')}$	$+0,00003$	$\dfrac{n'^4}{n^3(2N-n')}$	$+0,08456$
$\dfrac{n'^3}{n(4N-2j-3n')^2}$	$+0,00135$	$\dfrac{n'^4}{n(2N-3n')^3}$	$+0,21811$
$\dfrac{n'^3}{n^2(4N-2j-3n')}$	$+0,00253$	$\dfrac{n'^4}{n^2(2N-3n')^2}$	$+0,48124$
$\dfrac{n'^3}{n(4N-2j-n')^2}$	$+0,00003$	$\dfrac{n'^4}{n^3(2N-3n')}$	$+0,64181$

Termes.		Termes.	
$\dfrac{n'^5}{n(N-n')^4}$	$+\ 0'',00334$	$\dfrac{n'^5}{n^2(N-n')(2N-n')^2}$	$-\ 0'',00047$
$\dfrac{n'^5}{n^2(N-n')^3}$	$-\ 0,00171$	$\dfrac{n'^5}{n^2(N-n')(2N-3n')^2}$	$+\ 0,00389$
$\dfrac{n'^5}{n^3(N-n')^2}$	$-\ 0,00429$	$\dfrac{n'^5}{n^2(2N-n')(N-n')^2}$	$-\ 0,00049$
$\dfrac{n'^5}{n^2(2N-n')^3}$	$+\ 0,00030$	$\dfrac{n'^5}{n^2(2N-3n')(N-n')^2}$	$+\ 0,00373$
$\dfrac{n'^5}{n^3(2N-n')^2}$	$+\ 0,00043$	$\dfrac{n'^5}{n^3(N-n')(2N-n')}$	$-\ 0,00211$
$\dfrac{n'^5}{n^2(2N-3n')^3}$	$+\ 0,01892$	$\dfrac{n'^5}{n^3(N-n')(2N-3n')}$	$+\ 0,01602$
$\dfrac{n'^5}{n^3(2N-3n')^2}$	$+\ 0,02505$		

Si l'on ajoute ces nombres en tenant compte de leur signe, on trouvera :

1° Pour la partie qui contient en facteur n' .... $+10'',23206$
2° Pour la partie qui contient en facteur n'^3 .... $-\ 4'',03867$
3° Pour la partie qui contient en facteur n'^4 .... $+\ 0'',07813$
4° Pour la partie qui contient en facteur n'^5 .... $+\ 0'',06261$

Les deux dernières parties sont bien du même ordre de grandeur, conformément à la remarque faite au n° 39.

Si l'on fait la somme, il en résulte, pour le coefficient du carré du temps dans la longitude de la Lune, le nombre

$$6'',33413.$$

Il convient de faire observer que les deux derniers chiffres ont pu être altérés par l'accumulation des petites erreurs quand nous avons fait la somme des résultats partiels.

45. Sans examiner s'il est possible de faire concorder avec ce chiffre les observations transmises par Ptolémée ou par divers historiens, nous citerons quelques nombres propres à donner une idée de l'influence d'une telle accélération sur la position de la Lune dans son orbite à une époque reculée. Nous avons vu que, d'après Le Verrier, la variation de l'excentricité de l'orbite terrestre peut être représentée pendant une longue suite de siècles par la formule

$$e' = 3459'',28 - 0,08755\,t - 0'',00000282\,t^2.$$

L'unité de temps qui figure dans cette formule est l'année julienne. Si l'on prend pour unité le siècle, elle devient

$$e' = 3459'',28 - 8'',755\,\mathrm{T} - 0'',0282\,\mathrm{T}^2.$$

Nous avons calculé seulement la partie de l'équation séculaire de la Lune qui dépend de e'^2, et nous avons supposé la variation de e'^2 proportionnelle au temps. L'accélération de $6'',33$ par siècle que nous avons obtenue aurait pour effet, au bout de vingt-cinq siècles, d'accroître la longitude de la Lune d'un nombre de secondes égal à

$$6,33 \times 625 \quad \text{ou} \quad 1^\circ 5' 56'',25.$$

La Lune emploie près de deux heures à parcourir un arc de cette étendue. Un tel déplacement entraînerait par conséquent une modification profonde dans les circonstances d'une éclipse.

Cherchons maintenant quelle serait l'influence du terme en T^2 qui figure dans l'expression de e'^2, et qui donnera par l'intégration, dans la longitude moyenne, un terme proportionnel au cube du temps. Ce terme, comme on le voit à l'inspection de la valeur de e', se composera de deux parties : 1° le carré du coefficient de T; 2° le double produit de e'_0 par le coefficient de T^2.

On trouve ainsi, pour la partie proportionnelle au carré du temps dans l'expression de e'^2,

$$-118'',57\,\mathrm{T}^2.$$

Dans l'intégration, ce terme prendra le diviseur 3. Si l'on remarque que le coefficient de t dans e'^2 a donné $6'',33$ pour le coefficient de t^2 dans la longitude moyenne, on pourra écrire immédiatement, pour le coefficient de t^3 dans la longitude moyenne de la Lune,

$$\frac{2}{3}\,\frac{118,57 \times 6,33}{3459,28 \times 8,755 \times 2}.$$

L'accroissement qui en résultera dans la longitude de la Lune, après une période de vingt-cinq siècles, sera exprimé en secondes par le nombre

$$\frac{2}{3}\,\frac{118,57 \times 6,33 \times 15625}{3459,28 \times 8,755 \times 2}.$$

Le calcul numérique donne

$$129'',37 \quad \text{ou} \quad 2'9'',37.$$

Cet arc serait parcouru par la Lune en quatre ou cinq minutes de temps. Les observations d'anciennes éclipses qui nous sont parvenues sont, en général, affectées d'une incertitude au moins égale à cette durée. On voit donc que la considération du terme en t^3 ne modifierait en rien les conclusions que l'on peut tirer de l'accord plus ou moins satisfaisant des observations avec la théorie.

46. Jusqu'ici nous avons regardé la partie proportionnelle au carré du temps, dans la longitude moyenne de la Lune, comme fournie uniquement par les termes en e'^2 qui figurent dans la dérivée de la longitude. Il est naturel de se demander quel changement serait apporté à ce résultat par la considération des puissances supérieures de e'. Au point de vue analytique, c'est une petite quantité du même ordre que e et φ, quoique notablement moindre en valeur numérique. On devra donc regarder comme comparables aux parties déjà calculées les termes qui, dans la dérivée de la longitude moyenne, contiendraient en facteur l'une des quantités suivantes :

$$\frac{n'}{n} n'e'^4, \quad \frac{n'}{n} \varphi^2 n'e'^4, \quad \frac{n'}{n} e^2 n'e'^4, \quad \frac{n'^3}{n^3} n'e'^4, \quad \frac{n'}{n} n'e'^6.$$

On voit clairement, à l'inspection de la fonction perturbatrice et des formules qui s'en déduisent, qu'il ne se présentera pas de puissances impaires de e' ni de puissances paires du rapport $\frac{n'}{n}$. Partout on remplacera e' par $e'_0 + \alpha t$, et l'on ne conservera que le terme en t, le seul qui, par l'intégration, donnera dans la longitude moyenne un terme en t^2. Ainsi $n'e'^4$ devra être remplacé, en intégrant, par $2e'^3_0 \alpha t . n't$, et $n'e'^6$ par $3e'^5_0 \alpha t . n't$.

47. Les termes qui contiennent en facteur la première puissance du rapport $\frac{n'}{n}$ s'obtiendront immédiatement sans aucun calcul d'approximation. Il suffira d'écrire dans la partie non périodique de la fonction perturbatrice les multiplicateurs de e'^4 et de e'^6. Posons donc

$$R = n'^2 a^2 e'^4 \left(-\frac{15}{32} + \frac{45}{64}\varphi^2 - \frac{45}{64} e^2\right) - n'^2 a^2 \frac{35}{64} e'^6.$$

Rappelons la formule, qui donne la dérivée par rapport au temps de la longitude moyenne,

$$\frac{dl}{dt} = n + \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{e}{2na^2}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\varphi}{2na^2}\frac{\partial R}{\partial \varphi}.$$

On trouvera, par l'application de cette formule,

$$\frac{dl}{dt} = + \frac{n'}{n}\left(-\frac{15}{8} + \frac{135}{64}\varphi^2 - \frac{135}{64}e^2\right)n'e'^4 - \frac{35}{16}\frac{n'}{n}n'e'^6.$$

Pour intégrer, on devra, comme nous l'avons expliqué, remplacer $n'e'^4$ par $2e_0'^3\alpha t . n't$ et $n'e'^6$ par $3e_0'^5\alpha t . n't$.

αt désigne, comme précédemment, la diminution en un siècle de l'excentricité de l'orbite terrestre; $n't$ est le nombre de secondes dont s'accroît en un siècle de cent années juliennes la longitude du Soleil.

La réduction en nombres donne, pour la partie du coefficient de l'accélération séculaire qui provient du terme en e'^4,

$$+0'',00719,$$

et, pour la partie qui provient de e'^6,

$$+0'',000004.$$

On voit que ce dernier nombre est entièrement négligeable. A plus forte raison pourra-t-on laisser de côté les termes qui dépendent des puissances plus élevées de e'.

48. Occupons-nous maintenant des termes qui contiennent en facteur avec e'^4 la troisième puissance du rapport $\frac{n'}{n}$. Ces termes seront donnés par un calcul d'approximation tout semblable à celui que nous avons effectué pour les termes en e'^2. Il est clair que, dans cette recherche, on pourra supposer nulles l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite lunaire, et ne conserver que les termes de la fonction perturbatrice qui contiennent e' à des puissances inférieures à la cinquième.

On est ainsi conduit à adopter, pour la fonction perturbatrice, un développement composé de vingt termes, dont voici la liste :

$$\begin{aligned}
&(0) \qquad R = n'^2a^2\Big[-\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}e'^2 + \frac{15}{32}e'^4\right)\\
&(1) \qquad\qquad + \left(-\frac{3}{4} + \frac{15}{8}e'^2 - \frac{39}{64}e'^4\right)\cos(2l - 2l')
\end{aligned}$$

(2) $$+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e'^2+\frac{15}{16}e'^4\right)e\cos(l-\varpi)$$

(3) $$+\left(-\frac{3}{4}e'-\frac{27}{32}e'^3\right)\cos(l'-\varpi')$$

(4) $$+\left(-\frac{3}{4}+\frac{15}{8}e'^2-\frac{39}{64}e'^4\right)e\cos(3l-\varpi-2l')$$

(5) $$+\left(\frac{9}{4}-\frac{45}{8}e'^2+\frac{117}{64}e'^4\right)e\cos(l+\varpi-2l')$$

(6) $$+\left(-\frac{21}{8}e'+\frac{369}{64}e'^3\right)\cos(2l-3l'+\varpi')$$

(7) $$+\left(\frac{3}{8}e'-\frac{3}{64}e'^3\right)\cos(2l-l'-\varpi')$$

(8) $$+\left(\frac{3}{4}e'+\frac{27}{32}e'^3\right)e\cos(l-\varpi+l'-\varpi')$$

(9) $$+\left(\frac{3}{4}e'+\frac{27}{32}e'^3\right)e\cos(l-\varpi-l'+\varpi')$$

(10) $$-\frac{9}{8}e'^2\cos(2l'-2\varpi')$$

(11) $$+\left(-\frac{21}{8}e'+\frac{369}{64}e'^3\right)e\cos(3l-\varpi-3l'+\varpi')$$

(12) $$+\left(\frac{3}{8}e'-\frac{3}{64}e'^3\right)e\cos(3l-\varpi-l'-\varpi')$$

(13) $$+\left(\frac{63}{8}e'-\frac{1107}{64}e'^3\right)e\cos(l+\varpi-3l'+\varpi')$$

(14) $$+\left(-\frac{9}{8}e'+\frac{9}{64}e'^3\right)e\cos(l+\varpi-l'-\varpi')$$

(15) $$-\frac{51}{8}e'^2\cos(2l-4l'+2\varpi')$$

(16) $$+\frac{9}{8}e'^2e\cos(l-\varpi+2l'-2\varpi')$$

(17) $$+\frac{9}{8}e'^2e\cos(l-\varpi-2l'+2\varpi')$$

(18) $$-\frac{51}{8}e'^2e\cos(3l-\varpi-4l'+2\varpi')$$

(19) $$\left.+\frac{153}{8}e'^2e\cos(l+\varpi-4l'+2\varpi')\right].$$

Comme on doit s'arrêter à la troisième puissance du rapport $\frac{n}{n'}$, il suffira de calculer dans la longitude moyenne l'accroissement du second ordre. On voit alors, en répétant le raisonnement que nous avons fait au n° **7**, qu'il est permis de réduire la fonction perturbatrice successivement à chacun de ses termes.

49. En écartant le terme non périodique, qui a déjà été considéré, et les termes (3) et (10), qui, ne contenant pas l, n'influent pas sur le résultat, on voit que tous les termes de la fonction perturbatrice rentrent dans une des deux formes analytiques suivantes :

$$R = n'^2 a^2 P \cos(2l + il' + i'\varpi')$$

ou

$$R = n'^2 a^2 P e \cos(il - \varpi + \alpha).$$

Dans ces deux formules, i désigne un nombre entier qu'il est inutile de spécifier, α une somme de multiples de l' et de ϖ', P une fonction de e'.

Si l'on adopte la première formule, on trouve, par un calcul exactement semblable à celui qui a été fait au n° **10**, que l'accroissement du second ordre dans la dérivée de la longitude moyenne a pour expression

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = -\left(\frac{36n'^4}{p^3} + \frac{36n'^4}{np^2} + \frac{28n'^4}{n^2p}\right)P^2.$$

On devra dans P^2 ne conserver que la partie qui contient en facteur e'^4; p désigne le coefficient du temps dans l'argument de chaque terme; on pourra, sans erreur sensible, traiter dans les arguments ϖ' comme une constante.

Prenons maintenant la seconde formule. Le calcul est identique à celui du n° **11**; on est conduit à l'expression

$$\frac{d\delta_2 l}{dt} = -\left(\frac{3in'^4}{2nq^2} + \frac{7n'^4}{2n^2q}\right)P^2,$$

q désignant le coefficient du temps dans chaque argument, abstraction faite de ϖ'. Comme tout à l'heure, on ne conservera dans P^2 que le terme en e'^4.

50. Donnons maintenant aux lettres qui entrent dans ces deux formules les valeurs qui leur sont attribuées dans chacun des termes de la fonction perturbatrice. Nous continuerons à désigner les coefficients du temps dans l, l', ϖ respectivement par N, n' et j. On trouvera ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta_2 l}{dt} = n'e'^4 \Big[& -\frac{5103}{256}\frac{n'^3}{(N-n')^3} - \frac{5103}{128}\frac{n'^3}{n(N-n')^2} \\
& - \frac{3969}{64}\frac{n'^3}{n^2(N-n')} - \frac{9}{4}\frac{n'^3}{n(N-j)^2} - \frac{21}{4}\frac{n'^3}{n^2(N-j)} \\
& - \frac{5103}{256}\frac{n'^3}{n(3N-j-2n')^2} - \frac{3969}{256}\frac{n'^3}{n^2(3N-j-2n')} \\
& + \frac{15309}{256}\frac{n'^3}{n(N+j-2n')^2} - \frac{35721}{256}\frac{n'^3}{n^2(N+j-2n')} \\
& + \frac{69741}{64}\frac{n'^3}{(2N-3n')^3} + \frac{69741}{64}\frac{n'^3}{n(2N-3n')^2} + \frac{54243}{64}\frac{n'^3}{n^2(2N-3n')} \\
& + \frac{81}{64}\frac{n'^3}{(2N-n')^3} + \frac{81}{64}\frac{n'^3}{n(2N-n')^2} + \frac{63}{64}\frac{n'^3}{n^2(2N-n')} \\
& - \frac{243}{128}\frac{n'^3}{n(N-j+n')^2} - \frac{567}{128}\frac{n'^3}{n^2(N-j+n')} \\
& - \frac{243}{128}\frac{n'^3}{n(N-j-n')^2} - \frac{567}{128}\frac{n'^3}{n^2(N-j-n')} \\
& + \frac{69741}{512}\frac{n'^3}{n(3N-j-3n')^2} + \frac{54243}{512}\frac{n'^3}{n^2(3N-j-3n')} \\
& + \frac{81}{512}\frac{n'^3}{n(3N-j-n')^2} + \frac{63}{512}\frac{n'^3}{n^2(3N-j-n')} \\
& - \frac{209223}{512}\frac{n'^3}{n(N+j-3n')^2} - \frac{488187}{512}\frac{n'^3}{n^2(N+j-3n')} \\
& - \frac{243}{512}\frac{n'^3}{n(N+j-n')^2} - \frac{567}{512}\frac{n'^3}{n^2(N+j-n')} \\
& - \frac{23409}{128}\frac{n'^3}{(N-2n')^3} - \frac{23409}{64}\frac{n'^3}{n(N-2n')^2} - \frac{18207}{32}\frac{n'^3}{n^2(N-2n')} \\
& - \frac{243}{128}\frac{n'^3}{n(N-j+2n')^2} - \frac{567}{128}\frac{n'^3}{n^2(N-j+2n')} \\
& - \frac{243}{128}\frac{n'^3}{n(N-j-2n')^2} - \frac{567}{128}\frac{n'^3}{n^2(N-j-2n')} \\
& - \frac{23409}{128}\frac{n'^3}{n(3N-j-4n')^2} - \frac{18207}{128}\frac{n'^3}{n^2(3N-j-4n')} \\
& \qquad + \frac{70227}{128}\frac{n'^3}{n(N+j-4n')^2} + \frac{163863}{128}\frac{n'^3}{n^2(N+j-4n')}\Big].
\end{aligned}$$

On déduira de cette formule le coefficient du carré du temps dans la longitude moyenne en remplaçant $n'e'^4$ par $2e_0^3.\alpha t.n't$. La réduction en nombres n'offre aucune difficulté. Le Tableau suivant fait connaître, en regard de chacun des termes que nous venons d'écrire, la valeur en secondes de la partie introduite par ce terme dans le coefficient du carré du temps :

Termes.		Termes.	
$\frac{n'}{n}$	$+\ 0'',00719$	$\frac{n'^3}{n^2(N-j+n')}$	$+\ 0'',00009$
$\frac{n'^3}{(N-n')^3}$	$+\ 0,00055$	$\frac{n'^3}{n(N-j-n')^2}$	$+\ 0,00005$
$\frac{n'^3}{n(N-n')^2}$	$+\ 0,00101$	$\frac{n'^3}{n^2(N-j-n')}$	$+\ 0,00010$
$\frac{n'^3}{n^2(N-n')}$	$+\ 0,00144$	$\frac{n'^3}{n(3N-j-3n')^2}$	$-\ 0,00038$
$\frac{n'^3}{n(N-j)^2}$	$+\ 0,00005$	$\frac{n'^3}{n^2(3N-j-3n')}$	$-\ 0,00082$
$\frac{n'^3}{n^2(N-j)}$	$+\ 0,00011$	$\frac{n'^3}{n(3N-j-n')^2}$	négligeable
$\frac{n'^3}{n(3N-j-2n')^2}$	$+\ 0,00005$	$\frac{n'^3}{n(3N-j-n')}$	négligeable
$\frac{n'^3}{n^2(3N-j-2n')}$	$+\ 0,00012$	$\frac{n'^3}{n(N+j-3n')^2}$	$+\ 0,01435$
$\frac{n'^3}{n(N+j-2n')^2}$	$-\ 0,00175$	$\frac{n'^3}{n^2(N+j-3n')}$	$+\ 0,02610$
$\frac{n'^3}{n^2(N+j-2n')}$	$-\ 0,00349$	$\frac{n'^3}{n(N+j-n')^2}$	$+\ 0,00001$
$\frac{n'^3}{(2N-3n')^3}$	$-\ 0,00423$	$\frac{n'^3}{n^2(N+j-n')}$	$+\ 0,00003$
$\frac{n'^3}{n(2N-3n')^2}$	$-\ 0,00746$	$\frac{n'^3}{(N-2n')^3}$	$+\ 0,00646$
$\frac{n'^3}{n^2(2N-3n')}$	$-\ 0,01025$	$\frac{n'^3}{n(N-2n')^2}$	$+\ 0,01092$
$\frac{n'^3}{(2N-n')^3}$	négligeable	$\frac{n'^3}{n^2(N-2n')}$	$+\ 0,01437$
$\frac{n'^3}{n(2N-n')^2}$	$-\ 0,00001$	$\frac{n'^3}{n(N-j+2n')^2}$	$+\ 0,00003$
$\frac{n'^3}{n^2(2N-n')}$	$-\ 0,00001$	$\frac{n'^3}{n^2(N-j+2n')}$	$+\ 0,00008$
$\frac{n'^3}{n(N-j+n')^2}$	$+\ 0,00004$	$\frac{n'^3}{n(N-j-2n')^2}$	$+\ 0,00006$

Termes.		Termes.	
$\dfrac{n'^3}{n^2(\mathrm{N}-j-2n')}$	$+\ 0'',00011$	$\dfrac{n'^3}{n(\mathrm{N}+j-4n')^2}$	$-\ 0'',02355$
$\dfrac{n'^3}{n(3\mathrm{N}-j-4n')^2}$	$+\ 0,00054$	$\dfrac{n'^3}{n^2(\mathrm{N}+j-4n')}$	$-\ 0,03874$
$\dfrac{n'^3}{n^2(3\mathrm{N}-j-4n')}$	$+\ 0,00113$		

Si l'on fait la somme des résultats qui précèdent, on trouve :

Pour l'ensemble des termes positifs . ... $+\ 0'',08499$
Pour l'ensemble des termes négatifs.......... $-\ 0'',09069$

La correction fournie par les termes en e'^4 est donc

$$-\ 0'',00570.$$

On se rappelle que les termes en e'^2 nous avaient donné, pour le coefficient de l'accélération séculaire,

$$6'',33413;$$

ce coefficient se trouve donc réduit, par la considération des termes en e'^4, à $6'',32843$. Les deux derniers chiffres pouvant être altérés par l'accumulation des petites erreurs dans la somme des résultats partiels, nous adopterons pour le résultat définitif le nombre $6'',328$. Si l'on tient compte de la petitesse du changement apporté au résultat par la troisième approximation, on pourra regarder comme très-vraisemblable qu'un calcul plus exact ne modifierait que le chiffre des millièmes de seconde.

FIN DU TOME HUITIÈME.

5043 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.