ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CH. MÉRAY

Essai sur le calcul des quantités associées en systèmes et sur son application à la théorie des équations simultanées

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 8 (1879), p. 327-360
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1879_2_8__327_0>

ESSAI

SUR LE

CALCUL DES QUANTITÉS ASSOCIÉES EN SYSTÈMES

ET SUR

SON APPLICATION A LA THÉORIE DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES

(SUITE),

PAR M. CH. MÉRAY,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE, PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

Application des principes précédents à la théorie des équations simultanées.

33. Le calcul des assemblages semble éminemment propre à l'étude des questions où sont engagées des quantités solidarisées en systèmes simultanés; son analogie parfaite avec le calcul ordinaire des quantités isolées permet d'utiliser la plupart des artifices de celui-ci, et met dans toute l'analyse des équations une uniformité qui facilite au plus haut degré la conception et la coordination des faits connus, ainsi que la prévision de résultats nouveaux.

La théorie des équations simultanées, à laquelle, jusqu'à présent, on a demandé exclusivement des moyens de traiter les questions de cette espèce, n'offre pas des ressources aussi sûres ni d'une mise en œuvre aussi facile. D'abord, ces équations ont un caractère de discontinuité qui les empêche de se prêter, sans restrictions variées et incommodes, à la mise en équation de problèmes qui ne comportent pas des solutions en nombres, ou de natures convenables. Je veux dire, par exemple, que, si l'on peut assigner deux équations à deux inconnues qui aient pour solutions communes les coordonnées de quatre points pris arbitrairement dans un même plan, on ne le peut plus s'il s'agit de trois points non en ligne droite, du moins sans établir des relations spéciales entre les coefficients, ou sans introduire des solutions étrangères. D'un autre côté, on n'a point pour les équations simultanées les procédés généraux qui, pour les équations à une seule inconnue, permettent (au moins en théorie) de dénombrer facilement les solutions, d'évaluer leurs degrés de multiplicité, de former les équations plus simples que l'on peut quelquefois substituer aux proposées pour certaines racines, et d'appliquer le calcul des fonctions symétriques à la construction des équations dont dépendent des fonctions données des racines, etc.

Il semble bien difficile, pour ne pas dire impossible, de constituer *directement* une théorie des équations simultanées, comparable pour la clarté et pour la simplicité du mécanisme à celle des équations à une inconnue. Il n'est pas non plus possible d'éviter ces équations qui se présentent immédiatement dans tout calcul où sont mêlées plusieurs quantités. Mais on tourne facilement ce double obstacle, en considérant les inconnues comme les pièces d'un même assemblage, et en transformant les équations simultanées dont elles dépendent en une équation *unique* ayant cet assemblage pour inconnue. A partir de ce moment, il n'y a plus de difficultés théoriques, puisqu'on dispose de toutes les ressources de la théorie proprement dite des équations, comme nous l'avons vu dans les paragraphes précédents.

C'est cette transformation que je vais actuellement exécuter; elle revient, au fond, à élargir l'élimination ordinaire, en reliant les équations finales où les inconnues sont absolument dissociées, par une suite d'équations intermédiaires qui forment avec elles un ensemble parfaitement équivalent aux équations proposées, et où, en particulier, la solidarité des inconnues est rétablie. La solution de ce problème repose sur des principes spéciaux qu'il me faut avant tout établir.

34. *Soient x, y les pièces d'indices* $(1,0)$, $(0,1)$ *respectivement, dans un assemblage primordial* (n° 2) *variable z*, $F(z)$ *une fonction entière quel-*

conque de z, $F'(z)$ *sa dérivée* (n° 16) *et*

$$(1) \qquad F_{k,0}, \quad F_{k-1,1}, \quad F_{k-2,2}, \quad \ldots, \quad F_{2,k-2}, \quad F_{1,k-1}, \quad F_{0,k},$$

$$(2) \qquad F'_{k-1,0}, \quad F'_{k-2,1}, \quad \ldots, \quad F'_{1,k-2}, \quad F'_{0,k-1},$$

les fonctions des variables indépendantes x, y *qui constituent les pièces de ces deux assemblages. On a les identités*

$$(3) \qquad 0 = \frac{dF_{k,0}}{dy} = \frac{dF_{0,k}}{dx},$$

$$(4) \qquad F'_{i,j} = \frac{dF_{i+1,j}}{dx} = \frac{dF_{i,j+1}}{dy} \quad (i+j=k-1).$$

1° *Si notre proposition est vraie pour plusieurs fonctions de* z, *elle l'est aussi pour leur somme.*

Cela résulte de ce qu'une somme de plusieurs assemblages a pour pièces les sommes des pièces de mêmes indices dans ses parties, de ce que la dérivée d'une somme d'assemblages ou de fonctions ordinaires est égale à la somme des dérivées de ses parties, et finalement de ce que les relations (3), (4) sont linéaires et homogènes par rapport aux fonctions qui y figurent et à leurs dérivées.

2° *Si notre proposition est vraie pour la fonction* $\varphi(z)$, *elle l'est aussi pour le produit* $\Phi(z) = z\varphi(z)$.

Si q est la taxe de $\varphi(z)$, $q+1$ sera celle de $\Phi(z)$ (n° 7), et l'on trouvera facilement, en appliquant les règles du calcul élémentaire des assemblages,

$$\Phi_{q+1,0} = x\varphi_{q,0}, \quad \Phi_{0,q+1} = y\varphi_{0,q}$$

et

$$\Phi_{i,j} = x\varphi_{i-1,j} + y\varphi_{i,j-1} \qquad (i+j=q+1),$$

quand aucun des indices i, j ne se réduit à zéro. On trouvera finalement

$$\Phi'(z) = z\varphi'(z) + \varphi(z),$$

d'où

$$\Phi'_{i,j} = x\varphi'_{i-1,j} + y\varphi'_{i,j-1} + \varphi_{i,j}$$

pour tout système de valeurs de i, j dont la somme est égale à q, mais à condition de réduire à zéro, dans le second membre, celle des fonctions $\varphi'_{i-1,j}$, $\varphi'_{i,j-1}$ que l'on serait conduit à affecter de quelque indice négatif.

Or la substitution de ces expressions dans les relations (3), (4) les rend identiques, en vertu de celles de même nature qui existent par hypothèse entre les pièces de $\varphi'(z)$ et les dérivées partielles de celles de $\varphi(z)$.

3° Notre théorème est évident quand $F(z)$ se réduit à un assemblage constant a de taxe quelconque; donc il est vrai aussi pour az, puis pour az^2, az^3, ... et pour un monôme quelconque az^m (2°).

Il est donc général (1°), puisque tout polynôme entier en z est une somme de monômes de la forme az^m.

35. On remarquera, en passant, que les relations (3), (4) en entraînent beaucoup d'autres analogues intéressant les pièces des dérivées d'ordres supérieurs de $F(z)$. De même que deux termes consécutifs quelconques de la suite (1) différentiés, le premier par rapport à x, le second par rapport à y, donnent pour résultat unique la pièce de $F'(z)$ qui est placée au-dessous du milieu de leur intervalle dans la ligne (2), on trouvera toutes les pièces de $F''(x)$ en différentiant une fois, soit par rapport à x, soit par rapport à y, celles de $F'(z)$, ou, ce qui revient au même, en différentiant deux fois d'une manière convenable les pièces de $F(z)$; et ainsi de suite.

Il en résulte que les pièces de $F(z), F'(z), F''(z), \ldots, F^{(n)}(z), \ldots$ peuvent être disposées par files horizontales décroissantes, en un tableau triangulaire quinconcial dont la $n^{\text{ième}}$ ligne contient les pièces de $F^{(n-1)}(z)$; et chaque élément du tableau est à la fois la dérivée par rapport à x de l'élément qui est au-dessus de lui à gauche et la dérivée par rapport à y de celui qui est au-dessus de lui, mais à droite. Cette disposition ressemble à celle des dérivées partielles successives d'une fonction ordinaire de deux variables indépendantes, à cela près que, dans cette dernière, le sommet du triangle est en haut.

36. *Réciproquement, un assemblage quelconque Φ de fonctions entières données de x, y*

$$\Phi_{k,0},\ \Phi_{k-1,1},\ \ldots,\ \Phi_{1,k-1},\ \Phi_{0,k} \tag{5}$$

est une fonction (entière) de l'assemblage primordial $z = (x, y)$, si l'on *a les* $k+2$ *identités*

(6) $$\frac{d\Phi_{k,0}}{dy}=\frac{d\Phi_{0,k}}{dx}=0,$$

(7) $$\frac{d\Phi_{i+1,j}}{dx}=\frac{d\Phi_{i,j+1}}{dy}\quad (i+j=k-1).$$

Ce théorème est évident quand les fonctions (5) se réduisent toutes à des constantes, cas auquel Φ est un assemblage constant, c'est-à-dire une forme extrême d'une fonction de z. Nous établirons donc qu'il est général, en prouvant qu'il est vrai pour la valeur m du *degré* de l'assemblage Φ, c'est-à-dire du degré maximum de ses pièces (5), s'il est supposé l'être pour la valeur $m-1$ du même nombre.

Nous supposerons donc que les fonctions (5) sont de degrés égaux ou inférieurs à m, qu'elles satisfont aux relations (6), (7), et nous nommerons $\varphi'_{i,j}(i+j=k-1)$ la valeur commune des deux membres de l'identité (7).

On a d'abord, en vertu des relations (6),

$$\frac{d\varphi'_{k-1,0}}{dy}=\frac{d}{dy}\left(\frac{d\Phi_{k,0}}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\Phi_{k,0}}{dy}\right)=0,$$

et de même

$$\frac{d\varphi'_{0,k-1}}{dx}=0.$$

On a ensuite, en appelant p, q deux entiers quelconques dont la somme est égale à $k-2$,

$$\frac{d\varphi'_{p+1,q}}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\Phi_{p+1,q+1}}{dy}\right)=\frac{d^2\Phi_{p+1,q+1}}{dx\,dy},$$

$$\frac{d\varphi'_{p,q+1}}{dy}=\frac{d}{dy}\left(\frac{d\Phi_{p+1,q+1}}{dx}\right)=\frac{d^2\Phi_{p+1,q+1}}{dx\,dy},$$

d'où

$$\frac{d\varphi'_{p+1,q}}{dx}=\frac{d\varphi'_{p,q+1}}{dy}.$$

Ainsi les fonctions $\varphi'_{k-1,0}$, $\varphi'_{k-2,1}$, ..., $\varphi'_{0,k-1}$ satisfont aux relations (6), (7); mais, comme elles ne sont évidemment que du degré $m-1$

au plus, notre théorème leur est applicable par hypothèse, et ces fonctions sont les pièces d'un certain assemblage φ', fonction entière de z.

L'assemblage $\varphi'(z)$ peut être intégré comme une fonction entière ordinaire; soit $\varphi(z) = (\varphi_{k,0}, \varphi_{k-1,1}, \ldots, \varphi_{0,k})$ une détermination arbitraire de l'intégrale indéfinie $\int \varphi'(z)dz$: on a (n° 34)

$$0 = \frac{d\varphi_{k,0}}{dy} = \frac{d\varphi_{0,k}}{dx},$$

$$\varphi'_{i,j} = \frac{d\varphi_{i+1,j}}{dx} = \frac{d\varphi_{i,j+1}}{dy},$$

et la comparaison de ces identités avec les relations (6), (7) montre que les deux dérivées partielles premières d'une quelconque des fonctions $\varphi_{k,0}, \varphi_{k-1,1}, \ldots, \varphi_{0,k}$ sont respectivement égales aux dérivées semblables du terme de mêmes indices dans la suite (5). Il en résulte que les différences

$$\Phi_{k,0} - \varphi_{k,0}, \quad \Phi_{k-1,1} - \varphi_{k-1,1}, \quad \ldots, \quad \Phi_{0,k} - \varphi_{0,k}$$

se réduisent toutes à des constantes; en d'autres termes, l'assemblage Φ est égal à la somme de l'assemblage φ et d'un certain assemblage constant (de taxe k), c'est-à-dire, comme φ, une certaine fonction de z.

37. Les énoncés précédents se simplifient beaucoup au moyen des considérations suivantes.

Je nommerai *antidérivé* de l'assemblage Φ du numéro précédent, et je désignerai par la notation $\nabla\Phi$ la somme des deux assemblages

$$(8) \qquad \left(\frac{d\Phi_{k,0}}{dy}, \frac{d\Phi_{k-1,1}}{dy}, \ldots, \frac{d\Phi_{1,k-1}}{dy}, \frac{d\Phi_{0,k}}{dy}, 0\right),$$

$$(9) \qquad \left(0, -\frac{d\Phi_{k,0}}{dx}, \ldots, -\frac{d\Phi_{1,k-1}}{dx}, -\frac{d\Phi_{0,k}}{dx}\right),$$

qui ont pour pièces, le premier, les dérivées partielles par rapport à y des pièces de Φ et zéro, le second zéro et les dérivées des mêmes fonctions prises par rapport à x et multipliées par -1.

L'assemblage $\nabla\Phi$ étant de même nature que Φ, c'est-à-dire ayant pour pièces des polynômes entiers en x, y, a aussi un antidérivé $\nabla\nabla\Phi$

ou $\nabla^2\Phi$, qui sera l'*antidérivé du second ordre de* Φ, et ainsi de suite; $\nabla^n\Phi$, *antidérivé du* $n^{ième}$ *ordre de* Φ et le résultat de n opérations successives semblables à celle qui conduit de Φ à $\nabla\Phi$, exécutées chacune sur le résultat de la précédente.

D'après cela, les propositions des n^{os} **34, 35** et **36** peuvent s'énoncer partiellement comme il suit :

Les antidérivés de tous ordres d'une fonction entière de l'assemblage primordial $z = (x, y)$ *sont nuls identiquement.*

Réciproquement, un assemblage quelconque de fonctions entières des variables indépendantes x, y *est une fonction de* z, *si son premier antidérivé est identiquement nul.*

38. La définition des antidérivés s'étend d'elle-même au cas où les pièces de l'assemblage proposé seraient des fonctions rationnelles non entières de x, y ou même des fonctions quelconques, pourvu, bien entendu, qu'elles soient olotropes (*voir* note de la p. 104).

Voici maintenant les principales règles du calcul de ces nouvelles expressions; on remarquera son analogie parfaite avec le calcul des dérivées ordinaires.

I. En nommant m le degré de Φ (**36**), il est évident que *celui de* $\nabla\Phi$ *est égal ou inférieur à* $m - 1$, et par suite que *celui de* $\nabla^n\Phi$ *est* $m - n$ *au plus*. Si n est $> m$, $\nabla^n\Phi$ s'évanouit identiquement.

Quant à la taxe de $\nabla\Phi$, *elle est précisément égale à* $k + 1$, k désignant toujours la taxe de Φ; il en résulte que *celle de* $\nabla^n\Phi$ *est égale à* $k + n$.

Si, par exemple, Φ se réduit à un polynôme ordinaire en x, y de degré m, $\nabla^n\Phi$ est l'assemblage de degré $m - n$ et de taxe n

$$\left[\frac{d^n\Phi}{dy^n}, \ \ldots, \ (-1)^p \frac{n!}{(n-p)!\,p!}\frac{d^n\Phi}{dy^{n-p}\,dx^p}, \ \ldots, \ (-1)^n\frac{d^n\Phi}{dx^n}\right].$$

II. *L'antidérivé de la somme de plusieurs assemblages* (*de fonctions de* x, y) *est la somme des antidérivés de ces assemblages.*

L'antidérivé d'un assemblage tel que Φ (**37**) est, par définition, la somme des assemblages (8), (9) que nous désignerons pour un moment par $\nabla_y\Phi$, $\nabla_x\Phi$. Cela posé, il est bien évident, en tenant compte des propriétés élémentaires des dérivées, que si Φ est la somme des assemblages Φ', Φ'', ..., $\Phi^{(q)}$, on a

$$\nabla_y \Phi = \nabla_y \Phi' + \nabla_y \Phi'' + \ldots + \nabla_y \Phi^{(q)},$$
$$\nabla_x \Phi = \nabla_x \Phi' + \nabla_x \Phi'' + \ldots + \nabla_x \Phi^{(q)},$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$\nabla \Phi = \nabla \Phi' + \nabla \Phi'' + \ldots + \nabla \Phi^{(q)}. \tag{10}$$

III. *En appelant* Φ, Ψ *deux assemblages quelconques* (*de fonctions de* x, y), *on a la formule*

$$\nabla(\Phi.\Psi) = \Phi.\nabla\Psi + \Psi.\nabla\Phi. \tag{11}$$

Chaque pièce du produit $\Phi\Psi$ étant une fonction linéaire et homogène tant des pièces de Φ que de celles de Ψ (n° 7, 3°), sa dérivée, par rapport à y, est évidemment la somme des résultats que l'on obtient en y substituant aux pièces de Ψ, puis à celles de Φ, les dérivées de ces fonctions prises par rapport à y. Il en résulte immédiatement

$$(\Phi.\Psi)'_y = \Phi.\Psi'_y + \Psi.\Phi'_y,$$

en désignant pour un moment par $(\Phi.\Psi)'_y$, Ψ'_y, Φ'_y ce que deviennent les assemblages $\Phi.\Psi$, Ψ, Φ par la différentiation de toutes leurs pièces par rapport à y. On en déduit

$$\nabla_y(\Phi.\Psi) = \Phi.\nabla_y\Psi + \Psi.\nabla_y\Phi,$$

car on voit aisément, avec un peu d'attention, que les assemblages $\nabla_y(\Phi.\Psi)$, $\nabla_y\Psi$, $\nabla_y\Phi$, $\Phi.\nabla_y\Psi$, $\Psi.\nabla_y\Phi$ sont précisément les assemblages $(\Phi.\Psi)'_y$, Ψ'_y, Φ'_y, $\Phi.\Psi'_y$, $\Psi.\Phi'_y$ allongés chacun d'une dernière pièce nulle.

On trouve de même

$$\nabla_x(\Phi.\Psi) = \Phi.\nabla_x\Psi + \Psi.\nabla_x\Phi,$$

relation qui, ajoutée membre à membre avec la précédente, donne précisément la formule (11).

IV. L'application répétée de la formule (11) conduit à une formule de même nature pour le calcul de l'antidérivé d'un produit d'un nombre quelconque d'assemblages de fonctions de x, y. On trouve facilement que *cet antidérivé est la somme des résultats obtenus en remplaçant successivement dans le produit proposé chaque facteur par son antidérivé.*

Si le produit en question contient m facteurs égaux à Φ, il vient simplement

$$\nabla(\Phi^m) = m\Phi^{m-1}\nabla\Phi. \tag{12}$$

V. En combinant les résultats partiels qui viennent d'être obtenus, on trouve facilement cette règle fort simple qui les renferme tous :

L'antidérivé $\nabla\Omega(\Phi, \Psi, \ldots)$ *d'une fonction composée entière* $\Omega(\Phi, \Psi, \ldots)$ *d'un nombre quelconque d'assemblages* Φ, Ψ, ... *de fonctions de* x, y *est égal à*

$$\frac{d\Omega}{d\Phi}\cdot\nabla\Phi + \frac{d\Omega}{d\Psi}\cdot\nabla\Psi + \ldots,$$

somme des dérivées de la composante Ω *par rapport à* Φ, Ψ, ... (n° **16**), *multipliées respectivement par les antidérivés* $\nabla\Phi$, $\nabla\Psi$, ... *de ces assemblages simples.*

VI. Il résulte de la proposition précédente que l'antidérivé d'une fonction composée entière de plusieurs assemblages est aussi une fonction composée entière de ces assemblages et de leurs antidérivés; donc de nouvelles applications de la règle qu'elle établit fourniront l'antidérivé du second ordre de la fonction proposée dont il s'agit, celui du troisième, du quatrième ordre, ..., et ainsi de suite, aussi loin qu'on voudra aller.

On notera en particulier la formule

$$\nabla^m(\Phi.\Psi) = \sum \frac{m!}{p!\,q!}\nabla^p\Phi.\nabla^q\Psi, \tag{13}$$

la sommation Σ étant étendue à toutes les combinaisons distinctes des valeurs des entiers p, q dont la somme est égale à m.

VII. On remarquera, en passant, que les règles ci-dessus établies permettent de démontrer en fort peu de mots la proposition directe énoncée à la fin du n° 37. Effectivement, pour une fonction entière quelconque $f(z)$ de l'assemblage primordial $z = (x, y)$, on a (V)

$$\nabla f(z) = f'(z).\nabla z;$$

or $\nabla z = (0, 0, 0)$ est identiquement nul : donc $\nabla f(z)$ l'est aussi.

39. *Soient* φ, ψ, ... *des polynômes entiers indéterminés en* x, y *et*

$$\Theta(\varphi, \nabla\varphi, \nabla^2\varphi, \ldots, \nabla^m\varphi, \psi, \nabla\psi, \ldots, \nabla^n\psi, \ldots)$$

une fonction composée entière de φ, ψ, ... *et de leurs* m, n, ... *premiers antidérivés; soient encore* M, N, ... *des entiers au moins égaux à* m, n, ... *respectivement. Si le polynôme* Θ *s'annule quelles que soient* x, y, *toutes les fois que* φ, ψ, ... *dégénèrent en des produits de* M, N, ... *facteurs tant linéaires que constants, ses coefficients sont tous nuls, et partant il s'évanouit quels que soient* φ, ψ, ...

Il est évident tout d'abord que, si cette proposition est vraie pour certaines valeurs de M, N, ..., elle l'est nécessairement aussi pour toutes les valeurs supérieures des mêmes nombres; nous supposerons donc $M = m$, $N = n$, ... Nous supposerons ensuite, pour faire la démonstration, que Θ ne dépend que de φ (et de ses m premiers antidérivés), ce qui montrera suffisamment comment il faut raisonner dans le cas le plus général. Cela posé, nous nommerons μ le degré de Θ par rapport à $\nabla^m\varphi$ et nous commencerons par prouver que si notre théorème est vrai pour $m \overline{\underset{<}{}} m_1 - 1$, quel que soit μ, et en outre pour $m \overline{\underset{<}{}} m_1$, $\mu \overline{\underset{<}{}} \mu_1 - 1$, il l'est aussi pour $m = m_1$, $\mu = \mu_1$.

En effet, si $m = m_1$, $\mu = \mu_1$, on peut poser

$$(14) \qquad \Theta = \Theta_{m_1-1} + \Theta_{m_1,\mu_1-1}\nabla^{m_1}\varphi,$$

Θ_{m_1-1}, Θ_{m_1,μ_1-1}, désignant des polynômes analogues à Θ, dont le premier peut contenir φ, $\nabla\varphi$, ..., $\nabla^{m_1-1}\varphi$, mais non $\nabla^{m_1}\varphi$, et dont le second est, par rapport à $\nabla^{m_1}\varphi$, de degré $\mu_1 - 1$ au plus.

Soit alors g un entier quelconque au moins égal à 1 et au plus égal à m_1; si l'on remplace φ par un produit de g constantes et de $m_1 - g$ facteurs linéaires, on a par hypothèse $\Theta = 0$; on a en outre $\nabla^{m_1}\varphi = 0$, parce que $m_1 - g$, degré de φ, est inférieur à m_1 (38, I). La relation précédente donne donc $\Theta_{m_1-1} = 0$, quelles que soient x, y, pour toutes les déterminations de φ dont il s'agit, et par suite pour toutes les déterminations imaginables de cette fonction, puisque nous supposons notre lemme vrai, quel que soit μ, pour $m \overline{\underset{<}{}} m_1 - 1$, ce qui est le cas du polynôme Θ_{m_1-1}.

La relation (14) devient donc simplement

$$(15) \qquad \Theta = \Theta_{m_1,\mu_1-1}\nabla^{m_1}\varphi.$$

Le produit $\Theta_{m_1,\mu_1-1}\nabla^{m_1}\varphi$ s'évanouit donc en particulier, chaque fois que φ se réduit à un produit de m_1 facteurs linéaires *variables;* mais, comme alors $\nabla^{m_1}\varphi$ n'est pas nul (38, I), l'autre facteur Θ_{m_1,μ_1-1} s'évanouit nécessairement dans les mêmes circonstances. On en conclut facilement, en appliquant la méthode des limites, que ce polynôme s'annule encore, même quand φ est un produit de quelques constantes et de moins de m_1 facteurs linéaires. Donc Θ_{m_1,μ_1-1} est nul quel que soit φ, puisque l'exactitude de notre lemme est admise pour $m \overline{\gtrless} m_1$, $\mu \overline{\gtrless} \mu_1 - 1$, ce qui a lieu pour ce polynôme, et la relation (15) donne bien identiquement $\Theta = 0$ pour $m = m_1$, $\mu = \mu_1$.

Maintenant notre théorème est évident pour $m = 0$, quel que soit μ, et en outre, car c'est la même chose, pour $m \overline{\gtrless} 1$, $\mu = 0$; donc, en vertu de ce qui précède, il est vrai pour $m = 1$, $\mu = 1, 2, 3, \ldots$, successivement, et cela quel que soit M, d'après la remarque par laquelle nous avons débuté.

Mais le cas de $m = 1$, $M = 2$, $\mu = 1$ est identique à celui où l'on a $m = 2$, $M = 2$, $\mu = 0$; donc notre théorème est encore vrai pour $m = 2$, $\mu = 1, 2, 3, \ldots$ quel que soit M, c'est-à-dire pour $m = 2$ quels que soient M et μ; et, en continuant ainsi de proche en proche, on arrivera à constater son exactitude pour une valeur quelconque de m.

On notera en outre, bien que cette observation ne nous soit pas actuellement utile, que, si les conditions de l'énoncé sont remplies, la fonction composée Θ est nulle, même quand $\varphi, \psi, \ldots$ désignent, non de simples fonctions indéterminées de x, y, mais des assemblages quelconques de semblables fonctions.

40. Nous pouvons maintenant passer à la solution du problème que nous avons en vue, savoir :

Étant données entre les inconnues x, y deux équations simultanées entières de degrés quelconques m, n,

$$f(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0, \tag{16}$$

former l'équation

$$\Omega(z) = 0, \tag{17}$$

qui a pour racines tous les assemblages primordiaux $z = (x, y)$ constitués par les couples de solutions communes aux équations proposées.

I. Si les équations (16) sont toutes deux linéaires, on peut prendre

$$\Omega(z) = \nabla f . \mathrm{F} - \nabla \mathrm{F} . f. \tag{18}$$

Effectivement, l'antidérivé du second membre de cette formule calculé conformément aux règles du n° 38 est

$$\nabla f . \nabla \mathrm{F} + \nabla^2 f . \mathrm{F} - \nabla \mathrm{F} . \nabla f - \nabla^2 \mathrm{F} . \nabla f$$

et, partant, s'évanouit quelles que soient x, y; car f, F étant des fonctions de degré 1, on a $\nabla^2 f = \nabla^2 \mathrm{F} = 0$ (38, I). Donc, en premier lieu, ce second membre est bien une fonction de z (n° 37).

D'autre part, les valeurs de x, y qui annulent à la fois $f(x, y)$, $\mathrm{F}(x, y)$ forment un assemblage qui annule évidemment $\Omega(z)$; car, en vertu de la relation (18), chaque pièce de l'assemblage $\Omega(z)$ est une fonction composée linéaire et homogène de $f(x, y)$ et de $\mathrm{F}(x, y)$.

II. Supposons maintenant que f soit toujours linéaire, mais que n, de degré F, soit quelconque.

A. Si F est décomposable en n facteurs linéaires $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_n$, il est évident que l'ensemble des couples de solutions des équations (16) est celui des solutions communes aux n couples d'équations linéaires simultanées

$$\left\{\begin{array}{l} f = 0, \\ \mathrm{F}_1 = 0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} f = 0, \\ \mathrm{F}_2 = 0, \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \ldots, \\ \ldots, \end{array} \quad \left\{\begin{array}{l} f = 0, \\ \mathrm{F}_n = 0. \end{array}\right. \tag{19}$$

Par suite $\Omega(z)$, premier membre de l'équation (17), est le produit des n assemblages

$$[f, \mathrm{F}_1], \quad [f, \mathrm{F}_2], \quad \ldots, \quad [f, \mathrm{F}_n],$$

déduits, comme ci-dessus (I), des premiers membres des équations (19).

On a ainsi, en vertu de la formule (18),

$$\left\{\begin{aligned} \Omega(z) &= [f, \mathrm{F}_1][f, \mathrm{F}_2]\ldots[f, \mathrm{F}_n] \\ &= \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{n}{}_p \left\{ (-1)^p (\nabla f)^{n-p} f^p \, \Sigma \left[\mathrm{F}_{g_1} \mathrm{F}_{g_2} \ldots \mathrm{F}_{g_{n-p}} \nabla \mathrm{F}_{h_1} \nabla \mathrm{F}_{h_2} \ldots \nabla \mathrm{F}_{h_p} \right] \right\}, \end{aligned}\right. \tag{20}$$

la sommation Σ s'étendant à tous les systèmes de valeurs des indices $h_1, h_2, \ldots, h_p$ qui constituent les combinaisons p à p des nombres $1, 2, \ldots, n$ accompagnés chacun du système de valeurs des indices

g_1, g_2, ..., g_{n-p} qui forme la combinaison complémentaire $n-p$ à $n-p$ des mêmes nombres.

Or, en antidifférentiant 1, 2, ..., p, ..., n fois le produit

$$F = F_1 F_2 \ldots F_n,$$

et se rappelant que, ses facteurs étant tous linéaires, leurs antidérivés d'ordres supérieurs à 1 s'évanouissent tous, on trouvera facilement (n° 38, IV)

$$(21)\quad \begin{cases} \nabla F = 1!\,\Sigma\left[F_{g_1}F_{g_2}\ldots F_{g_{n-1}}\nabla F_{h_1}\right], \\ \nabla^2 F = 2!\,\Sigma\left[F_{g_1}F_{g_2}\ldots F_{g_{n-2}}\nabla F_{h_1}\nabla F_{h_2}\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \nabla^p F = p!\,\Sigma\left[F_{g_1}F_{g_2}\ldots F_{g_{n-p}}\nabla F_{h_1}\nabla F_{h_2}\ldots\nabla F_{h_p}\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \nabla^n F = n!\,\nabla F_1 \nabla F_2 \ldots \nabla F_n. \end{cases}$$

Si maintenant dans le second membre de la formule (20) on substitue aux sommes Σ leurs valeurs tirées des relations (21), il vient, en développant la somme S,

$$(22)\quad \Omega(z) = (\nabla f)^n F - \ldots + (-1)^p (\nabla f)^{n-p} f^p \frac{\nabla^p F}{p!} + \ldots + (-1)^n f^n \frac{\nabla^n F}{n!},$$

formule où n'entrent plus que les polynômes f, F avec leurs antidérivés d'ordres égaux et inférieurs à leurs degrés 1, n respectivement.

B. Il est facile de s'assurer à présent que la formule (22) est applicable au calcul de $\Omega(z)$, même quand le polynôme F n'est pas décomposable en n facteurs linéaires.

Supposons effectivement que, dans le second membre $[f, F]$ de cette formule, F représente un polynôme entier quelconque de degré n; comme $\nabla^{n+1}F$ s'évanouit (38, I), l'antidérivé de $[f, F]$ se réduit, en ce qui concerne F, à une fonction composée entière $\Theta(F, \nabla F, \ldots, \nabla^n F)$ de ce polynôme et de ses n premiers antidérivés seulement (n° 38, V). Or, en vertu de ce qui a été établi ci-dessus (A), $[f, F]$ est fonction de z, et par suite $\Theta = \nabla[f, F]$ est nul quelles que soient x, y (n° 37), quand F est décomposable en n facteurs linéaires et même en n facteurs tant linéaires que constants, comme on s'en assure facilement soit en employant la méthode des limites, soit en discutant directement la formule (22). Donc le théorème du n° 39 est applicable, et Θ est nul quel que soit F; mais Θ est l'antidérivé de $[f, \mathrm{F}]$ tant que F est du degré n. Donc enfin, quelle que soit la fonction de degré n que puisse désigner la lettre F, $\nabla[f, \mathrm{F}]$ s'évanouit quelles que soient x, y, et partant $[f, \mathrm{F}]$ se réduit à une certaine fonction de z (n° 37).

On peut encore établir *a posteriori* l'exactitude du point dont il s'agit, en calculant directement l'antidérivé du second membre de la formule (22), ce qui n'offre aucune difficulté. On vérifie facilement qu'il s'évanouit quels que soient f, F, pourvu que l'on ait $\nabla^2 f = \nabla^{n+1}\mathrm{F} = 0$, c'est-à-dire que les degrés de ces polynômes ne surpassent pas 1, n.

D'autre part, la fonction $\Omega(z)$ s'évanouit quand les pièces de z sont des solutions communes aux équations (16), parce que le second membre de la formule (22) ne contient aucun terme qui n'ait pour facteur F ou une puissance de f.

III. Supposons enfin que les degrés m, n de f, F soient des entiers quelconques.

A. Si f est le produit de m facteurs linéaires $f_1, f_2, \ldots, f_m$, on trouvera, en raisonnant comme ci-dessus (II, A), que $\Omega(z)$ est le produit des m résultats $[f_1, \mathrm{F}]$, $[f_2, \mathrm{F}]$, ..., $[f_m, \mathrm{F}]$ que l'on obtient en remplaçant successivement f par chacun de ces facteurs dans le second membre de la formule (22).

On a évidemment

$$(23)\quad [f_1, \mathrm{F}]\ldots[f_m, \mathrm{F}] = \mathbf{S}\left\{(-1)^{p_1+\ldots+p_m}\frac{\nabla^{p_1}\mathrm{F}}{p_1!}\cdots\frac{\nabla^{p_m}\mathrm{F}}{p_m!}\,\Sigma\left[f_1^{p_1}\ldots f_m^{p_m}(\nabla f_1)^{n-p_1}\ldots(\nabla f_m)^{n-p_m}\right]\right\},$$

la sommation désignée par Σ s'étendant à toutes les permutations des m lettres $f_1, f_2, \ldots, f_m$ qui donnent au monôme $f_1^{p_1} f_2^{p_2}\ldots f_m^{p_m}$ des formes dissemblables (quand on y considère un moment ces lettres comme désignant autant de variables indépendantes), ces permutations étant accompagnées chacune des permutations correspondantes de $\nabla f_1, \nabla f_2, \ldots, \nabla f_m$ dans le produit $(\nabla f_1)^{n-p_1}(\nabla f_2)^{n-p_2}\ldots(\nabla f_m)^{n-p_m}$. Quant à la sommation S, elle s'étend à tous les systèmes distincts, de valeurs inférieures ou égales à n, des entiers $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Le facteur

$$\Sigma\left[f_1^{p_1} f_2^{p_2} \ldots f_m^{p_m} (\nabla f_1)^{n-p_1} (\nabla f_2)^{n-p_2} \ldots (\nabla f_m)^{n-p_m}\right]$$

du terme général de la somme S se réduit visiblement à un polynôme entier en f, ∇f, $\nabla^2 f$, ..., $\nabla^m f$. Effectivement on peut l'écrire

$$(24)\quad (f_1 f_2 \ldots f_m)^n \sum\left[\left(\frac{\nabla f_1}{f_1}\right)^{n-p_1} \left(\frac{\nabla f_2}{f_2}\right)^{n-p_2} \ldots \left(\frac{\nabla f_m}{f_m}\right)^{n-p_m}\right] = f^n \Sigma\left[r_1^{n-p_1} r_2^{n-p_2} \ldots r_m^{n-p_m}\right],$$

en se souvenant que $f_1 f_2 \ldots f_m = f$, et posant, pour abréger,

$$\frac{\nabla f_1}{f_1} = r_1, \quad \frac{\nabla f_2}{f_2} = r_2, \quad \ldots, \quad \frac{\nabla f_m}{f_m} = r_m.$$

Mais, en appelant R_1, R_2, R_3, ..., et R_m la somme des expressions r_1, r_2, ..., r_m, celles de leurs produits 2 à 2, 3 à 3, ..., et leur produit total $r_1 r_2 \ldots r_m$, on obtiendra, en raisonnant comme dans la théorie des fonctions symétriques,

$$(25)\qquad \Sigma\left[r_1^{n-p_1} r_2^{n-p_2} \ldots r_m^{n-p_m}\right] = \Pi(R_1, R_2, \ldots, R_m).$$

Les formules, (21), appliquées au produit de $f_1 f_2 \ldots f_m$, donnent évidemment

$$(26)\qquad R_1 = \frac{1}{1!}\frac{\nabla f}{f}, \quad R_2 = \frac{1}{2!}\frac{\nabla^2 f}{f}, \quad \ldots, \quad R_m = \frac{1}{m!}\frac{\nabla^m f}{f},$$

moyennant quoi le second membre de l'équation (24) devient

$$(27)\qquad f^n\, \Pi\left(\frac{1}{f}\frac{\nabla f}{1!}, \ \frac{1}{f}\frac{\nabla^2 f}{2!}, \ \frac{1}{f}\frac{\nabla^3 f}{3!}, \ \ldots, \ \frac{1}{f}\frac{\nabla^m f}{m!}\right).$$

Or cette expression est une fonction entière de f, ∇f, $\nabla^2 f$, ..., $\nabla^m f$, car on sait, par la théorie des fonctions symétriques, que le degré du second membre de la relation (25) par rapport à R_1, R_2, ..., R_m (considérées comme autant de variables indépendantes) est précisément égal au plus grand des exposants $n - p_1$, ... de r_1, r_2, ..., r_m dans le premier membre de la même relation; d'où il suit que ce degré est au plus égal à n. En conséquence, aucun terme du second facteur Π de l'expression (27) ne peut avoir en dénominateur une puissance de f d'exposant supérieur à n, et partant, comme ce facteur est déjà entier par rapport à ∇f, $\nabla^2 f$, ..., $\nabla^m f$, son produit par f^n l'est en outre par rapport à f.

En résumé, si l'on nomme

$$\Lambda_{p_1, p_2, \ldots, p_m}\left(f, \frac{\nabla f}{1!}, \frac{\nabla^2 f}{2!}, \ldots, \frac{\nabla^m f}{m!}\right)$$

la fonction entière de f, ∇f, ..., $\nabla^m f$, à laquelle se réduit ainsi l'un ou l'autre membre de l'équation (24), la formule (23) donne

$$(28)\quad \Omega(z) = \mathbf{S}\left[(-1)^{p_1+\ldots+p_m}\frac{\nabla^{p_1}\mathrm{F}}{p_1!}\cdots\frac{\nabla^{p_m}\mathrm{F}}{p_m!}\Lambda_{p_1,\ldots,p_m}\left(f, \frac{\nabla f}{1!}, \ldots, \frac{\nabla^m f}{m!}\right)\right],$$

où la somme S est une fonction composée entière de f, ∇f, ..., $\nabla^m f$, F, ∇F, .., ∇^nF seulement.

B. Mais, de même que pour la formule (22), l'exactitude de la formule (28) n'est pas limitée par la possibilité de décomposer f en m facteurs linéaires.

Il est évident, en effet, que le second membre de la formule (22) ne cesse pas de pouvoir être considéré comme une fonction de z, quand la fonction linéaire f y dégénère en une constante; car il se réduit visiblement alors à un assemblage constant de taxe n. Donc le second membre de la formule (28), qui est un produit d'expressions de même nature que celui de la formule (22), est certainement fonction de z toutes les fois que f peut être décomposé en m facteurs linéaires ou constants en tout ou en partie, et partant son antidérivé s'évanouit (n° 37).

Cet antidérivé ne renfermant que ∇f, $\nabla^2 f$, ..., $\nabla^m f$ (en ce qui concerne f), on démontrera facilement, à l'aide du théorème du n° 39, en raisonnant exactement comme nous l'avons fait plus haut (II, B), qu'il s'évanouit encore quand f est un polynôme quelconque de degré m; d'où résulte l'exactitude de la formule (28) pour deux fonctions entières quelconques f, F de degrés m, n, je veux dire la propriété du second membre de se réduire toujours à quelque fonction de z.

Finalement, un terme quelconque de la somme S qui constitue le second membre de la formule (28) contient en facteur l'un au moins des polynômes f, F. Car, si dans le terme général de cette somme l'un des entiers $p_1, p_2, \ldots, p_m$ se réduit à zéro, F y figure comme facteur; et si aucun de ces membres ne s'évanouit, le plus grand des entiers $n-p_1, n-p_2, \ldots, n-p_m$, c'est-à-dire le degré du second membre de la relation (25) par rapport à $R_1, R_2, \ldots, R_m$, est inférieur à n, et f reste encore une fois au moins comme facteur dans tous les termes de l'expression (27), après sa transformation en $\Lambda_{p_1, p_2, \ldots, p_m}\left(f, \frac{\nabla f}{1!}, \ldots\right)$.

De là on conclut, comme il restait à s'en assurer, que le polynôme $\Omega(z)$, défini par la formule (28), s'évanouit bien chaque fois que z a pour pièces les éléments de quelque couple de solutions communes aux équations (16).

41. Après avoir calculé le second membre de la formule (28) pour deux entiers déterminés m, n, à l'aide de deux polynômes entiers f, F dégénérant en produits de m, n facteurs linéaires, on peut, comme nous venons de le faire, y remplacer les lettres f, F par deux fonctions entières quelconques de degrés m, n. Mais rien n'empêche de supposer aussi que f, F sont des fonctions entières de x, y de degrés quelconques différents de m, n. On n'obtient pas alors une fonction de z, mais on a toujours une fonction composée parfaitement déterminée de $f, \nabla f, \ldots, \nabla^m f, F, \nabla F, \ldots, \nabla^n F$, qui me semble destinée à jouer un certain rôle dans la théorie des fonctions de deux variables. Je nommerai cette expression le *dialysant d'indicateurs* m, n des fonctions f, F et je le désignerai par $[f, F]_{m,n}$ (¹).

Si dans $[f, F]_{m,n}$ les degrés *effectifs* de f, F sont précisément égaux aux indicateurs m, n respectivement, je nommerai cette expression le *dialysant* (tout court) des fonctions f, F et je le désignerai simplement par $[f, F]$; on peut ajouter l'épithète *principal* quand il y a quelque confusion à éviter.

Ces définitions permettent d'énoncer en ces peu de mots les résultats obtenus dans le numéro précédent :

Le dialysant principal des premiers membres des équations simulta-

(¹) Cette notion s'étend d'elle-même au cas où f, F seraient des fonctions olotropes quelconques de x, y, ou même des assemblages de semblables fonctions.

nées (16) *se réduit à une fonction entière de l'assemblage primordial* $z = (x, y)$, *qui s'évanouit pour toutes les valeurs de* x, y *qui satisfont à la fois à ces deux équations.*

Voici les premières remarques à faire sur ces nouvelles expressions.

I. On retiendra que la méthode à l'aide de laquelle nous avons formé $[f, F]$ consiste au fond à supposer f, F décomposables en facteurs linéaires $f_1, f_2, \ldots, f_m, F_1, F_2, \ldots, F_n$, à exprimer le produit des mn facteurs $[f_i, F_j] = (\nabla f_i . F_j - \nabla F_j . f_i)$ (40, I) en fonction composée de f, F et de leurs antidérivés, puis à supposer, dans l'expression ainsi obtenue, que f, F sont des polynômes entiers quelconques de degrés m, n.

Cela fait, si l'on remplace encore f, F par des fonctions quelconques, on aura $[f, F]_{m,n}$, dialysant d'indicateurs m, n de ces fonctions.

II. *La taxe d'un dialysant est égale au produit de ses indicateurs.*

En effet, nous venons de faire remarquer (I) que le dialysant principal $[f, F]$ de produits f, F de m, n facteurs linéaires $\ldots, f_i, \ldots, \ldots, F_j, \ldots$ est égal au produit des mn facteurs $\nabla f_i . F_j - \nabla F_j . f_i$; tous ces facteurs ayant évidemment 1 pour taxe commune, leur produit a pour taxe leur nombre même, c'est-à-dire mn. Or la substitution de fonctions quelconques à f, F ne peut altérer la taxe du résultat; car, quelles que soient f, F, les taxes de $f, \nabla f, \ldots, \nabla^m f$, F, ∇F, $\ldots, \nabla^n$F sont toujours $0, 1, \ldots, m, 0, 1, \ldots, n$.

On pourrait encore raisonner comme ci-dessous (III).

III. *Les lettres* μ, ν *désignant les degrés des fonctions entières* f, F, *le degré apparent de* $[f, F]_{m,n}$ *par rapport à* x, y *est égal à* $m\nu + n\mu - mn$.

On sait, par la théorie des fonctions symétriques, que le *poids* de la fonction $\Pi(R_1, R_2, \ldots, R_m)$ de la relation (25) du n° 40, c'est-à-dire la somme uniforme des produits des indices des lettres $R_1, R_2, \ldots, R_m$ par leurs exposants $k_1, k_2, \ldots, k_m$ dans un même terme quelconque, est égal au degré du premier membre de cette même relation par rapport à $r_1, r_2, \ldots, r_m$. En d'autres termes, on a

$$1.k_1 + 2.k_2 + \ldots + m.k_m = mn - (p_1 + p_2 + \ldots + p_m).$$

Mais, d'après les formules (26), les degrés par rapport à x, y de $R_1, R_2, \ldots, R_m$ étant respectivement $-1, -2, \ldots, -m$, celui du second facteur du produit (27) est $-(1.k_1+2.k_2+\ldots+m.k_m)$ ou $(p_1+p_2+\ldots+p_m)-mn$ par ce qui précède. Le degré du premier facteur f^n est évidemment $n\mu$; donc le degré de l'expression (27), ou, ce qui revient au même, de la fonction $\Lambda_{p_1,p_2,\ldots,p_m}$ de la formule (28) est $n\mu-mn+(p_1+p_2+\ldots+p_m)$.

Enfin le degré de $\nabla^{p_1}F.\nabla^{p_2}F\ldots.\nabla^{p_m}F$, autre facteur du terme général de la somme S, étant

$$(\nu-p_1)+(\nu-p_2)+\ldots+(\nu-p_m)=m\nu-(p_1+p_2+\ldots+p_m),$$

ce terme général est bien de degré $m\nu+n\mu-mn$, ainsi que la somme S, c'est-à-dire le dialysant $[f, F]_{m,n}$.

Il en résulte évidemment que *le degré apparent du dialysant principal* $[f, F]$, *tant par rapport à x, y que par rapport à l'assemblage z dont il est fonction, est égal à mn, produit soit des indicateurs, soit des degrés des fonctions.* On établirait encore ce point en raisonnant comme ci-dessus (II).

Par *degré apparent* j'entends le degré maximum en x, y (et en z dans le second cas) des termes des pièces de $[f, F]_{m,n}$, abstraction faite de la valeur numérique de leurs coefficients. Quant au degré *effectif*, il est clair qu'il peut s'abaisser au-dessous de ce maximum, car des données numériques particulières peuvent réduire à zéro les coefficients de tels ou tels termes. Mais il importe de remarquer que cet abaissement n'est qu'*accidentel;* effectivement, quand f, F sont des produits de m, n facteurs linéaires dont les dialysants $[f_i, F_j]$ ne tombent pas au-dessous du premier degré, le degré effectif de $[f, F]$ est bien égal à son degré apparent mn.

IV. *On a l'identité*

$$[f, F]_{m,n}=(-1)^{mn}[F, f]_{n,m} \tag{29}$$

Ce point est évident quand f, F dégénèrent en des produits $f_1\ldots f_i\ldots f_m$, $F_1\ldots F_j\ldots F_n$ de m, n facteurs linéaires; car la double transposition de f, F et de m, n équivaut à la transposition de f_i, F_j dans chacun des mn facteurs $\nabla f_i.F_j-\nabla F_j.f_i$ dont se compose alors $[f, F]_{m,n}$ (I), c'est-à-dire à la multiplication de chacun de ces facteurs par -1, et partant de leur produit par $(-1)^{mn}$.

On a ainsi
$$[f, F]_{m,n} - (-1)^{mn}[F, f]_{n,m} = 0,$$
toutes les fois que f, F sont des produits de m, n facteurs linéaires, et même, comme il est facile de s'en assurer, quand quelques-uns de ces facteurs dégénèrent en des constantes. Or le premier membre de cette identité ne contient les antidérivés de f, F que jusqu'aux ordres m, n inclusivement : donc elle a lieu quels que soient f, F, en vertu du théorème du n° 39.

Quand les indicateurs m, n sont égaux à un même nombre M, la double transposition dont il s'agit équivaut à la simple permutation des lettres f, F dans le développement de $[f, F]_{M,M}$, et l'identité (29) devient

(30) $$[f, F]_{M,M} = (-1)^{M^2}[F, f]_{M,M}.$$

V. *Tous les termes de* $[f, F]_{m,n}$ *contiennent en facteur soit* f, *soit* F, *et en outre l'un au moins des antidérivés extrêmes* $\nabla^m f$, $\nabla^n F$.

Le premier point est une conséquence de ce qui a été dit au n° 40 (III, B); le second pourrait s'établir directement par la discussion du second membre de la formule (28), mais on a plus tôt fait de raisonner comme il suit :

Le second membre de la formule (22) se réduit évidemment à zéro quand F est de degré égal ou inférieur à $n-1$ et que f se réduit à une constante, car on a alors $\nabla f = \nabla^n F = 0$. Par conséquent l'une au moins des expressions $[f_1, F]$, $[f_2, F]$, ..., $[f_m, F]$ du numéro précédent (III, A) et, partant, le second membre de la formule (28) s'évanouissent aussi quand f et F dégénèrent en des produits de facteurs linéaires en nombres égaux ou inférieurs à $m-1$, $n-1$ respectivement. Comme cette hypothèse donne $\nabla^m f = \nabla^n F = 0$, elle annule aussi le polynôme Θ, auquel se réduit ce second membre par la suppression des termes qui contiennent en facteur soit $\nabla^m f$, soit $\nabla^n F$. Mais, Θ ne contenant que f, ∇f, ..., $\nabla^{m-1} f$, F, ∇F, ..., ∇^{n-1}F, il résulte du théorème du n° 39 que ce polynôme est nul quelles que soient f et F; en d'autres termes, il ne reste rien dans $[f, F]_{m,n}$ quand on y a effacé les termes qui ont pour facteur soit $\nabla^m f$, soit ∇^nF, ce qui équivaut à ce que nous voulions prouver.

Il résulte immédiatement de cette proposition que, *si les degrés effec-*

tifs de f, F *s'abaissent tous deux au-dessous de m, n, on a*

$$[f, \mathrm{F}]_{m,n} = 0$$

quelles que soient x, y; car alors $\nabla^m f$ et $\nabla^n \mathrm{F}$ se réduisent tous deux identiquement à zéro.

VI. *Si les fonctions entières f*, F *sont de degrés m, $n-1$, on a*

$$[f, \mathrm{F}] = [f, \mathrm{F}]_{m,n} : \frac{\nabla^m f}{m!}. \tag{31}$$

Supposons f décomposable en m facteurs linéaires $f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_m$; la formule (22) donne évidemment

$$[f_i, \mathrm{F}]_{1,n} = \nabla f_i [f_i, \mathrm{F}].$$

Cela posé, en faisant successivement $i = 1, 2, \ldots, m$ et multipliant membre à membre toutes les relations ainsi obtenues, il vient

$$[f, \mathrm{F}]_{m,n} = \frac{\nabla^m f}{m!} [f, \mathrm{F}]. \tag{32}$$

Effectivement, les raisonnements qui nous ont conduits à la formule (28) montrent que l'on a

$$[f_1, \mathrm{F}]_{1,n} \ldots [f_i, \mathrm{F}]_{1,n} \ldots [f_m, \mathrm{F}]_{1,n} = [f, \mathrm{F}]_{m,n};$$

on a encore (I)

$$[f_1, \mathrm{F}] \ldots [f_i, \mathrm{F}] \ldots [f_m, \mathrm{F}] = [f, \mathrm{F}],$$

puis, en vertu de la dernière des formules (21),

$$\nabla f_1 . \nabla f_2 \ldots \nabla f_m = \frac{\nabla^m f}{m!}.$$

La formule (31), étant ainsi vérifiée dans le cas où f est un produit de m facteurs linéaires, est générale, parce que, dans tous les cas et par définition, $[f, \mathrm{F}]_{m,n}$ a la forme extérieure qui convient à celui où f, F sont décomposables en m, n facteurs linéaires. Si l'on voulait rendre ce raisonnement tout à fait rigoureux dans la forme, il suffirait d'appliquer une fois de plus à la formule (32) le théorème du n° 39.

Il résulte de ceci que, quand $[f, \mathrm{F}]_{m,n}$ est connu, on peut en déduire le dialysant principal de tout couple de fonctions φ, Φ dont les degrés sont l'un ou l'autre, ou tous deux, inférieurs à m, n, et, par suite, tous les dialysants dont les indicateurs sont l'un ou tous deux inférieurs aux mêmes nombres. Il ne faut pas, comme on pourrait être tenté de le faire, substituer immédiatement φ, Φ à f, F dans $[f, \mathrm{F}]_{m,n}$, car, si les degrés de ces fonctions étaient *tous deux* inférieurs à m, n, on aurait $\nabla^m \varphi = \nabla^n \Phi = 0$, et le résultat s'évanouirait (V). Il faut opérer comme il suit.

En supposant φ de degré m et Φ de degré $n - 1$, la formule (31) montre que, pour avoir $[\varphi, \Phi]$, il faut effacer dans $[f, \mathrm{F}]_{m,n}$ les termes où $\nabla^n \mathrm{F}$ entre comme facteur, diviser l'ensemble des autres par $\dfrac{\nabla^m f}{m!}$, puis y poser $f = \varphi$, $\mathrm{F} = \Phi$. En substituant ensuite des polynômes indéterminés f, F à φ, Φ dans $[\varphi, \Phi]$, on obtient évidemment $[f, \mathrm{F}]_{m,n-1}$; on trouve de la même manière $[f, \mathrm{F}]_{m-1,n}$. De là on déduira successivement, par l'application répétée du même procédé, $[f, \mathrm{F}]_{m,n-2}$, $[f, \mathrm{F}]_{m-1,n-1}$, $[f, \mathrm{F}]_{m-2,n}$, ... et finalement tout dialysant ayant pour indicateurs des nombres inférieurs, l'un ou l'autre ou tous deux, à m, n.

Quand les degrés de f, F sont inégaux, il peut être plus avantageux de tirer ainsi $[f, \mathrm{F}]$ du dialysant dont les indicateurs sont tous deux égaux au plus grand des degrés effectifs de f, F que de le calculer directement; car un dialysant dont les indicateurs sont égaux est symétrique par rapport à ses éléments, ou au moins alterné (IV).

VII. On a dû remarquer que chaque antidérivé de f ou F qui figure dans $[f, \mathrm{F}]_{m,n}$ est accompagné d'un diviseur numérique égal au produit des entiers naturels, de 1 à son ordre inclusivement. On simplifierait donc sensiblement les formules en y introduisant, au lieu des antidérivés ∇f, $\nabla^2 f$, ..., $\nabla^i f$, ... leurs quotients par $1!$, $2!$, ..., $i!$, ... que l'on pourrait désigner par ∂f, $\partial^2 f$, ..., $\partial^i f$, ... et nommer des antidérivés *réduits*. La formule (28) se réduirait alors à

$$(33) \quad [f, \mathrm{F}]_{m,n} = \mathbf{S}\left[(-1)^{p_1+p_2+\dots+p_m} \partial^{p_1}\mathrm{F}\, \partial^{p_2}\mathrm{F} \dots \partial^{p_m}\mathrm{F}\, \Lambda_{p_1, p_2, \dots, p_m}(f, \partial f, \partial^2 f, \dots, \partial^m f)\right].$$

Mais, au lieu d'avoir, comme pour les antidérivés proprement dits, $\partial^{i+j} = \partial^i(\partial^j) = \partial^j(\partial^i)$, on aurait

$$\partial^i(\partial^i) = \partial^j(\partial^j) = \frac{(i+j)!}{i!\,j!}\,\partial^{(i+j)},$$

et le calcul des antidérivés réduits n'aurait plus avec celui des dérivées ordinaires l'analogie parfaite et si précieuse qu'offre celui des antidérivés proprement dits.

Cet inconvénient est sensible; mais il n'existerait pas si, au lieu des dérivées ordinaires $D^{i+j+\dots}$, on avait tout d'abord considéré et dénoté les dérivées *réduites* $\frac{D^{i+j+\dots}}{i!\,j!}$. Dans bien des cas, cette pratique serait préférable aux habitudes actuelles, que les géomètres n'auraient sans doute pas contractées si, pour définir les dérivées, ils étaient partis du développement des fonctions en séries entières ([1]) et non de cette considération, analytiquement si stérile et si artificielle, de rapports à termes infiniment petits.

VIII. *Si dans un dialysant principal* $[f, F]$ *l'une des fonctions*, F *par exemple, est le produit de deux facteurs entiers* F_1, F_2, *on a*

$$[f, F] = [f, F_1][f, F_2]. \tag{34}$$

Cette identité est évidente, en vertu d'une remarque antérieure (I), quand f, F_1, F_2 sont des produits de facteurs linéaires. Elle a donc lieu dans tous les cas, puisque, par définition, le dialysant principal de deux fonctions quelconques a la même forme extérieure que si elles étaient toutes deux décomposables en facteurs linéaires. On pourrait aussi raisonner à l'aide du théorème du n° 39.

Quand f, F sont des produits de g, h facteurs entiers $f_1, \dots, F_1, \dots$, la formule (34) permet évidemment de décomposer $[f, F]$ en gh facteurs tels que $[f_i, F_j]$. La remarque (I) est renfermée dans celle-ci.

IX. Les formules (28) ou (33) pour le développement de $[f, F]_{m,n}$ conduisent à des calculs pénibles, aussitôt que m, n ne sont pas très-petits l'un ou l'autre. D'un autre côté, on a besoin de connaître moins les termes élémentaires de cette expression que sa structure intime, c'est-à-dire, comme pour les déterminants, ses aptitudes spéciales à se métamorphoser ou à se décomposer convenablement pour l'objet qu'on se propose.

([1]) C'était l'idée de Lagrange; je l'ai reprise et développée dans mon *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale* (1872), où j'ai montré qu'il suffit de l'adopter, pour introduire dans tous les raisonnements de l'Analyse infinitésimale la rigueur et la netteté des théories purement algébriques, et avec cela une unité parfaite.

Il faut donc considérer ces formules comme purement transitoires; j'ai lieu de penser qu'une étude moins superficielle des dialysants conduirait à quelque loi de formation très-simple en principe. Quoi qu'il en soit, je vais éclaircir les considérations précédentes par un exemple, en appliquant nos procédés au calcul de $[f, F]_{2,2}$.

En prenant pour F une fonction quelconque du second degré et pour f le produit de deux facteurs linéaires f_1, f_2, la formule (22) donne d'abord

$$[f_1, F] = (\partial f_1)^2 F - \partial f_1 f_1 \partial F + f_1^2 \partial^2 F,$$
$$[f_2, F] = (\partial f_2)^2 F - \partial f_2 f_2 \partial F + f_2^2 \partial^2 F.$$

La formule (34) donne ensuite

$$\begin{aligned}[f_1 f_2, F] &= [f_1, F][f_2, F]\\ &= (\partial f_1 \partial f_2)^2 F^2 - (\partial f_1 \partial f_2)(f_1 \partial f_2 + f_2 \partial f_1) F \partial F + [f_1^2(\partial f_2)^2 + f_2^2(\partial f_1)^2] F \partial^2 F\\ &\quad + \partial f_1 \partial f_2 f_1 f_2 (\partial F^2) - (f_1 \partial f_2 + f_2 \partial f_1) f_1 f_2 \partial F \partial^2 F + (f_1 f_2)^2 (\partial^2 F)^2.\end{aligned}$$

Mais on a, d'autre part,

$$\partial f_1 \partial f_2 = \nabla f_1 \nabla f_2 = \tfrac{1}{2} \nabla^2 (f_1 f_2) = \partial^2 (f_1 f_2),$$

à cause de la dernière des formules (21), puis

$$f_1 \partial f_2 + f_2 \partial f_1 = f_1 \nabla f_2 + f_2 \nabla f_1 = \nabla (f_1 f_2) = \partial (f_1 f_2) \quad (38, \text{III}),$$
$$f_1^2 (\partial f_2)^2 + f_2^2 (\partial f_1)^2 = (f_1 \partial f_2 + f_2 \partial f_1)^2 - 2 f_1 f_2 \partial f_1 \partial f_2 = [\partial (f_1 f_2)]^2 - 2 f_1 f_2 \partial^2 (f_1 f_2).$$

Si, après avoir fait ces substitutions dans la formule primitive, on remplace partout $f_1 f_2$ par f, puis si l'on suppose que les lettres f, F désignent des fonctions quelconques, il vient finalement

$$\begin{aligned}[f, F]_{2,2} &= (\partial^2 f)^2 F^2 - \partial f . \partial^2 f F \partial F + (\partial f)^2 F \partial^2 F - 2 f \partial^2 f . F \partial^2 F + f \partial^2 f . (\partial F)^2\\ &\quad - f \partial f . \partial F . \partial^2 F + f^2 (\partial^2 F)^2,\end{aligned}$$

formule sur laquelle on peut vérifier l'exactitude des remarques précédentes.

Si maintenant on veut avoir les cinq pièces de $[f, F]_{2,2}$, il faut y remplacer ∂f, $\partial^2 f$, ... par les assemblages

$$\frac{1}{1!}\left(\frac{df}{dy}, -\frac{df}{dx}\right), \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 f}{dy^2}, -2\frac{d^2 f}{dy\,dx}, \frac{d^2 f}{dx^2}\right), \ldots$$

et appliquer les règles du calcul élémentaire des assemblages. Quand

f, F sont précisément du second degré, le résultat se résout en un polynôme du quatrième degré en $z=(x,y)$.

42. *Quand deux polynômes ont un diviseur commun entier, leur dialysant principal est nul identiquement, c'est-à-dire quels que soient x, y.*

1° *Le dialysant de deux polynômes linéaires identiques est identiquement nul;* car, ϖ désignant l'un ou l'autre de ces deux polynômes, on a

$$[\varpi, \varpi] = \nabla\varpi.\varpi - \nabla\varpi\,\varpi = 0 \quad (\text{n}^\circ\, 40,\ \text{I}).$$

2° *Le dialysant principal de deux polynômes quelconques identiquement égaux ϖ, ϖ est identiquement nul.*

Si d'abord ϖ est décomposable en μ facteurs linéaires $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\mu$, le dialysant principal $[\varpi, \varpi]$, qui est le produit des μ^2 facteurs $[\varpi_i, \varpi_j]$, (n° 41, I), devient nul, parce que μ d'entre eux le sont, savoir $[\varpi_1, \varpi_1]$, $[\varpi_2, \varpi_2]$, ..., $[\varpi_\mu, \varpi_\mu]$ (1°).

Ainsi l'identité

$$[\varpi, \varpi]_{\mu,\mu} = 0$$

a lieu toutes les fois que ϖ est décomposable en μ facteurs linéaires, et il est évident qu'elle a lieu encore, quand bien même, dans $[\varpi, \varpi]_{\mu,\mu}$, on substituerait à ϖ un produit de $\mu' < \mu$ facteurs linéaires seulement. Or dans $[\varpi, \varpi]_{\mu,\mu}$ ne figure aucun antidérivé de ϖ d'ordre supérieur à μ; donc (n° 39) $[\varpi, \varpi]_{\mu,\mu}$ est nul quel que soit ϖ, et $[\varpi, \varpi]$ est nul quelles que soient x, y.

3° *Si les polynômes f,* F *ont quelque diviseur commun ϖ, $[f, \text{F}]$ est identiquement nul.*

Car, en posant $f=f_1\varpi$, $\text{F}=\text{F}_1\varpi$, on a (n° 41, VIII)

$$[f, \text{F}] = [f_1, \text{F}_1][f_1, \varpi][\varpi, \text{F}_1][\varpi, \varpi]$$

et $[\varpi, \varpi]$ est identiquement nul (2°).

43. *Si $f^{(m)}$, $\text{F}^{(m)}$ désignent les polynômes homogènes formés par les termes de degrés les plus élevés dans deux polynômes entiers f,* F *de degrés m, n, l'ensemble des termes de degré mn dans $[f, \text{F}]$ est égal à $[f^{(m)}, \text{F}^{(m)}]$.*

Ce point est à peu près évident; car, mn étant le degré apparent de $[f, \text{F}]$ (n° 41, III), les termes de degré mn dans ce dialysant sont ceux de degré maximum et proviennent ainsi des termes des degrés les plus élevés dans les divers monômes en f, ∇f, ..., $\nabla^m f$, F, ∇F, ..., ∇^nF qui composent cette expression. Or, pour chacun de ces monômes, l'ensemble des termes dont il s'agit est évidemment ce à quoi il se réduit quand on réduit f, F à $f^{(m)}$, $F^{(m)}$ respectivement.

En appelant ainsi $A_0 z^{mn}$ le terme de degré mn dans $[f, F]$ mis sous forme de fonction entière de z, on a

$$[f^{(m)}, F^{(n)}] = A_0 z^{mn}. \tag{35}$$

Le quotient $\frac{[f^{(m)}, F^{(n)}]}{z^{mn}}$ est donc une certaine constante A_0, et même une constante ordinaire, parce que la taxe du numérateur de cette fraction est mn, comme celle du dénominateur (n° 41, II), et la relation

$$A_0 = 0$$

est la condition qui doit être remplie pour que les polynômes homogènes $f^{(m)}$, $F^{(n)}$ aient quelque diviseur commun (n° 42). Cette condition est ici certainement suffisante, parce que $f^{(m)}$, $F^{(n)}$ sont décomposables en m, n facteurs linéaires; donc le quotient

$$\frac{[f^{(m)}, F^{(n)}]}{z^{mn}}$$

est (à quelque facteur numérique près) ce que l'on nomme le *résultant* ou l'*éliminant* des fonctions homogènes $f^{(m)}$, $F^{(n)}$.

Cette observation permet d'exprimer cet éliminant de $mn+1$ manières nouvelles et différentes les unes des autres, en fonction composée de $f^{(m)}$, F^n et de leurs dérivées partielles d'ordres égaux et inférieurs à m, n; car, si $P_{i,j}$ $(i+j=mn)$ désigne une pièce quelconque de $[f^{(m)}, F^{(n)}]$, la relation (35) donne

$$P_{i,j} = A_0 \frac{(mn)!}{i!\,j!} x^i y^j, \quad \text{d'où} \quad A_0 = \frac{i!\,j!}{(mn)!} \frac{P_{i,j}}{x^i y^j},$$

et $P_{i,j}$ est évidemment une fonction composée de $f^{(m)}$, $F^{(n)}$ et de leurs dérivées partielles (¹).

(¹) La pièce $P_{i,j}$ est un polynôme en x, y de degré mn dont, *après réductions*, les coefficients s'évanouissent tous, sauf celui de $x^i y^j$ $\left[\text{qui est } \frac{(mn)!}{i!\,j!} A_0\right]$. *Avant les réductions*, ces coefficients se présentent sous des formes qui se déduisent de A_0 par des transformations

44. Quand elle aura été convenablement complétée, la proposition du n° 42 fournira un moyen fort précieux d'exprimer que deux fonctions entières à deux variables ont un diviseur commun entier, et de découvrir ce diviseur quand il existe. En attendant, je vais en démontrer la réciproque dans un cas particulier, et en faire une application très-simple, comme spécimen des ressources nouvelles que procure la considération des assemblages.

I. *Si le dialysant principal de deux polynômes f, F de degrés* 1, *n est identiquement nul, le second est exactement divisible par le premier.*

On trouve facilement (38, VI), (40, II), puisque f est du premier degré seulement,

$$\nabla^n\left(\frac{F}{f}\right)=(-1)^n\frac{n!}{f^{n+1}}[f, F];$$

$\nabla^n\left(\frac{F}{f}\right)$ est donc nul et, par suite aussi, toutes les dérivées d'ordre n de $\frac{F}{f}$; donc cette fraction se réduit nécessairement à quelque polynôme entier en x, y de degré $(n-1)$.

II. Supposons actuellement qu'il s'agisse de reconnaître si un polynôme du second degré donné F admet un diviseur linéaire, et de calculer ce diviseur quand il existe.

En nommant f un polynôme indéterminé du premier degré, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il divise F est, avons-nous dit,

$$(\alpha)\qquad [f, F]=(\nabla f)^2 F-\nabla f . f\nabla F+f^2\frac{\nabla^2 F}{1.2}=0.$$

Cette équation, résolue comme une équation ordinaire, donne

$$(\beta)\qquad \frac{\nabla f}{f}=\frac{\nabla^2 F}{\nabla F\pm\sqrt{(\nabla F)^2-2F\nabla^2 F}};$$

pour qu'elle soit possible, il faut donc que l'assemblage $(\nabla F)^2-2F\nabla^2 F$

soumises à certaines lois générales, et les identités obtenues en égalant à zéro ce que devient A_0 par les transformations dont il s'agit constituent de nouvelles propriétés des éliminants tout à fait analogues aux propriétés élémentaires des déterminants. Je reviendrai plus tard sur ces considérations, qui me paraissent devoir éclairer singulièrement la théorie encore si obscure des éliminants.

(de taxe 2) soit le carré de quelque assemblage u (de taxe 1). Or cette condition est suffisante ; car de

$$(\gamma)\qquad (\nabla F)^2 - 2F\nabla^2 F = u^2$$

on tire

$$(\nabla F + u)(\nabla F - u) = 2F.\nabla^2 F,$$

et l'assemblage $2F\nabla^2 F$, dont les facteurs $2F$, $\nabla^2 F$ sont de taxes 0, 2, étant aussi le produit des deux facteurs $(\nabla F + u)$, $(\nabla F - u)$, tous deux de taxe 1, il faut évidemment que l'assemblage constant $\nabla^2 F$ soit le produit de deux assemblages constants de taxe 1 divisant l'un $\nabla F + u$, l'autre $\nabla F - u$. Chacune des valeurs de $\frac{\nabla f}{f}$ données par la formule (β), savoir :

$$(\delta)\qquad \frac{\nabla^2 F}{\nabla F + u}, \quad \frac{\nabla^2 F}{\nabla F - u},$$

est donc une fraction dont les deux termes ont pour facteurs communs un assemblage constant de taxe 1. En outre, la relation (γ), antidifférentiée une fois, donne

$$(\varepsilon)\qquad 2u\nabla u = \nabla[(\nabla F)^2 - 2F\nabla^2 F] = 0$$

(à cause de $\nabla^3 F = 0$), d'où $\nabla u = 0$ et $\nabla(\nabla F + u) = \nabla(\nabla F - u) = \nabla^2 F$. Il en résulte qu'après avoir été réduites à leurs plus simples expressions, les fonctions (δ) sont de la forme $\frac{\nabla f_1}{f_1}$, $\frac{\nabla f_2}{f_2}$, f_1, f_2 désignant deux fonctions linéaires qui sont évidemment les solutions du problème.

Effectivement, on tire de la formule (β)

$$\frac{\nabla f}{f} = \frac{\nabla f_1}{f_1} \quad \text{ou} \quad = \frac{\nabla f_2}{f_2}.$$

La première relation donne

$$\nabla\left(\frac{f}{f_1}\right) = \frac{f_1\nabla f - f\nabla f_1}{f_1^2} = 0;$$

la seconde donne pareillement $\nabla\left(\frac{f}{f_2}\right) = 0$, d'où $f = C_1 f_1$ ou $= C_2 f_2$, C_1, C_2 désignant deux constantes arbitraires.

Il reste seulement à exprimer que $(\nabla F)^2 - 2F\nabla^2 F$ est un carré parfait : c'est bien facile, car l'antidérivé de cette expression étant nul (ε), elle se réduit (37) à un polynôme du second degré en $z = (x, y)$

$$A_0 z^2 + 2A_1 z + A_2,$$

dont les coefficients A_0, A_1, A_2 ont des taxes précisément égales à leurs indices. La condition cherchée est donc, comme en Algèbre ordinaire,

$$A_0 A_2 - A_1^2 = 0.$$

En effectuant les calculs, on retombe naturellement sur la relation connue entre les coefficients de F, mais avec une sûreté et une précision que ne présente aucune des solutions connues de cette question élémentaire.

Quand $(\nabla F)^2 - 2F\nabla^2 F$ est identiquement nul, l'équation (α) a deux racines égales; F est alors un carré parfait qui a ∇F pour racine, à un facteur constant (de taxe 1) près.

45. Revenons à notre sujet : nous avons vu que le dialysant principal $[f, F]$ des premiers membres des équations (16) se réduit à une fonction entière de l'assemblage $z = (x, y)$, qui s'évanouit toutes les fois que x, y prennent les valeurs d'un couple de solutions de ces équations simultanées. Réciproquement, *si l'on fait* $\Omega(z) = [f, F]$, *l'équation* (17) *a autant de racines qu'il y a d'unités dans son degré effectif, et chacune d'elles donne un couple de solutions des équations* (16).

Effectivement, il y a une infinité de systèmes de valeurs des coefficients des équations (16) qui leur font acquérir mn couples distincts de solutions communes, et ces valeurs sont *indépendantes* les unes des autres; c'est-à-dire que, au lieu d'être assujetties à *vérifier* certaines relations, ce sont, au contraire, certaines relations qu'*elles doivent ne pas vérifier*. Pour toutes ces valeurs des coefficients des équations (16), les polynômes homogènes $f^{(m)}$, $F^{(n)}$ formés dans f, F par les termes de degrés m, n n'ont aucun diviseur commun, $[f^{(m)}, F^{(n)}]$ n'est pas nul (n° 43) et l'équation (17) est de degré effectif mn. Notre proposition est donc vraie dans le cas dont il s'agit, parce que l'équation (17) a les mn racines qui correspondent aux mn couples de solutions communes des équations (16) et qu'elle ne saurait en avoir d'autres, puisque son degré effectif est mn.

Mais la formation de $[f, F]$ étant indépendante de toute hypothèse particulière sur les valeurs des coefficients de F, f, sauf la condition que les degrés effectifs de ces fonctions soient bien m, n, il est naturel d'étendre par continuité à tous les cas imaginables les propriétés que conserve cette expression dans une infinité de circonstances indépendantes les unes des autres.

Cette démonstration est insuffisante; on voit bien d'ailleurs que l'énoncé est incomplet, par des conséquences particulières inexactes qu'il entraînerait sans cela. Par exemple, si les premiers membres des équations (16) ont un diviseur commun, celui de l'équation (17) est identiquement nul (n° 42), et il en résulterait que les équations (16) sont *absolument* indéterminées, tandis que, au contraire, elles ne sont pas nécessairement satisfaites par des valeurs de x, y prises toutes deux au hasard. Je ne donne donc ce raisonnement que pour ce qu'il vaut, c'est-à-dire comme établissant provisoirement en faveur de notre réciproque la présomption la plus rapprochée d'une certitude absolue. Une étude plus approfondie de la question conduira bientôt, sans doute, à une démonstration tout à fait naturelle et satisfaisante [1].

46. Voici les premières conséquences des résultats que nous avons obtenus:

I. *La discussion des équations* (16) *ne présente plus aucune difficulté théorique*. Pour avoir le nombre de leurs solutions communes, il suffit d'évaluer le degré effectif de $\Omega(z)$, c'est-à-dire de compter combien dans ce polynôme il y a de plus hautes puissances de z dont les coefficients sont nuls. En égalant à zéro les pièces de tous ces coefficients jusqu'à celui de z^μ exclusivement, on aura sous la forme ordinaire les conditions voulues pour que les équations (16) aient précisément μ couples de solutions.

II. *La résolution des équations* (16) *s'opère de la manière la plus nette par celle de l'équation* (17).

Soit en effet μ le degré effectif de l'équation (17); comme la taxe de

---

[1] J'ai trouvé dernièrement le principe de cette démonstration.

$\Omega(z) = [f, \mathrm{F}]$ est égale à mn (n° 41, II), celle de z^μ à μ, et que tous les termes de ce polynôme sont forcément isotaxiques, $\mathrm{A}_{mn-\mu}$, coefficient de z^μ, est de taxe $mn - \mu$; mais, comme l'équation (17) a précisément μ racines, tous ses coefficients sont divisibles par $\mathrm{A}_{mn-\mu}$ (nos 18 et suiv.). Ces divisions réduisent l'équation (17) à une autre équivalente de degré et de taxe μ, où z^μ a 1 pour coefficient :

$$\omega(z) = z^\mu + a_1 z^{\mu-1} + \ldots + a_\mu = 0. \tag{36}$$

Soient $\zeta_1 = (\xi, \eta_1)$, $\zeta_2 = (\xi, \eta_2)$, ..., $\zeta_q = (\xi, \eta_q)$ toutes les racines distinctes de l'équation (36) qui ont une même première pièce ξ; soient $k_1, \ldots, k_q$ leurs degrés de multiplicité, et k la somme $k_1 + \ldots + k_q$. On a l'identité (20)

$$\begin{aligned}\omega(z) &= (z-\zeta_1)^{k_1}\ldots(z-\zeta_q)^{k_q}\,\mathrm{Q}\\ &= (x-\xi, y-\eta_1)^{k_1}\ldots(x-\xi, y-\eta_q)^{k_q}\,(\mathrm{Q}_{\mu-k,0}, \mathrm{Q}_{\mu-k-1,1}, \ldots, \mathrm{Q}_{0,\mu-k}),\end{aligned}$$

$\mathrm{Q} = (\mathrm{Q}_{\mu-k,0}, \mathrm{Q}_{\mu-k-1,1}, \ldots, \mathrm{Q}_{0,\mu-k})$ désignant un polynôme entier en z de degré et de taxe $\mu - k$, qui n'est divisible par aucun binôme de la forme $z - \zeta$ où la première pièce de ζ serait égale à ξ, et dont, par suite, la première pièce $\mathrm{Q}_{\mu-k,0}$ n'est pas divisible par $(x - \xi)$.

Il en résulte évidemment, en nommant $\omega_{\mu,0}, \omega_{\mu-1,1}, \ldots, \omega_{0,\mu}$ les pièces de $\omega(z)$, que l'équation

$$\omega_{\mu,0} = 0 \tag{37}$$

(qui ne contient pas y) admet la racine $x = \xi$ au degré k de multiplicité, puis, pour $x = \xi$, que les fonctions

$$\omega_{\mu-1,1}, \omega_{\mu-2,2}, \ldots, \omega_{\mu-k+1,k-1}$$

s'annulent quelle que soit y, et que la fonction $\omega_{\mu-k,k}$ se réduit à

$$(\mathrm{Q}_{\mu-k,0})_{x=\xi}(y-\eta_1)^{k_1}(y-\eta_2)^{k_2}\ldots(y-\eta_q)^{k_q},$$

où $(\mathrm{Q}_{\mu-k,0})_{x=\xi}$ n'est pas nulle, en vertu d'une remarque antérieure.

Pour avoir les racines de l'équation (36), on résoudra donc l'équation (37), ce qui fera connaître les valeurs de x; on portera l'une de ces valeurs ξ dans $\omega_{\mu-1,1}, \omega_{\mu-2,2}, \ldots, \omega_{0,\mu}$, on égalera à zéro la première de ces fonctions $\omega_{\mu-k,k}$ que l'hypothèse $x=\xi$ n'aura pas réduite à zéro quelle que soit y, et la résolution de l'équation

$$(38)\qquad (\omega_{\mu-k,k})_{x=\xi}=0$$

fournira les secondes pièces $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q$ des racines de l'équation (36) qui ont ξ pour première pièce. Et les nombres $k_1, k_2, \ldots, k_q$, degrés de multiplicité de $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q$, considérées comme racines de l'équation (38), seront aussi ceux de $\zeta_1=(\xi, \eta_1), \ldots, \zeta_q=(\xi, \eta_q)$ racines de l'équation (36).

Il est clair que rien n'empêche de suivre une marche inverse, c'est-à-dire de tirer d'abord les valeurs de y de l'équation

$$\omega_{0,\mu}=0,$$

au lieu de commencer par la résolution de l'équation (37).

III. La définition du degré de multiplicité k d'un couple de solutions communes des équations (16) n'offre actuellement aucune difficulté. Il est clair, en effet, que l'*on doit prendre pour le nombre k le degré de multiplicité de l'assemblage formé par ces solutions, quand on le considère comme racine de l'équation* (17). Il reste seulement à ramener les équations de condition $\Omega'(z)=\Omega''(z)=\ldots=\Omega^{(k-1)}=0$ à des formes plus simples analogues à la relation

$$\begin{vmatrix} \dfrac{df}{dx}, & \dfrac{df}{dy} \\ \dfrac{dF}{dx}, & \dfrac{dF}{dy} \end{vmatrix}=0,$$

qui a lieu, comme on le sait, quand $k \geqq 2$.

IV. *La recherche des couples de solutions multiples des équations* (16) *se ramène à la résolution d'équations beaucoup plus simples et que l'on peut méthodiquement former.* Il suffit effectivement de traiter l'équation (17) par la méthode ordinaire des racines égales.

Par exemple, si deux courbes planes ont des points de contact d'ordres différents, le calcul de leurs coordonnées dépendra de simples équations du premier degré.

V. *Le calcul des fonctions symétriques des solutions communes aux équations* (16), *et par conséquent la formation de l'équation dont dépend* *une fonction quelconque de ces solutions communes, n'offrent plus aucune difficulté théorique.* Il suffit d'appliquer à l'équation (17) les méthodes exposées aux nos 24 et suivants.

VI. *Pour obtenir les solutions communes à des équations simultanées en nombre quelconque :* $f=0, f_1=0, f_2=0, \ldots, f_\nu=0$, *il suffit de chercher le plus grand commun diviseur des dialysants principaux* $[f, f_1]$, $[f, f_2]$, $\ldots$, $[f, f_\nu]$ *considérés comme polynômes entiers en* $z=(x, y)$, *et de résoudre l'équation formée en égalant ce plus grand commun diviseur à zéro.*

Par exemple, la recherche d'un point singulier d'une courbe du troisième degré se ramène toujours à la résolution d'équations linéaires. Si $f=0$ est l'équation de la courbe, les dialysants dont il faut égaler le plus grand commun diviseur à zéro sont

$$\left[f, \frac{df}{dx}\right], \quad \left[f, \frac{df}{dy}\right].$$

VII. Soit $V(x, y)$ une fonction entière qui s'annule, elle et toutes ses dérivées jusqu'à celles de l'ordre k au moins, quand x, y prennent les valeurs d'un couple de solutions du degré de multiplicité k, des équations (16). Nous avons démontré (30) qu'on a l'identité

$$V(x, y) = M_{\mu,0}\,\omega_{\mu,0} + M_{\mu-1,1}\,\omega_{\mu-1,1} + \ldots + M_{0,\mu}\,\omega_{0,\mu},$$

$\omega_{\mu,0}, \ldots,$ désignant toujours les pièces du premier membre de l'équation (36) et $M_{\mu,0}, \ldots$ certaines fonctions entières de x, y. Mais $\omega(z)$ est égal à $[f, F] : A_{mn-\mu}$ (no 46, II); les termes de ses pièces $\omega_{\mu,0}, \omega_{\mu-1,1}, \ldots$ contiennent donc tous en facteur, comme ceux de $[f, F]$, soit f, soit F (no 41, V), et *l'identité précédente donne*

$$V(x, y) = \varphi f + \Phi F,$$

φ, Φ *désignant certains polynômes entiers en* x, y. C'est une proposition fort importante que j'ai déjà démontrée dans ce Recueil (t. IV), mais d'une manière infiniment moins nette et moins simple.

VIII. Supposons que, outre x, y, f et F contiennent une variable indépendante t; au lieu de l'équation (17) on aura

$$\Omega(z, t) = 0, \tag{39}$$

équation entière qui définit l'assemblage z considéré comme fonction de t, et que rien n'empêche de traiter exactement comme une équation entière entre une variable indépendante et une fonction implicite ordinaire.

Par exemple, on pourra développer z par la formule de Taylor, et les coefficients de la série s'exprimeront comme à l'ordinaire, au moyen des dérivées partielles de $\Omega(z, t)$ par rapport à z et t; mais leur taxe sera toujours 1, comme celle de z, parce que celles de t, t^2, ... sont toutes nulles. On pourra notamment reproduire à cette occasion tous les raisonnements des Chapitres X, XI de mon *Nouveau précis d'Analyse infinitésimale*. Il en résulte en particulier que la série est convergente tant que h conserve un module inférieur au plus petit de ceux pour lesquels $\frac{d\Omega(z, t+h)}{dz}$ s'évanouit, et que, aux valeurs de t, z, qui annulent $\frac{d\Omega(z,t)}{dz}$, les valeurs de z se groupent en systèmes circulaires, conformément aux lois découvertes par M. Puiseux.

IX. Quand x, y, t sont les coordonnées rectilignes d'un même point de l'espace, les équations (16) représentent une ligne algébrique d'espace dont l'équation (39) à *deux variables seulement* (extérieurement) fournit une nouvelle représentation analytique *identique à celle des courbes planes*. Cette remarque peut être fort utile dans l'étude des lignes d'espace, car elle permet d'en calquer la théorie sur celle des lignes planes considérées dans un même plan. Il résulte notamment de ce qui vient d'être dit (VIII) que les points singuliers des lignes gauches sont, analytiquement, de même nature que ceux des lignes planes et qu'ils peuvent être discutés et classés par des procédés identiques.

Dijon, janvier 1877.