Annales scientifiques de l'É.N.S.

D. Emmanuel

Étude des intégrales abéliennes de troisième espèce

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 8 (1879), p. 299-326
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1879_2_8__299_0>

ÉTUDE

DES

INTÉGRALES ABÉLIENNES

DE TROISIÈME ESPÈCE,

PAR M. DAVID EMMANUEL,

LICENCIÉ ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ÈS SCIENCES PHYSIQUES.

C'est Jacobi qui a formulé le problème des fonctions inverses des intégrales abéliennes.

Riemann a montré la possibilité d'exprimer des fonctions algébriques de celles-là au moyen de fonctions Θ, ayant pour arguments les intégrales normales de première espèce, augmentées chacune d'une constante arbitraire.

MM. Clebsch et Gordan ont résolu le problème posé par Riemann, dans le cas où l'équation n'admet que des points critiques du second ordre. Ces géomètres ont introduit dans leurs recherches une transcendante T définie par une somme de p intégrales normales de troisième espèce, et ils ont ramené le problème qu'ils avaient en vue à l'étude de cette transcendante. Ils ont procédé de façon à découvrir la fonction Θ, et ils sont arrivés, en effet, à exprimer T à l'aide d'une fonction développable en une série convergente analogue à celle de la fonction Θ et jouissant des mêmes propriétés. Cette fonction n'est autre que la fonction Θ. Comme corollaire, ils ont déduit l'expression de l'intégrale de troisième espèce au moyen de la fonction Θ.

M. Briot a résolu le problème de l'inversion à l'aide des fonctions Θ, dans le cas général où l'équation admet des points critiques d'un ordre quelconque. La méthode qu'il a suivie est opposée à celle dont je viens de parler. M. Briot part des propriétés connues de la fonction Θ à p arguments arbitraires, et démontre quelques théorèmes fondamentaux sur les fonctions Θ dont les arguments sont ceux considérés par Riemann et un théorème sur les conditions que doit remplir une fonction de deux variables, liées par une équation algébrique, pour être une fonction rationnelle de ces variables. Il compose ensuite une expression de fonctions Θ qui remplisse les conditions pour être une fonction rationnelle, et particulièrement pour être le quotient de deux polynômes de degré p, dont chacun, égalé à zéro, admet pour racines les limites supérieures des intégrales qui figurent dans les fonctions Θ. Le problème de l'inversion se trouve ainsi résolu dans le sens dans lequel l'entendait Jacobi.

Je pars des propriétés de la fonction Θ dont je viens de parler, et j'obtiens dans le cas général l'expression des intégrales de troisième espèce au moyen de cette fonction; j'en déduis ensuite d'une façon très-simple les principales propriétés de ces intégrales. Dans la seconde Partie de cette Thèse, j'arrive, en me servant de considérations analogues à celles qui m'ont donné l'intégrale de troisième espèce, à exprimer la fonction T par les fonctions Θ, et, en faisant de cette fonction le même usage qu'en ont fait MM. Clebsch et Gordan, j'obtiens la solution du problème de l'inversion sous la forme obtenue par M. Briot.

1. Soient

$$F(x,y)=0$$

une équation algébrique irréductible et de degré m par rapport à y, et

$$\varphi(x,y)$$

une fonction rationnelle quelconque; l'intégrale

$$\int \varphi(x,y)\,dx$$

est ce qu'on appelle une *intégrale abélienne*. On ramène, par des transformations qui ne sauraient trouver leur place ici, les intégrales abéliennes aux formes

$$\int \frac{Q(x,y)\,dx}{F'_y(x,y)},$$

$$\int \frac{G(y)\,dx}{(x-a)F'_y(x,y)}$$

et à des intégrales qui se déduisent de la dernière par la différentiation de celle-ci par rapport au paramètre a. Dans ces intégrales, $Q(x,y)$ et $G(y)$ sont des polynômes à coefficients arbitraires et respectivement de degrés $m-3$ et $m-2$.

La première de ces intégrales ne peut devenir infinie qu'aux points pour lesquels on a $F'_y(x,y)=0$. On peut assujettir les coefficients du polynôme Q à des conditions qui font que cette intégrale reste finie en tous les points critiques. C'est alors l'intégrale de *première espèce*.

Soit A le nombre des équations linéaires auxquelles doivent satisfaire les coefficients du polynôme Q; posons $N=\Sigma(k-1)$, k désignant le nombre des racines y qui se permutent autour d'un point critique, et le signe Σ se rapportant à tous les points critiques. M. Elliot [1] a démontré que l'on a

$$A=\tfrac{1}{2}m(m-1)-\frac{N}{2};$$

le nombre des coefficients arbitraires de Q est donc

$$p=\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)-A=\frac{N}{2}-(m-1).$$

C'est le nombre des intégrales abéliennes de première espèce.

Si l'on assujettit une courbe quelconque, dont le degré n'est pas inférieur à $m-3$, aux mêmes conditions que la courbe $Q(x,y)=0$, le nombre de conditions A sera évidemment le même, car ce nombre ne dépend que de l'équation $F(x,y)=0$.

On démontre que le nombre des périodes d'une intégrale de première espèce est $2p$.

Les intégrales de première espèce qui interviendront dans cette thèse sont celles qu'on appelle *normales*, et qui seront désignées par

$$u^{(1)},\ u^{(2)},\ \ldots,\ u^{(p)}.$$

---

(1) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, année 1876.

La moitié des périodes de l'une quelconque de ces intégrales est nulle, à l'exception d'une seule, qui est égale à

$$2\pi\sqrt{-1}.$$

Ce sont les périodes dites de *rang impair*. Les périodes de *rang pair* de l'intégrale $u^{(4)}$, par exemple, sont désignées par

$$2\alpha_{41},\quad 2\alpha_{42},\quad \ldots,\quad 2\alpha_{4p}.$$

On a

$$\alpha_{41} = \alpha_{14} \quad (^1).$$

2. Les intégrales de la seconde forme sont appelées *intégrales de troisième espèce*.

Au lieu de ces intégrales, on considère les intégrales plus générales

$$\int \frac{G(x,y)\,dx}{(\alpha x+\beta y+\gamma)\,F'_y(x,y)},$$

où $G(x,y)=0$ est une courbe de degré $m-2$.

Assujettissons les coefficients de la courbe $G(x,y)=0$ aux conditions pour que l'intégrale reste finie aux points critiques; on aura, en vertu de ce que nous avons dit plus haut, le même nombre A de conditions que pour la courbe $Q(x,y)=0$. Il en résulte que le nombre des coefficients arbitraires de la courbe $G(x,y)=0$ est

$$\tfrac{1}{2}(m-2)(m+1)-A = p+m-2.$$

On pourra assujettir la courbe $G=0$ à passer par $m-2$ points d'intersection de $F(x,y)=0$ avec la droite $\alpha x+\beta y+\gamma=0$. On ne peut la faire passer par plus de $m-2$ points sans la décomposer en cette droite et en une courbe de degré $m-3$; dans ce cas, l'intégrale se réduirait à une intégrale de première espèce.

La courbe $G(x,y)=0$, satisfaisant à ces conditions, contiendra encore p paramètres arbitraires.

Soient (ξ,ξ_1), (η,η_1) les deux points d'intersection de la droite $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ avec la courbe $F(x,y)=0$ par lesquels la courbe

(1) Briot, *Théorie des fonctions abéliennes*.

$G(x, y) = 0$ ne passe pas. Pour tous les points du plan autres que (ξ, ξ_1), (η, η_1), l'intégrale que nous considérons reste finie. Examinons, en développant le calcul de MM. Clebsch et Gordan, comment cette intégrale se comporte dans le voisinage de ces deux points.

Posons

$$\alpha x + \beta y + \gamma = (x - \xi)(\xi_1 - \eta_1) - (\xi - \eta)(y - \xi_1),$$

en mettant en évidence que la droite passe par les deux points, et représentons cette fonction par $[\xi, \eta]$. Notre intégrale sera

$$S_{\xi\eta} = \int \frac{G(x, y)\, dx}{[\xi, \eta]\, F'_y(x, y)}.$$

Rendons les équations homogènes, et soient, pour le moment, (ξ_1, ξ_2, ξ_3), (η_1, η_2, η_3) les coordonnées de ces points. Les coordonnées d'un point quelconque de la droite sont données par les expressions

$$\xi_1 + \lambda\eta_1, \quad \xi_2 + \lambda\eta_2, \quad \xi_3 + \lambda\eta_3,$$

λ étant un paramètre variable. Les points d'intersection de la droite et de la courbe $F = 0$ sont donnés par l'équation

$$\begin{aligned} &F(\xi_1 + \lambda\eta_1, \xi_2 + \lambda\eta_2, \xi_3 + \lambda\eta_3) \\ &= F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \lambda\left(\eta_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \eta_2 \frac{\partial F}{\partial \xi_2} + \eta_3 \frac{\partial F}{\partial \xi_3}\right) + \ldots + \lambda^n F(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = 0 \\ &= u_0 + \lambda u_1 + \ldots + \lambda^n u_n, \end{aligned}$$

où l'on a

$$F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0, \quad F(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = 0.$$

Les points d'intersection de la même droite avec $G = 0$ sont donnés par l'équation

$$G(\xi_1 + \lambda\eta_1, \xi_2 + \lambda\eta_2, \xi_3 + \lambda\eta_3) = 0 = v_1 + \lambda v_2 + \ldots + \lambda^{n-2} v_{n-2}.$$

Il faut que les racines en λ soient les mêmes dans les deux équations, et, en multipliant G par une constante convenable, on peut faire en sorte que l'on ait

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \ldots = \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}} = 1.$$

Il en résulte qu'aux points (ξ_1, ξ_2, ξ_3), (η_1, η_2, η_3), $G(x, y)$ aura respectivement les valeurs

$$\eta_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \eta_2 \frac{\partial F}{\partial \xi_2} + \eta_3 \frac{\partial F}{\partial \xi_3},$$
$$\xi_1 \frac{\partial F}{\partial \eta_1} + \xi_2 \frac{\partial F}{\partial \eta_2} + \xi_3 \frac{\partial F}{\partial \eta_3},$$

ou, en revenant aux coordonnées primitives,

$$G_\xi = (\eta - \xi) F'_\xi + (\eta_1 - \xi_1) F'_{\xi_1},$$
$$G_{\eta_1} = (\xi - \eta) F'_{\eta_1} + (\xi_1 - \eta_1) F'_{\eta_1}.$$

Il est important de remarquer que G prend aux deux points considérés des valeurs indépendantes des p points choisis arbitrairement sur la courbe $F(x, y) = 0$.

Le point (ξ, ξ_1) étant un point ordinaire pour la courbe $F(x, y) = 0$, la dérivée F'_{ξ_1} est différente de zéro et l'équation admet une seule racine voisine de ξ_1. Cette racine, étant une fonction holomorphe de x, est développable, dans le voisinage du point (ξ, ξ_1), en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $x - \xi$,

$$y - \xi_1 = a_1(x - \xi) + a_2(x - \xi)^2 + \ldots,$$

et l'on a

$$a_1 = -\frac{F'_\xi}{F'_{\xi_1}}.$$

On en déduit

$$[\xi, \eta] = \frac{(\xi - \eta) F'_\xi + (\xi_1 - \eta_1) F'_{\xi_1}}{F'_{\xi_1}}(x - \xi) + a_2(\eta - \xi)(x - \xi)^2 + \ldots,$$
$$[\xi, \eta] = -\frac{G_\xi}{F'_{\xi_1}}(x - \xi) + a'_2(x - \xi)^2 + \ldots.$$

La fraction rationnelle $\frac{G}{F'_y}$, étant aussi holomorphe dans le voisinage du point (ξ, ξ_1), est développable de la même manière,

$$\frac{G}{F'_y} = \frac{G_\xi}{F'_{\xi_1}} + A_1(x - \xi) + A_2(x - \xi)^2 + \ldots,$$

d'où

$$\frac{G}{[\xi,\eta]F'_y}=\frac{\frac{G_\xi}{F'_{\xi_1}}+A_1(x-\xi)+A_2(x-\xi)^2+\ldots}{(x-\xi)\left[-\frac{G_\xi}{F'_{\xi_1}}+a'_2(x-\xi)+\ldots\right]},$$

$$\frac{G}{[\xi,\eta]F'_y}=-\frac{1}{x-\xi}+A'_1+2A'_2(x-\xi)+\ldots;$$

par suite, dans le voisinage de ce point, on a

$$S_{\xi\eta}=-\log(x-\xi)+A+A'_1(x-\xi)+A'_2(x-\xi)^2+\ldots.$$

On aura, dans le voisinage du point (η,η_1), la série suivante de formules, analogues aux précédentes :

$$F(x,y)=(x-\eta)F'_\eta+(y-\eta_1)F'_{\eta_1}+\ldots=0,$$

$$y-\eta_1=b_1(x-\eta)+b_2(x-\eta)^2+\ldots,\quad b_1=-\frac{F'_\eta}{F'_{\eta_1}},$$

$$[\xi,\eta]=\frac{(\xi-\eta)F'_\eta+(\xi_1-\eta_1)F'_{\eta_1}}{F'_{\eta_1}}(x-\eta)+b_2(\eta-\xi)(x-\eta)^2+\ldots,$$

$$[\xi,\eta]=\frac{G_\eta}{F'_{\eta_1}}(x-\eta)+b'_2(x-\eta)^2+\ldots,$$

$$\frac{G}{F'_y}=\frac{G_\eta}{F'_{\eta_1}}+B_1(x-\eta)+B_2(x-\eta)^2+\ldots.$$

Enfin

$$\frac{G}{[\xi,\eta]F'_y}=\frac{1}{x-\eta}+B'_1+2B'_2(x-\eta)+\ldots,$$

et l'on a, dans le voisinage de ce point, l'expression suivante de l'intégrale $S_{\xi\eta}$:

$$S_{\xi\eta}=\log(x-\eta)+B+B'_1(x-\eta)+B'_2(x-\eta)^2+\ldots.$$

Les deux points (ξ,ξ_1), (η,η_1) sont donc deux points critiques logarithmiques de l'intégrale $S_{\xi\eta}$, et, par conséquent, cette intégrale augmente de $\pm 2\pi\sqrt{-1}$ suivant que la variable tourne autour du point (ξ,ξ_1), ou (η,η_1) dans le sens du mouvement de l'aiguille d'une montre.

3. Prenons pour intégrale de troisième espèce l'expression

$$S_{\xi\eta} + \sum_{k=1}^{k=p} c_k u^{(k)},$$

les quantités c_k étant des constantes arbitraires.

Soient $S_{\xi\eta}^{(1)}, S_{\xi\eta}^{(2)}, \ldots, S_{\xi\eta}^{(p)}$ les valeurs de $S_{\xi\eta}$ le long des cycles qui donnent les périodes de rang impair des intégrales u. Ce seront les périodes de $S_{\xi\eta}$ correspondant aux mêmes cycles. Les périodes correspondantes de l'intégrale que nous considérons sont

$$S_{\xi\eta}^{(k)} + 2\pi\sqrt{-1}\, c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p.$$

Si nous donnons à c_k la valeur

$$c_k = -\frac{S_{\xi\eta}^{(k)}}{2\pi\sqrt{-1}},$$

les périodes de *rang impair* de l'intégrale choisie de troisième espèce seront toutes *nulles*.

Cette intégrale est appelée *intégrale normale* de troisième espèce. On la désigne par $\Pi_{\xi\eta}$.

Les périodes de rang pair de cette intégrale se déduisent de la relation qui existe entre les périodes d'une intégrale de première espèce et d'une intégrale de troisième espèce. Formons avec les points (ξ, ξ_1), (η, η_1) deux nouveaux lacets, et supposons d'une façon générale que les deux lacets n'entrent pas dans un même circuit. Soient $(C)_{\alpha_r}^{\alpha_r}$ le circuit dans lequel entre le lacet (ξ), et $(C)_{\beta_r}^{\beta_r}$ celui dans lequel entre le lacet (η).

La relation entre les périodes d'une intégrale U de première espèce et d'une intégrale S de troisième espèce s'obtient, comme on sait, en égalant à zéro la somme

$$\sum_{h=0}^{h=m-1} \int U(x, y_h)\, dS(x, y_h),$$

où l'intégrale $\int U(x, y_h)\, dS(x, y_h)$ est prise suivant la suite des lacets qui entrent dans le circuit $(C)_\lambda^h$. Tous les circuits, à l'exception des deux considérés, ne sont pas affectés par les lacets (ξ) et (η). Considérons les deux autres. Soient U'_{α_r}, U_{α_r} et U'_{β_r}, U_{β_r} les valeurs de l'intégrale U en deux points infiniment voisins, l'un sur le bord de gauche, l'autre sur le bord de droite, correspondant aux lacets (ξ) et (η), quand on arrive en ces points en suivant les chemins indiqués par la théorie qui donne la relation entre les périodes de deux intégrales de première espèce ([1]). Soient aussi S'_{α_r}, S_{α_r}, S'_{β_r}, S_{β_r} les valeurs correspondantes de S. Le lacet (ξ) donnera

$$\int_0^\xi U'_{\alpha_r}\,dS'_{\alpha_r} + 2\pi\sqrt{-1}\,U_{\alpha_r}(\xi) + \int_\xi^0 U_{\alpha_r}\,dS_{\alpha_r}.$$

Or on a

$$U'_{\alpha_r} = U_{\alpha_r} \quad \text{et} \quad S'_{\alpha_r} = S_{\alpha_r} - 2\pi\sqrt{-1};$$

donc l'expression précédente se réduit à

$$2\pi\sqrt{-1}\,U_{\alpha_r}(\xi).$$

Le lacet (η) donne

$$-2\pi\sqrt{-1}\,U_{\beta_r}(\eta).$$

Les autres lacets des deux circuits considérés se comportent comme si les deux intégrales étaient de première espèce. Il en résulte que la somme $\sum\limits_{h=0}^{h=m-1} \int U(x, y_h)\,dS(x, y_h)$ peut se décomposer en deux parties, dont l'une, indépendante des lacets (ξ) et (η), est de la même forme que si les deux intégrales étaient de première espèce, et dont l'autre est

$$-2\pi\sqrt{-1}\,[U_{\beta_r}(\eta) - U_{\alpha_r}(\xi)].$$

Le chemin auquel se rapporte la différence $U_{\beta_r}(\eta) - U_{\alpha_r}(\xi)$ est parfaitement déterminé; nous le désignerons, pour abréger le langage, par le nom de *courbe* $\xi\eta$, et nous représenterons cette différence par l'intégrale $\int_\xi^\eta dU$ prise le long de cette courbe.

([1]) Briot, *Théorie des fonctions abéliennes*.

Si l'on désigne par Ω_i, Ω'_i les périodes normales correspondantes aux intégrales U et S, la relation entre ces périodes sera

$$\sum_{i=1}^{i=p}(\Omega_{2i-1}\Omega'_{2i}-\Omega'_{2i-1}\Omega_{2i})-2\pi\sqrt{-1}\int_\xi^\eta dU=0.$$

Si l'on remplace les intégrales U et S par les intégrales normales $u^{(h)}$ et $\Pi_{\xi\eta}$, les périodes Ω'_{2i-1} deviennent toutes nulles, et, parmi les périodes Ω_{2i-1}, il n'y a que Ω_{2h-1} qui est différente de zéro et égale à $2\pi\sqrt{-1}$; la relation précédente devient

$$2\pi\sqrt{-1}\,\Omega'_{2h}-2\pi\sqrt{-1}\int_\xi^\eta du^{(h)}=0.$$

Les périodes de rang pair de l'intégrale $\Pi_{\xi\eta}$ sont donc données par les intégrales

$$\int_\xi^\eta du^{(h)},\quad h=1,2,\ldots,p.$$

Expression des intégrales abéliennes de troisième espèce à l'aide de la fonction Θ.

4. Considérons la fonction

$$\varphi(x,y)=e^{\int_{x_0}^{x}d\Pi_{\xi\eta}},\tag{1}$$

dans laquelle l'intégrale $\int_{x_0}^{x}d\Pi_{\xi\eta}$ est prise à partir de l'origine (x_0, y_0) jusqu'au point variable (x,y), le chemin étant quelconque, et examinons comment cette fonction varie sur toute la sphère.

Désignons par $\varphi'(x,y)$ et par $\Pi'_{\xi\eta}$ les valeurs de la fonction $\varphi(x,y)$ et de l'intégrale $\Pi_{\xi\eta}$ quand on va de l'origine au point (x,y) en suivant un chemin déterminé, en particulier un chemin qui ne traverse aucun lacet. Si l'on fait varier le chemin, mais de telle façon que la variable soit assujettie à ne traverser aucun des lacets relatifs aux points critiques algébriques, tandis qu'elle soit libre de traverser les lacets relatifs aux points critiques logarithmiques, la valeur $\Pi''_{\xi\eta}$ que prend alors l'intégrale $\Pi_{\xi\eta}$ au point (x,y) est donnée par $\Pi''_{\xi\eta}=\Pi'_{\xi\eta}+2m\pi\sqrt{-1}$, m étant un nombre entier positif, négatif ou nul. Si l'on appelle φ'' la valeur correspondante de φ, on a $\varphi''=\varphi'$. Enfin, si le chemin qui conduit du point (x_0,y_0) au point (x,y) devient absolument quelconque, on a

$$\int_{x_0}^{x} d\Pi_{\xi\eta}=\Pi'_{\xi\eta}+2m\pi\sqrt{-1}+\sum_{i=1}^{i=p} n_i\int_{\xi}^{\eta} du^{(i)},$$

les coefficients n_i étant des nombres entiers dont les valeurs dépendent des chemins qu'on suit, tandis que l'intégrale $\int_{\xi}^{\eta} du^{(i)}$ a une valeur parfaitement déterminée. Cette intégrale est prise le long de la courbe $\xi\eta$ que nous avons définie dans le numéro précédent. Il résulte de là qu'en un point (x,y) la fonction $\varphi(x,y)$ est susceptible d'une infinité de valeurs, qui sont données par la formule

$$\varphi=\varphi'\, e^{\sum\limits_{i=1}^{i=p} n_i\int_{\xi}^{\eta} du^{(i)}}. \tag{2}$$

5. Examinons maintenant comment la fonction $\varphi(x,y)$ se comporte dans le voisinage des points critiques logarithmiques (ξ,ξ_1), (η,η_1). On a vu que dans le voisinage du premier de ces points l'intégrale $\int_{x_0}^{x} d\Pi_{\xi\eta}$ est représentée par

$$\int_{x_0}^{x} d\Pi_{\xi\eta}=\log\frac{1}{x-\xi}+A+A'_1(x-\xi)+A'_2(x-\xi)^2+\ldots;$$

dans le voisinage de ce point, on aura

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)&=e^{\log\frac{1}{x-\xi}+A+A'_1(x-\xi)+A'_2(x-\xi)^2+\ldots}\\&=\frac{e^{A}}{x-\xi}\,e^{A'_1(x-\xi)+A'_2(x-\xi)^2+\ldots}\end{aligned}$$

ou

$$\varphi(x,y)=\frac{e^{A}}{x-\xi}\left[1+A'_1(x-\xi)+A''_2(x-\xi)^2+\ldots\right].$$

Le point (ξ,ξ_1) est donc un *pôle simple* de la fonction $\varphi(x,y)$.

Dans le voisinage du point (η, η_1), on a de même

$$\int_{x_0}^{x} d\Pi_{\xi\eta} = \log(x-\eta) + \mathrm{B} + \mathrm{B}'_1(x-\eta) + \mathrm{B}'_2(x-\eta)^2 + \ldots,$$

et, pour la fonction $\varphi(x,y)$ dans le voisinage de ce point, on aura

$$\varphi(x,y) = e^{\mathrm{B}}(x-\eta)\,e^{\mathrm{B}'_1(x-\eta)+\mathrm{B}'_2(x-\eta)^2+\ldots}$$
$$\varphi(x,y) = e^{\mathrm{B}}(x-\eta)[1 + \mathrm{B}'_1(x-\eta) + \mathrm{B}''_2(x-\eta)^2 + \ldots].$$

Le point (η, η_1) est une *racine simple* de cette fonction.

Ainsi la fonction $\varphi(x,y)$, susceptible en chaque point (x,y) d'une infinité de valeurs données par la formule (2), n'admet sur toute la sphère qu'un seul zéro (η, η_1) et un seul infini (ξ, ξ_1).

6. Je vais rappeler ici quelques théorèmes démontrés par M. Briot dans ses Leçons sur les fonctions abéliennes.

Si l'on pose

$$\alpha_{k,h} = \alpha'_{k,h} + \sqrt{-1}\,\alpha''_{k,h},$$

il résulte de l'étude des périodes normales des intégrales normales de première espèce que l'on a l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{k=p} \sum_{h=1}^{h=p} n_k n_h \alpha'_{k,h} < 0,$$

ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse former avec les quantités α une fonction Θ à p arguments arbitraires. En remplaçant les p arguments arbitraires par les p intégrales normales de première espèce considérées comme fonctions de (x,y), on a une fonction Θ qui ne dépend que de la seule variable (x,y)

$$\Theta(u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}) = \sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{n_2=+\infty} \cdots \sum_{n_p=-\infty}^{n_p=+\infty} e^{\sum\limits_{h=1}^{h=p} n_h u^{(h)} + \sum\limits_{h=1}^{h=p} \sum\limits_{k=1}^{k=p} n_h n_k \alpha_{h,k}}.$$

Au lieu de $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}$, on prend, avec Riemann, les arguments

$$u^{(1)} - g_1,\quad u^{(2)} - g_2,\quad \ldots,\quad u^{(p)} - g_p,$$

$g_1, g_2, \ldots, g_p$ étant des constantes arbitraires. On a, en définitive, à considérer la fonction

$$\Theta(u^{(i)} - g_i) = \sum_{n_i=-\infty}^{n_i=+\infty} e^{\sum\limits_{i=1}^{i=p} n_i(u^{(i)} - g_i) + \sum\limits_{i,k=1}^{p} n_i n_k \alpha_{i,k}},$$

7. Voici les théorèmes dont il s'agit :

I. *La fonction* Θ *ainsi formée admet sur toute la sphère seulement* p *zéros, que nous désignons par* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p)$.

II. *Entre les zéros et les constantes arbitraires* g, *il existe les* p *relations suivantes :*

$$\sum_{k=1}^{k=p} u^{(1)}(x_k, y_k) - g_1 = C_1,$$

$$\sum_{k=1}^{k=p} u^{(2)}(x_k, y_k) - g_2 = C_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{k=1}^{k=p} u^{(p)}(x_k, y_k) - g_p = C_p,$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_p$ *désignent des constantes indépendantes des arbitraires* g.

L'étude des équations différentielles abéliennes permet de conclure que, réciproquement, si l'on prend pour g_i la valeur

$$\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) - C_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

la fonction

$$\Theta\left[u^{(i)}(x, y) - \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k, y_k) + C_i\right]$$

admet les p zéros $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p)$ choisis à volonté.

8. Faisons en sorte que l'un des zéros, (x_p, y_p) par exemple, coïncide avec le point (η, η_1); les autres zéros seront les $p - 1$ points arbitrai-

rement choisis (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_{p-1}, y_{p-1}). Mettons en évidence que la fonction admet le zéro (η, η_1) :

$$\Theta\left[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\eta, \eta_1) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k) + C_i\right].$$

Considérons encore une fonction Θ analogue à la précédente, qui admette les mêmes $p - 1$ zéros et dont le $p^{\text{ième}}$ soit le point (ξ, ξ_1) :

$$\Theta\left[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \xi_1) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k) + C_i\right].$$

9. Considérons le quotient des deux fonctions précédentes, et posons

$$(3) \qquad \psi(x, y) = \frac{\Theta\left[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\eta, \eta_1) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k) + C_i\right]}{\Theta\left[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \xi_1) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k) + C_i\right]}.$$

Les intégrales $u^{(i)}(\xi, \xi_1)$, $u^{(i)}(\eta, \eta_1)$, qui figurent dans le second membre sont déterminées de la façon qu'il a été dit (n° 3), savoir : $u^{(i)}(\xi, \xi_1)$ est la valeur de $u^{(i)}(x, y)$ quand on arrive au point (ξ, ξ_1) après avoir décrit le chemin formé des lacets fondamentaux de seconde espèce qui conduisent de la racine y_0 à y_{α_r}, de la suite des lacets qui entrent dans le circuit $(C)_{\alpha_r}^{\alpha_r}$ jusqu'à l'entrée du lacet (ξ) et de la droite $O\xi$; $u^{(i)}(\eta, \eta_1)$ est la valeur de $u^{(i)}(x, y)$ au point (η, η_1) quand on suit les lacets fondamentaux de seconde espèce qui font passer de la racine y_0 à la racine y_{β_r}, les lacets qui entrent dans le circuit $(C)_{\beta_r}^{\beta_r}$ jusqu'à l'entrée du lacet (η) et la droite $O\eta$. Quant aux intégrales qui composent la somme

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k),$$

il est indifférent, pour notre objet, de prendre pour elles l'une quelconque des valeurs qu'elles ont aux points (x_k, y_k).

La fonction $\psi(x, y)$ admet sur toute la sphère le seul zéro (η, η_1) et le seul infini (ξ, ξ_1). On sait qu'à chaque point analytique (x, y) correspondent une infinité de valeurs des intégrales $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}$, valeurs qui dépendent des chemins qu'on suit et qui sont données par les expressions

$$u^{(i)}(x, y) + 2m_i\pi\sqrt{-1} + 2\sum_{k=1}^{k=p} n_k \alpha_{ik},$$

les coefficients m_i, n_k étant des nombres entiers. Si l'on pose, pour abréger,

$$h_i = C_i - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k),$$

on a en chaque point (x, y) une infinité de valeurs de $\psi(x, y)$ données par

$$\psi(x, y) = \frac{\Theta\left[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\eta, \eta_1) + h_i + 2\sum_{k=1}^{k=p} n_k \alpha_{ik}\right]}{\Theta\left[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \xi_1) + h_i + 2\sum_{k=1}^{k=p} n_k \alpha_{ik}\right]},$$

$$\psi(x, y) = \frac{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\eta, \eta_1) + h_i]}{\Theta[u^{(i)}(x, y) - u^{(i)}(\xi, \xi_1) + h_i]} \frac{e^{-\sum_{i=1}^{i=p} n_i[u^{(i)}(x,y) - u^{(i)}(\eta, \eta_1) + h_i] - \sum_{i,k=1}^{p} n_i n_k \alpha_{ik}}}{e^{-\sum_{i=1}^{i=p} n_i[u^{(i)}(x,y) - u^{(i)}(\xi, \xi_1) + h_i] - \sum_{i,k=1}^{p} n_i n_k \alpha_{ik}}}.$$

Désignons par $\psi'(x, y)$ la valeur de $\psi(x, y)$ quand on suppose que la variable ait décrit une courbe $x_0 x$ ne traversant aucun des lacets relatifs aux points critiques algébriques. La formule précédente pourra s'écrire

$$\psi(x, y) = \psi'(x, y)\, e^{\sum_{i=1}^{i=p} n_i[u^{(i)}(\eta, \eta_1) - u^{(i)}(\xi, \xi_1)]};$$

or, d'après ce que nous avons dit des valeurs des intégrales $u^{(i)}(\xi, \xi_1)$, $u^{(i)}(\eta, \eta_1)$, on a

$$u^{(i)}(\eta, \eta_1) - u^{(i)}(\xi, \xi_1) = \int_\xi^\eta du^{(i)},$$

l'intégrale étant prise le long de la courbe $\xi\eta$. On a ainsi

$$(4) \qquad \psi(x,y) = \psi'(x,y)\, e^{\sum_{i=1}^{i=p} n_i \int_{\xi}^{\eta} du^{(i)}}.$$

10. Supposons que les deux fonctions $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ données par les formules (2) et (4) se rapportent à un même chemin quelconque allant du point (x_0,y_0) au point (x,y); les coefficients n_i seront les mêmes dans les deux formules, et l'on aura

$$\frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)} = \frac{\varphi'(x,y)}{\psi'(x,y)},$$

c'est-à-dire que, quel que soit le chemin qu'on suit pour aller du point (x_0,y_0) au point (x,y), le rapport $\frac{\varphi}{\psi}$ prend une valeur unique en (x,y). La fonction analytique

$$\frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}$$

est donc une fonction monotrope de (x,y) sur toute la sphère, y étant lié à x par l'équation algébrique $F(x,y) = 0$ irréductible et de degré m en y. D'ailleurs cette fonction est finie sur toute la sphère.

11. M. Briot a démontré dans son Cours le théorème suivant :

Étant donnée une équation algébrique $F(x,y) = 0$ irréductible et de degré m en y, toute fonction analytique monotrope de (x,y) qui n'a pas d'autres points singuliers que des pôles est une fraction rationnelle de (x,y); si cette fonction reste finie sur toute la sphère, elle est une constante.

La fonction $\frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}$ remplit précisément ces conditions; donc elle est égale à une constante, et l'on peut poser

$$\varphi(x,y) = A\,\psi(x,y)$$

ou

$$e^{\int_{x_0}^{x} d\Pi_{\xi\eta}} = A\,\frac{\Theta[u^{(i)}(x,y) - u^{(i)}(\eta,\eta_1) + h_i]}{\Theta[u^{(i)}(x,y) - u^{(i)}(\xi,\xi_1) + h_i]}.$$

Pour déterminer la constante, donnons à (x, y) la valeur initiale (x_0, y_0) ; on aura, $u^{(i)}(x_0, y_0)$ étant nul,

$$A = \frac{\Theta[-u^{(i)}(\xi, \xi_1) + h_i]}{\Theta[-u^{(i)}(\eta, \eta_1) + h_i]},$$

et, par suite, on a pour l'intégrale de troisième espèce

$$\int_{x_0}^{x} d\Pi_{\xi\eta} = \log \frac{\Theta\left[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\eta) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) + C_i\right] \Theta\left[-u^{(i)}(\xi) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) + C_i\right]}{\Theta\left[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\xi) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) + C_i\right] \Theta\left[-u^{(i)}(\eta) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) + C_i\right]}$$

où l'on a écrit x, ξ, η au lieu de (x, y), (ξ, ξ_1), (η, η_1).

Remarque. — Le premier membre étant évidemment indépendant des $p - 1$ points $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, il est absolument nécessaire que le second membre en soit aussi indépendant.

12. On peut mettre l'intégrale de troisième espèce sous une autre forme. Je me servirai à cet effet de la fonction Θ en laquelle la fonction

$$\Theta\left[u^{(i)}(x) - \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k) + C_i\right]$$

se transforme à l'aide du théorème d'Abel [1].

Faisons passer par les $p - 1$ points $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ une courbe $\varphi = 0$ de degré $m - 3$, satisfaisant aux mêmes conditions auxquelles satisfait la courbe qui figure dans les intégrales de première espèce. Cette courbe coupera $F = 0$ en $p - 1$ autres points $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p-1}$. Le théorème d'Abel, appliqué à cette courbe, donne les égalités

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x'_k) = 2C_i,$$

[1] BRIOT, *Théorie des fonctions abéliennes.*

d'où

$$-\sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) + C_i = \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x'_k) - C_i.$$

La fonction Θ considérée devient

$$\Theta\left[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(x_p) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x'_k) - C_i\right],$$

qui admet nécessairement les mêmes zéros que la précédente. En remplaçant successivement x_p par η et ξ, les deux fonctions

$$\Theta\left[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\eta) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x'_k) - C_i\right],$$

$$\Theta\left[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\xi) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x'_k) - C_i\right]$$

admettent respectivement les zéros η, ξ et $p-1$ zéros communs. Le rapport

$$\frac{\Theta\left[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\eta) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x'_k) - C_i\right]}{\Theta\left[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\xi) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x'_k) - C_i\right]}$$

admet donc le seul zéro η et le seul infini ξ.

Le raisonnement qui nous a fait obtenir la formule (5) donne évidemment

$$\int_{x_0}^{x} d\Pi_{\xi\eta} = \log \frac{\Theta\left[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\eta) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x'_k) - C_i\right] \Theta\left[-u^{(i)}(\xi) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x'_k) - C_i\right]}{\Theta\left[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\xi) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x'_k) - C_i\right] \Theta\left[-u^{(i)}(\eta) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x'_k) - C_i\right]}.$$

Or, cette expression étant indépendante des $p-1$ points $x'_1, x'_2, \ldots,$

x'_{p-1}, nous pouvons les supposer remplacés par les $p-1$ points x_1, $x_2, \ldots, x_{p-1}$; on a ainsi

$$(5\,bis)\quad \int_{x_0}^{x} d\Pi_{\xi\eta} = \log \frac{\Theta\left[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\eta) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) - C_i\right] \Theta\left[-u^{(i)}(\xi) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) - C_i\right]}{\Theta\left[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\xi) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) - C_i\right] \Theta\left[-u^{(i)}(\eta) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) - C_i\right]}.$$

13. Dans tout ce qui précède, on a supposé que la limite inférieure des intégrales était le point fixe (x_0, y_0) choisi pour origine, et toutes les quantités qui figurent dans nos expressions n'ont de signification précise qu'autant qu'on suppose l'origine toujours la même. Supposons qu'on veuille prendre pour limite inférieure de l'intégrale $\Pi_{\xi\eta}$ un point quelconque (α, α_1); il est facile de voir comment on peut ramener ce cas à celui où la limite inférieure était l'origine des intégrales de première espèce. Joignons à cet effet le point (α, α_1) à l'origine par une courbe ne traversant aucun lacet; l'intégrale $\Pi_{\xi\eta}$ prise le long de cette courbe aura une valeur bien déterminée, qui s'annulera quand le point (α, α_1), en suivant cette courbe, viendra se confondre avec l'origine. Nous entendrons par intégrale $\int_\alpha^x d\Pi_{\xi\eta}$ la somme des deux intégrales

$$\int_\alpha^{x_0} d\Pi_{\xi\eta} + \int_{x_0}^{x} d\Pi_{\xi\eta},$$

dont la première est prise le long du chemin que nous venons de définir et dont la seconde rentre dans le cas considéré précédemment. Cette somme peut s'écrire

$$\int_{x_0}^{x} d\Pi_{\xi\eta} - \int_{x_0}^{\alpha} d\Pi_{\xi\eta},$$

d'où

$$(6)\quad \int_\alpha^x d\Pi_{\xi\eta} = \log \frac{\Theta\left[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\eta) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) + C_i\right] \Theta\left[u^{(i)}(\alpha) - u^{(i)}(\xi) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) + C_i\right]}{\Theta\left[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\xi) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) + C_i\right] \Theta\left[u^{(i)}(\alpha) - u^{(i)}(\eta) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) + C_i\right]},$$

ou, en partant de la formule (5 *bis*),

$$(7)\quad \int_{\alpha}^{x} d\Pi_{\xi\eta} = \log \frac{\Theta\left[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\eta) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) - C_i\right]\Theta\left[u^{(i)}(\alpha) - u^{(i)}(\xi) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) - C_i\right]}{\Theta\left[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\xi) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) - C_i\right]\Theta\left[u^{(i)}(\alpha) - u^{(i)}(\eta) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) - C_i\right]}.$$

14. Considérons les deux intégrales $\Pi_{\xi\eta}$ et $\Pi_{\alpha\beta}$ et supposons que l'on ait formé avec les points (α, α_1), (β, β_1) deux nouveaux lacets, qui ne coupent aucun des autres lacets. D'une manière générale on passera du point (α, α_1) au point (β, β_1) en traversant certains lacets. Supposons que l'on ait construit une courbe réunissant ces deux points et analogue à la courbe $\xi\eta$ déjà considérée. Prenons les deux intégrales respectivement entre les points α, β et ξ, η le long des courbes déterminées qui réunissent ces points. En prenant la première sous la forme (6), la seconde sous la forme (7), on aura

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\Pi_{\xi\eta} = \log \frac{\Theta\left[u^{(i)}(\beta) - u^{(i)}(\eta) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) + C_i\right]\Theta\left[u^{(i)}(\alpha) - u^{(i)}(\xi) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) + C_i\right]}{\Theta\left[u^{(i)}(\beta) - u^{(i)}(\xi) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) + C_i\right]\Theta\left[u^{(i)}(\alpha) - u^{(i)}(\eta) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) + C_i\right]}$$

et

$$\int_{\xi}^{\eta} d\Pi_{\alpha\beta} = \log \frac{\Theta\left[u^{(i)}(\eta) - u^{(i)}(\beta) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) - C_i\right]\Theta\left[u^{(i)}(\xi) - u^{(i)}(\alpha) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) - C_i\right]}{\Theta\left[u^{(i)}(\eta) - u^{(i)}(\alpha) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) - C_i\right]\Theta\left[u^{(i)}(\xi) - u^{(i)}(\beta) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) - C_i\right]}$$

$$= \log \frac{\Theta\left[u^{(i)}(\beta) - u^{(i)}(\eta) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) + C_i\right]\Theta\left[u^{(i)}(\alpha) - u^{(i)}(\xi) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) + C_i\right]}{\Theta\left[u^{(i)}(\beta) - u^{(i)}(\xi) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) + C_i\right]\Theta\left[u^{(i)}(\alpha) - u^{(i)}(\eta) - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) + C_i\right]}.$$

Or, les intégrales se rapportant à des chemins parfaitement déterminés, chacun des seconds membres n'est susceptible que d'une seule valeur ; les seconds membres sont donc égaux, et l'on a

$$\int_\alpha^\beta d\Pi_{\xi\eta} = \int_\xi^\eta d\Pi_{\alpha\beta},$$

formule qui constitue le *principe d'échange entre les paramètres et les arguments*.

15. Considérons les deux intégrales

$$(8)\qquad \int_\alpha^x d\Pi_{\eta\zeta} = \log \frac{\Theta[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\zeta) + h_i]\,\Theta[u^{(i)}(\alpha) - u^{(i)}(\eta) + h_i]}{\Theta[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\eta) + h_i]\,\Theta[u^{(i)}(\alpha) - u^{(i)}(\zeta) + h_i]}$$

et

$$(9)\qquad \int_\alpha^x d\Pi_{\zeta\xi} = \log \frac{\Theta[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\xi) + h_i]\,\Theta[u^{(i)}(\alpha) - u^{(i)}(\zeta) + h_i]}{\Theta[u^{(i)}(x) - u^{(i)}(\zeta) + h_i]\,\Theta[u^{(i)}(\alpha) - u^{(i)}(\xi) + h_i]},$$

où nous supposons que l'on ait réuni les points η, ζ ainsi que les points ζ, ξ par des courbes analogues à la courbe $\xi\eta$ déjà considérée. En faisant la somme des égalités (6), (7) et (8), on aura

$$\int_\alpha^x (d\Pi_{\xi\eta} + d\Pi_{\eta\zeta} + d\Pi_{\zeta\xi}) = 0,$$

ce qui montre que *trois intégrales normales de troisième espèce, formées identiquement et ayant deux à deux un point logarithmique commun, prises entre les mêmes limites, ont une somme nulle.*

Cette propriété résulte aussi immédiatement si l'on fait la somme des trois intégrales après qu'on a changé les paramètres et les arguments.

16. Considérons l'intégrale générale

$$S_{\xi\eta} = \Pi_{\xi\eta} + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{k=1}^{k=p} S_{\xi\eta}^{(k)} u^{(k)}.$$

Remplaçons $\Pi_{\xi\eta}$ par sa valeur en fonction de Θ; on aura

$$\int_\alpha^x dS_{\xi\eta} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{k=1}^{k=p} S_{\xi\eta}^{(k)} u^{(k)} + \log\frac{\Theta[u^{(i)}(x)-u^{(i)}(\eta)+h_i]\,\Theta[u^{(i)}(\alpha)-u^{(i)}(\xi)+h_i]}{\Theta[u^{(i)}(x)-u^{(i)}(\xi)+h_i]\,\Theta[u^{(i)}(\alpha)-u^{(i)}(\eta)+h_i]}.$$

Si l'on forme de la même façon les deux intégrales

$$\int_\alpha^x dS_{\eta\zeta},\quad \int_\alpha^x dS_{\zeta\xi},$$

et qu'on fasse la somme des trois intégrales, on aura

$$\int_\alpha^x (dS_{\xi\eta} + dS_{\eta\zeta} + dS_{\zeta\xi}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{k=1}^{k=p}(S_{\xi\eta}^{(k)} + S_{\eta\zeta}^{(k)} + S_{\zeta\xi}^{(k)})\,u^{(k)}(x,y),$$

c'est-à-dire que :

La somme de trois intégrales générales de troisième espèce qui ont deux à deux un point logarithmique commun et qui sont prises entre les mêmes limites est une intégrale de troisième espèce.

17. Si l'on remplace l'intégrale $S_{\xi\eta}$ par une autre $S'_{\xi\eta}$ ayant les mêmes points logarithmiques, on aura sous le signe log la même expression, car cette expression ne dépend que de ξ, η, qui sont les mêmes dans les deux intégrales. Il en résulte que la différence

$$\int_\alpha^x (dS_{\xi\eta} - dS'_{\xi\eta}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{k=1}^{k=p}(S_{\xi\eta}^{(k)} - S_{\xi\eta}^{\prime(k)})\,u^{(k)}(x,y)$$

est une intégrale de première espèce.

Application au problème de l'inversion.

18. Reprenons la fonction

$$\Theta\left[u^{(i)}(x) + \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k) - u^{(i)}(x_p) - C_i\right],$$

qui s'annule au point x_p et en $p-1$ autres points dépendants des

$p-1$ points x_k. Regardons ces derniers comme variables et considérons la fonction

$$\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k) - u^{(i)}(x_p) - C_i\right],$$

qui s'annulera toutes les fois qu'un des points x_k viendra coïncider avec le point x_p. Remplaçons successivement x_p par η et ξ :

$$\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k) - u^{(i)}(\eta) - C_i\right],$$

$$\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k) - u^{(i)}(\xi) - C_i\right].$$

Ces deux fonctions s'annulent en même temps, excepté lorsqu'un des points x_k coïncide avec le point η ou le point ξ; dans ces cas, c'est respectivement la première ou la seconde qui s'annule.

Posons

$$\Phi = e^{\int_{\alpha_1}^{x_1} d\Pi_{\xi\eta}} e^{\int_{\alpha_2}^{x_2} d\Pi_{\xi\eta}} \cdots e^{\int_{\alpha_p}^{x_p} d\Pi_{\xi\eta}}$$

et

$$\Psi = \frac{\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k) - u^{(i)}(\eta) - C_i\right]}{\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k) - u^{(i)}(\xi) - C_i\right]}.$$

Les limites inférieures des intégrales de troisième espèce qui figurent dans le second membre de Φ sont p points fixes liés à l'origine par des chemins ne traversant aucun lacet, et les intégrales $\int_{\alpha_i}^{x_i} d\Pi_{\xi\eta}$ sont prises de la façon que nous avons indiquée dans la première Partie.

Les deux fonctions Φ et Ψ s'annulent et deviennent infinies pour les mêmes points. Si l'on suppose pour un moment les points $x_2, x_3, \ldots, x_p$ fixes et le point x_1 seul variable, le raisonnement que nous avons fait ailleurs montre que le rapport $\frac{\Phi}{\Psi}$ est une constante par rapport à x_1.

Si l'on suppose le point x_2 seul variable, le rapport $\frac{\Phi}{\Psi}$ sera indépendant de x_2, et ainsi de suite. Ce rapport, étant indépendant des p points $x_1, x_2, \ldots, x_p$, est une constante absolue, et l'on a

$$\frac{\Phi}{\Psi} = \mathrm{A}.$$

Déterminons la constante en donnant à $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, d'où

$$\mathrm{A} = \frac{\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(\alpha_k) - u^{(i)}(\xi) - \mathrm{C}_i\right]}{\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(\alpha_k) - u^{(i)}(\eta) - \mathrm{C}_i\right]},$$

et par suite

$$e^{\sum_{k=1}^{k=p}\int_{\alpha_k}^{x_k} d\Pi_{\xi\eta}} = \frac{\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k) - u^{(i)}(\eta) - \mathrm{C}_i\right]\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(\alpha_k) - u^{(i)}(\xi) - \mathrm{C}_i\right]}{\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k) - u^{(i)}(\xi) - \mathrm{C}_i\right]\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(\alpha_k) - u^{(i)}(\eta) - \mathrm{C}_i\right]}.$$

Posons, avec MM. Clebsch et Gordan,

$$\mathrm{T}_{\xi\eta}\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_p \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_p \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{k=p}\int_{\alpha_k}^{x_k} d\Pi_{\xi\eta},$$

on aura, pour l'expression de la fonction $\mathrm{T}_{\xi\eta}$,

$$(1) \quad \mathrm{T}_{\xi\eta} = \log\frac{\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k) - u^{(i)}(\eta) - \mathrm{C}_i\right]\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(\alpha_k) - u^{(i)}(\xi) - \mathrm{C}_i\right]}{\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k) - u^{(i)}(\xi) - \mathrm{C}_i\right]\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(\alpha_k) - u^{(i)}(\eta) - \mathrm{C}_i\right]}.$$

19. Je rappelle qu'en désignant par $\Pi_{\alpha\beta}$ une intégrale de troisième espèce, par $\varphi(x,y) = 0$ et $\psi(x,y) = 0$ deux courbes algébriques de même degré, le théorème d'Abel donne l'égalité

$$\log\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_\alpha - \log\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_\beta = \sum_{(\xi,\eta)} \int_\xi^\eta d\Pi_{\alpha\beta},$$

où les ξ et les η désignent respectivement les points d'intersection des courbes $\varphi(x, y) = 0$ et $\psi(x, y) = 0$ avec la courbe $F(x, y) = 0$. Ajoutons que les chemins des intégrations qui se rapportent au second membre, ainsi que les logarithmes du premier, sont complétement déterminés par les conditions que le théorème impose. En échangeant les paramètres et les arguments, l'égalité précédente devient

$$(2) \qquad \log\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_\alpha - \log\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_\beta = \sum_{(\xi,\eta)} \int_\alpha^\beta d\Pi_{\xi\eta}.$$

20. Considérons les p équations différentielles

$$\sum_{k=1}^{k=p} du^{(1)}(x_k) = du_1,$$

$$\sum_{k=1}^{k=p} du^{(2)}(x_k) = du_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\sum_{k=1}^{k=p} du^{(p)}(x_k) = du_p.$$

L'intégration de ces équations par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_p$ constitue ce qu'on appelle le *problème de l'inversion*. Les x, ou plus généralement des fonctions symétriques de ceux-ci, sont appelées *fonctions abéliennes* des variables u_i.

21. Prenons, pour les courbes $\varphi = 0$ et $\psi = 0$, les droites

$$(3) \qquad \begin{cases} x - \xi = 0, \\ x - \eta = 0, \end{cases}$$

et remplaçons successivement dans (2) le point α par les points x_1,

$x_2, \ldots, x_p$ et simultanément le point β par les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. On aura les p égalités

$$(4)\quad \begin{cases} \log \dfrac{x_1 - \xi}{x_1 - \eta} - \log \dfrac{\alpha_1 - \xi}{\alpha_1 - \eta} = -\sum \displaystyle\int_{\alpha_1}^{x_1} d\Pi_{\xi\eta}, \\ \log \dfrac{x_2 - \xi}{x_2 - \eta} - \log \dfrac{\alpha_2 - \xi}{\alpha_2 - \eta} = -\sum \displaystyle\int_{\alpha_2}^{x_2} d\Pi_{\xi\eta}, \\ \dotfill, \\ \log \dfrac{x_p - \xi}{x_p - \eta} - \log \dfrac{\alpha_p - \xi}{\alpha_p - \eta} = -\sum \displaystyle\int_{\alpha_p}^{x_p} d\Pi_{\xi\eta}. \end{cases}$$

En faisant la somme, on a

$$\log \prod_{k=1}^{k=p} \frac{x_k - \xi}{x_k - \eta} - \log \prod_{k=1}^{k=p} \frac{\alpha_k - \xi}{\alpha_k - \eta} = -\sum_{(\xi,\eta)} \sum_{k=1}^{k=p} \int_{\alpha_k}^{x_k} d\Pi_{\xi\eta},$$

d'où

$$(5)\quad \prod_{k=1}^{k=p} \frac{x_k - \xi}{x_k - \eta} = \prod_{k=1}^{k=p} \frac{\alpha_k - \xi}{\alpha_k - \eta}\, e^{-\Sigma T_{\xi\eta}\left(\substack{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_p \\ \alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_p}\right)}.$$

Remarquons, avant d'aller plus loin, que, la formule précédente ayant lieu en vertu du théorème d'Abel, on pourrait croire que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ devraient être assujetties à ne suivre que certains chemins déterminés; mais il est facile de voir qu'il n'y a lieu de faire aucune restriction à l'égard des chemins que ces variables doivent suivre. En effet, supposons que les chemins deviennent quelconques; la valeur primitive de l'intégrale $\int_{\alpha_i}^{x_i} d\Pi_{\xi\eta}$ se trouvera augmentée de

$$2 m_i \pi \sqrt{-1} + \sum_{k=1}^{k=p} n_k \int_{\xi}^{\eta} du^{(k)}(x_i),$$

ou, en désignant par $U^{(i)}$ l'intégrale $\sum_{k=1}^{k=p} n_k u^{(k)}(x_i)$, l'intégrale $\int_{\alpha_i}^{x_i} d\Pi_{\xi\eta}$ se trouvera augmentée de

$$2 m_i \pi \sqrt{-1} + \int_\xi^\eta dU^{(i)},$$

et, par suite, la somme $\sum_{(\xi,\eta)} \int_{\alpha_i}^{x_i} d\Pi_{\xi\eta}$ sera augmentée de la quantité

$$2 m'_i \pi \sqrt{-1} + \sum_{(\xi,\eta)} \int_\xi^\eta dU^{(i)}.$$

Or, les points ξ, η sont supposés réunis par des courbes qui ne se coupent pas entre elles et qui ne traversent aucun lacet, et c'est le long de ces courbes que nous prenons les intégrales précédentes; par conséquent, en vertu du théorème d'Abel, la dernière somme est nulle, et, par suite, la fonction

$$e^{-\Sigma T_{\xi\eta}}$$

n'est nullement affectée de la façon dont les variables se meuvent.

22. Désignons par (ξ, ξ_1), (ξ, ξ_2), ..., (ξ, ξ_m) les points d'intersection de la droite $x - \xi = 0$ avec la courbe $F(x, y) = 0$ et par (η, η_1), (η, η_2), ..., (η, η_m) ceux de la droite $x - \eta = 0$ avec la même courbe; nous aurons, après avoir remplacé dans la formule (5) $T_{\xi\eta}$ par sa valeur en fonction des Θ,

$$\prod_{k=1}^{k=p} \frac{x_k - \xi}{x_k - \eta} = \prod_{k=1}^{k=p} \frac{\alpha_k - \xi}{\alpha_k - \eta} \prod_{h=1}^{h=m} \frac{\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k) - u^{(i)}(\xi, \xi_h) - C_i\right] \Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(\alpha_k) - u^{(i)}(\eta, \eta_h) - C_i\right]}{\Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k) - u^{(i)}(\eta, \eta_h) - C_i\right] \Theta\left[\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(\alpha_k) - u^{(i)}(\xi, \xi_h) - C_i\right]}$$

ou, si nous supposons que les points α_1, α_2, ..., α_p coïncident avec l'origine, on aura, en remplaçant $\sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x_k)$ par u_i,

$$\frac{\xi^p + A_1 \xi^{p-1} + \ldots + A_p}{\eta^p + A_1 \eta^{p-1} + \ldots + A_p} = \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^p \prod_{h=1}^{h=m} \frac{\Theta[u_i - u^{(i)}(\xi, \xi_h) - C_i]\, \Theta[u^{(i)}(\eta, \eta_h) + C_i]}{\Theta[u_i - u^{(i)}(\eta, \eta_h) - C_i]\, \Theta[u^{(i)}(\xi, \xi_h) + C_i]}.$$

En donnant à ξ et à η p valeurs différentes, on aura autant d'équations linéaires pour déterminer les coefficients A_1, A_2, ..., A_p. Les p valeurs x_1, x_2, ..., x_p sont évidemment les racines de l'équation algébrique

$$x^p + A_1 x^{p-1} + A_2 x^{p-2} + \ldots + A_p = 0.$$