DÉSIRÉ ANDRÉ

Sommation de certaines séries

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 8 (1879), p. 239-246
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1879_2_8__239_0>

SOMMATION DE CERTAINES SÉRIES,

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE.

I.

1. Les séries que nous allons étudier sont celles dont le terme général V_n est donné par la formule

$$V_n = v_n \frac{x^{\alpha n+\beta}}{(\alpha n+\beta)!},$$

dans laquelle α désigne un entier quelconque supérieur à zéro et β un entier quelconque non négatif, mais inférieur à α, où l'indice n est un entier non négatif, parce que nous ne considérons que des séries entières, et où v_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite.

2. L'exponentielle e^x, les fonctions $\sin x$ et $\cos x$, ainsi que les fonctions analogues, se développent suivant des séries de cette espèce; il en est de même des polynômes entiers par rapport à la variable x et à des exponentielles de la forme e^{mx}; de même de toutes les fonctions d'une seule variable qui satisfont à n'importe quelle équation différentielle linéaire à coefficients constants et sans second membre; de même encore des expressions qui multiplient les puissances successives de k dans le développement, suivant ces dernières puissances, soit des fonctions elliptiques, soit des fonctions de M. Weierstrass, soit d'autres fonctions dont nous avons récemment parlé (¹).

On voit par là que les séries qui nous occupent ne sont point incon-

---

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 29 octobre 1877.

nues dans l'Analyse et que le rôle qu'elles y jouent n'est point sans une réelle importance.

3. Ces séries jouissent de cette propriété remarquable que leur somme peut toujours s'exprimer, sous forme finie, à l'aide d'un polynôme analogue à ceux dont il vient d'être question, c'est-à-dire à l'aide d'un polynôme entier par rapport à la variable x et à des exponentielles de la forme e^{mx}. Nous nous proposons, dans le présent travail, de déterminer d'une manière générale l'expression même de cette somme.

II.

4. Pour arriver à ce résultat, occupons-nous en premier lieu du coefficient v_n, qui constitue, comme nous l'avons dit, le terme général d'une série récurrente proprement dite. Désignons par r l'une quelconque des racines de l'équation génératrice de cette série récurrente, et par ρ le degré de multiplicité de cette racine. On sait qu'en étendant le Σ ci-dessous à toutes les racines de l'équation génératrice on a, pour toute valeur entière et non négative de n,

$$v_n = \sum \xi_r(n) r^n,$$

et de plus que, dans cette formule, $\xi_r(n)$ représente un polynôme entier en n et du degré $\rho - 1$, de sorte que l'on peut poser

$$\xi_r(n) = P_{r,0} + P_{r,1} n + P_{r,2} n^2 + \ldots + P_{r,\rho-1} n^{\rho-1}.$$

5. Cela étant, considérons le polynôme $\xi_r(n)$ sous la forme développée que nous venons d'écrire. Nous pouvons le transformer identiquement en celui-ci :

$$p_{r,0} + p_{r,1}(\alpha n + \beta) + p_{r,2}(\alpha n + \beta)^2 + \ldots + p_{r,\rho-1}(\alpha n + \beta)^{\rho-1}.$$

Il suffit en effet, pour cela, de trouver une expression de $p_{r,h}$ qui satisfasse, pour toute valeur entière et non négative de h, à l'égalité

$$h!\, p_{r,h} + \frac{(h+1)!}{1!} \beta p_{r,h+1} + \frac{(h+2)!}{2!} \beta^2 p_{r,h+2} + \ldots + \frac{(\rho-1)!}{(\rho-1-h)!} \beta^{\rho-1-h} p_{r,\rho-1} = \frac{h!}{\alpha^h} P_{r,h}.$$

Or cette égalité nous montre que $p_{r,h}$ est, dans ces conditions, le terme général d'une série déterminée à la façon des séries récurrentes, et, en appliquant les règles que nous avons données ([1]) pour la formation du terme général d'une pareille série, nous trouvons

$$p_{r,h} = \frac{1}{\alpha^h}\left[\mathrm{P}_{r,h} - \frac{(h+1)!}{h!\,1!}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\mathrm{P}_{r,h+1} + \frac{(h+2)!}{h!\,2!}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \mathrm{P}_{r,h+2} - \ldots \pm \frac{(\rho-1)!}{h!\,(\rho-1-h)!}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\rho-1-h}\mathrm{P}_{r,\rho-1}\right].$$

6. Le polynôme en p par lequel nous venons ainsi de remplacer notre polynôme en P peut, à son tour, se transformer identiquement en ce nouveau polynôme

$$\begin{aligned}&\mathrm{Q}_{r,0} + \mathrm{Q}_{r,1}(\alpha n + \beta) + \mathrm{Q}_{r,2}(\alpha n + \beta)(\alpha n + \beta - 1) + \ldots \\ &\quad + \mathrm{Q}_{r,\rho-1}(\alpha n + \beta)(\alpha n + \beta - 1)\ldots(\alpha n + \beta - \rho + 2),\end{aligned}$$

car on a, en général, par une formule ([2]) qui nous paraît due à J.-F.-W. Herschel,

$$z^h = \frac{\Delta 0^h}{1!}z + \frac{\Delta^2 0^h}{2!}z(z-1) + \frac{\Delta^3 0^h}{3!}z(z-1)(z-2) + \ldots + \frac{\Delta^h 0^h}{h!}z(z-1)\ldots(z-h+1).$$

Remplaçons dans cette formule z par $\alpha n + \beta$; nous trouvons, pour chaque puissance de ce binôme $\alpha n + \beta$, une expression équivalente. Portant cette expression à la place de cette puissance dans le polynôme en p qui précède (n° 5), puis identifiant le résultat effectué de cette substitution avec le polynôme en Q que nous venons d'écrire, nous obtenons, pour l'expression générale des coefficients Q,

$$\mathrm{Q}_{r,h} = \frac{1}{h!}\left(\Delta^h 0^h p_{r,h} + \Delta^h 0^{h+1} p_{r,h+1} + \Delta^h 0^{h+2} p_{r,h+2} + \ldots + \Delta^h 0^{\rho-1} p_{r,\rho-1}\right).$$

7. Comme les coefficients primitivement donnés sont, non pas les coefficients p, mais bien les coefficients P, c'est en fonction des coefficients P qu'il importe d'exprimer les coefficients Q.

Remplaçons dans la formule précédente (n° 6), qui donne $\mathrm{Q}_{r,h}$, les

([1]) Thèses soutenues devant la Faculté des Sciences de Paris, le 28 mars 1877.

([2]) *Calculus of finite differences*, p. 13.

p par leurs expressions respectives en fonction des P, et ordonnons nos résultats par rapport à ces mêmes coefficients P, nous trouvons

$$h!\,Q_{r,h} = \Delta^h 0^h \frac{P_{r,h}}{\alpha^h} + \left[\Delta^h 0^{h+1} - \frac{(h+1)!}{h!\,1!}\beta\Delta^h 0^h\right]\frac{P_{r,h+1}}{\alpha^{h+1}}$$
$$+\left[\Delta^h 0^{h+2} - \frac{(h+2)!}{(h+1)!\,1!}\beta\Delta^h 0^{h+1} + \frac{(h+2)!}{h!\,2!}\beta^2\Delta^h 0^h\right]\frac{P_{r,h+2}}{\alpha^{h+2}} + \ldots,$$

formule qui nous fournit immédiatement le coefficient $Q_{r,h}$ en fonction des coefficients donnés $P_{r,h}$, $P_{r,h+1}$, $P_{r,h+2}$, ..., $P_{r,\rho-1}$ et des nombres connus $\Delta^h 0^h$, $\Delta^h 0^{h+1}$, $\Delta^h 0^{h+2}$, ..., $\Delta^h 0^{\rho-1}$.

8. Cette formule peut s'abréger singulièrement à l'aide des notations symboliques. Il est visible, en effet, qu'à son second membre les expressions qui multiplient $P_{r,h}$, $P_{r,h+1}$, $P_{r,h+2}$, ..., $P_{r,\rho-1}$ peuvent s'écrire respectivement, d'une façon symbolique,

$$\Delta^h\left(\frac{0-\beta}{\alpha}\right)^h, \quad \Delta^h\left(\frac{0-\beta}{\alpha}\right)^{h+1}, \quad \Delta^h\left(\frac{0-\beta}{\alpha}\right)^{h+2}, \quad \ldots, \quad \Delta^h\left(\frac{0-\beta}{\alpha}\right)^{\rho-1}.$$

Donc nous avons, symboliquement,

$$h!\,Q_{r,h} = \Delta^h\left(\frac{0-\beta}{\alpha}\right)^h P_{r,h} + \Delta^h\left(\frac{0-\beta}{\alpha}\right)^{h+1} P_{r,h+1} + \ldots + \Delta^h\left(\frac{0-\beta}{\alpha}\right)^{\rho-1} P_{r,\rho-1}.$$

Mais cette nouvelle formule peut à son tour, et par les mêmes moyens, être aussi abrégée. Si, après avoir mis symboliquement Δ^h en facteur commun à son second membre, on remarque que la quantité multipliée alors par Δ^h constitue, symboliquement encore, une progression géométrique, et que l'on remplace cette progression développée par l'expression connue de la somme de ses termes, on trouve finalement

$$Q_{r,h} = \frac{1}{h!}\Delta^h \frac{\left(\frac{0-\beta}{\alpha}\right)^\rho P_{r,\rho} - \left(\frac{0-\beta}{\alpha}\right)^h P_{r,h}}{\left(\frac{0-\beta}{\alpha}\right) P_{r,1} - 1}.$$

Telle est l'expression symbolique abrégée des coefficients Q en fonction des coefficients P.

III.

9. Par ce qui précède, la portion de v_n qui se rapporte à la racine r de l'équation génératrice se trouve mise sous la forme d'un produit de deux facteurs, dont l'un est r^n et dont l'autre est le polynôme

$$\begin{aligned} &Q_{r,0} + Q_{r,1}(\alpha n + \beta) + Q_{r,2}(\alpha n + \beta)(\alpha n + \beta - 1) + \ldots \\ &\quad + Q_{r,\rho-1}(\alpha n + \beta)(\alpha n + \beta - 1)\ldots(\alpha n + \beta - \rho + 2). \end{aligned}$$

Comme ce polynôme est évidemment identique à l'expression

$$(\alpha n + \beta)!\left[\frac{Q_{r,0}}{(\alpha n + \beta)!} + \frac{Q_{r,1}}{(\alpha n + \beta - 1)!} + \frac{Q_{r,2}}{(\alpha n + \beta - 2)!} + \ldots + \frac{Q_{r,\rho-1}}{(\alpha n + \beta - \rho + 1)!}\right],$$

il s'ensuit que la portion de V_n qui se rapporte à cette même racine r peut s'écrire

$$\left[\frac{Q_{r,0}}{(\alpha n + \beta)!} + \frac{Q_{r,1}}{(\alpha n + \beta - 1)!} + \frac{Q_{r,2}}{(\alpha n + \beta - 2)!} + \ldots + \frac{Q_{r,\rho-1}}{(\alpha n + \beta - \rho + 1)!}\right] r^n x^{\alpha n + \beta}.$$

10. Cela étant, si l'on désigne par r_i l'une quelconque des α racines $\alpha^{\text{ièmes}}$ de r, on a identiquement

$$r^n = \frac{r_i^{\alpha n + \beta}}{r_i^\beta};$$

la portion considérée de V_n peut s'écrire

$$\frac{Q_{r,0}}{r_i^\beta}\frac{(r_i x)^{\alpha n + \beta}}{(\alpha n + \beta)!} + \frac{Q_{r,1}}{r_i^{\beta-1}}\frac{(r_i x)^{\alpha n + \beta - 1}}{(\alpha n + \beta - 1)!} + \ldots + \frac{Q_{r,\rho-1}}{r_i^{\beta-\rho+1}}\frac{(r_i x)^{\alpha n + \beta - \rho + 1}}{(\alpha n + \beta - \rho + 1)!},$$

et, dans la série (1) que nous étudions, l'ensemble correspondant à la racine r est la somme

$$\frac{Q_{r,0}}{r_i^\beta}\sum_0^\infty{}_n \frac{(r_i x)^{\alpha n + \beta}}{(\alpha n + \beta)!} + \frac{Q_{r,1}}{r_i^{\beta-1}}\sum_0^\infty{}_n \frac{(r_i x)^{\alpha n + \beta - 1}}{(\alpha n + \beta - 1)!} + \ldots.$$

11. Nous nous trouvons ainsi amené à nous occuper, pour en calculer les sommes respectives, des séries

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{(r_i x)^{\alpha n + \beta}}{(\alpha n + \beta)!}, \quad \sum_0^\infty{}_n \frac{(r_i x)^{\alpha n + \beta - 1}}{(\alpha n + \beta - 1)!}, \quad \ldots,$$

séries très-générales qui comprennent comme cas particuliers les développements du sinus et du cosinus, qui sont évidemment les plus simples de toutes les séries considérées par nous dans le présent travail, et qui ont été étudiées déjà (¹), en 1827, par M. Louis Olivier.

12. La méthode qui conduit à l'expression de leur somme repose sur ce fait évident que chacune d'elles se compose des termes pris de α en α, à partir de l'un des α premiers, dans le développement de $e^{r_i x}$.

Or, il existe un procédé général et bien connu pour obtenir la somme des termes pris de α en α dans une suite quelconque. Ce procédé repose sur l'emploi des α racines $\alpha^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Nous allons l'appliquer à la recherche de la somme de la première des séries précédentes, c'est-à-dire à la recherche de la somme de celle de ces séries dont le terme général U_n est donné par la formule

$$U_n = \frac{(r_i x)^{\alpha n+\beta}}{(\alpha n+\beta)!}.$$

13. Appelons $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_\alpha$ ces α racines $\alpha^{\text{ièmes}}$ de l'unité, et considérons la somme

$$\frac{e^{a_1 r_i x}}{a_1^\beta} + \frac{e^{a_2 r_i x}}{a_2^\beta} + \frac{e^{a_3 r_i x}}{a_3^\beta} + \ldots + \frac{e^{a_\alpha r_i x}}{a_\alpha^\beta}.$$

Si nous en développons simultanément tous les termes suivant les puissances croissantes de x, nous trouvons, en ajoutant terme à terme les α séries obtenues, une série unique, dont le terme général peut s'écrire

$$\left(a_1^{h-\beta} + a_2^{h-\beta} + a_3^{h-\beta} + \ldots + a_\alpha^{h-\beta}\right) \frac{(r_i x)^h}{h!}.$$

Si l'entier h n'est point de la forme $\alpha n + \beta$, l'exposant $h - \beta$ n'est point un multiple de α, et, par suite, la somme

$$a_1^{h-\beta} + a_2^{h-\beta} + a_3^{h-\beta} + \ldots + a_\alpha^{h-\beta}$$

est nulle.

Au contraire, si h est de la forme $\alpha n + \beta$, l'exposant $h - \beta$ est un

(¹) *Journal de Crelle*, t. 2, p. 243.

multiple de α, chacun des termes de cette somme devient égal à l'unité et la somme elle-même devient égale à α.

14. Il s'ensuit que nous avons identiquement

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{(r_i x)^{\alpha n+\beta}}{(\alpha n+\beta)!} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{e^{a_1 r_i x}}{a_1^\beta} + \frac{e^{a_2 r_i x}}{a_2^\beta} + \ldots + \frac{e^{a_\alpha r_i x}}{a_\alpha^\beta}\right).$$

Telle est la somme de la série considérée. Les sommes respectives des autres séries (11) s'obtiendraient immédiatement en remplaçant successivement, dans l'expression qu'on vient d'écrire, β par $\beta - 1$, par $\beta - 2$, par $\beta - 3$, ...

15. Le second membre de l'égalité qui précède (14) est susceptible d'une légère simplification. Rappelons-nous, en effet, les significations respectives de la lettre r_i d'une part et des lettres $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ de l'autre. Nous avons représenté par r_i l'une quelconque des racines $\alpha^{\text{ièmes}}$ de la quantité r et par $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ les α racines $\alpha^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Donc les produits

$$a_1 r_i,\quad a_2 r_i,\quad a_3 r_i,\quad \ldots,\quad a_\alpha r_i$$

ne sont autre chose que les α racines $\alpha^{\text{ièmes}}$ de r.

Donc, si nous désignons celles-ci par $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_\alpha$, notre second membre devient, par une facile transformation,

$$\frac{r_i^\beta}{\alpha}\left(\frac{e^{r_1 x}}{r_1^\beta} + \frac{e^{r_2 x}}{r_2^\beta} + \frac{e^{r_3 x}}{r_3^\beta} + \ldots + \frac{e^{r_\alpha x}}{r_\alpha^\beta}\right),$$

et nous avons finalement

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{(r_i x)^{\alpha n+\beta}}{(\alpha n+\beta)!} = \frac{r_i^\beta}{\alpha} \sum_{1}^{\alpha}{}_i \frac{e^{r_i x}}{r_i^\beta}.$$

IV.

16. Revenons un moment sur nos pas et récrivons l'expression (10) de la portion de la somme de la série donnée (1) qui correspond à la racine r. Nous avons

$$\frac{Q_{r,0}}{r_i^{\beta}} \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{(r_i x)^{\alpha n+\beta}}{(\alpha n+\beta)!} + \frac{Q_{r,1}x}{r_i^{\beta-1}} \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{(r_i x)^{\alpha n+\beta-1}}{(\alpha n+\beta-1)!} + \ldots .$$

17. Remplaçons, dans cette expression, chacune des séries qui s'y trouvent par sa somme; nous trouvons

$$\frac{Q_{r,0}}{\alpha} \sum_{1}^{\alpha}{}_i \frac{e^{r_i x}}{r_i^{\beta}} + \frac{Q_{r,1}x}{\alpha} \sum_{1}^{\alpha}{}_i \frac{e^{r_i x}}{r_i^{\beta-1}} + \ldots + \frac{Q_{r,\rho-1}x^{\rho-1}}{\alpha} \sum_{1}^{\alpha}{}_i \frac{e^{r_i x}}{r_i^{\beta-\rho+1}}$$

ou bien

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{0}^{\rho-1}{}_j \sum_{1}^{\alpha}{}_i \frac{x^j Q_{r,j} e^{r_i x}}{r_i^{\beta-j}}.$$

18. Si nous faisons précéder cette expression tout entière d'un Σ s'étendant à toutes les quantités analogues à r, c'est-à-dire à toutes les racines de l'équation génératrice dont nous avons parlé (4), nous obtenons, pour la somme S de la série donnée (1), la formule

$$S = \frac{1}{\alpha} \sum \sum_{0}^{\rho-1}{}_j \sum_{1}^{\alpha}{}_i \frac{x^j Q_{r,j} e^{r_i x}}{r_j^{\beta-i}},$$

et, comme les quantités $Q_{r,j}$ sont connues (6) en fonction des données, cette formule résout complétement le problème que nous nous étions proposé.

19. On voit d'ailleurs immédiatement que cette expression de S, comme nous l'avons annoncé en commençant (3), n'est autre chose qu'un polynôme entier par rapport à la variable x et à des exponentielles de la forme e^{mx}.

Dijon, 11 avril 1878.