ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MIREILLE MARTIN-DESCHAMPS
DANIEL PERRIN

Le schéma de Hilbert des courbes gauches localement Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais réduit

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 29, nº 6 (1996), p. 757-785
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1996_4_29_6_757_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 29, 1996, p. 757 à 785.

LE SCHÉMA DE HILBERT DES COURBES GAUCHES LOCALEMENT COHEN-MACAULAY N'EST (PRESQUE) JAMAIS RÉDUIT

PAR MIREILLE MARTIN-DESCHAMPS ET DANIEL PERRIN

ABSTRACT. — Let k be an algebraically closed field of characteristic zero. Let $H_{d,g}$ denote the Hilbert scheme of locally Cohen-Macaulay curves of degree d and genus g contained in the projective space $\mathbf{P}^3_k$. If $d \geq 6$ and $g \leq \frac{(d-3)(d-4)}{2} + 1$, $H_{d,g}$ is not reduced. There exists an irreducible component, which is not generically reduced, and such that the underlying reduced scheme is smooth, of dimension $\frac{3}{2}d(d-3) + 9 - 2g$. The points of this component correspond to curves C such that the values of the function $n \mapsto h^1\mathcal{J}_C(n)$ are maximal.

Introduction

On désigne par $H_{d,g}$ le schéma de Hilbert des courbes localement de Cohen-Macaulay de l'espace projectif $\mathbf{P}^3$ (sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro), de degré d et de genre arithmétique g. Le but de cet article est d'exhiber, pour presque tous les couples d, g pour lesquels ce schéma de Hilbert est non vide, une composante irréductible non réduite de $H_{d,g}$. La composante en question est formée de courbes **extrémales** au sens où elles atteignent les bornes supérieures pour les valeurs des $h^1\mathcal{J}_C(n)$ telles qu'elles sont données dans [MDP4], *cf.* 0.b ci-dessous. Ces courbes ne sont pas réduites en général. Notre résultat principal est le suivant :

THÉORÈME 4.3. – *On suppose :*

$$d \geq 6 \quad \text{et} \quad g \leq \frac{(d-3)(d-4)}{2} + 1.$$

Alors le sous-schéma $H_{\gamma,\rho}$ formé des courbes extrémales de $H_{d,g}$ est lisse, ensemblistement égal à une composante irréductible de $H_{d,g}$, de dimension

$$\frac{3}{2}d(d-3) + 9 - 2g.$$

Cette composante n'est pas génériquement réduite. De plus, le schéma $H_{d,g}$ contient des courbes non extrémales donc n'est pas irréductible.

Pour le cas $d < 6$ et le cas $g > \frac{(d-3)(d-4)}{2} + 1$, le lecteur se reportera aux énoncés précis 4.1, 4.2 et 4.3. Dans le dernier cas, avec l'hypothèse supplémentaire $g < \frac{(d-2)(d-3)}{2}$

(le cas $g = \frac{(d-2)(d-3)}{2}$ correspond à des courbes arithmétiquement de Cohen-Macaulay et est bien connu) nous montrons que le schéma de Hilbert (qui ne contient que des courbes non connexes ou non réduites) est irréductible grâce à un résultat d'Ellia, *cf.* [E], mais qu'il est encore non réduit, soit parce qu'il n'est pas génériquement réduit, soit parce qu'il contient une composante immergée.

La méthode de démonstration du théorème ci-dessus s'inscrit dans la droite ligne de notre philosophie pour la classification des courbes gauches telle qu'elle est énoncée dans [MDP1,2]. On note d'abord que le module de Rao des courbes extrémales est un module intersection complète (ou "de Koszul"). L'espace de ces modules est très simple, de sorte que "l'étape du bas" est facile. On utilise alors "l'étape intermédiaire" de [MDP1] pour en déduire la structure du schéma $H_{\gamma,\rho}$ des courbes extrémales. Puis, notamment par des techniques de déformations infinitésimales inspirées de [W] et [F], on conclut en décrivant "l'étape du haut", i.e., le rapport entre $H_{\gamma,\rho}$ et $H_{d,g}$.

Le lecteur que les courbes non réduites effrayent, trouvera au §5 une application de notre travail à l'étude du schéma de Hilbert $H^0_{d,g}$ des courbes **lisses** : nous donnons un moyen systématique pour trouver, pour tout $d \geq 144$ (resp. $d \geq 7225$), des entiers g tels que les schémas de Hilbert $H^0_{d,g}$ ne soient pas réduits (resp. ni réduits, ni irréductibles). Cela est conforme à un autre principe énoncé dans [MDP1] : la connaissance des courbes minimales d'une classe de liaison (et les extrémales sont bien des courbes minimales) donne nombre de renseignements sur les autres courbes de la classe (et on sait que toute classe contient des courbes lisses). Dans le cas présent le point technique utilisé est un résultat de Kleppe sur les schémas de drapeaux, *cf.* [K].

Dans une prépublication du LMENS, numéro 94-14, nous avions annoncé que le schéma de Hilbert n'était presque jamais connexe, en montrant pour cela que la composante des courbes extrémales était ouverte (Proposition 3.1). Nous nous sommes aperçus que cette dernière assertion était inexacte et que cela pouvait infirmer la non connexité du schéma de Hilbert. Ainsi, le schéma $H_{4,0}$ est connexe (*cf.* 4.4), contrairement à ce que nous affirmions alors. La question de la connexité du schéma de Hilbert (des courbes localement Cohen-Macaulay) demeure donc ouverte.

0. Préliminaires

a. Courbes

On désigne par k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, par $\mathbf{P}^3$ l'espace projectif $\mathbf{P}^3_k$ et par R l'anneau de polynômes $k[X,Y,Z,T]$. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur $\mathbf{P}^3$ on note $H^i\mathcal{F}$ l'espace vectoriel $H^i(\mathbf{P}^3, \mathcal{F})$, $h^i\mathcal{F}$ sa dimension, et on pose $H^i_*\mathcal{F} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} H^i\mathcal{F}(n)$.

On appelle courbe un sous-schéma de $\mathbf{P}^3$ de dimension 1, sans composante ponctuelle (immergée ou non), c'est-à-dire localement de Cohen-Macaulay. Ces courbes ne sont pas nécessairement réduites. Si C est une courbe de $\mathbf{P}^3$, on note $\mathcal{O}_C$ son faisceau structural, $\mathcal{J}_C$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}$ qui la définit et I_C son idéal saturé : $I_C = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} H^0\mathcal{J}_C(n)$. On pose aussi $A_C = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} H^0\mathcal{O}_C(n)$ et $B_C = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} H^2\mathcal{J}_C(n) = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} H^1\mathcal{O}_C(n)$.

Le degré de C est noté d et son genre arithmétique g (il peut être négatif). Ils sont définis par la formule $\chi\mathcal{O}_C(n) = nd + 1 - g$. On note $H_{d,g}$ (resp. $H^0_{d,g}$) l'ouvert du schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^{nd+1-g}_{\mathbf{P}^3}$ formé des courbes localement Cohen-Macaulay (resp. des courbes lisses).

Dans ce qui suit nous supposerons de plus que les courbes **ne sont pas planes**. On a alors l'inégalité classique, *cf.* par exemple [H2] ou [MDP4] :

$$g \leq \frac{(d-2)(d-3)}{2}. \tag{1}$$

Le module de Rao de C : $M_C = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} H^1\mathcal{J}_C(n)$ est un R-module de longueur finie qui joue un rôle essentiel dans la classification des courbes gauches, *cf.* par exemple [MDP1]. Les courbes dont le module de Rao est nul sont dites arithmétiquement de Cohen-Macaulay (ACM). Pour les courbes non ACM l'inégalité (1) ci-dessus est stricte.

Si $M = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} M_n$ est un R-module gradué de longueur finie on appelle fonction de Rao de M la fonction à support fini ρ définie par $\rho(n) = \dim_k M_n$. Dans le cas du module de Rao de C on pose $\rho_C(n) = h^1\mathcal{J}_C(n)$. On pose aussi :

$$s_0 = \inf\{n \in \mathbf{N} \mid h^0\mathcal{J}_C(n) \neq 0\}, \qquad e = \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid h^1\mathcal{O}_C(n) \neq 0\},$$

et, si la courbe C n'est pas ACM :

$$r_a = \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid h^1\mathcal{J}_C(n) \neq 0\}, \qquad r_o = \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid h^1\mathcal{J}_C(n) \neq 0\}\ (^*).$$

Rappelons aussi, *cf.* [MDP1], que le module dual de M est le k-espace vectoriel $M^* = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathrm{Hom}_k(M_{-n}, k)$, muni de la structure de R-module définie par $a.f(x) = f(ax)$ et de la graduation définie par $(M^*)_n = (M_{-n})^*$.

Soit $(L^{\cdot}_C, \sigma^{\cdot}_C)$ une résolution de M_C par des R-modules libres gradués de type fini. On peut en déduire les deux résolutions suivantes de I_C, dites respectivement de type E et N (*cf.* [MDP 1]) :

$$0 \to E_0 \oplus L \to F \to I_C \to 0$$

$$0 \to P \to N_0 \oplus L' \to I_C \to 0,$$

où E_0 (resp. N_0) est le noyau de σ_2 (resp. σ_1), et où F, P, L, L' sont des R-modules libres gradués de type fini.

Plus précisément il existe un diagramme commutatif dont les lignes sont des résolutions graduées minimales de A_C, M_C et I_C :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[r] & P \arrow[r, "\sigma'_2"] \arrow[d, "j"] & L_1 \oplus L' \arrow[r, "\sigma'_1"] \arrow[d, "q"] & L_0 \oplus R \arrow[r] \arrow[d] & A_C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_4 \arrow[r, "\sigma_4"] \arrow[d, equal] & L_3 \arrow[r, "\sigma_3"] \arrow[d, "i"] & L_2 \arrow[r, "\sigma_2"] \arrow[d, "p"] & L_1 \arrow[r, "\sigma_1"] & L_0 \arrow[r] & M_C \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_4 \arrow[r, "\sigma_4 \oplus 0"] & L_3 \oplus L \arrow[r, "\sigma'_3"] & F \arrow[r] & I_C \arrow[r] & 0 & &
\end{tikzcd}$$

(*) La lettre r et les indices a et o (et non 0) sont choisis pour évoquer le nom de *Rao*.

et où i (resp. q) est l'injection (resp. la projection) canonique.

On peut remarquer qu'en dualisant la première (resp. la deuxième) ligne, on obtient une résolution graduée minimale de $B_C^*(4)$ (resp. de $M_C^*(4)$). On notera $J'^{\bullet}_C$ le complexe de la première ligne. Le complexe

$$J^{\bullet}_C = P \xrightarrow{\sigma'_2} L_1 \oplus L' \xrightarrow{\sigma_1 q} L_0$$

est, à décalage près, la “monade” au sens de [W] ou [F] qui graduent ce complexe en posant $(J^{\bullet}_C)_{-1} = L_0$. On prendra ici la convention $(J^{\bullet}_C)_0 = L_0$.

b. Courbes extrémales

Nous avons donné dans [MDP4] des bornes explicites pour les valeurs de r_a, r_o et de la fonction de Rao ρ_C en fonction de d, g. Nous nous intéressons ici aux courbes qui atteignent ces bornes :

DÉFINITION 0.1. – *Soit C une courbe non ACM de $\mathbf{P}^3$. On dit que C est extrémale si elle atteint les bornes de [MDP4], i.e., si on a :*

$$r_a = g + 1 - \frac{(d-2)(d-3)}{2}, \qquad r_o = \frac{d(d-3)}{2} - g,$$

et, pour tout n tel que $0 \leq n \leq d-2$:

$$\rho_C(n) = \frac{(d-2)(d-3)}{2} - g.$$

La fonction de Rao d'une courbe extrémale est entièrement déterminée :

NOTATION ET PROPOSITION 0.2. – *Soit C une courbe extrémale. On pose*

$$l = d-2 \quad \text{et} \quad a = \frac{(d-2)(d-3)}{2} - g.$$

On a alors $a \geq 1$, $l \geq 0$, $r_a = 1-a$, $r_o = a+l-1$ et la fonction de Rao $\rho_C(n)$ est constante et égale à a pour $0 \leq n \leq l$. Entre r_a et 0 (resp. l et r_o) la fonction ρ_C est strictement croissante (resp. décroissante) et on a : $\rho_C(-k) = \binom{a-k}{1}$ pour $k \geq 0$, $\rho_C(l+k) = \binom{a-k}{1}$ pour $k \geq 0$ (avec les conventions usuelles sur les coefficients binômiaux).

Démonstration. – L'assertion sur la croissance (resp. la décroissance) de ρ_C est dans [MDP4] (Prop. 2.3) et, vu les valeurs de r_a et r_o, la fonction ρ_C est alors bien déterminée.

c. Modules de Koszul

Rappelons la définition d'un module intersection complète (nous dirons plus volontiers module de Koszul) :

DÉFINITION 0.3:

1) *Soient $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$ quatre entiers > 0. On appelle* **module de Koszul** de degrés n_1, n_2, n_3, n_4 un *R-module gradué de la forme $R/(f_1, f_2, f_3, f_4)$ où (f_1, f_2, f_3, f_4) est une suite régulière d'éléments de R, homogènes de degrés respectifs n_1, n_2, n_3, n_4.*

2) *Soient a et l deux entiers avec $a \geq 1$ et $l \geq 0$. On appelle* **module de Koszul extrémal** *de paramètres a, l un module de Koszul de degrés $1, 1, a, a+l$.*

Rappelons que la résolution minimale d'un module de Koszul M est donnée par le complexe de Koszul (ce qui motive l'appellation) :

$$0 \to R(-\nu) \to \bigoplus_{i=1}^{4} R(n_i - \nu) \to \bigoplus_{i<j} R(-n_i - n_j) \xrightarrow{\sigma_2} \bigoplus_{i=1}^{4} R(-n_i) \xrightarrow{\sigma_1} R \to M \to 0$$

avec $\nu = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$. On notera qu'un module de longueur finie qui admet une résolution dont les deux premiers termes sont de rangs respectifs 1 et 4 est nécessairement un module de Koszul.

PROPOSITION 0.4. – *Soit M un module de Koszul de degrés n_1, n_2, n_3, n_4.*

1) La fonction de Rao ρ de M ne dépend que des n_i, précisément on a :

$$\rho(n) = \binom{n-\nu+3}{3} - \sum_{i=1}^{4} \binom{n+n_i-\nu+3}{3} + \sum_{1 \leq i<j \leq 4} \binom{n-n_i-n_j+3}{3} - \sum_{i=1}^{4} \binom{n-n_i+3}{3} + \binom{n+3}{3}.$$

2) *Réciproquement les degrés n_i sont bien déterminés par la fonction ρ.*

Démonstration. – Le point 1) vient de la résolution de M. Pour le point 2), si la résolution de M est notée :

$$0 \to L_4 \to L_3 \to L_2 \to L_1 \to L_0 \to M \to 0$$

$$\text{avec} \quad L_i = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R(-n)^{l_i(n)}$$

on voit aussitôt qu'on a

$$l(n) = \sum_{i=0}^{4} (-1)^i l_i(n) = \partial^4 \rho(n)$$

où l'on a posé, pour une fonction $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $\partial f(n) = f(n) - f(n-1)$ (*cf.* [MDP2] III 4.3). On vérifie alors aussitôt, dans le cas de Koszul, les faits suivants :

– n_1 est le plus petit entier $n > 0$ tel que $l(n) < 0$,

– si $l(n_1) \leq -2$ on a $n_2 = n_1$,

– si $l(n_1) = -1$, n_2 est le plus petit entier $n > n_1$ tel que $l(n) < 0$.

Ceci détermine n_1 et n_2 donc $n_1 + n_2$.

– si $l(n_1) \leq -3$ on a $n_3 = n_2 = n_1$,

– si $l(n_1) = -1$ et $l(n_2) \leq -2$ on a $n_3 = n_2$,

– sinon, s'il existe n avec $n_2 < n < n_1 + n_2$ et $l(n) < 0$, n_3 est le plus petit entier vérifiant cette propriété,

– sinon, si $l(n_1 + n_2) = 0$ on a $n_3 = n_1 + n_2$,

– sinon, enfin, n_3 est le plus petit entier $> n_1 + n_2$ tel que $l(n) < 0$.

Ceci détermine n_3 et n_4 est déterminé par le fait que $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ est le plus grand entier n tel que $l(n) > 0$.

L'intérêt des modules de Koszul extrémaux tient au fait que leurs courbes minimales sont des courbes extrémales, *cf.* [MDP4] :

PROPOSITION 0.5. – *Soit M un module de Koszul extrémal de paramètres a et l.*

1) *Toute courbe minimale C associée à M est une courbe extrémale (dite de type Koszul* (*)).

2) *On a* $d = l + 2$, $g = -a + (d-2)(d-3)/2$, $s_0 = 2$, $e = l - 2$.

3) *La fonction de Rao $\rho_C(n)$ de C est donnée par les formules de 0.2.*

4) *La courbe C admet la résolution de type E suivante :*

$$\begin{aligned} 0 \to R(-a-l-3) \to R(-3) \oplus R(-l-3) \oplus R(-a-l-2)^2 \\ \to R(-2)^2 \oplus R(-l-2) \oplus R(-a-l-1) \to I_C \to 0. \end{aligned}$$

5) Les valeurs non nulles du caractère de postulation $\gamma_C = \gamma$ de C sont les suivantes :

a) Si $a \geq 2$ *et* $l > 0$:

$$\gamma(0) = \gamma(1) = -1, \qquad \gamma(2) = 1,$$

$$\gamma(l+2) = 1, \qquad \gamma(a+l+1) = 1, \qquad \gamma(a+l+2) = -1,$$

b) Si $a \geq 2$ *et* $l = 0$:

$$\gamma(0) = \gamma(1) = -1, \qquad \gamma(2) = 2, \qquad \gamma(a+1) = 1, \qquad \gamma(a+2) = -1,$$

c) Si $a = 1$ *et* $l > 0$:

$$\gamma(0) = \gamma(1) = -1, \qquad \gamma(2) = 1, \qquad \gamma(l+2) = 2, \qquad \gamma(l+3) = -1,$$

d) Si $a = 1$ *et* $l = 0$:

$$\gamma(0) = \gamma(1) = -1, \qquad \gamma(2) = 3, \qquad \gamma(3) = -1.$$

Démonstration. – Les courbes minimales des modules de Koszul (et notamment leur résolution de type *E* et leur décalage) ont été calculées dans [MDP1] IV 6.7. On en déduit aussitôt le caractère de postulation par [MDP1] II 5.2 et le degré et le genre par [MDP1] I 2.6. On vérifie alors que les courbes sont extrémales et que leur fonction de Rao est donnée par les formules ci-dessus.

(*) Nous montrerons ci-dessous que toute courbe extrémale est, en fait, de type Koszul.

d. Description des courbes extrémales de type Koszul

Nous décrivons dans ce paragraphe les courbes minimales associées à un module de Koszul extrémal M de paramètres a et l. Quitte à faire un changement de variables dans l'anneau R on peut supposer M de la forme $M = R/(X, Y, F, G)$ avec F et G homogènes de degrés respectifs a et $a + l$. On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 0.6. – *Soit C une courbe minimale associée au module M.*

1) *On suppose $a > 1$. On a*

$$I_C = (X^2, XY, gY^2, XG + gYF)$$

où g est un polynôme non nul, homogène de degré l en Y, Z, T. Une telle courbe sera dite de type I. Il y a deux cas :

(i) *Si $l = 0$ la courbe obtenue, de degré 2 et genre $-a$ est une structure double sur la droite $X = Y = 0$.*

(ii) *Si $l > 0$ et si on pose $g = Y^n g'$ avec $0 \leq n \leq l$ et g' non multiple de Y on a*

$$I_C = (X, g') \cap (X^2, XY, Y^{n+2}, XG + g'Y^{n+1}F)$$

et C est la réunion schématique transversale d'une courbe plane Γ_1 de degré $l - n$ et d'une structure $n + 2$-uple Γ_2 sur une droite.

2) *On suppose $a = 1$. Il y a deux cas :*

(i) *Pour la courbe minimale générale C on a $I_C = (XF, YF, XG, YG)$ et C est réunion disjointe de la droite $X = Y = 0$ et de la courbe plane $F = G = 0$. On dira que la courbe est de type II.*

(ii) *Dans le cas spécial, l'idéal I_C est de la forme vue en 1 ci-dessus :*

$$I_C = (X^2, XY, gY^2, XG + gYF)$$

(de sorte que la courbe est de type I) et on a encore les deux cas vus en 1 (i) et 1 (ii) : une structure double sur une droite tracée sur une quadrique si $l = 0$, ou l'union schématique d'une structure multiple sur une droite et d'une courbe plane si $l > 0$.

3) L'ensemble C'' des points où l'espace tangent à C est de dimension 3 (les très mauvais points de C au sens de [MDP3]) est vide dans le cas des courbes de type II. Dans le cas des courbes de type I il est fini et égal à $V(X, Y, G, g)$. Il est vide pour un choix général de g.

Démonstration. – En vertu de [MDP1] IV 6.7 les courbes minimales associées à un module de Koszul extrémal $M = R/(X, Y, F, G)$ sont obtenues en considérant la flèche σ_2 :

$$\begin{aligned} L_2 = R(-2) \oplus R(-a-1)^2 \oplus R(-a-l-1)^2 \oplus R(-2a-l) \\ \to L_1 = R(-1)^2 \oplus R(-a) \oplus R(-a-l). \end{aligned}$$

Cette flèche, qui intervient dans la résolution de M, a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} Y & F & 0 & G & 0 & 0 \\ -X & 0 & F & 0 & G & 0 \\ 0 & -X & -Y & 0 & 0 & G \\ 0 & 0 & 0 & -X & -Y & -F \end{pmatrix}.$$

On choisit ensuite un isomorphisme $\varphi : P = R(-2) \oplus R(-a-l-1) \to L_2$ de P sur un facteur direct de L_2 et on considère la composée $j = \sigma_2\varphi : P \to L_1$ qui est à valeurs dans le noyau N de $\sigma_1 : L_1 \to L_0 = R$. Si la flèche ainsi obtenue $j : P \to N$ est injective et si son conoyau est sans torsion (ce qui est le cas pour φ général en vertu de [MDP1] IV) ce conoyau est l'idéal tordu d'une courbe minimale C associée à M et toutes les courbes minimales s'obtiennent ainsi. De plus, l'idéal I engendré par les 2-mineurs de $j : P \to L_1$ est un idéal de définition de C (non saturé *a priori*).

Cet idéal I et la courbe associée se calculent aisément en fonction du plongement φ. Le détail du calcul est laissé au lecteur. Il y a plusieurs cas à considérer selon les valeurs de a et l et selon le fait que certains termes de la matrice φ sont nuls ou non. Par exemple, lorsque a est égal à 1, on doit considérer le terme de φ qui envoie $R(-a-l-1) = R(-l-2)$ dans $R(-2a-l) = R(-l-2)$. Ce terme est une constante ; si elle est non nulle on obtient une courbe de type II et sinon la courbe est de type I. On obtient ainsi les deux formes des idéaux annoncées ci-dessus.

Comme I définit C, son idéal saturé est égal à I_C. Mais comme I_C admet la résolution donnée en 0.5, ses générateurs ont les mêmes degrés que ceux de I ce qui prouve que les deux idéaux sont égaux.

Montrons l'assertion 1.ii sur l'union schématique. Il est clair que I_C est contenu dans l'intersection des deux idéaux. Comme l'union des Γ_i est transversale puisque Y ne divise pas g', la réciproque vient de l'égalité des degrés.

Il reste à calculer C''. Le cas du type II est clair. Pour le type I, si le point P appartient au fermé $V(X, Y, G, g)$ toutes les équations de C sont dans m_P^2. Si P est dans C mais pas dans $V(X, Y, G, g)$ on voit que l'équation XY (resp. $XG + YgF$) est dans m_P et pas dans m_P^2 si $Y \notin m_P$ (resp. si $G \notin m_P$ ou si $Y, G \in m_P$ mais $g \notin m_P$).

e. Variations autour de la suite exacte de comparaison

Dans tout ce qui suit, on notera $\mathrm{Hom}(.,.)$ (resp. $\mathrm{Ext}^i(.,.)$) le bifoncteur des homomorphismes de R-modules gradués, homogènes de degré 0, ou le bifoncteur des homomorphismes de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules (resp. ses foncteurs dérivés).

Rappelons que pour toute courbe C on a une suite spectrale (des foncteurs composés)

$$E_2^{pq} = \mathrm{Ext}^p(I_C, H^q(\mathcal{J}_C)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C)$$

dont voici la suite exacte des termes de bas degré (dite suite exacte de comparaison) :

$$(\star) \qquad 0 \to \mathrm{Ext}^1(I_C, I_C) \xrightarrow{\delta_1} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C) \xrightarrow{\delta_2} \mathrm{Hom}(I_C, M_C) \xrightarrow{d_2^{0,1}} \mathrm{Ext}^2(I_C, I_C).$$

On peut décrire ainsi les flèches δ_1 et δ_2, *cf.* [F] :

– soit $\eta \in \mathrm{Ext}^1(I_C, I_C)$ et $0 \to I_C \to G \to I_C \to 0$ une extension associée. L'image de η par δ_1 est la classe dans $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C)$ de la suite exacte exacte de faisceaux correspondante;

– soit $\xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C)$ et $0 \to \mathcal{J}_C \to \mathcal{G} \to \mathcal{J}_C \to 0$ une extension associée. En passant à la cohomologie on obtient la suite exacte :

$$0 \to I_C \to H^0_*(\mathcal{G}) \to I_C \xrightarrow{\delta_\xi} M_C \to H^1_*(\mathcal{G}) \to M_C \xrightarrow{\delta'_\xi} B_C = H^2_*\mathcal{J}_C$$

et l'image de ξ par δ_2 est l'homomorphisme de connexion δ_ξ.

On a d'ailleurs aussi une flèche $\delta_3 : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C) \to \mathrm{Hom}(M_C, B_C)$ telle que l'image de ξ par δ_3 soit l'homomorphisme de connexion δ'_ξ.

Nous allons donner une autre description de la suite $(\star)$ que nous utiliserons dans les calculs. Notons $A_C = H^0_*\mathcal{O}_C$. De la suite exacte courte : $0 \to R/I_C \to A_C \to M_C \to 0$ on déduit la suite :

$$0 \to \mathrm{Hom}(I_C, R/I_C) \xrightarrow{d_1} \mathrm{Hom}(I_C, A_C) \xrightarrow{d_2} \mathrm{Hom}(I_C, M_C) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1(I_C, R/I_C) \to \mathrm{Ext}^1(I_C, A_C)$$

On a aussi des homomorphismes de connexion :

$$\alpha_1 : \mathrm{Hom}(I_C, R/I_C) \to \mathrm{Ext}^1(I_C, I_C),$$

$$\alpha_2 : \mathrm{Ext}^1(I_C, R/I_C) \to \mathrm{Ext}^2(I_C, I_C),$$

$$\alpha'_1 : \mathrm{Hom}(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_C) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C).$$

LEMME 0.7. – *Soit β l'homomorphisme obtenu en composant α'_1 avec l'isomorphisme :* $\mathrm{Hom}(I_C, A_C) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_C)$. *On a un diagramme commutatif de suites exactes :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(I_C, R/I_C) \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & \mathrm{Hom}(I_C, A_C) \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "\beta"] & \mathrm{Hom}(I_C, M_C) \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(I_C, I_C) \arrow[r, "\delta_1"] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C) \arrow[r, "\delta_2"] & \mathrm{Hom}(I_C, M_C)
\end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches verticales sont des isomorphismes.

Démonstration. – La vérification de la commutativité est laissée au lecteur. Puisque C est localement Cohen-Macaulay, α'_1 est un isomorphisme, donc aussi β et α_1.

LEMME 0.8. – *Les noyaux de δ et $\alpha_2\delta$ sont égaux.*

Démonstration. – On a une suite exacte longue :

$$0 \to \mathrm{Hom}(I_C, R/I_C) \xrightarrow{\alpha_1} \mathrm{Ext}^1(I_C, I_C) \to \mathrm{Ext}^1(I_C, R) \to \mathrm{Ext}^1(I_C, R/I_C) \xrightarrow{\alpha_2} \mathrm{Ext}^2(I_C, I_C)$$

et puisque α_1 est un isomorphisme, l'homomorphisme $\mathrm{Ext}^1(I_C, R) \to \mathrm{Ext}^1(I_C, R/I_C)$ est injectif. On a un diagramme de suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Hom}(I_C, M_C) \arrow[d, "\delta"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(I_C, R) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(I_C, R/I_C) \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^2(I_C, I_C) \\
 & & \mathrm{Ext}^1(I_C, A_C) &
\end{tikzcd}$$

et il suffit donc de montrer que la flèche composée $\mathrm{Ext}^1(I_C, R) \to \mathrm{Ext}^1(I_C, R/I_C) \to \mathrm{Ext}^1(I_C, A_C)$ est injective. Mais on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1(I_C, R) & \simeq & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_P) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}^1(I_C, A_C) & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_C) \end{array}$$

Puisque α'_1 est un isomorphisme, la flèche verticale de droite est injective, d'où le résultat.

COROLLAIRE 0.9. – *On a une suite exacte*

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(I_C, I_C) \xrightarrow{\delta_1} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C) \xrightarrow{\delta_2} \mathrm{Hom}(I_C, M_C) \xrightarrow{\alpha_2 \delta} \mathrm{Ext}^2(I_C, I_C).$$

RAPPELS 0.10. – Soient $(L^{\bullet}, \delta^{\bullet})$ et $(L'^{\bullet}, \delta'^{\bullet})$ deux complexes de R-modules gradués, et $W^i = \mathrm{Hom}^i(L^{\bullet}, L'^{\bullet})$ l'ensemble des homomorphismes de complexe $\Phi : L^{\bullet} \to L'^{\bullet}$ de degré i. On obtient ainsi un complexe $W^{\bullet}$ dont les différentielles $d^i : W^i \to W^{i+1}$ sont données par $d^i\Phi = \delta'\Phi + (-1)^{i+1}\Phi\delta$. Soit $Z^i(W)$ (resp. $B^i(W)$) l'ensemble des cocycles (resp. des cobords) de $W^{\bullet}$. On désigne par $\mathrm{Ext}^i(L^{\bullet}, L'^{\bullet})$ les groupes de cohomologie du complexe $Z^i(W)/B^i(W)$.

Si $L^{\bullet}$ (resp. $L'^{\bullet}$) est une résolution d'un module M (resp. M'), on montre qu'on a $\mathrm{Ext}^i(L^{\bullet}, L'^{\bullet}) = \mathrm{Ext}^i(M, M')$. Dans ce cas, on désigne aussi ce groupe par $\mathrm{Ext}^i(L^{\bullet}, M')$ ou par $\mathrm{Ext}^i(M, L'^{\bullet})$.

On a vu en a) qu'il existe un diagramme commutatif de complexes :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & 0 & \to & P & \xrightarrow{\sigma'_2} & L_1 \oplus L' & \xrightarrow{\sigma_1 q} & L_0 & \to & M_C & \to & 0 \\
 & & & & & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \| & & \| & & \\
0 & \to & L_4 & \xrightarrow{\sigma_4} & L_3 & \xrightarrow{\sigma_3} & L_2 & \xrightarrow{\sigma_2} & L_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & L_0 & \to & M_C & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & & & & & & & \\
0 & \to & L_4 & \xrightarrow{\sigma_4 \oplus 0} & L_3 \oplus L & \xrightarrow{\sigma'_3} & F & \to & I_C & \to & 0 & & & &
\end{array}$$

D'après ce qui précède, ce diagramme donne un élément canonique u de $\mathrm{Ext}^2(M_C, I_C)$, et grâce à l'accouplement de Yoneda : $\mathrm{Hom}(I_C, M_C) \times \mathrm{Ext}^2(M_C, I_C) \to \mathrm{Ext}^2(I_C, I_C)$, (resp. $\mathrm{Ext}^2(M_C, I_C) \times \mathrm{Hom}(I_C, M_C) \to \mathrm{Ext}^2(M_C, M_C)$) deux homomorphismes :

$$u_* : \mathrm{Hom}(I_C, M_C) \to \mathrm{Ext}^2(I_C, I_C) \quad \text{et} \quad u^* : \mathrm{Hom}(I_C, M_C) \to \mathrm{Ext}^2(M_C, M_C).$$

De même, on obtient ainsi un élément canonique v de $\mathrm{Hom}(J^{\bullet}_C, M_C)$ (voir a)). Mais, d'autre part, on a des isomorphismes $\mathrm{Hom}(M_C, B_C) \simeq \mathrm{Hom}(B^*_C(4), M^*_C(4)) \simeq \mathrm{Ext}^2(M_C, J^{\bullet}_C)$ construits de la manière suivante : à $\mu : M_C \to B_C$ on associe $\mu^*(4) : B^*_C(4) \to M^*_C(4)$, qui se relève en un homomorphisme de complexes de degré 0 entre les résolutions graduées minimales de $B^*_C(4)$ et de $M^*_C(4)$. Or on a vu en a) (en gardant ici les mêmes notations) que ces résolutions ne sont autres que les complexes duaux respectivement de $J'^{\bullet}_C$ et de $L^{\bullet}_C$. Par dualité on obtient un homomorphisme de complexes, de degré 2 : $L^{\bullet}_C \to J'^{\bullet}_C \to J^{\bullet}_C$ dont la classe dans $\mathrm{Ext}^2(M_C, J^{\bullet}_C)$ est l'image de μ cherchée. On laisse au lecteur le soin de vérifier que c'est bien un isomorphisme. Alors, on déduit encore par Yoneda deux homomorphismes v_* : $\mathrm{Hom}(M_C, B_C) \simeq \mathrm{Ext}^2(M_C, J^{\bullet}_C) \to \mathrm{Ext}^2(J^{\bullet}_C, J^{\bullet}_C)$ et v^* : $\mathrm{Hom}(M_C, B_C) \simeq \mathrm{Ext}^2(M_C, J^{\bullet}_C) \to \mathrm{Ext}^2(M_C, M_C)$.

LEMME 0.11. – *Les homomorphismes u_* et $\alpha_2\delta$ sont les mêmes.*

Démonstration. – Soit $\theta \in \mathrm{Hom}(I_C, M_C)$. Il se relève en $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ qui donnent un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & 0 & \to & L_4 & \to & L_3 \oplus L & \to & F & \to & I_C & \to & 0 \\
 & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \theta_2} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_1} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_0} & & \downarrow{\scriptstyle \theta} & & \\
0 & \to & L_4 & \xrightarrow{\sigma_4} & L_3 & \to & L_2 & \to & L_1 & \to & L_0 & \to & M_C & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & L_4 & \xrightarrow{\sigma_4 \oplus 0} & L_3 \oplus L & \to & F & \to & R & \to & A_C & \to & M_C & \to & 0
\end{array}$$

(la deuxième partie de ce diagramme est celle qui définit u).

Alors $\delta(\theta)$ (resp. $\alpha_2\delta(\theta)$) est la classe de $(p\theta_2, q\theta_1)$ (resp. de $p\theta_2$) dans $\mathrm{Ext}^1(I_C, R/I_C)$ (resp. $\mathrm{Ext}^2(I_C, I_C)$), donc on a $\alpha_2\delta(\theta) = u_*(\theta)$.

Remarque 0.12. – Walter, *cf.* [W], a décrit la flèche $d_2^{0,1}$ de la suite spectrale en utilisant cet élément u. On peut montrer qu'elle est aussi égale à u_*, de sorte que la suite exacte que nous avons obtenue est une variante de la suite de comparaison.

1. Étude des courbes extrémales

Le résultat suivant montre qu'il n'y a pas d'autres courbes extrémales que celles étudiées précédemment, c'est-à-dire qu'elles sont toutes de type Koszul.

THÉORÈME 1.1. – *Soit C une courbe extrémale de degré d et genre g et soient a, l les entiers définis comme en 0.2. Alors, le module $M_C(a-1)$ est un module de Koszul extrémal de paramètres a, l et la courbe C est une courbe minimale associée à ce module.*

Démonstration. – Si $d = 2$, une telle courbe est une structure double non ACM de genre $-a$ sur une droite, et Migliore (*cf.* [Mi]) a montré que son idéal est de la forme $(X^2, XY, Y^2, XF + YG)$ avec F et G des polynômes homogènes de degré a sans facteur commun. C'est donc une courbe minimale associée au module de Koszul (extrémal de paramètres $a, 0$) $M = R/(X, Y, F, G)$. Nous supposerons dorénavant qu'on a $d \geq 3$.

Rappelons brièvement la manière dont nous avons obtenu la borne supérieure de la fonction $\rho = \rho_C$ dans [MDP4].

Soit H un plan général (qui coupe proprement C) et soit Z l'intersection schématique de C et H qui est un sous-schéma fini de H, de degré d. On note $\mathcal{J}_Z$ le faisceau d'idéaux qui définit Z dans H. On établit alors des inégalités successives faisant intervenir la cohomologie de $\mathcal{J}_C$ et celle de $\mathcal{J}_Z$. Dans le cas présent, puisque la borne est atteinte pour C, toutes ces inégalités sont des égalités. Nous récrirons au fur et à mesure de la démonstration celles qui nous seront utiles.

Soit $M = M_C$ le module de Rao de C. Puisque $\rho(1-a) = 1$, M_{1-a} est un k-espace vectoriel à un générateur e.

LEMME 1.2. – *M est un R-module monogène, engendré par e.*

Démonstration. – On a la suite exacte :

$$\cdots \to H^1\mathcal{J}_C(n-1) \xrightarrow{.H} H^1\mathcal{J}_C(n) \to H^1\mathcal{J}_Z(n) \to H^2\mathcal{J}_C(n-1) \xrightarrow{.H} H^2\mathcal{J}_C(n) \to 0$$

d'où on déduit l'inégalité $h^2\mathcal{J}_C(n-1) - h^2\mathcal{J}_C(n) \leq h^1\mathcal{J}_Z(n)$ qui devient ici une égalité pour $n > 0$. Alors la multiplication $H : M_{n-1} \to M_n$ est surjective. Ceci étant vrai pour H général, M est engendré comme R-module par ses éléments de degré ≤ 0.

Si $a = 1$, c'est terminé. Supposons donc $a > 1$, et soit $\mathfrak{q}$ l'annulateur de e. On a une injection $(R/\mathfrak{q})(a-1) \to M$ correspondant à e. Puisque la composante de degré 1 de $R/\mathfrak{q}$ est de dimension $\leq \rho(2-a) = 2$, l'idéal $\mathfrak{q}$ contient deux formes linéaires indépendantes, disons X et Y. Soient F un polynôme homogène de $\mathfrak{q}$ de degré $n \leq a-1$ et Q la surface d'équation $F = 0$.

Si Q coupe proprement C, on a une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{J}_C(-n) \xrightarrow{.F} \mathcal{J}_C \to \mathcal{J}_{C\cap Q/Q} \to 0$$

d'où on déduit une suite exacte de cohomologie :

$$0 = H^0\mathcal{J}_{C\cap Q/Q}(n+1-a) \to M_{1-a} \xrightarrow{.F} M_{n+1-a}$$

dans laquelle les deux flèches sont nulles, donc on a une contradiction.

On en déduit que l'idéal engendré par les polynômes homogènes de $\mathfrak{q}$ de degré $\leq a-1$ (qui contient l'idéal (X, Y)) est contenu dans un idéal premier associé à la courbe, qui est de hauteur 2. Donc les polynômes homogènes de $\mathfrak{q}$ de degré $\leq a-1$ engendrent l'idéal (X, Y).

L'injection $(R/\mathfrak{q})(a-1) \to M$ est alors bijective en degrés ≤ 0 pour des raisons de dimensions. Donc M est engendré par e et isomorphe à $(R/\mathfrak{q})(a-1)$.

On remarque aussi que, puisque $\rho(1) \leq a$, l'idéal $\mathfrak{q}$ a nécessairement un générateur de degré a.

LEMME 1.3. – *On peut lier C à une courbe C' par deux surfaces de degrés 2 et d.*

Démonstration. – Montrons d'abord que C est contenue dans deux quadriques.

Si $d \geq 4$, l'inégalité $h^0\mathcal{J}_C(2) \leq 2$ de [MDP4] 2.4.4 devient ici une égalité.

Si $d = 3$, on a $e \leq -1$, $g = -a$ et $\rho_C(2) = a-1$, donc on a l'égalité $h^0\mathcal{J}_C(2) = \rho_C(2) + 10 - 2d - 1 + g = 2$.

Puisque C n'est pas ACM, ces deux quadriques ne se coupent pas proprement, donc leurs équations sont de la forme L_1L_2, L_1L_3. Le noyau de la multiplication par L_1 : $R(-1) \to R/I_C$ contient l'idéal premier (L_2, L_3), donc lui est égal puisque les idéaux associés à R/I_C sont de hauteur ≤ 2. Soit D la droite définie par (L_2, L_3). Dire qu'on ne peut pas faire de liaison $2 \times d$, c'est dire que si F est un polynôme de degré d de I_C, pour tous λ et μ dans k, F et $L_1(\lambda L_2 + \mu L_3)$ ne sont pas premiers entre eux. Autrement dit, F est divisible par L_1, ou encore l'homomorphisme $\mathcal{J}_D(-1) \to \mathcal{J}_C$ (multiplication par L_1) induit sur la cohomologie un isomorphisme de $H^0\mathcal{J}_D(d-1)$ sur $H^0\mathcal{J}_C(d)$.

Dans ce cas on aurait $h^0\mathcal{J}_C(d) = h^0\mathcal{J}_D(d-1)$, c'est-à-dire :

$$\rho_C(d) + \binom{d+3}{3} - d^2 - 1 + g = \binom{d+2}{3} - d$$

ou encore $\rho_C(d) = a - 3$. Or on a $\rho_C(d) = \sup(a-2, 0)$, d'où une contradiction.

Fin de la preuve de 1.1. – Soit C' la courbe obtenue par liaison $2 \times d$. On vérifie qu'elle est de degré d, genre g, que son module de Rao est $M' = M^*(-l)$ et que sa fonction de Rao est égale à ρ. Elle est donc aussi extrémale, d'où on déduit que M^* est aussi monogène.

D'autre part, si on pose $R' = R/(X,Y)$, on a vu que $M \simeq (R/\mathfrak{q})(a-1)$ est un R'-module. Il en est de même de M^*. Plus précisément, on a des isomorphismes :

$$M^* \simeq \operatorname{Ext}^4_R(M,R)(-4) \simeq \operatorname{Ext}^2_{R'}(M,R')(-2).$$

En tenant compte du fait que M^* est monogène, et que $\mathfrak{q}$ a un générateur de degré a, une résolution graduée minimale de M comme R'-module est de la forme :

$$0 \to R'(-2a-l) \to R'(-a) \oplus R'(-a-l) \to R' \to M(1-a) \to 0.$$

Donc M est un module de Koszul extrémal de paramètres a, l, et C est une courbe minimale associée.

On a vu dans la preuve de 1.1 que pour $d = 2$ et $g < 0$, toute courbe de degré d et genre g est une courbe extrémale (*cf.* [Mi]). Un résultat d'Ellia (*cf.* [E]) montre qu'il en est de même dans un autre domaine pour d et g. Plus précisément, on a :

THÉORÈME 1.4. – *([E]) Soit C une courbe (non plane) de degré d et genre g.*
1) *Si on a $g = \frac{(d-2)(d-3)}{2}$, C est une courbe arithmétiquement de Cohen-Macaulay (ACM).*
2) *On suppose qu'on a l'inégalité :*

$$\frac{(d-3)(d-4)}{2} + 1 < g < \frac{(d-2)(d-3)}{2}.$$

Alors C est une courbe extrémale.
3) *On suppose $d = 2$ et $g < 0$. Alors C est une courbe extrémale.*

2. Étude du schéma $H_{\gamma,\rho}$ des courbes extrémales

Nous commençons par étudier le schéma des modules de Koszul (pas nécessairement extrémaux).

a. Le schéma des modules de Koszul

Soit $M = R/(f_1, f_2, f_3, f_4)$ un module de Koszul de degrés n_1, n_2, n_3, n_4.

Soit ρ la fonction de Rao de M (qui ne dépend que des n_i, *cf.* 0.4 ci-dessus). Fixons, pour tout $n \in \mathbf{Z}$ un espace vectoriel V_n de dimension $\rho(n)$ et soit $V_\rho = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} V_n$. Rappelons, *cf.* [MDP1] VI, qu'on définit des foncteurs E_ρ et $\widehat{E_\rho}$ sur la catégorie des k-schémas de la façon suivante : si S est un k-schéma, $\widehat{E_\rho}(S)$ est l'ensemble des structures de $R \otimes \mathcal{O}_S$-modules gradués sur $V_\rho \otimes \mathcal{O}_S$ et $E_\rho(S)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de $R \otimes \mathcal{O}_S$-modules gradués $\mathcal{M} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{M}_n$ où $\mathcal{M}_n$ est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang $\rho(n)$.

On a un morphisme de foncteurs $\widehat{E_\rho} \to E_\rho$. On sait que $\widehat{E_\rho}$ est un schéma, mais pas E_ρ en général.

On note respectivement $\widehat{K_\rho}$, et K_ρ les sous-foncteurs correspondants aux modules de Koszul. Plus précisément, $K_\rho(S)$ est défini comme l'ensemble des classes d'isomorphismes de $R \otimes \mathcal{O}_S$-modules $\mathcal{M}$ tels que $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s)$ soit un module de Koszul pour tout $s \in S$ et $\widehat{K_\rho}$ est l'image réciproque de K_ρ dans $\widehat{E_\rho}$. On notera que les degrés du module de Koszul sont bien déterminés par la fonction ρ, *cf.* 0.4.

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1.

1) *Les foncteurs $\widehat{K_\rho}$ et K_ρ sont des sous-foncteurs ouverts de $\widehat{E_\rho}$ et E_ρ respectivement.*

2) *Le foncteur $\widehat{K_\rho}$ est représentable par un schéma irréductible et lisse de dimension $-1 + \sum_{k=0}^{\nu-4} \rho(k) + \sum_{i=1}^{4} \rho(n_i)$.*

Démonstration.

1) Il suffit évidemment de voir que K_ρ est un ouvert de E_ρ. Soit $\mathcal{M} \in E_\rho(S)$ et supposons que pour un $s \in S$ le module $M = \mathcal{M}_s$ soit un module de Koszul donc qu'il admette une résolution dont les termes sont de rangs $1, 4, 6, 4, 1$. Alors, il résulte de [MDP1] VII 1.4 que les modules $M_{s'}$, pour s' voisin de s, admettent une résolution de la même forme donc sont aussi des modules de Koszul.

2) Puisque $\widehat{K_\rho}$ est un ouvert de $\widehat{E_\rho}$ il est représentable. Comme $\widehat{K_\rho}$ est de type fini sur k, pour montrer qu'il est lisse il suffit de montrer successivement que le foncteur K_ρ et le morphisme $\widehat{K_\rho} \to K_\rho$ sont formellement lisses.

LEMME 2.2. – *Le foncteur K_ρ est formellement lisse.*

Démonstration. – Rappelons brièvement la démonstration de ce fait classique, *cf.* par exemple [A]. Soit $A' \to A$ une surjection de k-algèbres locales artiniennes et soit M un $R_A = A[X, Y, Z, T]$-module gradué, dont les composantes M_n sont des A-modules libres de rang $\rho(n)$ et dont la réduction sur le corps résiduel est un module de Koszul $\overline{M} = R/(f_1, f_2, f_3, f_4)$. Il s'agit de relever M en un module M' de même type sur A'. Sur le corps k on a la résolution usuelle de $\overline{M}$ qui se relève en une résolution de M sur A ([MDP1] VII 1.4) donc on a $M \simeq R_A/(f_{1,A}, f_{2,A}, f_{3,A}, f_{4,A})$ où $f_{i,A}$ relève f_i. De plus la résolution de M est donnée par le complexe de Koszul associé aux $f_{i,A}$. On relève alors les $f_{i,A}$ en $f_{i,A'}$ sur A' et on pose $M' = R_{A'}/(f_{1,A'}, f_{2,A'}, f_{3,A'}, f_{4,A'})$. Le module M' obtenu est un module de Koszul qui relève M. De plus on a un relèvement de la résolution de M sur A par le complexe de Koszul sur A', ce qui assure la platitude de M' sur A'.

LEMME 2.3. – *Le morphisme* $q : \widehat{E_\rho} \to E_\rho$ *est formellement lisse.*

Démonstration. – Soit encore $A' \to A$ une surjection de k-algèbres locales artiniennes. On se donne une structure de R_A-module sur le A-module $M = \sum_{i \in \mathbf{Z}} V_i \otimes_k A$. Cela revient à se donner pour tout i des homomorphismes correspondant aux multiplications :

$$u_i : R_1 \otimes V_i \otimes_k A \to V_{i+1} \otimes_k A$$

(où R_1 est l'espace vectoriel des formes linéaires en X, Y, Z, T), ces homomorphismes étant soumis à des conditions de commutation, *cf.* [MDP1] VI.

On suppose qu'on a, sur A', un $R_{A'}$-module gradué M' dont la réduction sur A est isomorphe à M. Pour prouver la lissité de q il faut montrer qu'il y a une structure de module isomorphe à M' sur $\sum_{i \in \mathbf{Z}} V_i \otimes_k A'$, c'est-à-dire des u'_i (analogues sur A' des u_i définis ci-dessus) dont les réductions $\overline{u}'_i$ sur A soient les u_i. En choisissant arbitrairement des bases des M'_i on trouve des u'_i définissant la structure de module M' et le fait que M et $M' \otimes_{A'} A$ soient isomorphes signifie seulement (*cf.* [MDP1] VI 4.1) qu'il existe des automorphismes $\theta_i \in GL(\rho(i), A)$ tels que l'on ait pour tout i :

$$u_i = \theta_i \overline{u}'_i (1_{R_1} \otimes \theta_i)^{-1}.$$

Mais, comme le groupe $GL(\rho(i))$ est lisse on peut relever les θ_i en des $\theta'_i \in GL(\rho(i), A')$ et si on pose

$$u''_i = \theta'_i u'_i (1_{R_1} \otimes \theta'_i)^{-1},$$

les u''_i définissent bien une structure de $R_{A'}$-module isomorphe à M' et se réduisent sur les u_i.

Montrons maintenant que $\widehat{K_\rho}$ est irréductible. Considérons l'espace vectoriel

$$W = \bigoplus_{i=1}^{4} H^0(\mathbf{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n_i))$$

et l'espace affine associé $Y = \mathrm{Spec} B$ où B est l'algèbre symétrique $\mathrm{Sym}\, W^*$. On a un quadruplet de polynômes homogènes "universels" (F_1, F_2, F_3, F_4) de degrés n_i à coefficients dans B et on a sur Y un $\mathcal{O}_Y$-module quasi-cohérent $\mathcal{N}$ correspondant au B-module $N = B[X, Y, Z, T]/(F_1, F_2, F_3, F_4)$.

Soit X l'ouvert de Y dont les points rationnels sont les suites régulières et soit $\mathcal{M} = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{M}_n$ la restriction de $\mathcal{N}$ à X. Il est clair que $\mathcal{M}_n$ est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang $\rho(n)$ où ρ est la fonction déjà rencontrée ci-dessus.

On considère ensuite le X-schéma

$$\widehat{X} = \prod_{n \in [r_a, r_o]} \underline{\mathrm{Isom}}(V_n \otimes \mathcal{O}_X, \mathcal{M}_n)$$

le produit étant le produit fibré au-dessus de X, et on désigne par π sa projection canonique sur X.

Soit S un schéma affine d'anneau A. Un élément de $\widehat{X}(S)$ est la donnée de quatre polynômes $f_i \in A[X,Y,Z,T]$ et d'un isomorphisme de $\mathcal{O}_S$-modules, qui respecte les degrés, de $\mathcal{M}_S$, module associé au quotient $A[X,Y,Z,T]/(f_1,f_2,f_3,f_4)$ sur $V_\rho \otimes \mathcal{O}_S$. Cet isomorphisme définit une structure de module gradué sur $V_\rho \otimes \mathcal{O}_S$ et on obtient donc un morphisme de schémas $f : \widehat{X} \to \widehat{K_\rho}$. Ce morphisme est surjectif par construction. Comme X est irréductible (c'est un ouvert d'un espace affine) et comme π est localement un produit, $\widehat{X}$ est irréductible et donc aussi $\widehat{K_\rho}$.

Enfin, comme $\widehat{K_\rho}$ est lisse, il suffit pour calculer sa dimension de calculer la dimension de son espace tangent $t_{\widehat{K_\rho},M}$ au point M. Or en vertu de [MDP2] III 4.1 on a la formule :

$$t_{\widehat{K_\rho},M} = \sum_{i=r_a}^{r_o} \rho(i)^2 - \hom(M,M)^0 + \mathrm{ext}^1(M,M)^0$$

d'où le résultat.

b. Le schéma des courbes minimales associées à un module de Koszul

On reprend ici l'étude des courbes extrémales de degré d et genre g. Les paramètres a et l sont définis comme en 0.2. D'après 1.1 les courbes extrémales de $H_{d,g}$ sont toutes des courbes minimales associées à un module de Koszul de paramètres a et l. La fonction de Rao ρ d'une telle courbe C et son caractère de postulation γ sont alors entièrement déterminés par les formules 0.4.

On considère le schéma de Hilbert $H_{\gamma,\rho}$ des courbes à cohomologie constante donnée par γ et ρ et sa variante "rigidifiée" $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$ obtenue en fixant la structure vectorielle du module de Rao (le lien entre les deux est le même que celui expliqué ci-dessus entre $\widehat{X}$ et X), *cf.* [MDP1] VI 4 pour toutes précisions. On a alors un morphisme $q_H : \widehat{H}_{\gamma,\rho} \to H_{\gamma,\rho}$ qui oublie la rigidification et fait de $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$ un fibré principal homogène au dessus de $H_{\gamma,\rho}$.

Le théorème 1.1 peut alors se reformuler ainsi :

THÉORÈME 2.4. – *Soit C une courbe de degré d et de genre g, soient a, l, ρ définis comme en 0.2 et γ comme en 0.5. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *C est extrémale,*

2) *C est une courbe minimale associée à un module de Koszul extrémal,*

3) *$C \in H_{\gamma,\rho}$.*

Le théorème suivant est une conséquence presque immédiate de 2.1 et de la description de "l'étape intermédiaire" de [MDP1] :

THÉORÈME 2.5. – *Le schéma $H_{\gamma,\rho}$ est irréductible et lisse de dimension :*

$$\frac{3}{2}d(d-3) + 9 - 2g + \epsilon + \epsilon'$$

où ϵ (resp. ϵ') vaut -1 (resp. 1) si $d = 2$ (resp. si $g = \frac{(d-2)(d-3)}{2} - 1$) et 0 sinon.

Démonstration. – Il suffit de prouver la lissité et l'irréductibilité pour $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$. On considère pour cela le morphisme $\widehat{\Phi} : \widehat{H}_{\gamma,\rho} \to \widehat{E}_\rho$ qui à une courbe C associe son module de Rao

M_C (l'un et l'autre rigidifiés). On sait que ce morphisme est lisse et irréductible : c'est celui de "l'étape intermédiaire", *cf.* [MDP1] VII 1.1 et 1.5. Mais, comme toute courbe extrémale a pour module de Rao un module de Koszul extrémal d'après 1.1, l'image de $\widehat{\Phi}$ n'est autre que $\widehat{K_\rho}$. Comme ce schéma est lisse et irréductible en vertu de 2.1, il en est de même de $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$.

Pour le calcul de dimension il suffit de calculer la dimension de l'espace tangent $T_{\gamma,\rho}$, ce qui résulte des formules de [MDP1] IX 4.2 et 6.1 et de la description explicite de γ et ρ (il faut distinguer les cas particuliers examinés en 0.5.5). On obtient, en fonction de a et l la dimension

$$\frac{(l+3)(l+2)}{2} + 2a + 3 + \binom{1-a}{0} - \binom{-l}{0},$$

dont on déduit aussitôt la formule annoncée.

Remarques 2.6.

1) On notera que la dimension ainsi trouvée est très grande par rapport à celle que l'on rencontre dans le cas du schéma de Hilbert des courbes lisses (qui vaut $4d$ si le genre est petit et qui est plutôt de l'ordre de $d^{3/2}$ si le genre est grand, *cf.* [P] 6.26).

2) On peut noter que le morphisme de foncteurs $\Phi : H_{\gamma,\rho} \to E_\rho$ est formellement lisse. En effet on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{H}_{\gamma,\rho} & \xrightarrow{\widehat{\Phi}} & \widehat{E}_\rho \\ \Big\downarrow{\scriptstyle q_H} & & \Big\downarrow{\scriptstyle q_E} \\ H_{\gamma,\rho} & \xrightarrow{\Phi} & E_\rho \end{array}$$

et on sait que $\widehat{\Phi}$ et q_E sont formellement lisses donc aussi le composé $q_E\widehat{\Phi} = \Phi q_H$. On conclut alors en notant que $q_H(A)$ est surjectif pour tout anneau local artinien A.

c. Les schémas H_γ et H_σ

Rappelons que si γ (resp. σ) est un caractère (au sens de [MDP1] I) les schémas H_γ (resp. H_σ) paramètrent les courbes à postulation (resp. spécialité) constante donnée par γ (resp. σ), *cf.* [MDP1] VI 3.9. Nous étudions ici le rapport de ces schémas avec leur sous-schéma $H_{\gamma,\rho}$ dans le cas des courbes extrémales. En fait, on a, plus généralement :

PROPOSITION 2.7. – *Soit C une courbe minimale associée à un module de Koszul, ρ, γ, σ désignant respectivement sa fonction de Rao et ses caractères de postulation et de spécialité. Alors, au voisinage de C, on a $H_{\gamma,\rho} = H_\gamma = H_\sigma$.*

Démonstration. – Comme $H_{\gamma,\rho}$ est un sous-schéma lisse des deux autres il suffit de montrer l'égalité sur les espaces tangents. Désignons par $T_{\gamma,\rho}$ (resp. T_γ, T_σ) ces espaces tangents et par $t_{\gamma,\rho}$, t_γ, t_σ leurs dimensions. Commençons par le cas de t_σ.

Nous utiliserons la résolution de type *N* de l'idéal décalé $\mathcal{J}_C(h)$, *cf.* [MDP1] II:

$$0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_C(h) \to 0.$$

Rappelons que $\mathcal{N}$ est le faisceau associé au module N défini par la suite exacte ci-dessous (qui n'est autre que le début de la résolution du module normalisé $M_C(h)$) :

$$0 \to N \to L_1 \to L_0 \to M \to 0.$$

On en déduit la suite exacte : $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to 0$ avec $\mathcal{L}_1 = \sum_{i=1}^{4} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n_i)$.

Il résulte de [MDP1] IX 4.2 et 5.1 que l'on a $t_\sigma - t_{\gamma,\rho} = \operatorname{im} g' - \operatorname{ext}^1(M,M)^0$ où $\operatorname{im} g'$ désigne la dimension de l'image de la flèche de connexion issue de la résolution de type N de $\mathcal{J}_C(h)$:

$$g' : \operatorname{Ext}^1(\mathcal{J}_C(h), \mathcal{N}) \to \operatorname{Ext}^1(\mathcal{N}, \mathcal{N}).$$

Il suffit alors de montrer que l'on a $\operatorname{ext}^1(\mathcal{N},\mathcal{N}) \leq \operatorname{ext}^1(M,M)^0$. Mais on sait que l'on a $\operatorname{ext}^1(M,M)^0 = \sum_{i=1}^{4} \rho(n_i)$ (*cf.* [MDP1] IX 6.1). Or on a une flèche, surjective car $\mathcal{N}$ n'a pas de H^2 :

$$\operatorname{Ext}^1(\mathcal{L}_1, \mathcal{N}) \to \operatorname{Ext}^1(\mathcal{N}, \mathcal{N})$$

et comme $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n), \mathcal{N}) = H^1\mathcal{N}(n) = M_n$ on a bien $\operatorname{ext}^1(\mathcal{N},\mathcal{N}) \leq \sum_{i=1}^{4} \rho(n_i)$.

La relation analogue avec t_γ s'obtient par dualité en notant que M est isomorphe à son dual décalé $M^*(\nu - 4)$ (avec $\nu = \sum_{i=1}^{4} n_i$).

COROLLAIRE 2.8. – *Soient d, g deux entiers et soit $H_{\gamma,\rho}$ le sous-schéma de $H_{d,g}$ formé des courbes extrémales. Alors le schéma $H_{\gamma,\rho}$ est un sous-schéma ouvert et fermé des schémas H_γ et H_σ. Il est à la fois une composante irréductible et une composante connexe de ces schémas.*

Démonstration. – Le fait que $H_{\gamma,\rho}$ soit ouvert résulte de 2.7. Qu'il soit fermé est dû, via le théorème de semi-continuité, à l'extrémalité de la fonction ρ. La dernière assertion vient de 2.5.

3. Étude de la relation entre $H_{\gamma,\rho}$ et $H_{d,g}$ pour les courbes extrémales

Soit M un module de Koszul extrémal de paramètres a et l. On peut supposer M de la forme $M = R/(X,Y,F,G)$ avec F et G homogènes de degrés respectifs a et $a + l$. Soit C une courbe minimale associée, $\rho = \rho_C, \gamma, d, g$ désignant respectivement sa fonction de Rao, son caractère de postulation, son degré et son genre. Nous avons vu en 2.8 que $H_{\gamma,\rho}$ est une composante connexe de H_γ. Nous allons comparer H_γ et $H_{d,g}$ au voisinage de C en comparant les espaces tangents à l'aide de 0.9. On note $T_{d,g}$ (resp. $T_{\gamma,\rho}$) l'espace tangent en C à $H_{d,g}$ (resp. $H_{\gamma,\rho}$).

THÉORÈME 3.1. – *L'espace tangent $T_{\gamma,\rho}$ est strictement plus petit que $T_{d,g}$, sauf dans les cas suivants :*

1) $l = 0$,

2) $a = 1$ *et* $l = 1$,

3) $a = 1$ *et C est la réunion disjointe d'une droite et d'une courbe plane.*

Démonstration. – Rappelons qu'on a des isomorphismes : $T_{d,g} \simeq \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C)$ et $T_\gamma \simeq \mathrm{Ext}^1(I_C, I_C)$ (*cf.* [MDP1] VIII). On sait aussi (*cf.* 2.7) que T_γ et $T_{\gamma,\rho}$ sont égaux.

Reprenons les notations de 0.e. D'après 0.9 et 0.11, $t_{d,g} - t_\gamma$ est égal à la dimension du noyau de $\alpha_2\delta = u_* : \mathrm{Hom}(I_C, M_C) \to \mathrm{Ext}^2(I_C, I_C)$. Nous allons expliciter u_*.

On a vu qu'on a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & \to & L_4 & \xrightarrow{\sigma_4} & L_3 & \xrightarrow{\sigma_3} & L_2 & \xrightarrow{\sigma_2} & L_1 & \to & L_0 & \to & M_C & \to & 0 \\
 & & \| & & \| & & \downarrow{\scriptstyle p} & & & & & & & & \\
0 & \to & L_4 & \xrightarrow{\sigma_4} & L_3 & \xrightarrow{\sigma_3'} & F & \to & I_C & \to & 0 & & & &
\end{array}$$

dans lequel la première ligne n'est autre que le complexe de Koszul (décalé) résolution minimale de $M_C = M(a-1)$, et la deuxième ligne est une résolution minimale de I_C. Rappelons qu'on a :

$$L_0 = R(a-1), \qquad L_1 = R(a-2)^2 \oplus R(-1) \oplus R(-l-1)$$

$$L_2 = R(a-3) \oplus R(-2)^2 \oplus R(-l-2)^2 \oplus R(-a-l-1)$$

$$L_3 = R(-3) \oplus R(-l-3) \oplus R(-a-l-2)^2, \qquad L_4 = R(-a-l-3)$$

$$F = R(-2)^2 \oplus R(-l-2) \oplus R(-a-l-1),$$

que, quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, σ_3 est donné par la matrice :

$$\begin{pmatrix} F & -G & 0 & 0 \\ -Y & 0 & G & 0 \\ X & 0 & 0 & -G \\ 0 & Y & -F & 0 \\ 0 & -X & 0 & F \\ 0 & 0 & X & -Y \end{pmatrix}$$

σ_4 par la transposée de la matrice (G, F, Y, X), et que p est une projection. On peut toujours choisir les bases de sorte que p soit défini par une des deux matrices suivantes (g est un polynôme homogène non nul de degré l) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

le deuxième cas ne pouvant se produire que si $a = 1$. Dans le premier cas, la courbe est définie par l'idéal $(X^2, XY, gY^2, XG + gYF)$, et dans le deuxième, c'est la réunion disjointe des deux courbes planes d'idéaux (X, Y) et (F, G).

D'après 0.10, $\mathrm{Ext}^2(I_C, I_C)$ est isomorphe au quotient de $\mathrm{Hom}(L_4, F)$ par les homomorphismes de la forme $\sigma_3'\lambda + \mu\sigma_4$, où $\lambda \in \mathrm{Hom}(L_4, L_3)$ et $\mu \in \mathrm{Hom}(L_3, F)$. Mais vu la forme de σ_3 et σ_4, l'ensemble des $\sigma_3'\lambda + \mu\sigma_4$ est l'ensemble des matrices de $\mathrm{Hom}(L_4, F)$ à coefficients dans l'idéal (X, Y, F, G). On a donc

$$\mathrm{Ext}^2(I_C, I_C) \simeq \mathrm{Hom}(L_4, F) \otimes_R M \simeq \mathrm{Hom}(L_4, F \otimes_R M) \simeq M_{a+l+1}^2 \oplus M_{a+1} \oplus M_2.$$

Soit alors $\theta \in \mathrm{Hom}(I_C, M_C)$. On peut construire θ_0, θ_1 et θ_2 qui font commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & L_4 & \xrightarrow{\sigma_4} & L_3 & \xrightarrow{\sigma_3'} & F & \to & I_C & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \theta_2} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_1} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_0} & & \downarrow{\scriptstyle \theta} & & \\
 & & L_2 & \xrightarrow{\sigma_2} & L_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & L_0 & \to & M_C & \to & 0
\end{array}$$

L'image $u_*(\theta)$ est la classe de $p\theta_2$ ($\in \mathrm{Hom}(L_4, F)$) dans $\mathrm{Ext}^2(I_C, I_C)$ (*cf.* 0.11).

Par construction, toutes les flèches de la résolution de M sont à coefficients dans l'annulateur de M. En particulier on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(I_C, M_C) = \mathrm{Hom}(F, M_C) &= H^1\mathcal{J}_C(2)^2 \oplus H^1\mathcal{J}_C(l+2) \oplus H^1\mathcal{J}_C(a+l+1) \\ &= M_{a+1}^2 \oplus M_{a+l+1}.\end{aligned}$$

Il en résulte que u_* est une application de $M_{a+1}^2 \oplus M_{a+l+1}$ dans $M_{a+l+1}^2 \oplus M_{a+1} \oplus M_2$.

Soit $\theta = (P, Q, R) \in M_{a+1}^2 \oplus M_{a+l+1}$. On vérifie que $u_*(P, Q, R) = (R, 2gQ, P, 0)$ dans le premier cas, et $u_*(P, Q, R) = (0, R, -Q, P)$ dans le deuxième.

Dans le premier cas, le noyau de u_* est le noyau de la multiplication par $2g$ de M_{a+1} dans M_{a+l+1} et dans le deuxième cas, u_* est injectif.

On obtient tout de suite que si $l = 0$, u_* est injectif donc $T_{\gamma,\rho}$ et $T_{d,g}$ sont égaux.

De même, si $a = l = 1$, M_2 est nul donc u_* est injectif.

Il reste à voir que si on est dans le premier cas avec $l \neq 0$, et $(a, l) \neq (1, 1)$, la multiplication par g de M_{a+1} dans M_{a+l+1} n'est pas injective.

On a $\dim M_{a+l+1} = \sup(0, a-2)$ et $\dim M_{a+1} = a - \delta_{l,1}$ (symbole de Kronecker), donc on a $\dim M_{a+l+1} < \dim M_{a+1}$, sauf si $a = \delta_{l,1} = 1$ ce qu'on a exclu.

Remarque 3.2. – On peut vérifier que dans le premier cas, pour g général, la multiplication par g de M_{a+1} dans M_{a+l+1} est de rang maximum, donc qu'on a $t_{d,g} - t_{\gamma,\rho} = t_{d,g} - t_\gamma = a - \delta_{l,1} - \sup(0, a-2)$.

COROLLAIRE 3.3. – *Si on a $l = 0$, ou ($a = 1$ et $l = 1$) le schéma $H_{\gamma,\rho}$ des courbes extrémales de paramètres a et l est un sous-schéma ouvert de $H_{d,g}$. Dans le cas ($a = 1$ et $l > 1$), le schéma des courbes extrémales de type II (réunions disjointes d'une droite et d'une courbe plane) est un sous-schéma ouvert de $H_{d,g}$.*

Le corollaire exprime que, lorsque les espaces tangents $T_{\gamma,\rho}$ et $T_{d,g}$ sont égaux, les deux schémas $H_{\gamma,\rho}$ et $H_{d,g}$ coïncident au voisinage de C puisque $H_{\gamma,\rho}$ est lisse. Nous allons voir maintenant que ce résultat reste vrai **ensemblistement** au voisinage d'une courbe générale de $H_{\gamma,\rho}$. Il s'agit de montrer pour cela que, si on se donne une déformation infinitésimale de C (correspondant à un élément ξ de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C) = T_{d,g}$), qui n'est pas à cohomologie constante (donc telle que $\xi \notin T_{\gamma,\rho}$), elle ne provient pas d'une déformation globale (on dit encore qu'elle est obstruée). Une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'on ait $\xi^2 \neq 0$ dans $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C)$.

Proposition 3.4. – *On suppose qu'on a $l \geq 5$ et $a \geq 3$. Si C est une courbe générale de $H_{\gamma,\rho}$, tout élément de $T_{d,g} - T_{\gamma,\rho}$ est obstrué.*

Démonstration. – Nous utiliserons la même méthode que [F]. On conserve les notations de la preuve de 3.1.

Soit $\xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C)$. Son image $\delta_2(\xi) = \theta$ dans $\mathrm{Hom}(I_C, M_C) = M_{a+1}^2 \oplus M_{a+l+1}$ est dans le noyau de u_*, donc on a $\theta = (0, Q, 0)$ avec $gQ = 0$ dans M. On suppose de plus que θ est non nul.

On a vu en 0.e qu'on a aussi une flèche $\delta_3 : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C) \to \mathrm{Hom}(M_C, B_C)$. Soit $\mu = \delta_3(\xi)$. Il existe un diagramme commutatif (*cf.* [W], ou [F] 1.3) :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C) \times \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C) & \to & \mathrm{Ext}^2(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \delta_2 \times \delta_3} & & \big\downarrow \\ \mathrm{Hom}(I_C, M_C) \times \mathrm{Hom}(M_C, B_C) & \to & \mathrm{Hom}(I_C, B_C) \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales sont les accouplements canoniques. Il en résulte que, si la composée $\mu\theta \in \mathrm{Hom}(I_C, B_C)$ n'est pas nulle, alors ξ est obstrué (*cf.* [F], 1.3). Nous allons expliciter μ, puis $\mu\theta$.

On a vu en 0.e qu'on a des isomorphismes:

$$\mathrm{Hom}(M_C, B_C) \simeq \mathrm{Hom}(B_C^*(4), M_C^*(4)) \simeq \mathrm{Ext}^2(M_C, J_C^\bullet).$$

Pour calculer ces groupes, nous commençons par décrire le complexe $J_C^\bullet = P \xrightarrow{\sigma_2} L_1 \xrightarrow{\sigma_1} L_0$.

On a $P = R(a-3) \oplus R(-l-2)$ et l'injection $j : P \to L_2$ est définie par la transposée de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & g & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\sigma_2' = \sigma_2 j$ est donnée par la matrice:

$$\begin{pmatrix} Y & G \\ -X & gF \\ 0 & -gY \\ 0 & -X \end{pmatrix}.$$

Comme ${\sigma_2'}^\vee$ est à coefficients dans l'idéal (X, Y, F, G) et comme M^* est annulé par cet idéal on a des isomorphismes :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(B_C^*(4), M_C^*(4)) &= \mathrm{Hom}(P^\vee, M_C^*(4)) \\ &= \mathrm{Hom}(P^\vee, M^*(5-a)) = (M^*)_2 \oplus (M^*)_{3-a-l} \\ &= (M_{a+l-3})^* \\ &\simeq M_{a+1}, \end{aligned}$$

l'isomorphisme entre $(M_{a+l-3})^*$ et M_{a+1} provenant de la multiplication $M_{a+l-3} \times M_{a+1} \to M_{2a+l-2} = k$ qui induit un accouplement parfait. Par dualité on en déduit que l'injection canonique de B_C dans $P^\vee(-4)^*$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Hom}(M_C, B_C)$ sur $\mathrm{Hom}(M_C, P^\vee(-4)^*)$.

Si on part d'un élément $Q' \in R_{a+1}$, il lui correspond un homomorphisme $\mu : M_C \to B_C$ et un élément μ' de $\mathrm{Ext}^2(M_C, J^\bullet_C)$ que nous allons expliciter. On considère la flèche $(0, m_{Q'})$ de $P^\vee$ dans $M_C^*(4) = M^*(5-a)$, où $m_{Q'}$ désigne la multiplication par Q' de M_{a+l-3} dans $M_{2a+l-2} = k$. Cette flèche se factorise par $B_C^*(4)$ en μ^* qui détermine μ. Elle induit aussi un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
L_0^\vee \oplus R & \xrightarrow{\sigma_1'^\vee} & L_1^\vee & \xrightarrow{\sigma_2'^\vee} & P^\vee & \to & B_C^*(4) & \to & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \mu_2'^\vee} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_3^\vee} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_4^\vee} & & \downarrow{\scriptstyle \mu^*} & & \\
L_2^\vee & \xrightarrow{\sigma_3^\vee} & L_3^\vee & \xrightarrow{\sigma_4^\vee} & L_4^\vee & \to & M_C^*(4) & \to & 0
\end{array}$$

dans lequel on peut donc choisir $\mu_4 = (0, Q')$. On obtient enfin par dualité un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
L_4 & \xrightarrow{\sigma_4} & L_3 & \xrightarrow{\sigma_3} & L_2 \\
\downarrow{\scriptstyle \mu_4} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_3} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_2} \\
P & \xrightarrow{\sigma_2'} & L_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & L_0
\end{array}$$

dans lequel μ_2 est obtenu en composant μ_2' avec la projection canonique de $L_0 \oplus R$ sur L_0. Ce diagramme donne l'élément μ' cherché de $\mathrm{Ext}^2(M_C, J^\bullet_C)$.

Reprenons maintenant $\xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C)$, $\theta = \delta_2(\xi)$ et $\mu = \delta_3(\xi)$, qui correspondent respectivement à des éléments Q et Q' de M_{a+1}. Alors on a (*cf.* [F], 2.13) $u^*(\theta) = v^*(\mu')$ dans $\mathrm{Ext}^2(M_C, M_C)$.

On montre, comme dans la démonstration de 3.1, qu'on a un isomorphisme :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^2(M_C, M_C) &\simeq \mathrm{Hom}(L_2, M_C) \\
&= H^1\mathcal{J}_C(3-a) \oplus H^1\mathcal{J}_C(2)^2 \oplus H^1\mathcal{J}_C(l+2)^2 \oplus H^1\mathcal{J}_C(a+l+1) \\
&= M_2 \oplus M_{a+1}^2 \oplus M_{a+l+1}^2,
\end{aligned}$$

On vérifie que $u^*(\theta)$ (resp. $v^*(\mu)$) est la classe de $\theta_0 p$ (resp. μ_2) dans $\mathrm{Ext}^2(M_C, M_C)$, et qu'on a $u^*(\theta) = (0, 0, Q, -gQ, 0, 0)$, $v^*(\mu) = (0, 0, Q', gQ', 0, 0)$ et on en déduit qu'on a $Q = Q'$ dans M_{a+1}.

On a vu que la projection (resp. l'injection) canonique de F sur I_C (resp. de B_C dans $P^\vee(-4)^*$) induit un isomorphisme de $\mathrm{Hom}(I_C, M_C)$ (resp. de $\mathrm{Hom}(M_C, B_C)$) avec $\mathrm{Hom}(F, M_C)$ (resp. $\mathrm{Hom}(M_C, P^\vee(-4)^*)$. Dans cet isomorphisme, l'image de θ (resp. de μ) est $\tilde{\theta} = (0, Q, 0, 0)$ (resp. $\tilde{\mu} = (0, m_Q)$), où m_Q est la multiplication par Q de R_{a+l-3} dans $M_{2a+l-2} = k$.

Pour montrer que $\mu\theta \in \mathrm{Hom}(I_C, B_C)$ n'est pas nul, il suffit de montrer que $\tilde{\mu}\tilde{\theta} \in \mathrm{Hom}(F, P^\vee(-4)^*)$ ne l'est pas. Or toutes les composantes de $\tilde{\mu}\tilde{\theta}$ sont nulles sauf une qui est la multiplication par Q^2 de R_{l-4} dans $M_{2a+l-2} = k$.

Le résultat suivant va nous permettre de conclure :

LEMME 3.5. – *Soient C une courbe générale de $H_{\gamma,\rho}$, $M_C = M(a-1)$ son module de Rao. Si on a $l \geq 5$ et $a \geq 3$, et si Q est un élément de M_{a+1} qui vérifie $gQ = Q^2 = 0$ (dans M), alors Q est nul.*

Démonstration. – Il suffit de montrer qu'il existe un module $M = R/(X, Y, F, G)$ et une forme g de degré l (qui définissent une courbe C comme en 0.6) pour lesquels le résultat est vrai. On le vérifie sans peine dans le cas $F = Z^a, G = T^{a+l}, g = T^l - Z^2T^{l-2}$.

Afin de traiter les cas qui restent, nous allons montrer un résultat de nature plus géométrique :

PROPOSITION 3.6. – *On suppose qu'on a $l \geq 1$ et $a \geq 2$. Si C est une courbe de $H_{\gamma,\rho}$ qui est la réunion schématique d'une courbe plane intègre Γ_1 de degré l et d'une structure double Γ_2 sur une droite D (contenue dans le même plan que Γ_1, cf. 0.6), la fibre générale d'une déformation plate de C qui n'est pas à cohomologie constante est une courbe intègre.*

Démonstration. – On peut supposer que la déformation est paramétrée par un ouvert d'une courbe lisse : soient donc A une k-algèbre régulière de dimension 1, t_0 un point de $\operatorname{Spec} A$, $\mathcal{X}$ une famille de courbes contenue dans $\mathbf{P}^3 \times \operatorname{Spec} A$, plate sur A, telle que la fibre $\mathcal{X}_0$ en t_0 soit C. On va montrer que, pour t voisin de t_0, $\mathcal{X}_t$ est une courbe intègre ou a même spécialité que C (d'après 2.7, elle aura aussi même cohomologie)

Si la fibre générale de $\mathcal{X}$ n'est pas intègre, il en est de même de $\mathcal{X}$. Nous allons distinguer deux cas :

a) Si $\mathcal{X}$ est non réduit, soit $\mathcal{X}' = \mathcal{X}_{red}$. La fibre $\mathcal{X}'_0$ de $\mathcal{X}'$ en t_0 est une courbe C' contenue dans C et ayant même espace sous-jacent, et $\mathcal{X}'$ est une déformation plate de C'. Vu la forme de C, C' est la réunion de Γ_1 de degré l et de D, donc est une courbe plane de degré $l+1$. De plus on a une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{J}_C \to \mathcal{J}_{C'} \xrightarrow{p} \mathcal{O}_D(a-1) \to 0,$$

où, avec les notations de 0.6, p envoie $AX + BgY \in I_{C'}$ sur la classe de $AF - BG$ modulo (X, Y).

Alors la cohomologie des fibres de $\mathcal{X}'$ et de $\mathcal{J}_{\mathcal{X}'}/\mathcal{J}_{\mathcal{X}}$ est constante au voisinage de t_0. En effet, c'est vrai d'une part pour $\mathcal{X}'$ qui est une déformation d'une courbe plane (*cf.* [gE]). D'autre part, $\mathcal{J}_{\mathcal{X}'}/\mathcal{J}_{\mathcal{X}}$ est une déformation plate du faisceau $\mathcal{O}_D(a-1)$. Mais, le faisceau $\mathcal{O}_D(n)$ n'ayant pas à la fois de H^0 et de H^1 non nul, toute déformation plate de $\mathcal{O}_D(a-1)$ est à cohomologie constante.

Comme on a, pour tout t voisin de t_0, une suite exacte de cohomologie :

$$0 = H^1\mathcal{J}_{\mathcal{X}'_t}(n) \to H^1(\mathcal{J}_{\mathcal{X}'_t}/\mathcal{J}_{\mathcal{X}_t})(n) \to H^2\mathcal{J}_{\mathcal{X}_t}(n) \to H^2\mathcal{J}_{\mathcal{X}'_t}(n) \to 0,$$

on en déduit que $h^2\mathcal{J}_{\mathcal{X}_t}(n)$ est indépendant de t.

b) Si $\mathcal{X}$ est réduit il est réductible donc $\mathcal{X}$ est union schématique $\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$ de deux schémas réduits et $\mathcal{X}_1$ (resp. $\mathcal{X}_2$) est une déformation plate d'une courbe C_1 (resp. C_2), C étant ensemblistement réunion de C_1 et C_2. Il y a deux possibilités : soit C_1 est la réunion de D et Γ_1, et on on conclut comme dans le cas précédent, soit C_1 est égale à Γ_1 et C_2 est alors égale à Γ_2 pour une raison de degré. Mais, on a vu en 3.3 (cas $l = 0$) que toute déformation de Γ_2 est extrémale, donc non réduite, ce qui contredit le fait que $\mathcal{X}_2$ est réduit.

THÉORÈME 3.7. – *Soit d un entier > 0 et g un entier vérifiant*

$$g < \frac{(d-2)(d-3)}{2}.$$

Soit $H_{\gamma,\rho}$ le schéma des courbes extrémales de degré d et genre g. Alors $H_{\gamma,\rho}$ est (ensemblistement) une composante irréductible de $H_{d,g}$.

Démonstration. – Il suffit de montrer que $H_{\gamma,\rho}$ contient un ouvert non vide de $H_{d,g}$. On distingue plusieurs cas selon les valeurs de a et $l = d - 2$ (*cf.* 0.2).

1) Le schéma $H_{\gamma,\rho}$ est égal à $H_{d,g}$ dans les cas suivants (*cf.* 1.4) : si $d = 2$ (Migliore), si $a = 1$ et $d \geq 6$ ou si $a = 2$ et $d \geq 7$ (Ellia).

2) On a vu en 3.3 que, si $a = 1$, $H_{\gamma,\rho}$ contient un ouvert de $H_{d,g}$.

3) Si on a $l \geq 5$ (*i.e.* $d \geq 7$) et $a \geq 3$ il résulte de 3.4 et de [F] 7.2 que la même conclusion subsiste.

4) Il reste donc à étudier les cas $1 \leq l \leq 4$ (*i.e.* $3 \leq d \leq 6$) et $a \geq 2$.

a) Supposons $g < 0$. Comme $H_{d,g}$ ne contient pas de courbes intègres, l'ensemble des courbes extrémales du type étudié en 3.6 est un ouvert de $H_{d,g}$. Ce point couvre les cas $d = 3$ et $d = 4$.

b) Supposons $d \geq 5$ et $0 \leq g \leq d - 3$ (et toujours $a \geq 2$). Si $H_{\gamma,\rho}$ ne contient pas d'ouvert non vide de $H_{d,g}$ il est dans l'adhérence d'une composante irréductible X de $H_{d,g}$ qui contient des courbes intègres en vertu de 3.6. Mais alors, il résulte de [Ei] que ces courbes sont lissifiables et que X est de dimension $4d$. Or, on a (*cf.* 2.5) :

$$\dim H_{\gamma,\rho} = \frac{3}{2}d(d-3) + 9 - 2g$$

et on vérifie que ce nombre est $> 4d$, ce qui est absurde.

c) Les points *a*) et *b*) couvrent tous les cas à traiter sauf le cas $d = 6$, $g = 4$. Mais, comme toute courbe intègre de $H_{6,4}$ est intersection complète d'une quadrique et d'une cubique, ces courbes forment encore une famille de dimension $24 = 4d$ et on conclut comme en *b*).

4. Conclusions sur $H_{d,g}$

Soient d et g deux entiers avec $d > 1$ et $g \in \mathbf{Z}$. On suppose qu'on a :

$$g \leq \frac{(d-2)(d-3)}{2}.$$

Nous allons montrer que le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ des courbes localement de Cohen-Macaulay n'est le plus souvent ni irréductible, ni réduit. C'est le cas notamment dès que $H_{d,g}$ contient des courbes lisses et connexes.

Si on a $g < \frac{(d-2)(d-3)}{2}$ on note γ et ρ le caractère de postulation et la fonction de Rao des courbes extrémales de $H_{d,g}$. Les trois théorèmes suivants recouvrent l'ensemble des cas possibles.

THÉORÈME 4.1. – Le cas irréductible et lisse.

1) *On suppose qu'on a :*

$$g = \frac{(d-2)(d-3)}{2}.$$

Alors $H_{d,g}$ est formé de courbes ACM. Il est irréductible et lisse de dimension $\frac{d(d+1)}{2} + 5$ (resp. 16, resp. 12) pour $d \geq 5$ ou $d = 2$ (resp. $d = 4$, resp. $d = 3$).

2) *On suppose $d = 2, g < 0$ (resp. $d = 3, g = -1$). Alors, toute courbe de degré d et genre g est extrémale et on a, schématiquement, $H_{d,g} = H_{\gamma,\rho}$. Le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ est irréductible et lisse de dimension $5 - 2g$ si $d = 2$ (sauf si $g = -1$ auquel cas il est de dimension 8) (resp. 12 si $d = 3$ et $g = -1$).*

Démonstration. – Le point 1), vu les résultats de [H2] découle de [gE].

Le point 2) pour $d = 2$ vient des résultats de [Mi], *cf.* 1.4, et de 2.5 et 3.3 ci-dessus.

Soit C une courbe de degré 3 et de genre -1. On a $e \leq -1$ et $s_0 \geq 2$. On en déduit, par Riemann-Roch, $h^0\mathcal{O}_C = 2$ et $h^0\mathcal{O}_C(1) = 5$, d'où $h^1\mathcal{J}_C = h^1\mathcal{J}_C(1) = 1$ de sorte que la courbe est extrémale. On conclut alors par 2.5 et 3.3.

THÉORÈME 4.2. – Le cas irréductible non réduit

1) *On suppose*

$$d \geq 6 \quad \text{et} \quad g = \frac{(d-2)(d-3)}{2} - 1.$$

Alors toute courbe de $H_{d,g}$ est extrémale, $H_{d,g}$ est ensemblistement égal à $H_{\gamma,\rho}$. Il est irréductible et génériquement réduit. Précisément l'ouvert de $H_{d,g}$ formé des courbes réunions disjointes d'une droite et d'une courbe plane est lisse, mais le fermé des structures multiples sur une droite est une composante immergée de $H_{d,g}$.

2) *On suppose*

$$d \geq 7 \quad \text{et} \quad \frac{(d-3)(d-4)}{2} + 1 < g < \frac{(d-2)(d-3)}{2} - 1.$$

Alors toute courbe de $H_{d,g}$ est extrémale, $H_{d,g}$ est ensemblistement égal à $H_{\gamma,\rho}$. Il est irréductible mais non génériquement réduit.

Démonstration. – Le fait que toutes les courbes sont extrémales résulte de [E], *cf.* 1.4. Les autres assertions viennent alors de 2.5, 3.1 et 3.3. Dans le cas 1), il résulte de 3.3 que les schémas $H_{\gamma,\rho}$ et $H_{d,g}$ coïncident sur l'ouvert formé des courbes réunions disjointes d'une droite et d'une courbe plane. Le fermé complémentaire F est formé de points lisses dans $H_{\gamma,\rho}$, mais singuliers dans $H_{d,g}$ ce qui n'est possible que si c'est une composante immergée.

THÉORÈME 4.3. – Le cas non irréductible et non réduit

On suppose qu'on a ($d = 3$ et $g \leq -2$) ou ($d = 4$ et $g \leq 0$) ou ($d = 5$ et $g \leq 2$) ou encore

$$\left(d \geq 6 \quad \text{et} \quad g \leq \frac{(d-3)(d-4)}{2} + 1\right).$$

Alors le sous-schéma $H_{\gamma,\rho}$ des courbes extrémales est ensemblistement une composante irréductible de $H_{d,g}$. Le schéma $H_{d,g}$ contient des courbes non extrémales donc n'est pas irréductible. La composante des courbes extrémales est non génériquement réduite sauf dans les deux cas ($d = 4$ et $g = 0$), ($d = 5$ et $g = 2$). Dans ces derniers cas l'ouvert des réunions disjointes d'une droite et d'une courbe plane de degré 3 ou 4 est lisse mais le fermé des structures multiples sur une droite est singulier dans $H_{d,g}$.

Démonstration. – Cela résulte de 2.5, 3.1 et 3.7, sauf l'assertion sur l'existence de courbes non extrémales. Pour cette dernière il y a deux cas à envisager.

Si $d \geq 4$ on pose $d' = d - 2$ et $g' = g - d + 3$. Vu les hypothèses sur d, g on a $d' \geq 1$ et $g' \leq \frac{(d'-3)(d'-2)}{2}$. On a $d' \geq 2$ donc il existe une courbe C' de degré d' et genre g', qui est extrémale ou ACM. Dans les deux cas, C' est tracée sur une surface de degré 2. Soit C obtenue à partir de C' par une biliaison $(2, +1)$ (*cf.* [MDP1] III). Alors on vérifie que C est de degré d et de genre g. De plus, C n'est pas extrémale (comme on le voit par exemple en regardant la largeur de son module de Rao).

Si $d = 3$ et $g \leq -2$ on obtient une courbe non extrémale en prenant la réunion disjointe d'une droite et d'une courbe de degré 2 et genre $g + 1$ (cette courbe vérifie $r_a = 2 + g$ alors que, pour l'extrémale, on a $r_a = 1 + g$)

Remarque 4.4. – Dans le cas $d = 4$, $g = 0$, on peut montrer que le fermé des structures multiples sur une droite est dans l'adhérence de la composante de $H_{4,0}$ qui contient les courbes lisses (courbes de type $(3, 1)$ sur une quadrique), ce qui explique d'une part que ce fermé soit singulier et montre d'autre part que $H_{4,0}$ est connexe.

5. Application au schéma de Hilbert des courbes lisses

Nous donnons ici une application de ce qui précède à l'étude du schéma de Hilbert des courbes lisses. Les principes en sont clairs :

1) dans chaque classe de liaison, même si les courbes minimales sont non réduites, il y a des courbes lisses pourvu qu'on effectue des liaisons par des surfaces de grand degré ou encore des biliaisons avec un décalage suffisant (*cf.* [Rao] ou [MDP3]),

2) si on effectue une liaison par des surfaces de degré suffisamment grand, les propriétés relatives à l'irréductibilité et à la lissité du schéma de Hilbert de départ sont conservées (*cf.* [K]).

Nous utiliserons une variante du théorème de Bertini pour la liaison, dans le style de [PS], mais avec quelques modifications. Si C est une courbe de $\mathbf{P}^3$ on désigne par C'' l'ensemble de ses très mauvais points (*i.e.*, les points P où l'espace tangent à C est de dimension 3, ou encore, où toutes les équations de C sont dans m_P^2).

THÉORÈME 5.1. – *Soit C une courbe de $\mathbf{P}^3$. On suppose que C'' est vide. Soit s un entier tel que $\mathcal{J}_C(s)$ soit engendré par ses sections et soit $t \geq s$. Alors, la courbe générale liée à C par des surfaces de degrés s et t est lisse.*

On commence par montrer le lemme suivant :

LEMME 5.2. – *Sous les hypothèses précédentes, si S est la surface générale de degré s contenant C, elle vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *le lieu singulier de S est fini et contenu dans C,*

(ii) *C est un diviseur de Cartier sur S.*

Démonstration. – Il suffit de prouver séparément les deux assertions. Pour la première on considère le sous-schéma Z de $\mathbf{P}(H^0\mathcal{J}_C(s)) \times \mathbf{P}^3$ formé des couples (f, P) vérifiant $f(P) = 0$ et on pose $N = h^0\mathcal{J}_C(s) - 1$. Comme $\mathcal{J}_C(s)$ est engendré par ses sections (resp. comme C'' est vide), un calcul local montre que le lieu singulier Z' de Z est au dessus de C (resp. qu'il est de dimension $\leq N$). On conclut alors en appliquant le théorème de lissité générique à la projection de Z sur $\mathbf{P}(H^0\mathcal{J}_C(s))$ (k est de caractéristique 0).

Soient $f \in H^0\mathcal{J}_C(s)$ et $P \in C$. Puisque C'' est vide, C est localement intersection complète de sorte que C est un diviseur de Cartier sur $V(f)$ en P si et seulement si $f \notin m_P\mathcal{J}_C$. On considère alors le sous-schéma Z'' de $\mathbf{P}(H^0\mathcal{J}_C(s)) \times C$ formé des couples (f, P) vérifiant $f \in m_P\mathcal{J}_C$. En calculant les fibres de la projection de Z'' sur C on montre que Z'' est de dimension $\leq N - 1$.

On peut alors prouver le théorème 5.1. On choisit une surface S vérifiant les conditions de 5.2, on considère la section plane H de S et le diviseur $D = tH - C$. Il s'agit de voir que la courbe générale Γ du système linéaire $|D|$ est lisse. Ce système est sans point base car $\mathcal{J}_C(t)$ est engendré par ses sections. Soit S' le lieu singulier de S. Puisque $|D|$ est sans point base la courbe Γ générale ne rencontre pas S' et le théorème de Bertini montre qu'elle est lisse en dehors de S', d'où la conclusion.

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 5.3. – *Soient d et g deux entiers tels que :*

$$d > 2 \qquad \text{et} \qquad (d, g) \neq (3, -1) \qquad \text{et} \qquad g \leq \frac{(d-2)(d-3)}{2} - 1,$$

soient a et l définis comme en 0.2 et soient s, t deux entiers avec $s \leq t$ et

$$s \geq \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g + 4 = a + l + 4.$$

On pose $d' = st - d$, $g' = g + (\frac{s+t}{2} - 2)(st - 2d)$. Alors le schéma de Hilbert $H^0_{d',g'}$ des courbes **lisses** *de degré d' et genre g' vérifie les propriétés suivantes :*

1) *Il est non génériquement réduit si $a > 1$ et il a des composantes immergées si $a = 1$.*

2) *Il est non irréductible, sauf peut-être dans les cas suivants :*

$$d \geq 6 \qquad \text{et} \qquad \frac{(d-3)(d-4)}{2} + 1 < g \leq \frac{(d-2)(d-3)}{2} - 1.$$

Démonstration. – Pour toute courbe C de $H_{d,g}$, on a $h^1\mathcal{J}_C(s) = h^1\mathcal{J}_C(s-4) = h^1\mathcal{J}_C(t) = h^1\mathcal{J}_C((t-4) = 0$ (c'est vrai pour les courbes extrémales donc, *a fortiori*, pour les autres). On peut donc appliquer un résultat de Kleppe (*cf.* [K] 2.3.6), qui montre qu'alors les schémas de Hilbert des courbes obtenues par liaison sont de même nature. Précisément, on a un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \simeq & \mathcal{D}' \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ H_{d,g} & & U' \end{array}$$

où U' est l'ouvert de $H_{d',g'}$ formé des courbes Γ vérifiant les mêmes propriétés de nullité des $H^1\mathcal{J}_\Gamma$ que ci-dessus, où $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}'$) sont les schémas de drapeaux formés des couples $(C \subset X)$ (resp. $(\Gamma \subset X)$) avec X intersection complète de deux surfaces de degrés s et t et où l'isomorphisme entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est donné par la liaison. Les projections p et p' sont alors surjectives, irréductibles et lisses. On en déduit aussitôt que si $H_{d,g}$ est non réduit, ou s'il a des composantes immergées, il en est de même de U', donc de $H_{d',g'}$.

Par ailleurs, le choix de s assure que pour toute courbe de $H_{d,g}$ le faisceau $\mathcal{J}_C(s)$ est engendré par ses sections (c'est une conséquence du critère de Castelnuovo-Mumford). Il résulte alors de 5.1 et 0.6.3 que la courbe générale liée par des surfaces de degrés s et t à une courbe extrémale générale de $H_{d,g}$ est lisse et connexe (*cf.* aussi [MDP3] V). Dans le cas $a = 1$ on peut même préciser que la courbe générale liée à une courbe de $H_{d,g}$ de type I est lisse et connexe. On en conclut que les composantes non réduites (resp. immergées) de U' obtenues par liaison à partir des courbes extrémales de $H_{d,g}$ rencontrent $H^0_{d',g'}$, d'où le point 1.

Pour le point 2, on a vu en 4.3 que $H_{d,g}$ est non irréductible, sauf dans les cas écartés. Précisément, il contient deux ouverts disjoints, l'ouvert U_1 formé des courbes extrémales et un autre ouvert U_2 qui, pour $d \geq 4$, contient des courbes de la classe des extrémales de paramètres $a-2$ et $a-d+4$. Il en résulte que U' contient deux ouverts disjoints U'_1 et U'_2 et il reste à vérifier que chacun de ces ouverts contient des courbes lisses. Pour U'_1 cela a été vu ci-dessus, pour U'_2 cela résulte de [MDP3] V 2.6. Le cas $d = 3$ est justiciable de 5.1.

Exemples 5.4.

1) Le plus petit exemple d'une telle singularité s'obtient en prenant $d = 3$, $g = -2$, $s = t = 7$. On voit ainsi que le schéma de Hilbert $H^0_{46,213}$ est non irréductible et non réduit.

2) Si d' est un entier ≥ 144 on peut toujours écrire $d' = st - d$ avec $d \geq 3$ et $s, t \geq d + 4$. Si on choisit un entier a dans l'intervalle (non vide) $[2, s-d-2]$ et si on pose $g = \frac{(d-2)(d-3)}{2} - a$ et $g' = g + (\frac{s+t}{2} - 2)(st - 2d)$ on obtient alors un exemple de schéma de Hilbert $H^0_{d',g'}$ non réduit. On vérifie aisément que l'entier 143 ne s'écrit pas sous la forme ci-dessus.

3) Si on a, de plus, $a \geq d - 4$ (ce qui nécessite $s \geq 2d - 2$) le schéma de Hilbert obtenu n'est pas non plus irréductible. On peut toujours écrire d' sous la forme $st - d$ avec d, s, t vérifiant les conditions précédentes pourvu que d' soit assez grand (par exemple $d' \geq 85^2 = 7225$, mais cette valeur n'est sans doute pas optimale).

Remarques 5.5.

1) Pour d fixé, assez grand, on obtient par cette méthode un intervalle (relativement étroit) $[g_1, g_2]$ tel que, si $g \in [g_1, g_2]$, le schéma de Hilbert $H^0_{d,g}$ n'est ni réduit, ni irréductible. Les courbes obtenues sont dans le "range C" au sens de [H3].

Pour g petit ($g \leq d - 3$), on sait que le schéma de Hilbert des courbes lisses est irréductible et génériquement lisse, *cf.* [Ei]. C'est vrai aussi, à l'opposé, lorsque g est très grand, puisque ces courbes sont alors ACM, *cf.* [GP], et il suffit d'appliquer les résultats d'Ellingsrud, *cf.* [gE].

Nous ignorons si on peut étendre l'intervalle obtenu.

2) Les exemples obtenus par Fløystadt, *cf.* [F], s'ils sont dans des classes de biliaison du même type que les nôtres, sont tous différents de ceux proposés ici.

BIBLIOGRAPHIE

[A] M. ARTIN, *Lectures on deformations of singularities,* (*Lectures on Math. Tata Institute*, 54, 1976).

[Ei] L. EIN, *Hilbert scheme of smooth space curves* (*Ann. Scient. E.N.S.*, 4^e série, vol. 4, 1986, p. 469-478).

[E] Ph. ELLIA, *On the cohomology of projective space curves* (*Bolletino U.M.I.*, (7), 9-A, 1995, p. 593-607).

[gE] G. ELLINGSRUD, *Sur le schéma de Hilbert des variétés de codimension* 2 *dans* $\mathbf{P}^e$ *à cône de Cohen-Macaulay* (*Ann. Scient. E.N.S.*, 4^e série, vol. 8, 1975, p. 423-432).

[F] G. FLØYSTADT, *Determining obstructions for space curves with applications to non reduced components of the Hilbert scheme* (*J. reine angew. Math.*, vol. 439, 1993, p. 11-44).

[GP] L. GRUSON et C. PESKINE, *Genre des courbes de l'espace projectif* (*Lecture Notes 687*, Springer Verlag, 1977, p. 31-59).

[H1] R. HARTSHORNE, *On the connectedness of the Hilbert scheme*, (*Publ. Math. IHES*, vol. 29, 1966, p. 6-48).

[H2] R. HARTSHORNE, *The genus of Space Curves* [*Annali dell'Universita di Ferrara* (à paraître)].

[H3] R. HARTSHORNE, *On the classification of algebraic space curves, II* (*AMS Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, PSMP*, vol. 46, 1987, p. 145-164).

[K] J. O. KLEPPE, *Deformations of graded algebras and of projective schemes of nests. Applications to the Hilbert scheme of curves in* 3*-space* (*Thesis*, University of Oslo, 1980).

[MDP 1] M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, *Sur la classification des courbes gauches I* (*Astérisque*, vol. 184-185, 1990).

[MDP 2] M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, *Courbes gauches et Modules de Rao* (*J. reine angew. Math.* vol. 439, 1993, p. 103-145).

[MDP3] M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, *Construction de courbes lisses : un théorème à la Bertini* (*Rapport de recherche du LMENS*, vol. 92-22, 1992).

[MDP4] M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, *Sur les bornes du module de Rao* (*C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 137, série I, p. 1159-1162, 1993)

[Mi] J. MIGLIORE, *On linking double lines* (*Trans. A.M.S.*, vol. 294, n° 1, 1986, p. 177-185).

[P] D. PERRIN, *Courbes passant par* m *points généraux de* $\mathbf{P}^3$ (*Mémoire S.M.F.* n° 28/29, 1987).

[PS] C. PESKINE et L. SZPIRO, *Liaison des variétés algébriques* (*Invent. Math.*, vol. 26, 1974, p. 271-302).

[Rao] A. P. RAO, *Liaison among curves in* $\mathbf{P}^3$ (*Invent. Math.*, vol. 50, 1979, p. 205-217).

[W] C. WALTER, *Algebraic methods for the cohomology of normal bundles of algebraic space curves*, Preprint.

(Manuscrit reçu le 24 octobre 1995)

M. MARTIN-DESCHAMPS,
École Normale Supérieure,
DMI, 45, rue d'Ulm,
75230 Paris Cedex 05, France.

D. PERRIN,
Bât. 425, Université Paris Sud,
91405 Orsay Cedex, France.