ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

F. CAMPANA

Remarques sur les groupes de Kähler nilpotents

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 28, nº 3 (1995), p. 307-316
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1995_4_28_3_307_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 28, 1995, p. 307 à 316.

REMARQUES SUR LES GROUPES DE KÄHLER NILPOTENTS

PAR F. CAMPANA

RÉSUMÉ. – On montre que, pour toute variété kählérienne compacte X, la complétion nilpotente $\pi_1(X)^{\text{nilp}}$ de $\pi_1(X)$ est égale à $\pi_1(Y)^{\text{nilp}}$ si Y est un modèle lisse de $\alpha(X) \subset \text{Alb}(X)$, où $\alpha : X \to \text{Alb}(X)$ est le morphisme d'Albanese de X. On en déduit que : $\pi_1(X)^{\text{nilp}} = \pi_1(Z)^{\text{nilp}}$ si Z est une réduction algébrique de X; que $\pi_1(X)^{\text{nilp}} = H_1(X, \mathbb{Z})$/Torsion si α est surjective (donc si $\kappa(X) = 0$ ou si $a(X) = 0$) et enfin que $b_1(X) \geq 8$ si $\pi_1(X)$ est nilpotent mais non virtuellement abélien. Des exemples montrent que cette situation existe et que cette borne est optimale.

Notations

X désigne une variété kählérienne **compacte** et connexe lisse de dimension complexe n ; G est un groupe. On dira que G est un **groupe de Kähler** (noté $G \in K$) s'il existe X telle que $G \cong \pi_1(X)$.

0. Introduction

Si $G \in K$, G est de présentation finie. Tout groupe de présentation finie est le groupe fondamental d'une variété différentiable M compacte de dimension 4, et même d'une variété complexe compacte Z de dimension complexe 3 qui est l'espace des twisteurs d'une métrique autoduale convenable sur $M\sharp k(M).\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ ([T], *voir* [G]).

Cette construction ne fournit cependant aucun exemple de groupe de Kähler, puisqu'un espace de twisteurs kählérien est simplement connexe ([H], [C]).

Un groupe G de présentation finie n'est pas toujours de Kähler ; pour l'être, il faut, par exemple, que $H_1(G) = G/[G, G]$ soit de rang pair et que G ait au plus un bout ([A-B-R]). La première condition caractérise essentiellement les groupes de Kähler abéliens. Dans la complexité algébrique, les groupes suivants sont les groupes nilpotents. De tels groupes G apparaissent naturellement comme groupes fondamentaux de nilvariétés complexes (variété d'Iwasawa, par exemple) qui ne sont cependant kählériennes que si G est abélien.

Il a été conjecturé (*voir* [C-T]) que G/Torsion est abélien si G est nilpotent et de Kähler. La question de l'existence de tels groupes est aussi soulevée par M. Gromov dans [Gr'].

On se propose de donner ici des exemples de groupes de Kähler nilpotents qui ne sont pas presque abéliens (§1). Certains de ces exemples, passés inaperçus, ont déjà été découverts dans un autre contexte dans [S-V]. Dans le §2, on montrera que la complétion nilpotente $\pi_1^{\text{nilp}}(X)$ de $\pi_1(X)$ est essentiellement la même que celle de $\pi_1(Y)$, si Y est un modèle lisse de l'image de X par son application d'Albanese $\alpha_X\ : X \to \mathrm{Alb}(X)$, ce qui réduit le cas général à celui des sous-variétés de tores complexes. L'image du morphisme d'Albanese contient donc essentiellement toute l'information nilopotente du groupe fondamental, et non seulement son Abelianisation. Ce fait est remarquable, puisque seule l'Abelianisation du groupe fondamental est utilisée dans la construction du morphisme d'Albanese. On peut déduire ce résultat de la théorie de l'homotopie rationnelle et de [D-G-M-S]. On le déduit ici, plus directement, d'un résultat d'algèbre de J. Stallings et de propriétés élémentaires de géométrie kählérienne.

On en déduira au §3 que $\pi_1^{\text{nilp}}(X)$ est abélien si α_X est surjective ou si $H_1(G)$ est de rang au plus 6. Il en résulte que le rang d'un groupe de Kähler nilpotent non presque abélien G est au moins égal à 9. Cette borne est optimale, comme le montre notre seconde construction, où un tel groupe G apparaît, qui admet une suite exacte :

$$0 \to \mathbb{Z} \to G \to \mathbb{Z}^{\oplus 8} \to 0$$

La condition : α_X surjective est réalisée en particulier si $a(X) = 0$, ou si $\kappa(X) = 0$, où a (resp. κ) désigne la dimension algébrique (resp. de Kodaira-Iitaka).

La condition : rang $(H_1(G)) = 4$ est réalisée si G est le groupe fondamental de la variété d'Iwasawa, qui n'est donc pas de Kähler.

Les résultats ci-dessous seront ultérieurement amplifiés par l'utilisation de la théorie des intégrales itérées de Chen (*voir*, par exemple, la remarque 3.9 ci-dessous).

Remarquons que le corollaire 3.4 a été obtenu indépendamment par d'autres méthodes dans [C-T], où il est également établi que G n'est pas Kähler si G est un groupe de Heisenberg de rang au plus 6.

La démonstration du corollaire 3.6 ci-dessous emprunte d'ailleurs un argument crucial à celle de ce fait dans [C-T]. Cette référence a été involontairement omise dans [C'].

Le présent travail a été réalisé en partie lors d'un séjour à l'Université de Tokyo. Je voudrais remercier Y. Kawamata pour son invitation et la J.S.P.S. pour son soutien.

1. Groupes de Kähler nilpotents

Nous donnons ici deux constructions (*voir* 1.2 et 1.7 ci-dessous) de groupes de Kähler nilpotents de classe 2 reposant sur la théorie de Morse de [G-M], mais l'aspect stratifié n'est pas utilisé ici. Observons que la première a déjà été introduite dans un autre contexte dans un cas particulier dans [S-V]. La seconde construction permet de construire des groupes de rang moindre, et même un groupe de rang minimum 9 (*voir* aussi Remarques 1.8 et 3.9).

1.1. THÉORÈME ([F-L], 9.4 ; [G-M]). – *Soit $f\ :\ B \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) = P$ une application holomorphe propre, surjective et finie, et $A \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, où A et B sont projectives lisses. Soit $X\ :=\ f^{-1}(A)$, supposée lisse. (Ceci est réalisé en remplaçant A par $g.A$ avec g générique dans $\mathbb{P}Gl(n+1, \mathbb{C})$.) Alors* : $\pi_i(B, X) \cong \pi_i(P, A)$ si $0 \leq i \leq d\ :=\ \dim_{\mathbb{C}}(A)$.

1.2. COROLLAIRE (*voir* [S-V]). – *Dans la situation de* 1.1, *si* $d \geq 2$, *et si* A *et* B *sont des variétés abéliennes, on a une suite exacte :*

$$1 \to \mathbb{Z} \to \pi_1(X) \to \pi_1(A) \oplus \pi_1(B) \to 1.$$

Démonstration. – On a en effet $\pi_2(A) = \pi_2(B) = 1$ dans ce cas, et aussi $\pi_2(P) = H_2(P, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ puisque $\pi_1(P) = 1$. D'où un diagramme commutatif d'homotopie :

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[r] \arrow[d] & \pi_2(B,X) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(X) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(B) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \pi_2(P,A) \arrow[r] & \pi_1(A) \arrow[r] & 1 &
\end{tikzcd}$$

qui fournit l'assertion de 1.2.

1.3. *Remarque.* – Il est facile de réaliser élémentairement les conditions de 1.2 en prenant $d \geq 2$ et $n \geq 2d + 1$ (ou même : $d = 2$ et $n = 4$, mais ceci est plus difficile. Dans ce cas particulier, cette construction a été déjà réalisée dans [S-V], où le groupe $\pi_1(X)$ est qualifié d'"unusual").

1.4. COROLLAIRE. – *Dans la situation de* 1.2, $\pi_1(X)$ *admet un sous-groupe* G *d'indice* 1 *ou* 2 *qui est nilpotent, mais non presque-abélien, et de Kähler.*

Démonstration. – La première assertion résulte de A.1 ; la seconde de A.1 et de ce que $H_1(G)$ serait de rang impair si G était abélien. Or, G est de Kähler (puisque d'indice fini dans $\pi_1(X)$), et $H_1(G)$ est donc de rang pair.

1.5. *Remarque.* – Le groupe G ainsi construit et de classe de nilpotence 2. Il serait intéressant de construire des groupes de Kähler nilpotents de classe plus élevée.

L'idée la plus simple est d'itérer cette construction, en remplaçant A par X et B par une variété abélienne C. On doit alors plonger X dans P de telle sorte que : $\pi_2(X) \to \pi_2(P)$ soit nulle. Cette condition est (facilement) réalisée si ce plongement est induit par un plongement de B. Dans ce cas, cependant, on peut vérifier que la variété obtenue par la construction 1.1 a un π_1 de classe de nilpotence 2. Remarquons aussi que, dans l'exemple 1.2, $\mathrm{Alb}(X)$ n'est pas une variété abélienne simple. Il serait intéressant d'avoir des exemples X avec $\mathrm{Alb}(X)$ simple.

Voici maintenant la seconde construction :

1.6. THÉORÈME ([F-L], Theorem 9.2 ; [G-M]). – *Soit* $f : A \to \mathbb{P}_m(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_m(\mathbb{C}) := Q$ *une application holomorphe finie, avec* A *projective lisse de dimension* n. *Soit* Δ *la diagonale de* Q *et soit* $X := f^{-1}(\Delta)$. *(On suppose* X *lisse, quitte à composer* f *avec un automorphisme de* Q.*) Alors :*

1. *Si* $n \geq m + 2$, *on a une suite exacte :*

$$\pi_2(X) \to \pi_2(A) \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z} := \pi_2(\mathbb{P}_m(\mathbb{C})) \to \pi_1(X) \to \pi_1(A) \to 1,$$

l'application δ *étant la différence des deux morphismes de* $\pi_2(A)$ *dans* $\pi_2(\mathbb{P}_m)$ *induits par* f *et les deux projections de* Q.

2. *Si* $i \leq n - m$, $\pi_i(A, X) = 0$.

Par le même argument qu'en 1.4, on obtient donc :

1.7. Corollaire. – *Soient* A, B *et* C *des variétés abéliennes de dimensions* n, m *et* $p = n - m$, *avec* $m \geq p \geq 2$, *soit* $\varphi \ : A \to B \times C$ *un morphisme surjectif fini. Soient* $g \ : B \to \mathbb{P}_m$ *et* $h \ : C \to \mathbb{P}_m$ *des applications holomorphes finies, et* $f = (g \times h) \circ \varphi \ : \ A \to \mathbb{P}_m \times \mathbb{P}_m$. *Les conditions de 1.6 sont alors réalisées, et si* $G = \pi_1(X)$ *o* $X \ := \ f^{-1}(\Delta)$, *on a donc une suite exacte :*

$$0 \to \mathbb{Z} \to G \to \pi_1(A) \to 0$$

dans laquelle G *est nilpotent de classe de nilpotence 2 (donc non presque abélien).*

1.8. *Remarque.* – Dans ce cas, A est donc le tore d'Albanese de X, contrairement à ce qui se produisait dans la première construction. Remarquons que, à nouveau, A n'est pas simple. D'autre part, si l'on prend n minimal, c'est-à-dire : $n = 4$ et $m = p = 2$, on obtient pour G une suite exacte :

$$0 \to \mathbb{Z} \to G \to \mathbb{Z}^{\oplus 8} \to 0$$

et G est donc de rang 9. Cette borne est optimale pour un groupe de Kähler nilpotent de classe au moins 2 (*voir* remarque 3.8).

1.9. *Remarque* (suggérée par une question de M. Gromov). – Il est facile de voir que dans les exemples précédents, le revêtement universel est de Stein (on peut le réaliser explicitement à l'aide de fonctions thêta), en conformité avec la conjecture de Shafarevitch. Plus généralement, si $\pi_1(X)$ est nilpotent et si l'image de X par son morphisme d'Albanese est lisse, alors le revêtement universel de X est holomorphiquement convexe par 2.2 ci-dessous. Le cas général où $\pi_1(X)$ est nilpotent semble nécessiter d'autres techniques.

2. Réduction à l'image d'Albanese

2.0. Notations. – Soit $\alpha_X \ : X \to \mathrm{Alb}(X)$ l'application d'Albanese de X ; soit $Y' \ := \alpha_X(X) \subset \mathrm{Alb}(X)$ son image et $\sigma'_X \ : \widetilde{Y}' \to Y'$ la factorisation de Stein de α_X (de sorte que σ_X est finie). Soit $\widetilde{Y}$ (resp. Y) des modèles lisses de $\widetilde{Y}'$ (resp. Y'). Quitte à modifier X, Y et $\widetilde{Y}$ (ce qui ne change pas leurs groupes fondamentaux), on peut donc supposer que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \widetilde{Y} \arrow[d, "\sigma"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

On notera G (resp. $\widetilde{H}$, resp. H) les groupes fondamentaux de X (resp. $\widetilde{Y}$, resp. Y) et $\tilde{\alpha}_*$, α_* et σ_* les morphismes de groupes fondamentaux induits par $\tilde{\alpha}$, α et σ.

On utilisera aussi les notations G_n, $(\alpha_*)'_n : G/G'_n \to H/H'_n$, etc. de l'appendice.

2.0.1. Rappelons que $(\alpha_X)_* : H_1(X,\mathbb{Z})/\mathrm{Torsion} \to H_1(\mathrm{Alb}(X),\mathbb{Z})$ est un isomorphisme (ceci est propre à la géométrie kählérienne).

2.1. *Remarque.* – En général, les fibres de α_X ne sont pas connexes. Cependant, α_* est toujours d'indice fini au plus égal au nombre de composantes connexes d'une fibre générique de α ([C]).

2.2. THÉORÈME. – *La situation étant celle décrite en* 2.0, *on a :*

1. *Pour tout* $\infty \geq n \geq 1$, $(\tilde{\alpha}_*)'_n : G/G'_n \to H/H'_n$ *est injective et d'indice fini. Si* α_* *est surjective,* $(\tilde{\alpha}_*)'_n$ *est un isomorphisme pour tout* n, $1 \leq n \leq +\infty$.

2. $(\tilde{\alpha}_*)'_n : G/G'_n \mapsto \widetilde{H}/\widetilde{H}'_n$ *est isomorphisme pour tout* $1 \leq n \leq +\infty$.

Démonstration. – D'après A.2 et 2.1, il suffit de vérifier que

$$\tilde{\alpha}_* : \quad H_1(G,\mathbb{Q}) \to H_1(H,\mathbb{Q})$$

est un isomorphisme et que $\alpha_* : H_2(G,\mathbb{Q}) \mapsto H_2(H,\mathbb{Q})$ est surjective (avec des résultats analogues pour $\tilde{\alpha}_*$). La première affirmation résulte de (2.0.1) ; la seconde résulte immédiatement des deux lemmes 2.3 et 2.4 ci-dessous :

2.3. LEMME (J. Stallings). – *Soit* $\alpha : K \to L$ *une application continue entre deux complexes cellulaires finis, telle que :* $\alpha^* : H^2(L,\mathbb{Q}) \to H^2(K,\mathbb{Q})$ *soit injective. Alors :* $\alpha_* : H_2(G,\mathbb{Q}) \to H_2(H,\mathbb{Q})$ *est surjective, si* $G = \pi_1(K)$ *et* $H = \pi_1(L)$.

Démonstration. – On peut plonger K dans un complexe cellulaire asphérique K' en lui adjoignant des cellules de dimension au moins égale à 3. On a donc : $\pi_1(K) = \pi_1(K')$, $\pi_i(K') = 0$ si $i \geq 2$ et $H_j(K',K) = 0$ si $j \leq 2$. La suite exacte d'homologie du couple (K',K) montre alors que $H_2(K) \to H_2(K')$ est surjective. D'autre part, K' étant asphérique, on a un isomorphisme naturel : $H_i(K',\mathbb{Q}) = H_i(G,\mathbb{Q})$ pour tout $i \geq 0$.

On peut construire un couple (L',L) jouissant des mêmes propriétés.

On a par ailleurs un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_2(K,\mathbb{Q}) & \longrightarrow & H_2(K',\mathbb{Q}) = H_2(G,\mathbb{Q}) \\ \alpha_* \downarrow & & \alpha'_* \downarrow \\ H_2(L,\mathbb{Q}) & \longrightarrow & H_2(L',\mathbb{Q}) = H_2(H,\mathbb{Q}) \end{array}$$

dans lequel α_* est surjective, par hypothèse. Les flèches horizontales étant surjectives, on en déduit que α'_* est également surjective.

2.4. LEMME. – *Soit* $\alpha : X \to Y$ *une application holomorphe surjective entre variétés complexes. Supposons* X *Kähler. Alors :* $\alpha^* : H^i(Y,\mathbb{R}) \to H^i(X,\mathbb{R})$ *est injective, pour tout* $i \geq 0$.

Démonstration (*voir* [F]). – Soit : κ une forme de Kähler sur X, $p = \dim_{\mathbb{C}}(X) - \dim_{\mathbb{C}}(Y)$, Y^* un ouvert de Zariski dense de Y au-dessus duquel α est submersive, et F une fibre de α contenue dans $X^* := \alpha^{-1}(Y^*)$. Soit $k := \left(\int_F \kappa^p\right) > 0$; alors k ne dépend pas de F puisque κ est d-fermée, et $\int_X \alpha^*(w)\wedge\kappa^p = \int_{X^*} \alpha^*(w)\wedge\kappa^p = k.\int_{Y^*} w = k.\int_Y w$ si w est une $2(n-p)$ forme (réelle) sur Y. Si $u \in H^i(Y,\mathbb{R})$ est telle que : $\alpha^*(u) = 0$, on a pour tout $v \in H^{2n-i}(Y,\mathbb{R})$:

$$0 = \int_X \alpha^*(u\wedge v)\wedge\kappa^p = k.\int_Y u\wedge v.$$

Donc : $u = 0$, par la dualité de De Rham-Poincaré.

(Le même argument montre que $\alpha^* : H^q(Y,\Omega^r) \to H^q(X,\Omega^r)$ est injective pour tout (q,r).)

2.5. *Remarque*. – Lorsque $\dim_{\mathbb{C}}(X) = \dim_{\mathbb{C}}(Y)$, l'hypothèse X Kähler est superflue. Il n'en est plus de même si $p > 0$: considérer une surface de Hopf S (difféomorphe à $S^1\times S^3$, de sorte que $b_2(S) = 0$) munie d'une réduction algébrique $\alpha : S \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

2.6. *Exemple*. – Soit L (resp. L_Γ) le groupe constitué des matrices complexes (resp. à coefficients dans l'anneau de Gauss $\Gamma := \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$) de la forme $\ell = \begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = (a,b,c)$. La multiplication dans L est définie par : $(a,b,c).(a',b',c') = (a+a', b+b'+ac', c+c')$. Alors : L_Γ est discret cocompact dans L. Soit $\zeta : L \to Z := L/L_\Gamma$ la variété d'Iwasawa. Soit $\alpha_Z : Z \to A := (\mathbb{C}/\Gamma)^{\oplus 2}$ l'application d'Albanese de Z, définie par : $\alpha_Z\circ\zeta(a,b,c) = \eta(a,c)$ où $\eta(a,c) = (\overline{a},\overline{c})$, $\overline{a}\in\mathbb{C}/\Gamma$ est la classe de a modulo Γ. Alors : α_Z est surjective et fait de Z un fibré holomorphe localement trivial de base $(\mathbb{C}/\Gamma)^{\oplus 2}$ et de fibre $F = \mathbb{C}/\Gamma$.

Le groupe fondamental de Z est L_Γ, qui est nilpotent de classe 2 avec : $Z(L_\Gamma) = [L_\Gamma, L_\Gamma] \cong \Gamma = \{(0,b,0)\,;\ \text{et} : b\in\Gamma\}$.

Alors : $(\alpha_Z)_* : H_1(L_\Gamma) \to H_1(\mathrm{Alb}(Z)) \cong \mathbb{Z}^4$ est un isomorphisme, mais $(\alpha_Z)^* : H^2(\mathrm{Alb}(Z),\mathbb{C}) \mapsto H^2(Z,\mathbb{C})$ n'est pas injective (de sorte que Z n'est pas kählérienne, d'après 2.4). En effet : les 1-formes différentielles holomorphes invariantes à gauche sur L admettent pour base (sur $\mathbb{C}$) $\tilde\alpha = \zeta^*\alpha = da$, $\tilde\beta = \zeta^*\beta = db - cda$ et $\tilde\gamma = \zeta^*\gamma = dc$. Or, $\alpha = (\alpha_Z)^*(\alpha')$ et $\beta = (\alpha_Z)^*(\beta')$ pour des formes α' et β' définies sur $\mathrm{Alb}(Z) = (\mathbb{C}/\Gamma)^{\oplus 2}$, avec de plus : $d\beta = \gamma\wedge\alpha$, de sorte que $0 \neq (\gamma'\wedge\alpha') \in \mathrm{Ker}((\alpha_Z)^* : H^2(\mathrm{Alb}(Z),\mathbb{C}) \mapsto H^2(Z,\mathbb{C}))$.

3. Applications

Les notations et hypothèses sont celles de 2.0 et de A.

3.1. COROLLAIRE. – *Si $\alpha_X : X \to \mathrm{Alb}(X)$ est surjective, alors : $G_2' := \sqrt{[G,G]} = G_n' = G_\infty'$ $(2\leq n\leq\infty)$ si $G := \pi_1(X)$, et $\pi_1^{\mathrm{nilp}}(X)$ est abélien.*

Démonstration. – Il suffit de montrer que $(\alpha_X)_* = \alpha_*$ est surjective, d'après 2.1. Or $\alpha_* : \pi_1(X) \to \pi_1(\mathrm{Alb}(X))$ est d'indice fini $d([C])$. Si $d > 1$, et si $h : A \to \mathrm{Alb}(X)$ est l'isogénie de degré d telle que $h_*(\pi_1(A)) = \alpha_*(\pi_1(X))$, α admet une factorisation

$\beta : X \to A$ telle que $h \circ \beta = \alpha$. Donc : h est un isomorphisme et $d = 1$. (Remarquons que les fibres de α_X ne sont pas nécessairement connexes.)

3.2. COROLLAIRE. – *Si $a(X) = 0$ ou si $\kappa(X) = 0$, alors : $G'_2 = G'_\infty$ si $G = \pi_1(X)$ et $\pi_1^{\text{nilp}}(X)$ est abélien.*

En effet : α_X est alors surjective dans chacun de ces deux cas ([U], [K]).

3.3. *Remarque.* – Dans chacun de ces deux cas, il est conjecturé que $\pi_1(X)$ est presque abélien. Il suffirait donc de savoir démontrer que $\pi_1(X)$ est presque nilpotent, *i.e.* : à croissance polynomiale, d'après le critère de Gromov [Gr].

3.4. COROLLAIRE. – *Si $\pi_1(X)$ est nilpotent, et si $b_1(X) \leq 4$, alors : $\pi_1(X)/\text{Torsion}$ est abélien.*

Démonstration. – D'après 3.1, il suffit d'établir que α_X est surjectif. Ceci est évident si $b_1(X) = 0$ ou 1. Si $b_1(X) = 4$ et si α_X n'est pas surjectif, $Y' = \alpha_X(X)$ est une courbe de genre $g \geq 2$, et α_* est surjectif. Ceci est impossible, puisque $\pi_1(Y)$ n'est pas nilpotent, et plus précisément : contient un groupe libre à 2 générateurs.

3.5. COROLLAIRE. – *Si G est d'indice fini dans le groupe fondamental G_0 de la variété d'Iwasawa* (voir 2.6), *G est nilpotent de classe 2, mais $G \notin K$.*

En effet, si $\pi_1(X) = G$, on a : $b_1(X)/2 = \text{rang}\,(H_1(G)) = 4$, d'après A.1.

La conclusion de 3.4 subsiste encore si $b_1(X) \leq 6$.

3.6. COROLLAIRE. – *Si $\pi_1(X)$ est nilpotent et si $b_1(X) \leq 6$, alors : $(\pi_1(X)/Torsion)$ est abélien.*

Démonstration. – (Cette partie de la démonstration est analogue à celle de [C-T], p. 6 et lui emprunte l'utilisation cruciale de [D]. Cette référence à [C-T] a été involontairement omise dans la note [C'] lors du processus de réduction à quatre pages.) Le seul cas restant est $b_1(X) = 6$ et $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = 2$. Si $A := \text{Alb}(X)$ n'est pas un tore simple, il admet un morphisme surjectif de tores complexes $m : A \to B$ à fibres connexes de dimension 1 ou 2, et $Y = m^{-1}(Z)$ pour un diviseur Z de B. Ceci est impossible, car Z serait soit un point, soit une courbe de genre $g \geq 2$. Ce dernier cas est exclu comme en 3.4 ; dans le premier cas, Y n'engendrerait pas B.

Donc : A doit être un tore simple projectif et Y un diviseur ample de A. Le théorème de Lefschetz montre alors que $j^* : H^2(A, \mathbb{Q}) \to H^2(Y, \mathbb{Q})$ est injective, si $j : Y \to A$ est l'inclusion naturelle. D'autre part : $\text{Ker}\,(j\sigma)^* = \text{Ker}\, j^*$ par [D], Prop. 8. 2. 7 (c'est cette observation cruciale que nous empruntons à [C-T], p. 6). On en déduit que $(\alpha_X)^* = (j\sigma)^*$ est injective. La remarque 3.7 ci-dessous montre alors que la conclusion de 2.2 s'applique au couple (X, A) (au lieu de $(X, \widetilde{Y})$, comme dans 2.2) et fournit le résultat cherché.

3.7. *Remarque.* – La démonstration de 2.2 montre que sa conclusion subsiste si $\alpha : X \to Z$ est un morphisme tel que $\alpha^* : H^i(Z, \mathbb{Q}) \to H^i(X, \mathbb{Q})$ est injectif si $i = 2$ et bijectif si $i = 1$.

3.8. COROLLAIRE. – *Soit G un groupe de Kähler nilpotent non abélien. Alors : le rang de G est au moins égal à 9. Cette borne est atteinte* (voir 1.7 et 1.8).

En effet : $\text{Ker}\,(G/G'_3 \to G/G'_2 = G/\sqrt{[G,G]})$ est abélien libre non nul et rang

$(G/G_2') \geq 8$ d'après 3.7.

3.9. *Remarque*. – En utilisant soit 3.7, soit la théorie des intégrales itérées de Chen, on peut en fait affaiblir considérablement l'hypothèse de 3.1, et démontrer :

3.10. THÉORÈME. – *Soit X une variété kählérienne compacte telle que l'application naturelle $\lambda : \overset{2}{\Lambda} H^1(X, \mathbb{R}) = H^2(\mathrm{Alb}(X), \mathbb{R}) \to H^2(X, \mathbb{R})$ soit injective.*

Alors si $G = \pi_1(X)$:

1) $G_2' = G_\infty'$ et $\pi_1^{\mathrm{nilp}}(X)$ *est abélien.*

2) λ *est injective si et seulement si :* $\lambda^{2,0} : \overset{2}{\Lambda} H^0(X, \Omega_X^1) \to H^0(X, \Omega_X^2)$ *et* $\lambda^{1,1} : H^0(X, \Omega_X^1) \otimes \overline{H^0(X, \Omega_X^1)} \to H^1(X, \Omega_X^1)$ *le sont.*

La première assertion est vraie dans le cadre différentiable. La seconde repose sur le lemme du $\partial\overline{\partial}$.

Dans l'exemple 1.2, c'est l'application $\lambda^{1,1}$ qui n'est pas injective. Il serait intéressant d'avoir des exemples avec $\lambda^{2,0}$ non injective. Un exemple (non nilpotent) est celui des courbes de genre $g \geq 2$.

Démonstration de 3.10. – La première assertion résulte immédiatement soit de 3.7, soit de [H], en observant que $rg(G_2'/G_3') = \dim(\operatorname{Ker}\lambda) = 0$, et que $G_2' = G_\infty'$ si $G_2' = G_3'$. Pour la seconde, soit $\alpha = u^{2,0} + v^{1,1} + (\overline{u})^{0,2}$ un élément de $\operatorname{Ker}\lambda$. Donc : $\alpha = \partial\overline{\partial}\varphi$ pour φ fonction C^∞ réelle. Donc $u = 0$ et $v = \partial\overline{\partial}\varphi$, et $\operatorname{Ker}\lambda = \operatorname{Ker}\lambda^{2,0} \oplus \operatorname{Ker}\lambda^{1,1} \oplus \overline{\operatorname{Ker}\lambda^{2,0}}$. C'est ce qu'il fallait établir.

3.11. PROPOSITION. – *Soit X une variété kählérienne compacte, et $r : X \to Z$ une réduction algébrique de X (on peut ici supposer r analytique et Z projective sans changer leur π_1).*

Alors : on a une suite exacte de groupes scindée (non canoniquement)

$$1 \to \mathbb{Z}^{2s} \to \pi_1(X)^{\mathrm{nilp}} \to \pi_1(Z)^{\mathrm{nilp}} \to 1, \qquad \text{où} \quad s = q(X) - q(Z).$$

Ce résultat est une conséquence immédiate de 2.2 et du théorème de décomposition de K. Ueno ([U], théorème 10.9, p. 120). Il montre que la partie intéressante de $\pi_1(X)^{\mathrm{nilp}}$ ne dépend en fait que de la réduction algébrique, et permet donc de se ramener au cas des surfaces projectives.

3.12. *Remarque*. – Les arguments précédents montrent aussi que si $Y_0 \subset \mathrm{Alb}(X)$ est un diviseur, alors $\pi_1(X)^{\mathrm{nilp}}$ est égal à $H_1(X, \mathbb{Z})$/Torsion (resp. à $\pi_1(\hat{C}_0)$) si $\dim(Y_0') \geq 2$ (resp. si $Y_0' = C_0$ est une courbe), où Y_0' est la réduction de Ueno de $Y_0 \subset \mathrm{Alb}(X)$ ([U], p. 120).

A. Appendice : série centrale

Soit G un groupe, et $E \subset G$. On note $\sqrt{E} := \{g \in G | g^n \in E$ pour un entier $n > 0\}$. On définit la suite centrale descendante (G_n) de G par : $G_1 = G$, $G_{n+1} = [G, G_n]$ et $G_\infty := \bigcap_{n \geq 1} G_n$. Les G_n sont des sous-groupes caractéristiques de G, les G_n/G_{n+1}

abéliens et l'extension : $1 \to G_n/G_{n+1} \to G/G_{n+1} \to G/G_n \to 1$ centrale (*i.e.* G_n/G_{n+1} est contenu dans le centre $Z(G/G_{n+1})$ de G/G_{n+1}).

On définit aussi : $G'_n := \sqrt{G_n}$ si $+\infty \geq n \geq 1$, de telle sorte que $G/G'_n = (G/G_n)/$ Torsion. On notera : $G^{\text{nilp}} := G/G'_\infty$ la complétion nilpotente de G (modulo torsion).

Ces constructions sont fonctorielles : on notera $h_n : G/G_n \to H/H_n$ et $h'_n : G/G'_n \to H/H'_n$ les morphismes induits par $h : G \to H$.

On dit que G est **nilpotent** s'il existe $0 \leq n < +\infty$ tel que $G_{n+1} = (1)$. Le plus petit n ayant cette propriété est la **classe de nilpotence** $\nu(G)$ de G. Donc : $\nu(G) = 0$ si $G = (1)$ et $\nu(G) = 1$ si G est abélien. Si $G_n \neq G$, G/G_{n+1} est donc nilpotent de classe n. Le **rang** de G est alors $\operatorname{rg}(G) := \sum_{i=1}^{n} \operatorname{rg}(G_i/G_{i+1})$. Les termes de cette somme sont définis, puisque G_i/G_{i+1} est abélien. Si $1 \to K \to G \to H \to 1$ est une extension centrale avec K et H nilpotents, alors G est nilpotent et $\nu(G) \leq \nu(K) + \nu(H)$.

A.1. Lemme. – *Soit $1 \to \mathbb{Z} \to G \xrightarrow{\pi} A \to 1$ une suite exacte de groupes, avec A abélien. Alors :*

1. *Si G' est un sous-groupe d'indice fini de G, $A' := \pi(G')$ est d'indice fini dans A, donc de même rang que A, et $1 \to Z' \to G' \to A' \to 1$ est exacte, avec $Z' = G' \cap \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$.*

2. *G admet un sous-groupe normal G' d'indice 1 ou 2 dans G qui est nilpotent.*

3. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes si G est nilpotent :*

(i) *G est abélien,*

(ii) *G est presque abélien.*

Démonstration. – 1 est évident. Pour 2, il suffit de prendre $G' = \operatorname{Ker}(\gamma)$ si $\gamma : G \to \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$ est l'action de G sur $\mathbb{Z}$ par conjugaison. Il reste à établir (i) en admettant (ii) réalisée. Si $G' \subset G$ est d'indice fini et abélien, on a : $[G', G'] = (1) \subset \mathbb{Z} \cap G'$. Il suffit donc de montrer que $[G', G']$ est d'indice fini dans $[G, G]$. Or : $\mathbb{Z}$ étant inclus dans $Z(G)$, on a : $[gu, hv] = [g, h]$ si $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. L'application $[\,,\,] : G \times G \to \mathbb{Z}$ passe donc au quotient et définit $\beta : A \times A \to \mathbb{Z}$. On va vérifier que $\beta(ab, c) = \beta(a, c) + \beta(b, c)$, ce qui établira le résultat. Or pour tout $(g, h, k) \in G \times G \times G$, on a : $[gh, k] = [g, k^h].[h, k] = [g, [h, k]k].[h, k] = [g, k].[h, k]$ puisque $[h, k] \in \mathbb{Z} \subset Z(G)$. Ici : $[g, k] = k^g.k$ et $k^h = hkh^{-1}$.

A.2. Théorème (J. Stallings, [S]). – *Soit $h : G \to H$ un morphisme de groupes. Supposons que h induise un morphisme de $H_i(G, \mathbb{Q})$ dans $H_i(H, \mathbb{Q})$ bijectif pour $i = 1$ et surjectif pour $i = 2$. Alors : $h'_n : G/G'_n \to H/H'_n$ est injectif si : $+\infty \geq n \geq 1$ et d'indice fini si $n < +\infty$. Si h est surjectif, h_n est un isomorphisme pour tout n, $1 \leq n \leq +\infty$.*

(On dit que h est **d'indice** fini d si $[H : h(G)] = d$.)

BIBLIOGRAPHIE

[A-B-R] D. Arapura, P. Bressler et M. Ramachandran, On the fundamental group of a compact Kähler manifold (*Duke Math. J.*, vol. **68**, 1992, p. 477-488).

[C] F. Campana, On twistor spaces of class $\mathcal{C}$ (*J. Diff. Geom.*, vol. **33**, 1991, p. 541-549).

[C'] F. Campana, Remarques sur les groupes de Kähler nilpotents *(C.R. Acad. Sci. Paris,* vol. **17**, 1993, p. 777-780).

[C-T] J. Carlson et D. Toledo, *Notes on nilpotent Kähler group,* 1992.

[D] P. Deligne, Théorie de Hodge III *(Publi. Math. I.H.E.S.*, vol. **44**, 1974, p. 5-77).

[D-G-M-S] Deligne-Griffiths-Morgan-Sullivan, Real homotopy theory of Kähler manifolds *(Inv. Math.,* vol. **29**, 1975, p. 245-274).

[F] A. Fujiki, On automorphism groups of compact Kähler manifolds *(Inv. Math.,* vol. **44**, 1978, p. 225-258).

[F-L] Fulton-Lazarsfeld, Connectivity in algebraic geometry *(LNM* n° 862, p. 26-92).

[G] P. Gauduchon, Variétés riemanniennes autoduales *(Séminaire Bourbaki,* Exposé 767, mars 1993).

[G-M] Goreski-Mac Pherson, *Stratified Morse theory,* Springer Verlag, 1988.

[Gr] M. Gromov, Groups of polynomial growth and expanding maps *(Publ. Math. I.H.E.S.,* vol. **53**, 1981, p. 53-73).

[Gr'] M. Gromov, Metric invariants of Kähler manifolds *(Preprint I.H.E.S.,* 1992).

[H] R. Hain, The Geometry of the Mixed Hodge Structure on the Fundamental Group *(Proc. Symp. Pure Math.,* vol. **46**, 1984, p. 247-282).

[H] N. Hitchin, Kählerian twistor spaces *(Proc. Lond. Math. Soc.,* vol. **43**, 1981, p. 133-150).

[K] Y. Kawamata, Characterization of abelian varieties *(Comp.Math.,* vol. **43**, 1981, p. 253-276).

[S-V] Sommese-Van De Ven, Homotopy groups of pullbacks of varieties *(Nagoya Math. J.,* vol. **102**, 1986, p. 79-90).

[S] J. Stallings, Homology and central series of groups *(J. Algebra,* vol. **2**, 1965, p. 170-181).

[Su] D. Sullivan, Infinitesimal computations in topology *(Publ. Math. I.H.E.S.,* vol. **47**, 1977, p. 269-331).

[T] C.H. Taubes, The existence of self dual conformal structures *(J. Diff. Geom.,* vol. **36**, 1992, p. 163-253).

[U] K. Ueno, Classification theory of algebraic varieties *(LNM* n° 439, Springer Verlag, 1975).

(Manuscrit reçu le 14 décembre 1994.)

F. Campana
Département de Mathématiques,
Université Nancy-I, BP 239,
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France.