GASTON GOHIERRE DE LONGCHAMPS

Sur les nombres de Bernoulli

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 8 (1879), p. 55-80
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1879_2_8__55_0>

SUR

LES NOMBRES DE BERNOULLI,

PAR M. GOHIERRE DE LONGCHAMPS,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE DE POITIERS.

PREMIÈRE PARTIE.

L'objet de ce travail est le développement, suivant les puissances décroissantes de x, de la somme

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + x^k.$$

Nous désignerons cette somme par $S_{x,k}$, et nous poserons

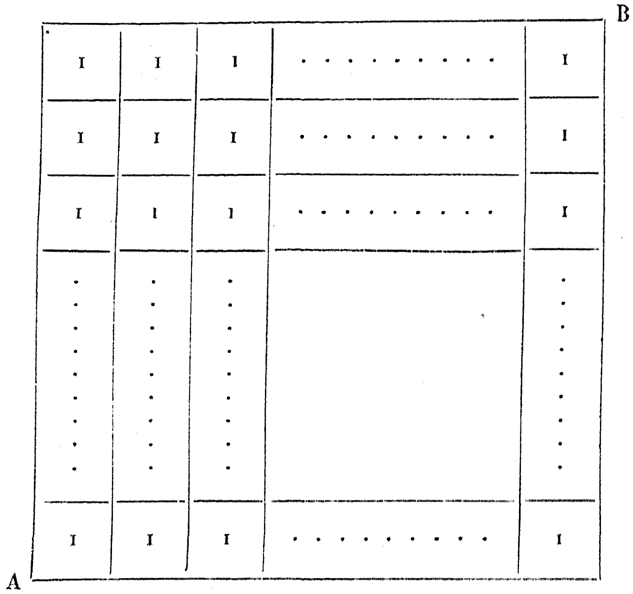
$$S_{x,k} = \sum_{n=1}^{n=x} n^k.$$

Nous nous proposons d'arriver au résultat connu [1] par une méthode nouvelle, ne s'appuyant que sur des identités faciles à démontrer. Notre analyse nous conduira, comme on va le voir, non aux *nombres de Bernoulli*, mais à des nombres que nous croyons nouveaux, et qui jouissent d'un développement en série récurrente plus simple qu'aucun de ceux qui ont été trouvés jusqu'ici pour exprimer le nombre B_i en fonction des nombres inférieurs B_1, B_2. ..., B_{i-1}.

[1] Voir BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 349.

Nous partons de ce principe évident : *Si les différentes cases d'une figure renferment des nombres, quel que soit l'ordre adopté pour compte ces nombres, on arrivera au même résultat, chacun de ces nombres étant compté une fois et une fois seulement.*

Imaginons donc un carré



dont les côtés ont été partagés en $(x+1)$ parties; menons, par les points de division, des parallèles aux côtés du carré, et, dans chacune des $(x+1)^2$ cases ainsi obtenues, écrivons l'unité. Faisons abstraction des unités renfermées dans la diagonale AB, et comptons les unités du tableau par tranches parallèles à AB. Avant d'arriver à la diagonale, on trouve

$$1+2+3+\ldots+x$$

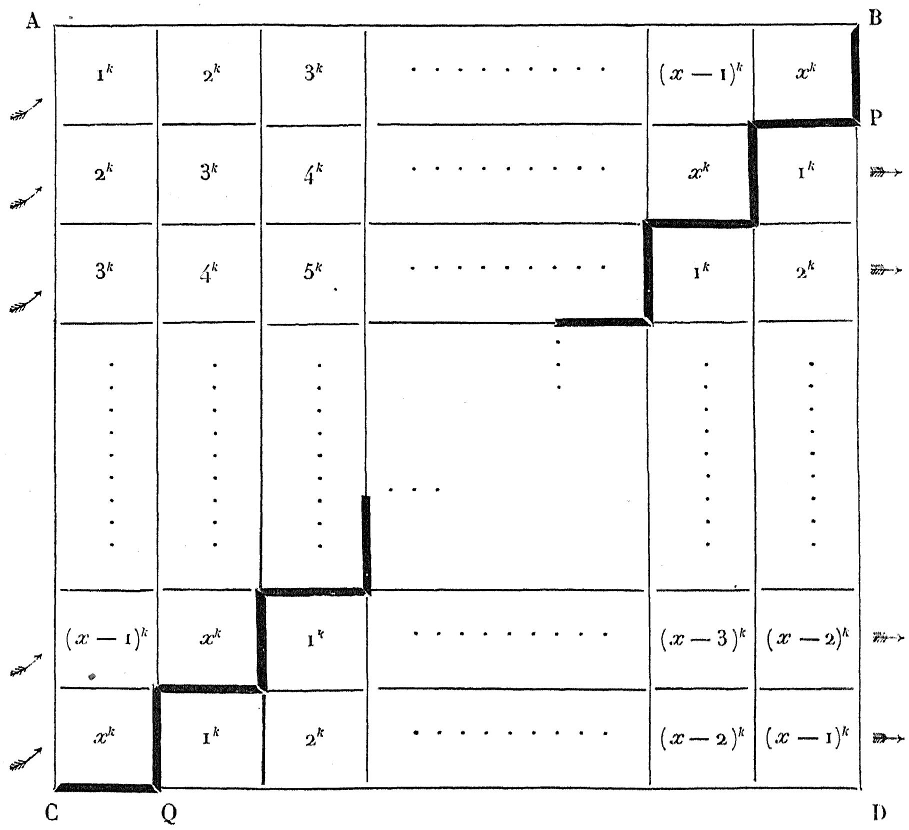
ou $S_{x,1}$ unités; au delà de AB, on trouve encore $S_{x,1}$, et l'on a l'identité

$$(x+1)^2=(x+1)+2S_{x,1}$$

ou

$$(1)\qquad S_{x,1}=\frac{x(x+1)}{2}.$$

Considérons maintenant le tableau suivant :



que nous séparons, par le trait plein, en deux parties, comme le montre la figure. En comptant par lignes horizontales, la somme des nombres écrits dans ce tableau est

$$x S_{x,k};$$

d'autre part, les nombres renfermés dans la partie ABPQC, nombres comptés par tranches parallèles à la diagonale CB, donnent une somme égale à

$$1^k.1 + 2^k.2 + 3^k.3 + \ldots + x^k.x = S_{x,k+1}.$$

Considérons maintenant les nombres renfermés dans la seconde partie PQD, nombres que nous compterons par lignes horizontales, et nous aurons pour leur somme

$$S_{1,k}+S_{2,k}+S_{3,k}+\ldots+S_{x-1,k}.$$

Nous avons donc l'identité

$$(2)\qquad S_{x,k+1}=(x+1)S_{x,k}-(S_{1,k}+S_{2,k}+\ldots+S_{x,k}).$$

Cette identité sert de base à notre travail ; nous la nommerons *identité fondamentale*.

THÉORÈME. — *Le nombre $S_{x,k}$ est une fonction entière de x, de degré $(k+1)$; elle ne renferme pas de constante.*

La formule (1) permet de vérifier ce théorème pour $S_{x,1}$, et nous allons faire voir que, si la propriété que nous venons d'énoncer appartient à $S_{x,k}$, elle subsiste pour $S_{x,k+1}$.

On a, par hypothèse,

$$S_{x,k}=Ax^{k+1}+Bx^k+\ldots+Lx;$$

par suite,

$$\begin{aligned}
S_{x-1,k}&=A(x-1)^{k+1}+B(x-1)^k+\ldots+L(x-1),\\
S_{x-2,k}&=A(x-2)^{k+1}+B(x-2)^k+\ldots+L(x-2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
S_{1,k}&=A\,1^{k+1}\qquad+B\,1^k\qquad+\ldots+L\,1.
\end{aligned}$$

Ajoutant et tenant compte de l'identité (2), on a

$$(3)\qquad (1+A)S_{x,k+1}=(x+1-B)S_{x,k}-(CS_{x,k-1}+\ldots+L.S_{x,1}),$$

formule de laquelle on conclut le théorème énoncé.

1. Nous poserons donc

$$S_{x,k}=A_kx^{k+1}+B_kx^k+(P_{k,1}x^{k-1}+P_{k,2}x^{k-2}+\ldots+P_{k,l}x^{k-l}+\ldots+P_{k,k-1}x).$$

On verra, par la suite, pourquoi les *deux premiers coefficients* reçoivent une notation particulière, et, cette exception une fois signalée, il est donc entendu que

$$P_{\alpha,\beta}$$

désigne le coefficient de $x^{\alpha-\beta}$ dans $S_{x,\alpha}$ (β n'étant ni -1 ni zéro).

D'après cette notation, l'identité (3) doit s'écrire

$$(4)\quad (1+A_k)S_{x,k+1}=(x+1-B_k)S_{x,k}-(P_{k,1}S_{x,k-1}+P_{k,2}S_{x,k-2}+\ldots+P_{k,k-1}x).$$

Égalant les coefficients de x^{k+2} dans les deux membres, on a

$$(1+A_k)A_{k+1}=A_k$$

ou

$$\frac{1}{A_{k+1}}-\frac{1}{A_k}=1,$$

$$\frac{1}{A_k}-\frac{1}{A_{k-1}}=1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{A_2}-\frac{1}{A_1}=1.$$

D'ailleurs, d'après la formule (1),

$$A_1=\tfrac{1}{2};$$

donc

$$A_{k+1}=\frac{1}{k+2};$$

par suite,

$$A_k=\frac{1}{k+1};$$

donc :

Théorème. — *Dans le développement de* $S_{x,k}$, *le coefficient de* x^{k+1} *est égal à* $\frac{1}{k+1}$.

2. Cherchons maintenant le coefficient de x^k. L'identité (4), en tenant compte du résultat précédent, peut s'écrire

$$(5)\quad \frac{k+2}{k+1}S_{x,k+1}=(x+1-B_k)\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}+B_kx^k+\ldots\right)-(P_{k-1}S_{x,k-1}+\ldots);$$

égalant les coefficients de x^{k+1}, on a

$$(A)\qquad (k+2)B_{k+1}=1+kB_k\ (^1).$$

(1) L'égalité (A) forme, comme on le voit, une *équation aux différences finies*, dont nous évitons l'intégration pour ne pas sortir du programme que nous nous sommes imposé

La formule (1) donne d'ailleurs

$$B_1 = \tfrac{1}{2}.$$

D'après (A),

$$3B_2 = 1 + \tfrac{1}{2} \quad \text{ou} \quad B_2 = \tfrac{1}{2}.$$

Ainsi les deux premiers termes de la suite récurrente

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_k$$

sont égaux. Je dis que : *si deux termes consécutifs sont égaux, tous ceux qui suivent sont égaux à ceux-ci.*

En effet, les deux égalités

$$\begin{aligned}(k+2)B_{k+1} &= 1 + kB_k,\\ (k+1)B_k &= 1 + (k-1)B_{k-1}\end{aligned}$$

donnent

$$(k+2)B_{k+1} = (2k+1)B_k - (k-1)B_{k-1},$$

et si

$$B_k = B_{k-1},$$

on a bien

$$B_{k+1} = B_k;$$

donc :

Théorème. — *Dans le développement de $S_{x,k}$, le coefficient de x^k est toujours égal à $\frac{1}{2}$.*

3. Nous passons à la recherche du troisième coefficient, celui de x^{k-1}. L'identité fondamentale, qui est maintenant devenue l'identité (5), peut s'écrire, d'après les résultats obtenus jusqu'ici,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{k+2}{k+1}S_{x,k+1} = {} & \left(x+\tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{x^k}{2} + P_{k,1}x^{k-1} + \ldots\right)\\ & - \left[P_{k,1}\left(\frac{x^k}{k} + \ldots\right) + P_{k,2}\left(\frac{x^{k-1}}{k-1} + \ldots\right) + \ldots\right.\end{aligned}\right.$$

---

au début de ce travail. L'intégrale est

$$B_k = \tfrac{1}{2} - \frac{c}{k(k+1)};$$

c est une *constante arbitraire ;* quand $c = 0$, on a

$$B_k = \tfrac{1}{2}.$$

C'est le cas particulier qui nous occupe.

Égalant les coefficients de x^k, on trouve

$$P_{k+1,1} = \frac{(k-1)(k+1)}{k(k+2)} P_{k,1} + \frac{1}{2^2} \frac{k+1}{k+2};$$

on en déduit

$$P_{k,1} = \frac{(k-2)k}{(k-1)(k+1)} P_{k-1,1} + \frac{1}{2^2} \frac{k}{k+1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ;$$

$$P_{3,1} = \frac{1.3}{2.4} P_{2,1} + \frac{1}{2^2} \frac{3}{4},$$

$$P_{2,1} = \frac{1}{2^2} \frac{2}{3}.$$

Multiplions ces égalités respectivement par

$$\frac{(k+1)(k-1)}{k(k+2)}, \quad \frac{k(k-2)}{k(k+2)}, \quad \dots, \quad \frac{3.2}{k(k+2)}, \quad \frac{2.1}{k(k+2)}.$$

A partir de la seconde, celle qui donne $P_{k,1}$, il vient, après un calcul facile,

$$P_{k+1,1} = \frac{1}{2^2} \frac{1.2 + 2.3 + \dots + k(k+1)}{k(k+2)}.$$

Nous allons faire usage ici, et nous nous servirons, dans la suite, d'une identité due à M. Haton de la Goupillière (¹). L'identité en question est

$$\begin{aligned} m(m+1)(m+2)\dots(m+n) + (m+1)(m+2)\dots(m+n+1)\dots \\ + (p-n)(p-n+1)\dots(p-1)p \\ = \frac{(p+1)p\dots(p-n) - (m+n)\dots m(m-1)}{n+2}. \end{aligned}$$

Supposons $m = 1$, et nous aurons

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & 1.2\dots(n-1) + 2.3\dots(n+2) + \dots + (p-n)(p-n+1)\dots p \\ & = \frac{(p+1)p\dots(p-n)}{n+2}. \end{aligned} \right.$$

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1872, p. 476.

La démonstration de cette identité est *directe;* elle se fait, comme dans beaucoup d'autres cas semblables : 1° en vérifiant qu'elle est vraie pour $n = 1$; 2° en reconnaissant que, si elle est établie pour une certaine valeur de n, elle subsiste pour la valeur $(n+1)$. Nous pouvons donc l'utiliser sans sortir des limites que nous nous sommes fixées.

C'est cette dernière identité, cas particulier de celle de M. Haton, que nous allons utiliser. Si l'on y fait

$$n = 1, \quad p = k + 1,$$

elle donne

$$1.2 + 2.3 + \ldots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3};$$

donc

$$P_{k+1} = \frac{k+1}{12},$$

et, par suite,

$$P_k = \frac{k}{12};$$

donc :

THÉORÈME. — *Dans le développement de* $S_{x,k}$, *le coefficient de* x^{k-1} *est égal à* $\frac{k}{12}$.

4. Nous terminerons cette première partie de notre travail en démontrant le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans le développement de* $S_{x,k}$, *tous les coefficients des termes*

$$x^{k-2}, \quad x^{k-4}, \quad \ldots$$

sont nuls.

L'identité fondamentale peut maintenant s'écrire

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{k+2}{k+1} S_{x,k+1} = (x + \tfrac{1}{2}) \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{x^k}{2} + \frac{k}{12} x^{k-1} \right) + P_{k,2} x^{k-2} + \ldots \\ - \frac{k}{12} \left(\frac{x^k}{k} + \frac{x^{k-1}}{2} + \ldots \right) - P_{k,2} \left(\frac{x^{k-1}}{k-1} + \ldots \right). \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Égalant les coefficients de x^{k-1}, on trouve

$$P_{k+1,2} = \frac{(k-2)(k+1)}{(k-1)(k+2)} P_{k,2};$$

faisant

$$k = 2,$$

on a

$$P_{3,2} = 0,$$

et, par suite,

$$P_{4,4} = 0, \quad P_{5,2} = 0, \quad \ldots, \quad P_{k+1,2} = 0.$$

Tenant compte de ces relations, on tire de nouveau de l'identité (8)

$$P_{k+1,4} = \frac{(k+1)(k-4)}{(k-3)(k+2)} P_{k,4},$$

par conséquent

$$P_{5,4} = 0, \quad \ldots, \quad P_{k+1,4} = 0,$$

et ainsi de suite.

Le théorème est donc démontré; et, avant d'aborder la deuxième partie de ce travail, nous résumons les résultats obtenus jusqu'ici dans l'énoncé suivant :

Théorème. — *Le développement de* $S_{x,k}$ *est une fonction entière de degré* $(k+1)$ *en* x, *mais dépourvue de constante. Dans ce développement :*

1° *Le terme en* x^{k+1} *a pour coefficient* $\frac{1}{k+1}$;

2° *Le terme en* x^k *a pour coefficient* $\frac{1}{2}$;

3° *Le terme en* x^{k-1} *a pour coefficient* $\frac{k}{12}$;

4° *Les termes en* $x^{k-2}, x^{k-4}, \ldots$ *ont pour coefficients* 0.

DEUXIÈME PARTIE.

Il nous faut maintenant, et c'est le point délicat, étudier la loi suivant laquelle se succèdent les coefficients

$$P_{k,1}, \quad P_{k,3}, \quad \ldots.$$

Le premier, seul, a été calculé; nous l'avons trouvé égal à $\frac{k}{12}$.

1. L'identité fondamentale, d'après les propriétés démontrées et que nous venons de résumer, peut maintenant s'écrire

$$\begin{aligned}\frac{k+2}{k+1} S_{x,k+1} = (x+\tfrac{1}{2}) \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{x^k}{2} + \frac{k}{12} x^{k-1} + P_{k,2} x^{k-2} + \ldots\right) \\ - \frac{k}{12}\left(\frac{x^k}{k} + \frac{x^{k-1}}{2} + \ldots\right) - P_{k,3}\left(\frac{x^{k-2}}{k-2} + \ldots\right) + \ldots.\end{aligned}$$

Égalant les coefficients de x^{k-2}, on trouve

$$P_{k+1,3} = P_{k,3}\frac{(k-3)(k+1)}{(k-2)(k+2)} - \frac{k(k-1)(k+1)}{12^2(k+2)},$$

par suite,

$$P_{k,3} = P_{k-1,3}\frac{(k-4)k}{(k-3)(k+1)} - \frac{(k-1)(k-2)k}{12^2(k+1)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$P_{5,3} = P_{4,3}\frac{1.5}{2.6} \qquad - \frac{3.4.5}{12^2.6},$$

$$P_{4,3} = \qquad - \frac{2.3.4}{12^2.5}.$$

Multipliant ces égalités, à partir de la seconde, celle qui donne $P_{k,3}$, respectivement par

$$\frac{(k-3)(k+1)}{(k-2)(k+2)},\quad \frac{(k-4)k}{(k-2)(k+2)},\quad \ldots,\quad \frac{2.6}{(k-2)(k+2)},\quad \frac{1.5}{(k-2)(k+2)},$$

on trouve

$$P_{k+1,3} = -\frac{1.2.3.4 + 2.3.4.5 + \ldots + (k-2)(k-1)k(k+1)}{12^2(k-2)(k+2)},$$

et, d'après l'identité (7), dans laquelle nous supposerons

$$n = 3,\quad p = k+1,$$

on a

$$P_{k+1,3} = -\frac{(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)}{5.12^2(k-2)(k+2)},$$

ou

$$P_{k+1,3} = -\frac{(k-1)k(k+1)}{12^2.5},$$

ou encore

$$P_{k,3} = -\tfrac{1}{5}\,\frac{k(k-1)(k-2)}{12^2};$$

donc :

Théorème. — *Dans le développement de* $S_{x,k}$, *le coefficient de* x^{k-3} *est égal à*

$$-\tfrac{1}{5}\,\frac{k(k-1)(k-2)}{12^2}.$$

2. Si nous comparons ce résultat avec celui que nous avons trouvé plus haut pour le coefficient de x^{k-1}, coefficient qui a été trouvé égal à

$$\frac{k}{12},$$

on peut, dès maintenant, soupçonner la loi des coefficients

$$P_{k,1},\quad P_{k,3},\quad P_{k,5},\quad \ldots.$$

Nous supposerons qu'à un facteur près, α_i, le coefficient de $P_{k,2i-1}$ est

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-2i+2)}{12^i},$$

et nous allons démontrer que

$$P_{k,2i+1} = \alpha_{i+1}\frac{k(k-1)\ldots(k-2i)}{12^{i+1}}.$$

Nous chercherons ensuite la *loi de récurrence* des coefficients

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_i.$$

Supposons donc

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} P_{k,1} &= \alpha_1\frac{k}{12},\\ P_{k,3} &= \alpha_2\frac{k(k-1)(k-2)}{12^2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ P_{k,2i-1} &= \alpha_i\frac{k(k-1)\ldots(k-2i+2)}{12^i}.\end{aligned}\right.$$

L'identité fondamentale peut maintenant s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{k+2}{k+1}S_{x,k+1} = (x+\tfrac{1}{2})&\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}+\ldots+P_{k,2i-1}x^{k-2i+1}+P_{k,2i+1}x^{k-2i-1}+\ldots\right)\\ &-P_{k,1}\left(\frac{x^k}{k}+\ldots+P_{k-1,2i-1}x^{k-2i}+\ldots\right)\\ &-P_{k,3}\left(\frac{x^{k-2}}{k-2}+\ldots+P_{k-3,2i-3}x^{k-2i}+\ldots\right)\\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &-P_{k,2i-1}\left(\frac{x^{k-2i+2}}{k-2i+2}+\frac{x^{k-2i+1}}{2}+P_{k-2i+1}x^{k-2i}+\ldots\right)\\ &-P_{k,2i+1}\left(\frac{x^{k-2i}}{k-2i}+\ldots\right)\\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Égalant les coefficients de x^{k-2i} dans les deux membres, on trouve

$$\frac{k+2}{k+1}\,\mathrm{P}_{k+1,2i+1} = \frac{k-2i-1}{k-2i}\,\mathrm{P}_{k,2i+1}$$
$$-\left(\mathrm{P}_{k,1}\,\mathrm{P}_{k-1,2i-1} + \mathrm{P}_{k,3}\,\mathrm{P}_{k-3,2i-3} + \ldots + \mathrm{P}_{k,2i-1}\,\mathrm{P}_{k-2i+1,1}\right).$$

Mais, d'après les égalités (9),

$$\mathrm{P}_{k,1}\,\mathrm{P}_{k-1,2i-1} = \alpha_1\alpha_i\,\frac{k(k-1)\ldots(k-2i+1)}{12^{i+1}},$$
$$\mathrm{P}_{k,3}\,\mathrm{P}_{k-3,2i-3} = \alpha_2\alpha_{i-1}\,\frac{k(k-1)\ldots(k-2i+1)}{12^{i+1}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathrm{P}_{k,2i-1}\,\mathrm{P}_{k-2i+1,1} = \alpha_i\alpha_1\,\frac{k(k-1)\ldots(k-2i+1)}{12^{i+1}},$$

et, si nous posons

$$(2i+3)\,\alpha_{i+1} = -(\alpha_1\alpha_i + \alpha_2\alpha_{i-2} + \ldots + \alpha_i\alpha_1)$$

ou

$$(10)\qquad (2i+3)\,\alpha_{i+1} = -\sum_{p=1}^{p=i}\alpha_p\alpha_{i+1-p},$$

on aura

$$\mathrm{P}_{k+1,2i+1} = \frac{(k+1)(k-2i-1)}{(k+2)(k-2i)}\,\mathrm{P}_{k,2i+1} - (2i+3)\,\alpha_{i+1}\,\frac{(k+1)k\ldots(k-2i+1)(k-2i)}{12^{i+1}(k+2)(k-2i)};$$

on en déduit

$$\mathrm{P}_{k,2i+1} = \frac{k(k-2i-2)}{(k+1)(k-2i-1)}\,\mathrm{P}_{k-1,2i+1} - (2i+3)\,\alpha_{i+1}\,\frac{k(k-1)\ldots(k-2i-1)}{12^{i+1}(k+1)(k-2i-1)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathrm{P}_{2i+3,2i+1} = \frac{(2i+3).1}{(2i+4).2}\,\mathrm{P}_{2i+2,2i+1} - (2i+3)\,\alpha_{i+1}\,\frac{(2i+3)\ldots3.2}{12^{i+1}(2i+4).2},$$
$$\mathrm{P}_{2i+2,2i+1} = \qquad - (2i+3)\,\alpha_{i+1}\,\frac{(2i+2)\ldots2.1}{12^{i+1}(2i+3).1}.$$

Multiplions ces égalités, à partir de la deuxième, celle qui donne $\mathrm{P}_{k,2i+1}$, respectivement par

$$\frac{(k+1)(k-2i-1)}{(k+2)(k-2i)},\quad \frac{k(k-2i)}{(k+2)(k-2i)},\quad \ldots,\quad \frac{(2i+4).2}{(k+2)(k-2i)},\quad \frac{(2i+3).1}{(k+2)(k-2i)},$$

et nous obtenons

$$\mathrm{P}_{k+1,2i+1} = -(2i+3)\alpha_{i+1}\frac{(k+1)\ldots(k-2i)+k(k-1)\ldots(k-2i-1)+\ldots+(2i+2)\ldots2.1}{12^{i+1}(k+2)(k-2i)};$$

et, en ayant recours à l'identité (7), dans laquelle nous ferons

$$n = 2i+1,$$
$$p = k+1,$$

nous obtenons, après simplification,

$$\mathrm{P}_{k+1,2i+1} = -\alpha_{i+1}\frac{k(k-1)\ldots(k-2i)}{12^{i+1}}.$$

Nous arrivons donc finalement, et, il faut le remarquer, *sans autre secours que celui des identités,* identités d'une démonstration élémentaire et immédiate, au théorème suivant, qui résume tout ce qui précède :

Théorème. — *Le développement de* $\mathrm{S}_{x,k}$, *suivant les puissances décroissantes de* x, *est une fonction entière de* x *de degré* $(k+1)$, *dépourvue de constante et jouissant des propriétés suivantes :*

1° *Le coefficient de* x^{k+1} *est égal à* $\frac{1}{k+1}$;

2° *Le coefficient de* x^k *est égal à* $\frac{1}{2}$;

3° *Les coefficients de* x^{k-1}, x^{k-3}, ... *sont respectivement égaux à*

$$\alpha_1\frac{k}{12},\quad \alpha_2\frac{k(k-1)(k-2)}{12^2},\quad \ldots,$$

les nombres α_1, α_2, ... *étant définis par l'égalité*

$$(2i+1)\alpha_i = -\sum_{p=1}^{p=i-1}\alpha_p\alpha_{i-p};$$

4° *Les coefficients de* x^{k-2}, x^{k-4}, ... *sont tous nuls.*

Ce théorème est résumé par les formules

$$(11)\quad S_{x,k} = \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{x^k}{2} + \alpha_1 \frac{k}{12} x^{k-1} + \alpha_2 \frac{k(k-1)(k-2)}{12^2} x^{k-3} + \ldots + \alpha_i \frac{k(k-1)\ldots(k-2i+1)}{12^i} x^{k-2i} + \ldots,$$

$$(12)\quad (2i+1)\alpha_i + \sum_{p=1}^{p=i-1} \alpha_p \alpha_{i-p} = 0.$$

3. *Nombres de Bernoulli.* — Après avoir trouvé directement le développement de $S_{x,k}$, comme on vient de le voir, il est intéressant de comparer notre résultat avec celui qui est bien connu (¹)

$$S_{x,k} = \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{x^k}{2} + \frac{B_1}{1.2} k x^{k-1} - \frac{B_2}{1.2.3.4} k(k-1)(k-2)x^{k-3} + \frac{B_3}{1.2\ldots 6} k(k-1)\ldots(k-4)x^{k-5} + \ldots \pm \frac{B_i}{1.2\ldots 2i} k(k-1)\ldots(k-2i+2)x^{k-2i+1} + \ldots.$$

On conclut de ce rapprochement

$$\frac{\alpha_1}{12} = \frac{B_1}{1.2},$$
$$\frac{\alpha_2}{12^2} = -\frac{B_2}{1.2.3.4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\alpha_i}{12^i} = \pm \frac{B_i}{1.2\ldots 2i},$$

le signe + étant pris lorsque i est pair, le signe — quand i est impair.

Les deux formules

$$(2i+1)\alpha_i + \sum_{p=1}^{p=i-1} \alpha_p \alpha_{i-p} = 0, \quad \pm B_i = \alpha_i \frac{1.2\ldots 2i}{12^i}$$

(¹) BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 349. B_1, B_2, ..., B_i sont nommés *nombres de Bernoulli*.

permettent de calculer les nombres B quand on connaît les nombres α. Les deux tableaux suivants donnent une idée des calculs nécessaires, calculs que, pour des raisons que nous allons donner, nous croyons plus simples que ceux qu'on employait jusqu'ici pour trouver les nombres de Bernoulli.

Premier tableau. — *Calcul des nombres* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8, \ldots$.

Loi de récurrence des nombres α [1] :

$$(2i+1)\alpha_i + \sum_{p=1}^{p=i-1} \alpha_p \alpha_{i-p} = 0.$$

Premiers termes de la série :

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{5}.$$

	Résultats.
$\alpha_3 = -\dfrac{2\alpha_1\alpha_2}{7} = +\dfrac{2}{5.7},$	$\alpha_3 = +\dfrac{2}{5.7},$
$\alpha_4 = -\dfrac{2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2}{9} = -\dfrac{3}{5^2.7},$	$\alpha_4 = -\dfrac{3}{5^2.7},$
$\alpha_5 = -\dfrac{2\alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_2\alpha_3}{11} = +\dfrac{2}{5.7.11},$	$\alpha_5 = +\dfrac{2}{5.7.11},$
$\alpha_6 = -\dfrac{2\alpha_1\alpha_5 + 2\alpha_2\alpha_4 + \alpha_3^2}{13} = -\dfrac{2.691}{5^3.7^2.11.13},$	$\alpha_6 = -\dfrac{2.691}{5^3.7^2.11.13},$
$\alpha_7 = -\dfrac{2(\alpha_1\alpha_6 + \alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4)}{15} = +\dfrac{2^2.3}{5^2.7.11.13},$	$\alpha_7 = +\dfrac{2^2.3}{5^2.7.11.13},$
$\alpha_8 = -\dfrac{2\alpha_1\alpha_7 + 2\alpha_2\alpha_6 + 2\alpha_3\alpha_5 + \alpha_4^2}{17} = -\dfrac{3.3617}{5^4.7^2.11.13.17},$	$\alpha_8 = -\dfrac{3.3617}{5^4.7^2.11.13.17}.$
....,	....

Second tableau. — *Calcul des nombres de Bernoulli* $B_1, B_2, \ldots, B_8, \ldots$.

Formule de passage des nombres α aux nombres B :

$$B_i = \pm \frac{1.2\ldots 2i}{12^i}\alpha_i.$$

---

[1] Les nombres α, pour une raison facile à trouver, sont alternativement positifs et négatifs.

Les deux premiers termes sont :

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}.$$

Résultats.

$$B_3 = \frac{1.2\ldots6}{3^3.2^6}\,\frac{2}{5.7} = \frac{1}{3.2.7}, \qquad B_3 = \frac{1}{42},$$

$$B_4 = \frac{1.2\ldots8}{3^4.2^8}\,\frac{3}{5^2.7} = \frac{1}{2.3.5}, \qquad B_4 = \frac{1}{30},$$

$$B_5 = \frac{1.2\ldots10}{3^5 2^{10}}\,\frac{2}{5.7.11} = \frac{5}{2.3.11}, \qquad B_5 = \frac{5}{66},$$

$$B_6 = \frac{1.2\ldots12}{3^6 2^{12}}\,\frac{2.691}{2.3.5.7.13} = \frac{691}{2.3.5.7.13}, \qquad B_6 = \frac{691}{2730},$$

$$B_7 = \frac{1.2\ldots14}{3^7 2^{14}}\,\frac{2^2.3}{5^2.7.11.13} = \frac{7}{2.3}, \qquad B_7 = \frac{7}{6},$$

$$B_8 = \frac{1.2\ldots16}{3^8.2^{16}}\,\frac{3.3617}{2.3.5.17} = \frac{3617}{2.3.5.17}, \qquad B_8 = \frac{3617}{510},$$

....

Ce sont les nombres connus [1].

TROISIÈME PARTIE.

Il nous reste maintenant à expliquer pourquoi le calcul que nous venons de proposer nous paraît plus simple et plus commode que ceux qui ont été employés jusqu'ici pour trouver les *nombres de Bernoulli*.

Ces nombres de Bernoulli, étant *rationnels*, peuvent être calculés *exactement* par l'une ou l'autre des trois méthodes suivantes :

1° *En développant* B_i *en fonction de* i;

2° *En cherchant une série récurrente entre les nombres* $B_1, B_2, \ldots, B_{i-1}, B_i$;

3° *En liant d'abord* B_i *à un autre nombre* X_i *et calculant* X_i *par l'une ou l'autre des deux méthodes précédentes.*

---

(1) Voir *Tables de Gleiger* (*Transactions de la Société phil. de Cambridge*, 1871).

1. *Première méthode.* — Il existe, croyons-nous, deux développements seulement de B_i en série. L'un a été donné par Laplace [1] :

$$B_i = \frac{(-1)^{i+1}2i}{2^{2i}(2^{2i}-1)}\left\{\begin{aligned}&1\\&+\frac{1}{2^2.2}\left(\frac{3}{1}-3^{2i-1}\right)\\&+\frac{1.3}{2^4.2.4}\left(\frac{5.4}{1.2}-\frac{5}{1}3^{2i-1}+5^{2i-1}\right)\\&+\frac{1.3.5}{2^6.2.4.6}\left(\frac{7.6.5}{1.2.3}-\frac{7.6}{1.2}3^{2i-1}+\frac{7}{1}5^{2i-1}-7^{2i-1}\right)\\&+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&+\frac{1.3\dots(2i-3)}{2^{2i-2}.2.4\dots(2i-2)}\left\{\begin{aligned}&\frac{(2i-1)(2i-2)\dots(i+1)}{1.2\dots(i-1)}\\&-\frac{(2i-1)(2i-2)\dots(i+2)}{1.2\dots(i-2)}3^{2i-1}\\&+\dots\dots\dots\dots\\&\mp\frac{2i-1}{1}(2i-3)^{2i-1}\\&\pm(2i-1)^{2i-1}.\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.$$

Le second [2] est un peu plus simple, mais encore très-compliqué :

$$= \frac{(-1)^{i+1}2i}{2^{2i-1}(2^{2i}-1)}\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}i^{2i-1}\\&-\left(1+\frac{1}{2}\frac{2i}{1}\right)(i-1)^{2i-1}\\&+\left[1+\frac{2i}{1}+\frac{1}{2}\frac{2i(2i-1)}{1.2}\right](i-2)^{2i-1}\\&-\left[1+\frac{2i}{1}+\frac{2i(2i-1)}{1.2}+\frac{1}{2}\frac{2i(2i-1)(2i-2)}{1.2.3}\right](i-3)^{2i-1}\\&+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&\pm\left[1+\frac{2i}{1}+\dots+\frac{2i(2i-1)\dots(i+3)}{1.2\dots(i-2)}+\frac{1}{2}\frac{2i(2i-1)\dots(i+2)}{1.2\dots(i-1)}\right]1^{2i}\end{aligned}\right.$$

Ces deux développements sont, dans la pratique, d'une application laborieuse. La formule de M. Genocchi (*Annali di Matematica*, année 1852),

$$(2^{2i+1}-1)B_i+(i+1)2^{2i+1}\left[1^i+2^i+3^i+\dots+\left(\frac{m-1}{2}\right)^i\right]\equiv 0 \pmod{m},$$

---

[1] Bach, *Thèse d'Analyse*. Mallet-Bachelier, 1857.

[2] Lacroix, *Calcul différentiel et intégral*, t. III, p. 114; Serret, *Calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 232.

paraît être la plus commode dans ce groupe de formules caractérisées par l'équation

$$B_i = \varphi(i).$$

Les formules

$$B_i = 4i\int_0^{\infty} \frac{x^{2i-1}\,dx}{e^{2\pi x}-1}\;({}^{1}),$$

$$B_i = \frac{2i}{2^{2i-1}-1}\int_0^{1} \frac{x^{2n-1}}{1+e^{x}}\,dx\;({}^{2}),$$

$$B_i = (i-1) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2i-1)\varphi}{(e^{2\pi\cot\varphi}-1)\sin^{2i+1}\varphi}\,d\varphi\;({}^{3}),$$

$$B_i = \frac{1.2\ldots 2i}{2^{2i-1}\pi^{2i}}\left(1+\frac{1}{2^{2i}}+\frac{1}{3^{2i}}+\ldots\right)\;({}^{4})$$

et beaucoup d'autres du même genre ne peuvent servir, si l'on veut les utiliser au calcul des nombres B_i, qu'à trouver des valeurs approchées de ces nombres.

2. *Deuxième méthode*. — Dans ce que nous avons nommé la deuxième méthode, on cherche une série récurrente entre les nombres B_1, B_2, ..., B_i. Les formules de ce groupe sont très-nombreuses; nous en citerons quelques-unes :

$$\frac{2i+1}{1}B_i + \frac{(2i+1)2i(2i-1)}{1.2.3}B_{i-1} + \ldots + \frac{(2i+1)2i}{1.2}B_1 = \frac{2i-1}{2}\;({}^{5}),$$

$$\frac{(2i+2)(2i+1)}{1.2}B_i + \frac{(2i+2)(2i+1)2i(2i-1)}{1.2.3.4}B_{i-1} + \ldots + \frac{(2i+2)(2i-1)}{1.2}B_1 = i\;({}^{6}),$$

$$\frac{i-1}{i} = (2i-1)B_1 - \frac{(2i-1)(2i-2)(2i-3)}{1.2.3}\frac{B_2}{2} + \frac{(2i-1)\ldots(2i-5)}{1.2.3.4.5}\frac{B_3}{3} + \ldots \pm \frac{(2i-1)(2i-2)}{1.2}\frac{B_i}{i-1}\;({}^{7}),$$

$$\frac{2i+1}{1}B_1 + \frac{(2i+1)2i(2i-1)}{1.2.3}B_2 + \ldots + \frac{(2i+1)2i}{1.2}B_i = \tfrac{1}{2}\;({}^{8}).$$

---

(1) et (2) BERTRAND, *Calcul intégral*, t. II, p. 145.
(3) CATALAN, *Mémoire sur les nombres de Bernoulli*. Gauthier-Villars, 1875.
(4) SERRET, *Calcul intégral*, t. II, p. 217.
(5) *Formule de Moivre*. Lacroix, t. III, p. 84.
(6) *Formule de Cauchy*.
(7) BACH, *Thèse d'Analyse*, p. 18.
(8) CATALAN, *Note sur les nombres de Bernoulli*. Gauthier-Villars, 1875.

Nous-même sommes arrivé, par des considérations inutiles à reproduire ici, au développement, que nous croyons nouveau,

$$\begin{aligned}(2i-1)(2^{2i}-1)B_i = (4-1)(4^{i-1}-1)\frac{2i(2i-1)}{1.2}B_1B_{i-1}\\ +(4^2-1)(4^{i-2}-1)\frac{(2i-3)(2i-2)(2i-1)2i}{1.2.3.4}B_2B_{i-2}\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +(4-1)(4^{i-1}-1)\frac{2i(2i-1)}{1.2}B_{i-1}B_1,\end{aligned}$$

qui offre, sur les formules précédentes, l'avantage d'avoir ses termes égaux deux à deux, ce qui réduit sensiblement les longueurs du calcul.

Mais la formule de M. Le Paige ([1]) est plus simple que la nôtre et offre, elle aussi, l'avantage d'avoir ses termes, équidistants des extrêmes, égaux deux à deux. Cette formule remarquable est

$$\begin{aligned}(2i+1)B_i = \frac{2i(2i-1)}{1.2}B_1B_{i-1}+\frac{2i(2i-1)(2i-2)(2i-3)}{1.2.3.4}B_2B_{i-2}+\ldots\\ +\frac{2i(2i-1)}{1.2}B_{i-1}B_1.\end{aligned}$$

Elle est d'ailleurs la conséquence immédiate des deux formules que nous avons établies :

$$(2i+1)\alpha_i+\sum_{p=1}^{p=i-1}\alpha_p\alpha_{i-p}=0,$$

$$B_i=\frac{1.2\ldots 2i}{12^i}\alpha_i.$$

La formule de M. Le Paige est un cas particulier de la formule symbolique

$$B_{m+n}=B_m\frac{(B+\beta)^{n+1}-\beta^{n+1}}{n+1}+B_n\frac{(B+\beta)^{m+1}-\beta^{m+1}}{m+1},$$

donnée depuis par M. E. Lucas ([2]), et, pour nous résumer, dans cette

([1]) *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 2e série, t. XLI, n° 5.

([2]) *Nouvelle Correspondance mathématique*. Liége, novembre 1876. — *Nouvelles Annales de Mathématiques*, janvier 1877.

seconde méthode, définie par l'égalité

$$B_i = \varphi(i, B_1, B_2, \ldots, B_{i-1}),$$

c'est la formule de M. Le Paige qui nous paraît offrir le plus de commodité pour le calcul des nombres de Bernoulli.

3. *Troisième méthode.* — Dans ce que nous nommons la *troisième méthode,* on cherche un nombre X_i, lié au nombre B_i; puis on développe X_i soit en fonction de i, soit en série récurrente, c'est-à-dire en fonction des nombres

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_{i-1},$$

et du calcul de ces nombres X on déduit celui des nombres B. Les formules qui peuvent convenir à cette troisième façon de calculer les nombres B sont très-nombreuses.

M. Catalan [1] a préconisé, pour le calcul des nombres de Bernoulli, les nombres d'Euler, retrouvés par lui, et qui sont liés aux nombres B par la formule

$$P_i = 2(2^{2i} - 1) B_i.$$

Ces nombres P jouissent de la propriété remarquable d'*être entiers et impairs* [2]. Leur développement en série récurrente est

$$P_{i+1} = \frac{i+1}{2}\left[P_i P_1 + \frac{2i(2i-1)}{3.4} P_{i-1} P_2 + \frac{2i(2i-1)(2i-2)(2i-3)}{3.4.5.6} P_{i-2} P_3 + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{2i(2i-1)}{3.4} P_{i-1} P_2 + P_i P_1 \right].$$

La série qui constitue le second membre offre l'avantage d'avoir les termes *égaux deux à deux;* mais les coefficients des termes

$$P_{i-1} P_2, \quad P_{i-2} P_3, \quad \ldots$$

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. LVIII, p. 1106. — *Mémoires sur les nombres de Bernoulli.* Gauthier-Villars, mars 1867-septembre 1875.

(2) M. E. Lucas a démontré récemment (*Annali di Matematica,* série II, t. VIII, mars 1877) qu'en posant plus généralement

$$Q_i = a(a^{2i} - 1) B_i$$

les nombres Q sont entiers, *quel que soit l'entier a.*

sont, comme dans toutes les formules données jusqu'ici, des *fonctions de* i; au contraire, dans le développement de α_i,

$$(2i+1)\alpha_i = \alpha_1\alpha_{i-1} + \alpha_2\alpha_{i-2} + \ldots + \alpha_{i-1}\alpha_1,$$

tous les coefficients *sont égaux à* 1. Le calcul de ces nombres α se fera donc, à ce qu'il nous semble, plus simplement et plus rapidement que celui des nombres P. Ce que nous venons de dire des nombres

$$P_i \quad \text{et} \quad \alpha_i$$

peut s'appliquer aux autres nombres X_i proposés jusqu'ici, tels que les nombres E [1], dits *nombres d'Euler*. Ces nombres E, *nombres entiers*, sont développables en série récurrente par la formule

$$E_{i+1} - \frac{2i(2i-1)}{1.2}E_i + \frac{2i(2i-1)(2i-2)(2i-3)}{1.2.3.4}E_{i-1} + \ldots \pm E_1 = 0,$$

avec la condition

$$E_1 = E_2 = 1.$$

Ils sont liés aux nombres P_i par la formule [2]

$$P_{i+1} = \frac{i+1}{4^i}(E_1E_i + C_{2i,2}E_2E_{i-1} + C_{2i,4}E_3E_{i-2} + \ldots + E_iE_1).$$

Ces nombres E ne peuvent évidemment servir à calculer simplement les nombres de Bernoulli, et nous ferons à ce sujet l'observation évidente que, dans la troisième méthode, méthode définie par les deux équations

$$X_i = \varphi(i, X_1, X_2, \ldots, X_{i-1})$$

et

$$B_i = \psi(X_i),$$

ou même, si l'on veut, et plus généralement,

$$B_i = \psi(i, X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}),$$

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LII, p. 161; t. LIV, p. 1033.

(2) *Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler et sur quelques intégrales définies;* par M. Catalan, p. 9.

il est nécessaire que la fonction ψ soit très-simple. Cette condition est réalisée par notre formule

$$B_i = \frac{\Gamma(2i+1)}{12^i}\alpha_i;$$

pourtant, il convient de remarquer [1] que la fraction

$$\frac{\Gamma(2i+1)}{12^i}$$

est susceptible d'être simplifiée. Nous allons montrer qu'on peut trouver des nombres liés plus simplement que nos nombres α aux nombres B et développables en série récurrente comme les nombres α. Nous dirons, en terminant, pourquoi, malgré cette supériorité apparente, ces nouveaux nombres ne doivent pas, à notre avis, être préférés aux nombres α.

4. Posons

$$\alpha_i = \lambda^i A_i;$$

on a, quel que soit λ,

$$(2i+1)A_i = A_1 A_{i-1} + A_2 A_{i-2} + \ldots + A_{i-1} A_1.$$

Si l'on choisit

$$\lambda = 12,$$

on a

$$A_i = \frac{B_i}{\Gamma(2i+1)},$$

et l'on conclut de là que le développement en série récurrente par la formule qui a été trouvée pour les nombres α appartient à tous les nombres de la forme

$$\lambda^i \alpha_i,$$

---

[1] M. Hermite, à qui nous avions communiqué nos résultats, nous a signalé cette objection, à laquelle nous croyons répondre dans les lignes qu'on va lire. Nous engageons le lecteur, à ce propos, à voir une *Lettre de M. Hermite à M. Borchardt* (*Journal de Borchardt*, t. LXXXI, septembre 1875) sur la formule si remarquable de MM. Clausen et Staudt

$$(-1)^{2i-1}B_i = A_i + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \ldots + \frac{1}{\lambda}.$$

M. Hermite a déduit de cette formule un calcul assez simple des nombres de Bernoulli (*voir* la lettre citée).

λ étant une *constante arbitraire*. On serait donc tenté de disposer de λ, de façon que la relation entre les nombres

$$\lambda^i \alpha_i \quad \text{et} \quad B_i$$

soit aussi simple que possible, et nous venons de montrer que les nombres A_i (¹) jouissaient de cette propriété. Mais, dans le calcul des suites récurrentes, la plus grande difficulté provient de la complication *des premiers termes de la série*, et l'on comprend de reste que, le terme α_i de la suite *étant une fonction des deux premiers termes* α_1, α_2, on a intérêt à choisir, si cela est possible, ces deux premiers nombres *aussi simplement qu'on le pourra*, et que cette simplification, exécutée sur α_1 et α_2, a sur le calcul une influence considérable. Remarquons, de plus, que, la fraction simplifiable

$$\frac{\Gamma(2i+1)}{12^i}$$

ayant ses *deux termes décomposés en facteurs*, la simplification se fera sans effort; il suffira de barrer les facteurs communs à ces deux termes. Nous croyons donc, en résumé, qu'il résulte des explications qui précèdent :

1° *Que les nombres* $\lambda^i \alpha_i$ *sont, vu leur développement en série récurrente, d'un calcul plus simple que celui des autres nombres imaginés jusqu'ici pour le calcul des nombres de Bernoulli;*

2° *Que l'on doit choisir l'indéterminée* λ, *dans l'intérêt du calcul, de façon que les deux premiers termes de la suite récurrente*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$$

soient aussi simples que possible.

Pour déterminer λ de cette façon, nous remarquerons que des deux égalités

$$\alpha_i = \frac{12^i}{\Gamma(2i+1)} B_i, \quad \alpha_i = \lambda^i A_i$$

(¹) Ces nombres A ont été considérés par plusieurs auteurs. *Voir* Lacroix, *Calcul intégral*, t. III, p. 113; Bach, *Thèse d'Analyse*, p. 25; Catalan, *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 2ᵉ série, t. XLI, n° 5; mai 1876.

on déduit

$$\lambda^i A_i = \frac{12^i}{\Gamma(2i+1)} B_i,$$

et, par suite, en se rappelant que $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$,

$$\lambda A_1 = \frac{12}{1.2}\frac{1}{6}, \quad \lambda^2 A_2 = \frac{12^2}{1.2.3.4}\frac{1}{30},$$

ou

$$A_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad A_2 = \frac{1}{5.\lambda^2};$$

et, pour que A_1 et A_2 soient aussi simples que possible, il faut choisir

$$\lambda = 1,$$

mais alors

$$\alpha_i = A_i.$$

Nos nombres α sont donc ceux qu'il faut préférer, comme nous l'avions annoncé.

Ces nombres α_i, ou, plus généralement, les nombres $\lambda^i\alpha_i$, ne sont pas les seuls que nous ayons trouvé jouissant des propriétés précédentes. Dans un prochain travail, nous démontrerons que, en posant

$$\beta_i = (4^i - 1)\frac{B_i}{\Gamma(2i+1)},$$

ces nombres β sont développables en série récurrente par la formule

$$(2i-1)\beta_i + \sum_{p=1}^{p=i-1} \beta_p\beta_{i-p} = 0,$$

et nous tirerons de ces deux développements plusieurs conséquences théoriques et quelques formules nouvelles relatives aux nombres de Bernoulli (1). Au point de vue, qui vient de nous occuper, *du calcul*

(1) Nous avons eu occasion, dans ce Mémoire, de citer les principaux travaux connus de nous sur ces nombres si intéressants et qui touchent à tant de parties de l'Analyse. Nous signalerons encore au lecteur les travaux de BELLAVITIS, *Annali di Matematica*, 1853, 1855, et la formule de M. BINET, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXXII, p. 920; 1851.

pratique des nombres de Bernoulli, nous n'avons rien à dire de ces nombres β. Ils ont un développement aussi remarquable que celui des nombres α, mais ils sont liés moins simplement que ceux-ci aux nombres B. Cette raison suffit pour faire préférer les nombres α aux nombres β.

Nous ferons, en terminant, une dernière remarque. Les deux premiers termes A_1 A_2 de la suite récurrente sont liés par les égalités

$$A_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad A_2 = \frac{1}{5\lambda^2}$$

à l'indéterminée λ. Il existe donc entre ces deux termes la relation

$$5A_2 = A_1^2,$$

qui est résolue en nombres entiers par

$$A_1 = A_2 = 5.$$

Ces nombres A, qui correspondent à

$$\lambda = \tfrac{1}{5},$$

se prêtent aussi, commodément, au calcul des nombres de Bernoulli.

Ajoutons enfin que les nombres α, β, définis comme il vient d'être dit, ont une importance que nous démontrerons plus tard et dont l'origine réside dans la remarque suivante.

En posant

$$y = \alpha_0 x + \alpha_1 x^3 + \ldots + \alpha_n x^{2n+1} + \ldots,$$

série supposée convergente, on a

$$\frac{dy}{dx} = \alpha_0 + 3\alpha_1 x^2 + \ldots + (2n+1)\alpha_n x^{2n} + \ldots;$$

mais

$$(y - \alpha_0 x)^2 = \alpha_1^2 x^6 + \left.\begin{array}{l}\alpha_1\alpha_2 \\ +\,\alpha_2\alpha_1\end{array}\right| x^8 + \ldots + \left.\begin{array}{l}\alpha_1\alpha_{n-1} \\ +\,\alpha_2\alpha_{n-2} \\ +\,\ldots\ldots \\ +\,\alpha_{n-1}\alpha_1\end{array}\right| x^{2n+2} + \ldots.$$

On a donc

$$\frac{dy}{dx} - \alpha_0 - 3\alpha_1 x^2 - \left(\frac{y - \alpha_0 x}{x^2}\right)^2 = 0,$$

qu'on ramène à l'équation de Riccati quand $\alpha_0 = 0$, en posant

$$z = \frac{y}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

Cette observation s'applique aux nombres β, en considérant la série

$$y = \beta_1 x + \beta_2 x^3 + \ldots + \beta_n x^{2n-1} + \ldots.$$