ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. VERDET

Étude sur la constitution de la lumière non polarisée et de la lumière partiellement polarisée

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 2 (1865), p. 291-316
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1865_1_2__291_0>

ÉTUDE

SUR LA

CONSTITUTION DE LA LUMIÈRE NON POLARISÉE

ET DE LA

LUMIÈRE PARTIELLEMENT POLARISÉE,

PAR M. E. VERDET,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

I.

« Si la polarisation d'un rayon lumineux, » dit Fresnel dans ses *Considérations mécaniques sur la polarisation de la lumière* (*), « consiste en ce que toutes ses vibrations s'exécutent suivant une même direction, il résulte de mon hypothèse sur la génération des ondes lumineuses qu'un rayon émanant d'un seul centre d'ébranlement se trouve toujours polarisé suivant un certain plan à un instant déterminé. Mais un instant après, la direction du mouvement change, et avec elle le plan de polarisation, et ces variations se succèdent aussi rapidement que les perturbations des vibrations de la particule éclairante; en sorte que, lors même qu'on pourrait séparer la lumière qui en émane de celle des autres points lumineux, on n'y reconnaîtrait sans doute aucune apparence de polarisation. Si l'on considère maintenant l'effet produit par la réunion de toutes les ondes qui émanent des différents points d'un corps éclairant, on sentira qu'à chaque instant, et pour un point déterminé de l'éther, la résultante générale de tous les mouvements qui s'y exercent aura une direction déterminée, mais que cette direction variera d'un instant à l'autre. Ainsi la lumière directe (**) peut être considérée comme la réunion, et plus exactement comme la succession rapide de systèmes d'ondes polarisés suivant toutes les directions. »

(*) *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. XVII, p. 185.

(**) On sait que Fresnel appelle *lumière directe* ou *lumière ordinaire* ce que tout le monde aujourd'hui appelle *lumière naturelle* ou *lumière non polarisée*.

Le seul complément un peu essentiel qu'on puisse ajouter à ces paroles du créateur de la théorie des vibrations transversales consiste à dire qu'à un instant donné, et en un point donné de l'éther, les vibrations d'un rayon naturel doivent être considérées non comme rectilignes, mais comme elliptiques, puisque l'ellipse est la forme la plus générale que ces vibrations puissent affecter et comprend comme cas particulier la ligne droite et le cercle. En recherchant d'abord l'effet produit dans des circonstances données par une vibration elliptique, et ensuite l'effet moyen qui résulte des variations successives de cette vibration, on peut sans difficulté résoudre toutes les questions relatives aux propriétés de la lumière naturelle et aux modifications qui la transforment dans ce qu'on appelle lumière partiellement polarisée. Dans les cas complexes, il devient souvent nécessaire de recourir à la traduction analytique des raisonnements; on peut alors prendre exemple des méthodes de calcul développées par M. Stokes dans son *Mémoire sur la composition et la résolution des faisceaux polarisés émanés de sources différentes* (*). Le sujet semble donc épuisé, et cependant il arrive fréquemment que pour échapper à de prétendues difficultés on a recours à de nouvelles hypothèses (**), et même que l'interprétation inexacte de certains faits conduit à de graves erreurs (***). Je ne crois donc pas faire une chose inutile en publiant un exposé de l'enseignement que j'ai plusieurs fois donné sur cette question aux élèves de l'École Normale supérieure.

Venant longtemps après celle de M. Stokes, cette étude ne peut prétendre à la nouveauté que pour quelques détails et peut-être pour la méthode directement analytique qui y est suivie, et, bien plus encore que le savant professeur de Cambridge, je dois dire en commençant que la plupart des physiciens qui ont approfondi l'étude de l'optique ont dû probablement faire pour leur instruction personnelle des raisonnements et des calculs tout semblables à ceux que je vais développer. Mais, quand bien même on ne trouverait à ce travail qu'un intérêt purement didactique, il ne serait pas déplacé dans les *Annales* d'une École vouée avant tout aux progrès de l'enseignement.

(*) *On the composition and resolution of Streams of polarized Light from different sources* (imprimé en 1852 dans les *Transactions de la Société philosophique de Cambridge*, t. IX, p. 399). Ce Mémoire a pour objet direct l'interférence des rayons que M. Stokes appelle *indépendants*, c'est-à-dire dont les phases changent à des époques tout à fait diverses et indépendantes dans les deux rayons; mais il renferme tout ce qu'il importe de connaître pour déterminer sûrement les propriétés d'une succession de vibrations dont la période est constante et dont les autres éléments varient suivant une loi quelconque.

(**) *Voyez* ce qui est dit plus loin d'un Mémoire récent de M. Lippich (article V).

(***) C'est ainsi que M. J. Stefan (de Vienne) a prétendu démontrer, par une expérience d'ailleurs curieuse et intéressante, que la lumière naturelle ne contenait que des vibrations rectilignes, à l'exclusion de toute vibration elliptique ou circulaire. L'Académie des Sciences de Vienne a même sanctionné cette conclusion de son autorité, en accordant à M. Stefan le prix triennal fondé par M. Lieben pour récompenser les travaux de Physique et de Chimie (voyez *les Mondes*, livraisons du 1er et du 15 juin 1865).

II.

On sait que deux propriétés essentielles caractérisent la lumière naturelle : premièrement, lorsqu'elle rencontre sous l'incidence normale un cristal biréfringent, elle se divise en deux rayons dont les intensités sont indépendantes de l'orientation du cristal (*); en second lieu, elle conserve cette propriété après s'être réfléchie totalement sous des angles quelconques autant de fois qu'on le voudra dans un corps uniréfringent, tandis que la lumière polarisée circulairement, qui se comporte comme la lumière naturelle lorsqu'elle rencontre un rhomboèdre de spath, par exemple, se transforme en lumière polarisée rectilignement par des réflexions totales opérées sous des incidences convenables (**). Le système des vibrations diverses et diversement orientées, dont la succession rapide constitue la lumière naturelle, doit donc satisfaire à deux conditions : il faut d'abord que, si l'on projette à chaque instant la molécule vibrante sur un plan mené par la direction du rayon, la composante du mouvement vibratoire ainsi obtenue, considérée pendant un temps très-court, mais suffisant pour contenir un nombre très-grand d'alternatives de vibrations, ait la même intensité moyenne, quelle que soit l'orientation du plan considéré; en outre, il est nécessaire que la même propriété subsiste après qu'on a soumis le rayon naturel à une action qui n'altère pas le rapport des intensités des composantes du mouvement estimées suivant deux directions rectangulaires, et qui ajoute une quantité constante quelconque à la différence de leurs phases. Trouver l'expression analytique de ces conditions, faire voir qu'il est possible d'y satisfaire et de quelle manière on y parvient le plus simplement, indiquer comment on peut déterminer les modifications éprouvées dans un phénomène optique quelconque par le système de vibrations ainsi défini, tels sont les problèmes qui vont nous occuper successivement.

Quelques remarques générales sont utiles avant d'entrer en matière.

Les changements qui, suivant Fresnel, surviennent à des époques très-rapprochées dans l'état vibratoire d'un rayon non polarisé, paraissent quelquefois difficiles à concevoir, mais il ne faut pas beaucoup d'attention pour faire évanouir la difficulté. D'abord, il est deux cas où des molécules rayonnantes diverses se succèdent

(*) On dit le plus souvent que ces deux rayons sont égaux en intensité, mais cela n'est pas théoriquement exact, et même dans les corps fortement biréfringents la différence peut être rendue sensible à l'expérience (*voyez* les Recherches photométriques de M. Wild, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LXIX, p. 238).

(**) La réflexion totale peut être remplacée par le passage de la lumière à travers une lame cristalline à faces parallèles, trop peu épaisse pour séparer l'un de l'autre les deux rayons issus de la double réfraction, et assez faiblement biréfringente pour ne pas établir de différence sensible entre leurs intensités.

incessamment les unes aux autres en un point donné, ce qui a pour conséquence nécessaire le changement de la forme, de l'orientation et de la phase des vibrations : il en est évidemment ainsi lorsque la faculté lumineuse résulte directement d'une action chimique, et lorsque, le corps lumineux étant fluide, les courants intérieurs renouvellent rapidement les molécules superficielles. Si la source lumineuse est un solide porté par l'élévation de température à un état d'incandescence uniforme et constant, l'uniformité et la constance ne sont jamais absolues et résultent en réalité d'un état variable qui oscille rapidement entre des limites très-resserrées, et il n'en faut pas davantage pour faire varier à des instants rapprochés l'état des vibrations émises par la source (*).

Un point important, auquel en général on ne donne aucune attention, c'est que les propriétés de la lumière naturelle s'expliquent aussi bien par la coexistence de vibrations diverses dans un espace très-resserré que de leur succession dans un temps très-court. Soit, par exemple, un gaz incandescent, qui, comme on sait, émet toujours et dans toutes les directions de la lumière non polarisée : à un instant donné, une des molécules du gaz émet des vibrations polarisées d'une manière déterminée; mais une molécule voisine émet des vibrations polarisées d'une autre manière, et à chaque instant il y a compensation exacte entre les polarisations diverses sur une très-petite étendue de la flamme; en sorte que si l'on regarde cette flamme avec un analyseur biréfringent, l'intensité lumineuse est réellement variable d'un point à l'autre dans chaque image à l'instant considéré, mais que ces variations, insensibles à cause de leur grand nombre, donnent l'apparence d'une intensité uniforme indépendante de l'orientation de l'analyseur. La durée de l'incandescence pourrait donc se réduire indéfiniment sans que la lumière émise offrît des traces sensibles de polarisation. Cette considération est peut-être nécessaire dans certains cas pour expliquer l'absence de polarisation de la lumière électrique (**).

(*) Ce qui a besoin réellement d'être expliqué, ce n'est pas que les vibrations émises par une source varient sans cesse, c'est qu'on trouve dans ces vibrations quelque chose de constant, l'intensité et la période. La constance de l'intensité résulte de la constance des causes par lesquelles le rayonnement est entretenu; la constance de la période tient à ce que la période des vibrations est comme l'expression de l'élasticité propre du système moléculaire vibrant, et à ce que ce système ne change pas de nature. C'est ainsi que si l'on avait diverses plaques vibrantes, de nature, de forme et de dimensions identiques, mais diversement orientées dans l'espace et ébranlées à des instants différents, il n'y aurait de commun que la période dans les mouvements vibratoires qu'au même instant elles enverraient en un même point.

(**) Dans les expériences classiques de M. Wheatstone la durée de l'étincelle directe d'une machine électrique a été reconnue inférieure à $\frac{1}{1\,152\,000}$ de seconde. D'un autre côté, M. Fizeau étant parvenu à produire des interférences avec des rayons dont la différence de marche atteignait 50 000 ondulations, on doit admettre que, dans certains cas au moins, les vibrations émises par une source lumineuse peuvent ne pas éprouver d'altération sensible pendant une durée très-supérieure à celle de 50 000 vibrations. Il n'y a

Les compensations entre les polarisations diverses des vibrations émises à un même instant par les divers points d'une même source peuvent avoir lieu d'une autre manière. Si, au moyen d'un diaphragme, on isole une portion du rayonnement d'une source lumineuse de diamètre apparent sensible, il est facile de voir qu'aux divers points d'une section transversale du faisceau ainsi obtenu, l'état de polarisation ne saurait être le même. Supposons pour plus de simplicité une source sphérique σ, et concevons une sphère S de très-grand rayon concentrique à la source : en un point de cette sphère S la vitesse de vibration est à chaque instant la résultante des vitesses envoyées par les divers points de la source; si tous les points de la source avaient des mouvements concordants, les mouvements de tous les points de la sphère S seraient aussi concordants, et on aurait une véritable onde sphérique polarisée de la même manière dans toute son étendue; mais comme les mouvements des divers points de la source diffèrent les uns des autres, la résultante des vitesses qu'ils envoient à un instant donné en un point de la sphère S dépend de la position particulière de ce point. Des calculs très-simples démontrent que l'étendue de la surface sphérique S dans laquelle les mouvements vibratoires peuvent être regardés comme concordants à chaque instant est inférieure à celle d'un cercle qui aurait pour diamètre le quotient de la demi-longueur d'onde par le demi-diamètre apparent de la source vue d'un point de la sphère S, et par conséquent devient très-petite dès que la source a un diamètre apparent sensible (*). Dans le cas du Soleil, le diamètre de ce cercle est d'environ $0^{mm},055$ pour une lumière de lon-

---

donc rien d'impossible à ce que la durée de certaines étincelles descende à 1 dix-millionième de seconde, et que le mouvement vibratoire d'un de leurs points ne subisse pas de perturbation pendant la durée d'un million de vibrations. Dans ces conditions, le nombre des alternatives de vibration que pourrait offrir la lumière serait au plus de 60 pour une longueur d'onde égale à $0^{mm},0005$, puisque pour cette longueur d'onde le nombre des vibrations est d'environ 600 trillions par seconde. Il serait bien difficile qu'un aussi petit nombre d'alternatives suffît à compenser les unes par les autres les diverses polarisations, et il semblerait que la lumière de l'étincelle dût offrir des traces sensibles de polarisation, si l'on n'avait égard aux considérations qu'on a indiquées dans le texte.

(*) Soient

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\rho^2, \quad x^2+y^2+z^2=R^2$$

les équations de la sphère lumineuse σ et de la sphère S qui lui est concentrique; la distance d'un point ϖ de la source à un point P de S est

$$\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}=\sqrt{R^2+\rho^2-2x\xi-2y\eta-2z\zeta}.$$

Si l'on considère sur S un point P' différent de P, dont les coordonnées soient $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$, la distance au point ϖ devient

$$\sqrt{R^2+\rho^2-2(x+\Delta x)\xi-2(y+\Delta y)\eta-2(z+\Delta z)\zeta}.$$

Si l'on suppose R très-grand par rapport à ρ, et conséquemment aussi par rapport à ξ, η, ζ, ces deux gueur d'onde égale à $0^{mm},0005$, et comme son étendue superficielle n'est pas la quatre-centième partie d'un millimètre carré, on voit que sur chaque millimètre carré de la section transversale d'un faisceau solaire il y a, à un instant donné, au moins 400 modes de vibration différents, ce qui peut suffire pour établir la compensation entre les polarisations diverses (*).

---

expressions se réduisent approximativement à

$$R+\frac{\rho^2}{2R}-\frac{\xi}{R}x-\frac{\eta}{R}y-\frac{\zeta}{R}z,$$

et

$$R+\frac{\rho^2}{2R}-\frac{\xi}{R}(x+\Delta x)-\frac{\eta}{R}(y+\Delta y)-\frac{\zeta}{R}(z+\Delta z),$$

et leur différence à

$$\frac{\xi}{R}\Delta x+\frac{\eta}{R}\Delta y+\frac{\zeta}{R}\Delta z.$$

Si les points P et P′ sont tellement rapprochés, que, pour toutes les valeurs de ξ, η, ζ, cette expression soit en valeur absolue une très-petite fraction de longueur d'onde, les mouvements vibratoires élémentaires envoyés par tous les points de la source aux deux points P et P′ sont sensiblement identiques, et par suite les mouvements résultants le sont aussi. Considérons pour le moment le point ϖ en particulier : l'ensemble des points de la sphère S auxquels ce point envoie un mouvement sensiblement identique à celui qu'il envoie en P forme une zone sphérique étroite, limitée par deux plans normaux au rayon de la sphère qui passe par le point ϖ, menés de part et d'autre de P à des distances exprimées par

$$\frac{h\lambda}{\sqrt{\frac{\xi^2}{R^2}+\frac{\eta^2}{R^2}+\frac{\zeta^2}{R^2}}}=\frac{R}{\rho}h\lambda,$$

h désignant une très-petite fraction. Les points auxquels *tous* les éléments de la source envoient des mouvements sensiblement identiques sont contenus dans la partie commune à ces diverses zones, c'est-à-dire dans une calotte sphérique ne différant pas sensiblement d'un cercle qui aurait pour centre le point P et pour rayon

$$\frac{R}{\rho}h\lambda.$$

C'est dans l'intérieur de ce cercle seulement que les mouvements vibratoires peuvent être considérés comme concordants sur la sphère S. La valeur de la fraction h n'est pas susceptible d'être exactement déterminée, mais elle est certainement moindre que $\frac{1}{4}$, et par conséquent le cercle de diamètre égal à

$$\frac{R}{\rho}\frac{\lambda}{2}$$

est une limite supérieure de l'étendue sur laquelle on peut regarder les mouvements vibratoires comme concordants. $\frac{\rho}{R}$ étant le demi-diamètre apparent de la source vue de la distance R, la proposition contenue dans le texte se trouve démontrée. Ce cercle contient tous les points tels, que la différence de deux d'entre eux à un point quelconque de la source soit moindre qu'une demi-ondulation.

(*) Le défaut de concordance entre les deux vibrations de deux points très-voisins sur la sphère S se constate d'ailleurs par l'impossibilité d'obtenir des franges d'interférence en faisant tomber la lumière d'une source de grand diamètre apparent sur deux fentes étroites, qui donnent des franges très-visibles lorsque la lumière vient d'une source de très-petit diamètre apparent.

Ainsi la succession et la coexistence des vibrations diversement polarisées doivent être prises également en considération pour rendre compte des propriétés de la lumière naturelle, mais il n'est pas nécessaire de traiter à part des effets de ces deux causes, car tout ce qu'on peut dire de l'une peut se répéter de l'autre. On se bornera donc dans cette étude à considérer les effets d'une succession rapide de vibrations diversement polarisées, conformément à l'usage suivi en général, et on sous-entendra toujours l'effet identique de leur juxtaposition dans un espace très-resserré.

III.

Soient, dans un plan perpendiculaire à la direction d'un rayon lumineux non polarisé, deux axes rectangulaires. L'une quelconque des vibrations qui se succèdent en un point du rayon à de très-courts intervalles pourra être représentée par deux équations de la forme

$$x = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{\mathrm{T}} + \alpha\right), \quad y = b \sin 2\pi\left(\frac{t}{\mathrm{T}} + \beta\right),$$

ou, en faisant $2\pi\left(\frac{t}{\mathrm{T}} + \alpha\right) = \varphi$, $2\pi(\beta - \alpha) = \delta$,

$$x = a \sin\varphi, \quad y = b \sin(\varphi + \delta).$$

On n'ôtera rien à la généralité de ces équations, et on rendra la discussion plus facile en supposant que a et b sont toujours positifs, pourvu qu'on regarde δ comme susceptible de recevoir toutes les valeurs comprises entre o et 2π : les valeurs comprises entre o et π répondront dans cette hypothèse à des vibrations polarisées elliptiquement de gauche à droite, et les vibrations comprises entre π et 2π à des vibrations polarisées elliptiquement de droite à gauche.

Suivant deux autres axes rectangulaires menés dans le même plan, la même vibration elliptique aura pour composantes

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\omega + y \sin\omega, \\ y' &= -x \sin\omega + y \cos\omega; \end{aligned}$$

si ω désigne l'angle de l'axe des x' avec l'axe des x, c'est-à-dire en développant les valeurs de x et de y,

$$\begin{aligned} x' &= (a \cos\omega + b \cos\delta \sin\omega) \sin\varphi + b \sin\delta \sin\omega \cos\varphi, \\ y' &= (-a \sin\omega + b \cos\delta \cos\omega) \sin\varphi + b \sin\delta \cos\omega \cos\varphi. \end{aligned}$$

Si l'on reçoit le rayon normalement sur un cristal biréfringent orienté de telle façon que les plans de vibration des deux rayons auxquels il donne naissance soient parallèles aux axes des x' et des y', ces deux rayons seront proportionnels aux intensités des deux composantes représentées par les deux dernières équations, et par conséquent égaux à

$$m^2(a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega + 2ab\cos\delta\sin\omega\cos\omega)$$

et

$$n^2(a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega - 2ab\cos\delta\sin\omega\cos\omega),$$

m et n étant deux coefficients très-voisins de l'égalité, mais non exactement égaux (*). Ces expressions dépendent de l'angle ω, mais elles varient d'un instant à l'autre avec les paramètres a, b et δ, et pour que le rayon jouisse de la première propriété de la lumière naturelle, il faut et il suffit que les valeurs moyennes, prises pendant un temps très-court, mais assez long pour contenir un nombre très-grand d'alternatives, soient indépendantes de ω. Donc, en désignant généralement par $M(z)$ la valeur moyenne ainsi définie d'une quantité quelconque z, il faut et il suffit que les expressions

$$M(a^2)\sin^2\omega + M(b^2)\sin^2\omega + 2M(ab\cos\delta)\sin\omega\cos\omega$$

et

$$M(a^2)\sin^2\omega + M(b^2)\cos^2\omega - 2M(ab\cos\delta)\sin\omega\cos\omega$$

gardent les mêmes valeurs, quel que soit ω, et par suite qu'on ait

$$M(a^2) = M(b^2), \quad M(ab\cos\delta) = 0.$$

La même propriété devant subsister encore après une réflexion totale dans l'intérieur d'un milieu uniréfringent, et en particulier lorsque le plan de réflexion est parallèle ou perpendiculaire à l'axe des x, il faut et il suffit qu'en appelant ε la différence de phase qui s'ajoute dans ce cas particulier à la différence δ, on ait, quel que soit ε,

$$M[ab\cos(\delta+\varepsilon)] = 0,$$

c'est-à-dire à la fois

$$M(ab\cos\delta) = 0, \quad M(ab\sin\delta) = 0.$$

Ainsi les trois conditions suivantes caractérisent toute succession rapide de vibrations jouissant des propriétés par lesquelles on définit la lumière naturelle :

$$M(a^2) = M(b^2),$$
$$M(ab\cos\delta) = 0,$$
$$M(ab\sin\delta) = 0.$$

(*) L'égalité absolue n'aurait lieu que si les deux ondes planes engendrées par la double réfraction se propageaient avec la même vitesse, c'est-à-dire si en réalité il n'y avait pas double réfraction.

Il n'est pas difficile de prouver que si ces conditions sont satisfaites relativement à deux axes rectangulaires OX et OY, elles le seront par rapport à deux autres axes rectangulaires quelconques OX′ et OY′. Si en effet on représente le mouvement vibratoire décomposé suivant ces nouveaux axes par les équations

$$x' = a' \sin\varphi', \quad y' = b' \sin(\varphi' + \delta'),$$

on doit avoir, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} a' \sin\varphi' &= (a\cos\omega + b\cos\delta\sin\omega)\sin\varphi + b\sin\delta\sin\omega\cos\varphi, \\ b' \sin(\varphi' + \delta') &= (-a\sin\omega + b\cos\delta\cos\omega)\sin\varphi + b\sin\delta\cos\omega\cos\varphi, \end{aligned}$$

et par suite, en vertu des règles connues du calcul des interférences,

$$\begin{aligned} a'^2 &= a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega + 2ab\cos\delta\sin\omega\cos\omega, \\ b'^2 &= a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega - 2ab\cos\delta\sin\omega\cos\omega, \\ \operatorname{tang}(\varphi' - \varphi) &= \frac{b\sin\delta\sin\omega}{a\cos\omega + b\cos\delta\sin\omega}, \\ \operatorname{tang}(\varphi' + \delta' - \varphi) &= \frac{b\sin\delta\cos\omega}{-a\sin\omega + b\cos\delta\sin\omega}, \end{aligned}$$

On déduit de là par un calcul facile

$$\begin{aligned} a'b'\cos\delta' &= ab\cos\delta(\cos^2\omega - \sin^2\omega) - (a^2 - b^2)\sin\omega\cos\omega, \\ a'b'\sin\delta' &= ab\sin\delta, \end{aligned}$$

et il est évident, à l'inspection de ces formules, que

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(a'^2) &= \mathrm{M}(b'^2), \\ \mathrm{M}(a'b'\cos\delta') &= 0, \\ \mathrm{M}(a'b'\sin\delta') &= 0. \end{aligned}$$

Un autre mode de représentation des vibrations elliptiques conduit à une autre expression analytique des mêmes conditions, qui peut être quelquefois utile. On considère à un instant donné les axes de l'ellipse décrite par les molécules d'éther, et on prend pour équations des vibrations relativement à ces axes

$$\begin{aligned} \xi &= c\sin\gamma\sin\psi, \\ \eta &= c\cos\gamma\cos\psi, \end{aligned}$$

ψ désignant un arc qui varie proportionnellement à $2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}$, c un coefficient positif, et $\operatorname{tang}\gamma$ le rapport des axes de l'ellipse; ce rapport est positif ou négatif suivant que la lumière est polarisée elliptiquement de gauche à droite ou de droite à gauche.

Si θ est l'angle que fait l'axe des ξ avec l'axe des x, on a

$$x = \xi\cos\theta - y\sin\theta,$$
$$y = \xi\sin\theta + y\cos\theta,$$

et si l'on pose de nouveau

$$x = a\sin\varphi, \quad y = b\sin(\varphi + \delta),$$

des règles connues donnent

$$a = c\sqrt{\sin^2\gamma\cos^2\theta + \cos^2\gamma\sin^2\theta},$$
$$b = c\sqrt{\sin^2\gamma\sin^2\theta + \cos^2\gamma\cos^2\theta},$$
$$\operatorname{tang}(\varphi - \psi) = -\cot\gamma\operatorname{tang}\theta,$$
$$\operatorname{tang}(\varphi + \delta - \psi) = \cot\gamma\cot\theta,$$

et par suite

$$ab\cos\delta = -c^2\cos 2\gamma\sin\theta\cos\theta,$$
$$ab\sin\delta = c^2\cos\gamma\sin\gamma.$$

Les conditions précédentes deviennent donc

$$M(c^2\sin^2\gamma\cos^2\theta + c^2\cos^2\gamma\sin^2\theta) = M(c^2\sin^2\gamma\sin^2\theta + c^2\cos^2\gamma\cos^2\theta),$$
$$M(c^2\cos 2\gamma\sin\theta\cos\theta) = 0,$$
$$M(c^2\cos\gamma\sin\gamma) = 0,$$

ou, par des transformations évidentes,

$$M(c^2\cos 2\gamma\cos 2\theta) = 0,$$
$$M(c^2\cos 2\gamma\sin 2\theta) = 0,$$
$$M(c^2\sin 2\gamma) = 0.$$

C'est sous cette dernière forme que M. Stokes les a présentées.

IV.

Ces conditions peuvent être satisfaites d'une infinité de manières qu'il est inutile de spécifier, mais il est intéressant de rechercher quelle est la combinaison de vibrations la plus simple qui les satisfasse. Une vibration à polarisation constante ayant des propriétés parfaitement distinctes de celles de la lumière naturelle, il faut au moins deux espèces de vibrations diverses alternant l'une avec l'autre. Soient a_1, b_1, δ_1 et a_2, b_2, δ_2 les paramètres caractéristiques des deux vibrations, τ la durée pour laquelle on prend la moyenne des expressions a^2, b^2, $ab\cos\delta$, $ab\sin\delta$, m_1 et m_2 les fractions de cette durée qui appartiennent aux deux modes de vibration, on aura

$$\begin{gathered}
\mathrm{M}(a^2) = m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2,\\
\mathrm{M}(b^2) = m_1 b_1^2 + m_2 b_2^2,\\
\mathrm{M}(ab\cos\delta) = m_1 a_1 b_1 \cos\delta_1 + m_2 a_2 b_2 \cos\delta_2,\\
\mathrm{M}(ab\sin\delta) = m_1 a_1 b_1 \sin\delta_1 + m_2 a_2 b_2 \sin\delta_2;
\end{gathered}$$

et par suite, si la succession alternante de ces deux rayons possède les propriétés de la lumière naturelle,

$$\begin{gathered}
m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 = m_1 b_1^2 + m_2 b_2^2,\\
m_1 a_1 b_1 \cos\delta_1 + m_2 a_2 b_2 \cos\delta_2 = 0,\\
m_1 a_1 b_1 \sin\delta_1 + m_2 a_2 b_2 \sin\delta_2 = 0.
\end{gathered}$$

On déduit immédiatement des deux dernières équations

$$\operatorname{tang}\delta_1 = \operatorname{tang}\delta_2,$$

c'est-à-dire $\delta_1 = \delta_2$ ou $\delta_1 = \pi + \delta_2$. La première hypothèse conduit immédiatement à $b_1 = 0$, $a_2 = 0$ ou à $b_2 = 0$, $a_1 = 0$, c'est-à-dire à deux rayons polarisés à angle droit l'un sur l'autre, dont les intensités a_1^2 et b_2^2 sont en raison inverse de leurs durées. La seconde hypothèse indique que les deux vibrations doivent être polarisées elliptiquement en sens contraires, et donne de plus la condition

$$m_1 a_1 b_1 = m_2 a_2 b_2;$$

en la combinant avec la première, on trouve aisément

$$\begin{gathered}
m_1 m_2 a_1^2 a_2^2 + m_2^2 a_2^4 = m_1 m_2 a_2^2 b_1^2 + m_1^2 a_1^2 b_1^2,\\
(m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2)(m_2 a_2^2 - m_1 b_1^2) = 0,
\end{gathered}$$

d'où

$$m_1 b_1^2 = m_2 a_2^2,$$

et par suite

$$m_1 a_1^2 = m_2 b_2^2.$$

Les équations des deux rayons dont l'alternance peut constituer de la lumière naturelle sont donc

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1 \sin\varphi, & x_2 &= b_1 \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \sin\varphi,\\
y_1 &= b_1 \sin(\varphi + \delta_1), & y_2 &= -a_1 \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \sin(\varphi + \delta_1).
\end{aligned}$$

Il est évident que les deux vibrations ainsi définies sont polarisées elliptiquement en sens contraires, qu'elles s'exécutent suivant des ellipses semblables, mais tellement orientées, que le grand axe de l'une coïncide avec le petit axe de l'autre, et enfin que leurs intensités sont en raison inverse de leurs durées relatives. Cette solution comprend comme cas particulier la précédente, car deux vibrations rectilignes perpendiculaires l'une à l'autre peuvent être regardées comme deux ellipses semblables placées de manière que le grand axe de l'une coïncide avec le petit axe de l'autre; en outre, comme dans des vibrations rectilignes il n'y a rien d'analogue aux deux sens de la polarisation elliptique, on peut toujours les assimiler à deux vibrations elliptiques de polarisations opposées.

En ayant égard à cette remarque on peut énoncer comme il suit le résultat des calculs précédents :

La lumière naturelle peut résulter de l'alternance de deux espèces de vibrations elliptiques seulement,

1° Pourvu que les intensités de ces vibrations soient en raison inverse de leurs durées;

2° Que l'une des vibrations puisse être considérée comme dérivée de l'autre par une rotation de 90 degrés et par une réduction des axes dans un rapport déterminé;

3° Que les deux polarisations elliptiques soient d'espèces contraires.

M. Stokes a proposé d'appeler *rayons contrairement polarisés* deux rayons polarisés elliptiquement qui présentent l'un avec l'autre les relations (2°) et (3°). En adoptant cette définition, on peut dire que le moyen le plus simple d'obtenir de la lumière naturelle consiste à faire alterner l'un avec l'autre deux rayons contrairement polarisés, les durées de leurs alternatives étant inversement proportionnelles à leurs intensités. Un nombre quelconque de couples de rayons contrairement polarisés satisfaisant à ces conditions est encore une solution du problème (*).

V.

Le théorème qu'on vient de démontrer donne une infinité de manières de constituer de la lumière naturelle; mais il y en a encore une infinité d'autres, sur lesquelles on présentera quelques remarques générales.

Considérons d'abord un système de $p - 1$ vibrations rectilignes, entièrement arbitraires. Le système satisfera toujours à l'une des conditions caractéristiques de la lumière naturelle, puisque, δ ne pouvant être égal qu'à o ou à π, on aura nécessairement

$$M(ab \sin\delta) = 0.$$

Désignons maintenant par A, B, C les valeurs des trois expressions $M(a^2)$, $M(b^2)$,

(*) La considération des rayons contrairement polarisés s'offre d'elle-même dans l'étude de la double réfraction du quartz. M. Stokes a fait remarquer qne ces couples de rayons jouissent exclusivement de la propriété curieuse de donner par leur superposition une intensité indépendante de la différence de marche.

$M(ab\cos\delta)$; c'est-à-dire, faisons

$$m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 + \ldots + m_{p-1} a_{p-1}^2 = \mathrm{A},$$
$$m_1 a_1^2 + m_2 b_2^2 + \ldots + m_{p-1} b_{p-1}^2 = \mathrm{B},$$
$$\pm m_1 a_1 b_1 \pm m_2 a_2 b_2 \pm \ldots \pm m_{p-1} a_{p-1} b_{p-1} = \mathrm{C};$$

pour que le système jouisse des propriétés de la lumière naturelle, il suffira d'ajouter à ce groupe une $p^{\text{ième}}$ vibration définie par les paramètres a_p, b_p, m_p, et satisfaisant aux conditions

$$m_p a_p^2 + \mathrm{A} = m_p b_p^2 + \mathrm{B},$$
$$\pm m_p a_p b_p + \mathrm{C} = 0,$$

ce qui a lieu si $m_p a_p^2$, $m_p b_p^2$ sont respectivement les racines positives des équations

$$z^2 + (\mathrm{A} - \mathrm{B})z - \mathrm{C}^2 = 0,$$
$$z^2 - (\mathrm{A} - \mathrm{B})z - \mathrm{C}^2 = 0,$$

et si l'on fait $\delta = 0$ ou $\delta = \pi$, suivant que C est négatif ou positif. Il y a donc une infinité de manières de constituer de la lumière naturelle avec des vibrations rectilignes, sans qu'il soit nécessaire que ces vibrations se répartissent en groupes de rayons contrairement polarisés.

Un calcul semblable montrerait qu'il y a aussi une infinité de manières de constituer de la lumière polarisée avec des vibrations elliptiques d'une forme déterminée, et *à fortiori* avec des vibrations elliptiques de formes diverses. Il est toujours nécessaire que dans ces divers systèmes les deux espèces opposées de vibrations elliptiques existent simultanément, car avec des vibrations elliptiques d'une seule espèce on pourra satisfaire aux conditions

$$\mathrm{M}(a^2) = \mathrm{M}(b^2), \quad \mathrm{M}(ab\cos\delta) = 0,$$

mais non à la condition

$$\mathrm{M}(ab\sin\delta) = 0,$$

$ab\sin\delta$ étant toujours positif ou toujours négatif, suivant que, δ étant compris entre 0 et π, ou entre π et 2π, les vibrations sont polarisées de gauche à droite ou de droite à gauche.

M. Dove a effectivement observé que si l'on fait tourner rapidement un prisme de Nicol sur lequel arrive de la lumière naturelle, le faisceau émergent a toutes les propriétés de la lumière naturelle; mais si l'on fait tourner avec la même vitesse et dans le même sens que le prisme de Nicol une lame de mica, le faisceau émergent, formé de vibrations elliptiques identiques dirigées dans tous les azimuts, produit les mêmes phénomènes de polarisation chromatique qu'un faisceau polarisé circulairement (*). Pour obtenir de la lumière naturelle il aurait fallu laisser le prisme de Nicol immobile et faire tourner la lame de mica, ce qui aurait changé le sens de la polarisation elliptique à chaque demi-révolution.

Au point de vue d'une théorie tout à fait rigoureuse, ces expériences de M. Dove sont plutôt une imitation des propriétés de la lumière naturelle qu'une reproduction exacte de sa constitution. Un rayon polarisé dont le plan de polarisation tourne avec une vitesse uniforme doit être, ainsi que l'a fait remarquer M. Airy (**), considéré comme étant réellement la superposition de deux rayons polarisés circulairement en sens contraires, dont les périodes de vibration ne sont pas les mêmes. Soient en effet

$$x = a\cos\omega\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\alpha\right),$$
$$y = a\sin\omega\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\alpha\right),$$

les équations d'une vibration rectiligne qui fait avec l'axe des x un angle ω; si l'on suppose que ω varie proportionnellement au temps, en sorte que $\omega = \mu + \nu t$, on aura,

$$x = a\cos(\mu+\nu t)\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\alpha\right),$$
$$y = a\sin(\mu+\nu t)\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\alpha\right),$$

et par une transformation connue,

$$x = \frac{a}{2}\sin\left[\left(\frac{2\pi}{T}+\nu\right)t+2\pi\alpha+\mu\right]+\frac{a}{2}\sin\left[\left(\frac{2\pi}{T}-\nu\right)t+2\pi\alpha-\mu\right],$$
$$y = -\frac{a}{2}\cos\left[\left(\frac{2\pi}{T}+\nu\right)t+2\pi\alpha+\mu\right]+\frac{a}{2}\cos\left[\left(\frac{2\pi}{T}-\nu\right)t+2\pi a-\mu\right],$$

et ces équations représentent évidemment la combinaison de deux vibrations circulaires de périodes différentes définies par les deux groupes d'équations

$$x_1 = \frac{a}{2}\sin\left[\left(\frac{2\pi}{T}+\nu\right)t+2\pi\alpha+\mu\right],$$
$$y_1 = -\frac{a}{2}\cos\left[\left(\frac{2\pi}{T}+\nu\right)t+2\pi\alpha+\mu\right],$$

et

$$x_2 = \frac{a}{2}\sin\left[\left(\frac{2\pi}{T}-\nu\right)t+2\pi\alpha-\mu\right],$$
$$y_2 = \frac{a}{2}\cos\left[\left(\frac{2\pi}{T}-\nu\right)t+2\pi\alpha-\mu\right].$$

(*) POGGENDORFF's *Annalen*, t. LXXI, p. 97.

(**) *Undulatory theory of Light*, art. 185 (3e édition).

Les mêmes remarques s'appliquent aux deux composantes d'une vibration elliptique, et par conséquent à la vibration elliptique elle-même.

Mais dans toute expérience du genre de celle de M. Dove la décomposition d'un faisceau polarisé tournant en deux faisceaux de périodes diverses, et par conséquent différemment réfrangibles et différemment colorés, est absolument inappréciable. Les nombres de vibrations de ces deux faisceaux sont représentés par $\frac{1}{T} + \frac{\nu}{2\pi}$ et $\frac{1}{T} - \frac{\nu}{2\pi}$, c'est-à-dire, si l'on suppose que le prisme de Nicol fasse 1000 révolutions par seconde, sont entre eux comme 600 billions plus l'unité et 600 billions moins l'unité, pour une lumière de longueur d'onde égale à $0^{mm},0005$. Il n'y a aucun moyen d'établir entre de pareils rayons une séparation sensible. Une vitesse d'un million de tours par seconde serait encore très-éloignée d'être suffisante.

On reproduirait encore les propriétés de la lumière naturelle en faisant tourner un prisme de Nicol au devant d'un parallélipipède de Fresnel qui établit une différence de phase d'un quart de circonférence entre la composante du mouvement vibratoire parallèle au plan de réflexion, et la composante perpendiculaire. La vibration rectiligne issue du prisme de Nicol serait ainsi transformée en une vibration elliptique dont les axes auraient une situation fixe, mais où le rapport des axes prendrait successivement toutes les valeurs possibles et où la direction du mouvement changerait à chaque demi-révolution. Cette expérience donnerait lieu aux mêmes remarques que l'expérience de M. Dove. Si le prisme de Nicol accomplissait n révolutions par seconde, on aurait, pour représenter à chaque instant le mouvement vibratoire, les deux équations

$$x = a \cos 2\pi nt \sin 2\pi \frac{t}{T},$$
$$y = a \sin 2\pi nt \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

et le même mode de transformation donnerait

$$x = \frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\frac{1}{T} + n\right) t + \frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\frac{1}{T} - n\right) t,$$
$$y = \frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\frac{1}{T} + n\right) t - \frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\frac{1}{T} - n\right) t,$$

ce qui permettrait de regarder le système comme résultant de la superposition de deux vibrations rectilignes de périodes différentes polarisées à angle droit, définies par les groupes d'équations

$$x_1 = \frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\frac{1}{T} + n\right) t,$$
$$y_1 = \frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\frac{1}{T} + n\right) t,$$

et

$$x_2 = \frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\frac{1}{T} - n\right) t,$$

$$y_2 = -\frac{a}{2} \sin 2\pi \left(\frac{1}{T} - n\right) t.$$

Dans toute expérience réelle cette remarque serait d'ailleurs sans importance.

Ces développements conduisent à une conséquence curieuse que M. Airy a sommairement indiquée sans la démontrer en détail, c'est que les changements qu'éprouvent dans la lumière naturelle la forme et l'orientation des ellipses de vibration ne peuvent être supposés continus si la lumière est absolument homogène. Tout changement continu d'une vibration elliptique consiste en effet en une série de rotations infiniment petites des axes de l'ellipse, accompagnées d'altérations infiniment petites simultanées du rapport des grandeurs des axes, et chacune de ces altérations élémentaires elles-mêmes peut être censée résulter de la combinaison de mouvements vibratoires de longueur d'ondulations différentes. L'homogénéité absolue de la lumière n'est donc compatible qu'avec des changements tout à fait brusques et discontinus; une homogénéité sensiblement équivalente à l'homogénéité absolue admet des changements continus très-lents par rapport aux vibrations de la lumière; mais des changements continus qui s'accompliraient avec une vitesse comparable à celle du mouvement vibratoire résulteraient en réalité de la superposition de rayons diversement réfrangibles en même temps que diversement polarisés.

A une époque récente, un physicien allemand, M. Lippich, a prétendu qu'il n'y avait d'autre lumière polarisée que la lumière hétérogène, et que les apparences de la lumière naturelle sont dues à la combinaison de deux ou plusieurs rayons de longueurs d'ondes différentes. Les développements donnés dans ce Mémoire me paraissent suffisants pour établir qu'il est inutile, pour rendre compte des faits observés, d'avoir recours à une théorie aussi paradoxale (*).

VI.

Un autre physicien allemand, M. Stefan, a cru démontrer par l'expérience que la lumière naturelle ne contenait que des vibrations rectilignes, à l'exclusion des vibrations circulaires ou elliptiques (**). Sa démonstration n'est pas exacte, mais

(*) Le Mémoire de M. Lippich a été publié dans les *Comptes rendus de l'Académie de Vienne* pour 1863.

(**) *Voyez* les *Comptes rendus de l'Académie de Vienne* pour 1863, les *Annales de Poggendorff*, 4e livraison de 1865, et *les Mondes*, livraison du 2 juin 1865.

l'importance que l'Académie de Vienne a donnée au Mémoire de M. Stefan en le couronnant ne permet pas d'en négliger l'examen.

On peut d'abord remarquer que l'assertion de M. Stefan ne saurait être prise pour absolue, et ne pourrait s'appliquer tout au plus qu'à des lumières d'origine déterminée, mais non à toute espèce de lumière non polarisée. Quand bien même il serait vrai, par exemple, que la lumière solaire ne contient que des vibrations rectilignes, en la faisant réfléchir totalement dans un parallélipipède de Fresnel, on transformerait ces vibrations rectilignes en vibrations elliptiques, sans lui faire perdre les propriétés caractéristiques de la lumière naturelle. Au reste, M. Stefan paraît avoir lui-même senti cette difficulté, car il a soin de mentionner les sources de lumière qu'il a soumises à l'expérience (lumière solaire, lumière Drummond, lumière d'une lampe ordinaire, lumière dépolarisée par diffusion), et il annonce l'intention d'étendre ses recherches à d'autres sources.

Mais la conclusion que M. Stefan a prétendu tirer de ses expériences est fondée sur un raisonnement inexact, quoique peut-être spécieux. M. Stefan remarque d'abord, ce qui est parfaitement juste, que si l'on divise en deux parties un faisceau polarisé rectilignement, et qu'on fasse tourner de 90 degrés le plan de polarisation d'une des parties, il est impossible de produire des phénomènes d'interférence par la réunion ultérieure des deux faisceaux ainsi obtenus, tandis que, si l'on effectue une expérience analogue sur la lumière polarisée elliptiquement, la possibilité d'interférer subsiste, le résultat de la rotation de 90 degrés n'étant que d'amener le petit axe des ellipses de l'un des faisceaux sur le grand axe des ellipses de l'autre, et *vice versâ;* sur la lumière polarisée circulairement, une rotation de 90 degrés est évidemment sans aucun effet. De là l'expérience suivante : Soit le système d'un collimateur, d'un prisme et d'une lunette donnant un spectre bien pur et bien net. Si l'on recouvre d'une plaque de verre la moitié de l'objectif du collimateur ou de la lunette qui est tournée du côté de l'arête réfringente du prisme, le spectre devient sillonné de bandes noires équidistantes, dont les lois ne peuvent s'établir rigoureusement que par une théorie assez compliquée (*), mais qui résultent en définitive de la différence de marche établie par la plaque entre les deux moitiés du faisceau lumineux. Si l'on substitue à la plaque de verre une plaque de quartz perpendiculaire à l'axe, qui fasse tourner de 90 degrés le plan de polarisation des rayons d'une longueur d'onde déterminée, les vibrations rectilignes qui peuvent entrer dans la composition de la lumière naturelle ne contribueront plus à la formation des bandes d'interférence dans la région correspondante du spectre; il semble au contraire que les vibrations elliptiques devront

(*) *Voyez* le Mémoire de M. Stokes sur la théorie de certaines bandes vues dans le spectre, dans les *Transactions philosophiques* pour 1848.

continuer d'interférer d'une manière plus ou moins sensible. M. Stefan ayant vu les franges disparaître dans cette région (*) et devenir d'autant plus intenses qu'on s'en écartait davantage jusqu'à la région où la rotation atteignait 180 degrés, il en a conclu qu'il n'y avait dans la lumière naturelle que des vibrations rectilignes.

L'erreur de ce raisonnement consiste dans la confusion des effets des vibrations elliptiques polarisées en sens opposés. Il est facile de voir en effet que si dans la région du spectre correspondante à la rotation de 90 degrés les vibrations elliptiques polarisées de droite à gauche doivent donner en un certain point un maximum d'intensité, les vibrations elliptiques polarisées de gauche à droite doivent donner au même point un minimum, et *vice versâ;* de sorte que s'il y a dans la lumière naturelle compensation exacte entre les deux espèces opposées de vibrations, aucune bande d'interférence ne doit être visible. Soient

$$\xi = a \sin\varphi, \quad \eta = b\cos\varphi,$$

a et b étant supposés de même signe, les équations d'un rayon polarisé elliptiquement de gauche à droite. Si l'ellipse des vibrations tourne de 90 degrés vers la droite dans son plan, ces équations deviennent

$$\xi' = b\cos\varphi, \quad \eta' = -a\sin\varphi;$$

enfin, si les rayons définis par ces deux systèmes d'équations viennent concourir au même point, après qu'il s'est établi entre eux une différence de phase δ, les équations du mouvement résultant sont

$$x = \xi + \xi' = a\sin\varphi + b\cos(\varphi - \delta),$$
$$y = \eta + \eta' = b\cos\varphi - a\sin(\varphi - \delta),$$

et les règles ordinaires de l'interférence donnent pour l'intensité correspondante

$$2(a^2 + b^2 + 2ab\sin\delta).$$

Si l'on fait un calcul semblable sur la lumière polarisée elliptiquement de gauche à droite, on doit changer le signe d'un des coefficients a ou b, et l'expression à laquelle on parvient est

$$2(a^2 + b^2 - 2ab\cos\delta);$$

et il est clair que la moyenne des deux intensités ainsi déterminées, savoir :

$$2(a^2 + b^2),$$

(*) Avec la plaque de quartz dont M. Stefan faisait usage, cette région était entre la raie C et la raie D. mais très-voisine de la raie C.

est indépendante de la différence de phase δ. Par conséquent, toute lumière où il y aura compensation entre les deux espèces opposées de polarisation elliptique ne donnera aucune frange d'interférence dans une expérience pareille à celle de M. Stefan. Il est donc inutile de rien changer à l'idée qu'on se fait généralement de la lumière naturelle.

VII.

Lorsqu'un faisceau de lumière naturelle est soumis à une action qui modifie dans des rapports différents les intensités des composantes du mouvement vibratoire parallèles à deux plans rectangulaires, on dit que le faisceau résultant est *partiellement polarisé* (*). Le plan parallèle à la composante dont l'intensité est devenue la plus faible s'appelle le *plan de polarisation partielle*.

Or, si l'on représente par a' et b' dans le faisceau modifié les analogues de a et de b dans le faisceau naturel primitif, par p et q les rapports constants $\frac{a'}{a}$, $\frac{b'}{b}$, on aura

$$\mathrm{M}(a'^2) = p^2\mathrm{M}(a^2), \quad \mathrm{M}(b'^2) = q^2\mathrm{M}(b^2),$$

et comme $\mathrm{M}(a^2) = \mathrm{M}(b^2)$, puisque le faisceau primitif n'est pas polarisé, $\mathrm{M}(a'^2)$ et $\mathrm{M}(b'^2)$ auront des valeurs différentes. D'ailleurs on aura évidemment

$$\begin{aligned}\mathrm{M}(a'b'\cos\delta) &= pq\mathrm{M}(ab\cos\delta) = 0,\\ \mathrm{M}(a'b'\sin\delta) &= pq\mathrm{M}(ab\sin\delta) = 0.\end{aligned}$$

Donc les vibrations diverses qui par leur succession constituent un rayon partiellement polarisé doivent satisfaire aux équations suivantes, où A et B désignent deux nombres quelconques différents l'un de l'autre,

$$\begin{aligned}\mathrm{M}(a^2) &= \mathrm{A},\\ \mathrm{M}(b^2) &= \mathrm{B},\\ \mathrm{M}(ab\cos\delta) &= 0,\\ \mathrm{M}(ab\sin\delta) &= 0,\end{aligned}$$

lorsque les axes coordonnés sont l'un parallèle et l'autre perpendiculaire au plan de polarisation partielle.

Lorsqu'on change la direction des axes coordonnés, on a, en vertu des calculs

(*) Il est indifférent qu'en même temps que les intensités des composantes se modifient dans des rapports différents, une quantité constante s'ajoute à leur différence de phase, car cette addition laisse à la lumière naturelle toutes ses propriétés.

développés à l'article III, ω étant l'angle de l'axe des x' avec l'axe des x,

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(a'^2) &= \mathrm{M}(a^2)\cos^2\omega + \mathrm{M}(b^2)\sin^2\omega,\\
\mathrm{M}(b'^2) &= \mathrm{M}(a^2)\sin^2\omega + \mathrm{M}(b^2)\cos^2\omega,\\
\mathrm{M}(a'b'\cos\delta') &= [\mathrm{M}(b^2) - \mathrm{M}(a^2)]\sin\omega\cos\omega,\\
\mathrm{M}(a'b'\sin\delta') &= 0.
\end{aligned}$$

Réciproquement, si une succession de vibrations est telle, qu'on ait

$$\mathrm{M}(ab\sin\delta) = 0,$$

cette succession constitue un faisceau partiellement polarisé. Soient en effet A, B, C, les valeurs des trois expressions $\mathrm{M}(a^2)$, $\mathrm{M}(b^2)$, $\mathrm{M}(ab\cos\delta)$, A′, B′, C′, ce que deviennent ces expressions lorsqu'on passe du système donné d'axes rectangulaires à un autre système défini par l'angle ω compris entre l'axe des x' et l'axe des x, on aura

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}' &= \mathrm{A}\cos^2\omega + \mathrm{B}\sin^2\omega + 2\mathrm{C}\sin\omega\cos\omega,\\
\mathrm{B}' &= \mathrm{A}\sin^2\omega + \mathrm{B}\cos^2\omega - 2\mathrm{C}\sin\omega\cos\omega,\\
\mathrm{C}' &= \mathrm{C}(\cos^2\omega - \sin^2\omega) - (\mathrm{A}-\mathrm{B})\sin\omega\cos\omega,
\end{aligned}$$

et on trouvera toujours deux valeurs de ω différentes entre elles de 90 degrés, telles que $\mathrm{C}' = 0$, en résolvant l'équation

$$\tan^2\omega + \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{C}}\tan\omega - 1 = 0.$$

L'une de ces directions sera parallèle et l'autre perpendiculaire au plan de polarisation partielle. On donnera plus loin les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients A, B, C pour convenir à un système réel de vibrations.

Les axes coordonnés étant l'un parallèle et l'autre perpendiculaire au plan de polarisation partielle, le faisceau polarisé partiellement est entièrement défini par les coefficients $\mathrm{A} = \mathrm{M}(a^2)$, $\mathrm{B} = \mathrm{M}(b^2)$. En posant $\mathrm{A} = \mathrm{B} + \mathrm{A} - \mathrm{B}$, si A est plus grand que B, on peut considérer le faisceau polarisé partiellement comme constitué par un groupe de vibrations d'où résulterait un faisceau naturel d'intensité égale à 2B, et un groupe de vibrations rectilignes d'intensité égale à $\mathrm{A} - \mathrm{B}$, polarisées dans le plan de polarisation partielle. L'expression de faisceau partiellement polarisé se trouve ainsi justifiée.

VIII.

Les calculs développés dans l'article III de ce Mémoire conduisent encore aux deux conséquences suivantes :

Premièrement, les valeurs moyennes des composantes parallèles à deux axes rectangulaires d'un système quelconque de vibrations dépendent des valeurs moyennes A et B relatives à deux axes donnés, et d'un troisième coefficient $C = M(ab \cos\delta)$. L'action d'un analyseur biréfringent sur le système des vibrations est donc entièrement déterminée par ces trois coefficients.

En second lieu, si l'on ajoute à chaque instant une quantité arbitraire constante à la différence des phases de ces deux composantes au moyen de la réflexion totale ou du passage à travers une lame cristalline, le coefficient C change de valeur et sa variation dépend d'un quatrième coefficient $D = M(ab \sin\delta)$.

Par conséquent, si les valeurs de ces quatre coefficients sont connues, toutes les modifications que pourra éprouver le système par réflexion, réfraction, double réfraction sont entièrement déterminées, et deux systèmes pour lesquels ces coefficients ont les mêmes valeurs jouissent de propriétés tellement identiques, qu'aucun des phénomènes qu'on vient d'énumérer ne permet de les distinguer l'un de l'autre.

Il existe encore un mode particulier d'analyse de la lumière, très-peu usité pratiquement, mais d'une grande importance théorique, consistant à recevoir la lumière sur un cristal doué de pouvoir rotatoire qui la décompose généralement en deux rayons à vibrations elliptiques contrairement polarisées. Le calcul suivant fait voir que, soumis à ce mode d'analyse, deux systèmes de vibrations diversement polarisées, pour lesquels les quatre coefficients A, B, C, D ont les mêmes valeurs, produisent encore les mêmes effets. Soient toujours, à un instant donné,

$$x = a \sin\varphi,$$
$$y = b \sin(\varphi + \delta)$$

les équations d'une vibration particulière. Décomposons cette vibration en deux vibrations elliptiques contrairement polarisées et telles, que le grand axe de l'une fasse un angle ω avec l'axe des x. Rapportées à leurs axes, les équations de ces vibrations elliptiques seront de la forme

$$\xi = c \sin\gamma \sin(\varphi + \theta),$$
$$\eta = c \cos\gamma \cos(\varphi + \theta),$$

et

$$\xi' = c' \cos\gamma \sin(\varphi + \theta'),$$
$$\eta' = -c' \sin\gamma \cos(\varphi + \theta'),$$

et pour qu'elles reproduisent par leur superposition la vibration donnée, il faudra que

$$x \cos\omega + y \sin\omega = \xi + \xi',$$
$$-x \sin\omega + y \cos\omega = \eta + \eta',$$

c'est-à-dire, en développant chaque équation et égalant les coefficients de $\sin\varphi$ et de $\cos\varphi$ dans les deux membres de chacune d'elles,

$$\begin{aligned}
a\cos\omega + b\cos\delta\sin\omega &= c\cos\theta\sin\gamma + c'\cos\theta'\cos\gamma,\\
b\sin\delta\sin\omega &= c\sin\theta\sin\gamma + c'\sin\theta'\cos\gamma,\\
-a\sin\omega + b\cos\delta\cos\omega &= -c\sin\theta\cos\gamma + c'\sin\theta'\sin\gamma,\\
b\sin\delta\cos\omega &= c\cos\theta\cos\gamma - c'\cos\theta'\sin\gamma.
\end{aligned}$$

On déduit de là, par des calculs faciles,

$$\begin{aligned}
c\cos\theta &= a\sin\gamma\cos\omega + b\cos\delta\sin\gamma\sin\omega + b\sin\delta\cos\gamma\cos\omega,\\
c\sin\theta &= b\sin\delta\sin\gamma\sin\omega + a\cos\gamma\sin\omega - b\cos\delta\cos\gamma\cos\omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c^2 = {} & \cos^2\gamma\,(a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega - 2ab\cos\delta\sin\omega\cos\omega)\\
& + \sin^2\gamma\,(a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega + 2ab\cos\delta\sin\omega\cos\omega)\\
& + 2\sin\gamma\cos\gamma\, ab\sin\delta(\cos^2\omega - \sin^2\omega);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c'\cos\theta' &= a\cos\gamma\cos\omega + b\cos\delta\cos\gamma\sin\omega - b\sin\delta\sin\gamma\cos\omega,\\
c'\sin\theta' &= b\sin\delta\cos\gamma\sin\omega - a\sin\gamma\sin\omega + b\cos\delta\sin\gamma\cos\omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c'^2 = {} & \cos^2\gamma\,(a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega + 2ab\cos\delta\sin\omega\cos\omega)\\
& + \sin^2\gamma\,(a^2\cos^2\omega + b^2\cos^2\omega - 2ab\cos\delta\sin\omega\cos\omega)\\
& - 2\sin\gamma\cos\gamma\, ab\sin\delta(\cos^2\omega - \sin^2\omega).
\end{aligned}$$

Si l'on reçoit le rayon lumineux considéré sur un cristal à double réfraction elliptique tellement choisi, que, dans les vibrations elliptiques des deux rayons auxquels il donne naissance, le rapport des axes soit égal à $\tan g\gamma$, les intensités de ces rayons seront respectivement égales aux produits de c^2 et de c'^2 par des coefficients très-voisins de l'égalité, et leurs intensités moyennes seront proportionnelles à $M(c^2)$ et $M(c'^2)$, c'est-à-dire à

$$\begin{aligned}
& \cos^2\gamma\,(A\sin^2\omega + B\cos^2\omega - 2C\sin\omega\cos\omega) + \sin^2\gamma\,(A\cos^2\omega + B\sin^2\omega + 2C\sin\omega\cos\omega)\\
& \quad + 2\sin\gamma\cos\gamma D(\cos^2\omega - \sin^2\omega),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \cos^2\gamma\,(A\cos^2\omega + B\sin^2\omega + 2C\sin\omega\cos\omega) + \sin\gamma\,(A\sin^2\omega + B\cos^2\omega - 2C\sin\omega\cos\omega)\\
& \quad - 2\sin\gamma\cos\gamma D(\cos^2\omega - \sin^2\omega).
\end{aligned}$$

Elles ne dépendront donc que de A, B, C, D.

Ainsi tous les systèmes de vibrations où les quatre coefficients A, B, C, D ont les mêmes valeurs ont exactement les mêmes propriétés et ne peuvent être distingués les uns des autres par aucun moyen. On peut donc, avec M. Stokes, les appeler *systèmes équivalents*.

IX.

Une seule question reste encore à examiner, celle de savoir si les divers systèmes de vibrations caractérisés par des valeurs diverses des coefficients A, B, C, D peuvent se répartir en un petit nombre de groupes, présentant chacun un ensemble de propriétés communes, ou s'il faut se borner dans chaque cas particulier à déterminer, par une application des méthodes précédentes, les propriétés des divers systèmes qu'on rencontrera.

Il faut remarquer d'abord qu'à tout système de valeurs numériques des coefficients A, B, C, D ne répond pas nécessairement un système possible de vibrations diversement polarisées. Il est bien évident, par exemple, que les coefficients C et D ne sauraient être tous deux très-grands par rapport aux coefficients A et B. Il est même facile de démontrer qu'on a nécessairement, dans tout système réel de vibrations,

$$AB - (C^2 + D^2) > 0.$$

En effet, si l'on reprend les notations de l'article IV, on a

$$AB = (m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 + \ldots)(m_1 b_1^2 + m_2 b_2^2 + \ldots),$$
$$C^2 + D^2 = (m_1 a_1 b_1 \cos\delta_1 + m_2 a_2 b_2 \cos\delta^2 + \ldots)^2 + (m_1 a_1 b_1 \sin\delta_1 + m_2 a_2 b_2 \sin\delta_2 + \ldots)^2,$$

et on groupe aisément les termes de ces deux expressions de manière à leur donner la forme suivante :

$$AB = m_1^2 a_1^2 b_1^2 + m_2 a_2^2 b_2^2 + \ldots + m_1 m_2 (a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2) + \ldots + m_p m_q (a_p^2 b_q^2 + a_q^2 b_p^2) + \ldots,$$
$$C^2 + D^2 = m_1^2 a_1^2 b_1^2 + m_2^2 a_2^2 b_2^2 + \ldots + m_1 m_2 a_1 b_2 a_2 b_1 \cos(\delta_1 - \delta_2)$$
$$+ m_p m_q a_p b_q a_q b_p \cos(\delta_p - \delta_q) + \ldots.$$

Il en résulte que $AB - (C^2 + D^2)$ se réduit à une somme de termes de la forme

$$m_p m_q [a_p^2 b_q^2 + a_q^2 b_p^2 - a_p a_q b_p b_q \cos(\delta_p - \delta_q)];$$

or chacun de ces termes est évidemment plus grand que

$$m_p m_q (a_p b_q - a_q b_p)^2,$$

c'est-à-dire qu'une quantité qui est toujours nulle ou positive. $AB - (C^2 + D^2)$ est donc nécessairement nul ou positif.

Si d'abord on suppose $AB - (C^2 + D^2)$ égal à zéro, le système est équivalent à une vibration unique, invariable de forme, de grandeur et de position, car en faisant

$$a^2 = A, \quad b^2 = B, \quad \tang\delta = \frac{D}{C},$$

on a

$$ab\cos\delta = \sqrt{AB}\,\frac{C}{\sqrt{C^2+D^2}} = C,$$

$$ab\sin\delta = \sqrt{AB}\,\frac{D}{\sqrt{C^2+D^2}} = D.$$

Si AB est plus grand que $C^2 + D^2$, il y a une infinité de systèmes satisfaisant aux conditions

$$M(a^2) = A, \quad M(b^2) = B, \quad M(ab\cos\delta) = C, \quad M(ab\sin\delta) = D.$$

En effet, AB étant plus grand que $C^2 + D^2$, on peut trouver une infinité de groupes de nombres A' et B' tels, que l'on ait

$$A' < A, \quad B' < B, \quad A'B' = C^2 + D^2.$$

Les nombres A', B', C, D peuvent être considérés comme caractéristiques d'une vibration elliptique déterminée, et si l'on suppose que cette vibration alterne avec des vibrations constituant un faisceau partiellement polarisé suivant l'axe des x ou l'axe des y, dont les composantes parallèles à ces axes soient $A - A'$ et $B - B'$, on aura obtenu un des systèmes caractérisés par les valeurs données de A, B, C, D.

Parmi les systèmes en nombre infini qui jouissent tous des mêmes propriétés, il en est un qui par sa simplicité offre un intérêt particulier : c'est le système pour lequel $A - A' = B - B'$, et qui en conséquence peut être représenté par un faisceau de lumière naturelle et par un faisceau de lumière elliptique. Ces deux faisceaux sont l'un et l'autre entièrement déterminés. En appelant H la valeur commune de $A - A'$ et $B - B'$, on aura en effet

$$(A - H)(B - H) = C^2 + D^2,$$

d'où

$$H = \frac{A+B}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A-B)^2 + 4(C^2+D^2)}.$$

Ces deux valeurs sont réelles et positives, mais la plus grande étant supérieure à A et à B, la plus petite répond seule à la question, de sorte que

$$H = \frac{A+B}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(A-B)^2 + 4(C^2+D^2)}.$$

Le double de cette expression est l'intensité du faisceau de lumière naturelle qui peut être censé entrer dans la constitution du faisceau que l'on considère. Les éléments du faisceau elliptique qu'il y faut joindre sont d'ailleurs

$$a^2 = A - H = \frac{A - B}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(A - B)^2 + 4(C^2 + D^2)},$$

$$b^2 = B - H = -\frac{A - B}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(A - B)^2 + 4(C^2 + D^2)},$$

$$\cos\delta = \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}}, \quad \sin\delta = \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}}.$$

Ainsi tout faisceau lumineux homogène peut être constitué par des proportions déterminées de lumière naturelle et de lumière polarisée à vibrations rectilignes, circulaires ou elliptiques. On peut dire, en généralisant des expressions usitées, que tout faisceau lumineux est polarisé, naturel ou *partiellement polarisé*. Les caractères de la polarisation complète et de l'absence de toute polarisation sont connus; ceux des divers genres de polarisation partielle sont maintenant faciles à apercevoir.

1° Si un faisceau lumineux peut être censé formé d'un faisceau naturel et d'un faisceau polarisé rectilignement, les deux faisceaux en lesquels il se partage lorsqu'il rencontre sous l'incidence normale un cristal biréfringent ont des intensités variables avec l'orientation du cristal; l'intensité de chaque faisceau réfracté est maxima lorsque son plan de vibration est parallèle au plan de vibration de la lumière polarisée qui dans le faisceau incident se superpose à la lumière naturelle, et minima lorsqu'il lui est perpendiculaire. Le plan perpendiculaire à ce plan de vibration est, dans l'hypothèse de Fresnel, le plan de polarisation partielle. Une réflexion totale opérée dans le plan de polarisation partielle ou dans le plan perpendiculaire ne modifie pas les propriétés du faisceau; une réflexion totale opérée dans un autre plan transforme la lumière polarisée rectilignement en lumière elliptique, sans produire d'effet sur la lumière naturelle, et par conséquent modifie les propriétés du faisceau. C'est à un pareil faisceau qu'on applique ordinairement d'une manière exclusive l'expression de *faisceau partiellement polarisé*. On pourrait lui substituer celle de faisceau *en partie polarisé rectilignement*.

2° Si le faisceau lumineux peut être censé formé de lumière polarisée circulairement et de lumière naturelle, les intensités des deux faisceaux dans lesquels il est divisé par un analyseur biréfringent sont indépendantes de l'orientation, comme dans le cas de la lumière naturelle, mais ses propriétés sont modifiées par la réflexion totale qui transforme les vibrations circulaires en vibrations elliptiques ou rectilignes. La rotation uniforme d'une vibration elliptique de sens, de forme et de grandeur invariables est un moyen d'obtenir un pareil faisceau. On pourrait, pour le désigner, employer l'expression de faisceau *en partie polarisé circulairement*.

3° Si le faisceau peut être censé formé de lumière polarisée elliptiquement et de lumière naturelle, les intensités des faisceaux dans lesquels il est divisé par un analyseur biréfringent dépendent de l'orientation, comme dans le cas de la polarisation rectiligne partielle, mais la réflexion totale modifie toujours les propriétés du faisceau, dans quelque plan qu'elle s'opère. On pourrait désigner un pareil faisceau en disant qu'il est *en partie polarisé elliptiquement*.

X.

Dans d'assez nombreuses recherches, particulièrement dans les expériences polarimétriques, on a considéré comme lumière partiellement polarisée la lumière qu'on obtenait en superposant deux faisceaux inégaux, polarisés à angle droit, issus d'un même faisceau primitivement polarisé et présentant l'un par rapport à l'autre une très-grande différence de marche. Si les deux faisceaux superposés étaient égaux, on considérait la lumière comme naturelle. En réalité, dans ces expériences, chaque lumière homogène avait un état de polarisation déterminé, mais cet état variant très-rapidement avec la longueur d'onde, à cause de la grande différence de marche, les polarisations les plus diverses appartenaient à des rayons que l'œil est incapable de distinguer, et tant qu'on laissait le faisceau indécomposé, les propriétés de la lumière naturelle ou de la lumière partiellement polarisée étaient très-suffisamment imitées. Mais les expériences de MM. Fizeau et Foucault ont fait voir depuis longtemps quelle est la constitution réelle d'un pareil faisceau.

FIN DU TOME DEUXIÈME.