Annales scientifiques de l'É.N.S.

Claire Voisin

Sur l'application d'Abel-Jacobi des variétés de Calabi-Yau de dimension trois

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 27, nº 2 (1994), p. 209-226

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1994_4_27_2_209_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 27, 1994, p. 209 à 226.

SUR L'APPLICATION D'ABEL-JACOBI DES VARIÉTÉS DE CALABI-YAU DE DIMENSION TROIS

PAR CLAIRE VOISIN (1)

ABSTRACT. — This paper is a sequel to [20] where the existence of countably many "rigid" one-cycles in any Calabi-Yau threefold X was proved. Here we show that these cycles have non-torsion image in the intermediate jacobian of a general deformation of X.

0. Introduction

Cet article fait suite à [20], qu'il complète par la preuve du théorème suivant :

0.1. THÉORÈME. — *Soit* X *une variété de Calabi-Yau de dimension trois non rigide. Alors pour une déformation générale* X_t *de* X *l'application d'Abel-Jacobi* Φ_{X_t} *de* X_i *est non nulle modulo torsion.*

L'application d'Abel-Jacobi de X_t, pour t général dans $\mathscr{M}_X$ (la famille universelle locale de déformations de X), se factorise par le groupe $CH_1(X_t)_{hom}/CH_1(X_t)_{alg}$ des 1-cycles de X_t homologues à zéro, modulo les 1-cycles de X_t algébriquement équivalents à zéro. Par un argument bien connu dû à Griffiths, cela résulte en effet du fait que pour t général, $H^3(X_t)$ ne contient pas de sous-structure de Hodge contenue dans $F^1H^3(X_t)$, et même ne contient pas de classe entière contenue dans $F^1H^3(X_t)$. Ce dernier point se prouve en utilisant le fait qu'une partie de la variation infinitésimale de structure de Hodge de X est décrite par le cup-produit : $H^2(\Omega_X) \to \mathrm{Hom}(H^1(T_X), H^3(\mathscr{O}_X))$ qui est un isomorphisme, (donc injectif), sous l'hypothèse "K_X trivial" (et du fait que $\mathscr{M}_X$ est lisse [8]). On obtient donc le corollaire suivant de 0.1 :

0.2 COROLLAIRE. — *Pour une déformation générale* X_t *de* X, *on a* :

$$CH_1(X_t)_{hom}/CH_1(X_t)_{alg}$$

est non nul, modulo torsion.

(1) Avec le soutien partiel du projet Science "Geometry of Algebraic varieties", Contract SCI-0398-C (A).

Les énoncés 0.1 et 0.2 ont été prouvés par Griffiths dans [13], dans le cas où X est une hypersurface quintique de $\mathbb{P}^4$. Par la suite, Clemens [4], toujours pour les quintiques de $\mathbb{P}^4$, a montré le résultat plus fort suivant :

0.3. THÉORÈME. — *Pour une quintique générale* $X_t \subset \mathbb{P}^4$, *le* $\mathbb{Q}$-*espace vectoriel* $(CH_1(X_t)_{hom}/CH_1(X_t)_{alg}) \otimes \mathbb{Q}$ *est de dimension infinie.*

Je ne sais pas si le genre de méthode employé ici pour prouver 0.1 est susceptible de donner 0.3 pour des variétés de Calabi-Yau quelconques.

Dans les travaux [1], [2], [3], [16], [17], 0.3 a été étendu à d'autres familles de variétés de dimension 3 à fibré canonique trivial; (en particulier [2] et [16] concernent les variétés abéliennes qui ne sont pas de Calabi-Yau). Les méthodes employées dans ces travaux sont limitées par le recours à des considérations globales sur l'espace des modules de X (groupe de Galois dans [16], groupe de monodromie et dégénérations spéciales dans les autres cas), ou par la méthode de construction de cycles non triviaux dans X_t, supposant une connaissance de la géométrie particulière de X. Dans [19], dont la méthode est reprise dans [3], on a montré comment l'étude du lieu de Noether-Lefschetz pour les sections hyperplanes de X (une quintique de $\mathbb{P}^4$) permet de montrer « abstraitement » l'existence de 1-cycles « intéressants » dans X. (La variante proposée dans [3] utilise le lieu de Noether-Lefschetz pour des variétés de Fano de dimension quatre contenant X).

Dans [20], on a généralisé cette approche par l'étude des variations de structure de Hodge pour les hypersurfaces de haut degré dans X, où X est une variété de Calabi-Yau de dimension trois munie d'un fibré inversible ample L. Le résultat de [20] peut s'énoncer de la façon suivante :

0.4. THÉORÈME. — *Soit* (X, L) *comme ci-dessus; pour tout entier n suffisamment divisible, les couples* (Σ, λ) *satisfaisant* :

(i) $\Sigma \in |L^n|$ *est lisse*,

(ii) $\lambda \in H^2(\Sigma, \mathbb{Q})^0 \cap F^1 H^2(\Sigma)$ [*où* $H^2(\Sigma)^0$ *est égal au noyau du morphisme de Gysin* $j_*: H^2(\Sigma, \mathbb{Q}) \to H^4(X, \mathbb{Q})$],

(iii) $\{\Sigma\}$ *est une composante réduite de codimension* $h^2(\mathcal{O}_\Sigma)$ *du lieu de Noether-Lefschetz* $\mathcal{S}_n(X) \subset V_n$, (*où* $V_n \subset |L^n|$ *est l'ouvert paramétrant des surfaces lisses*), *sont denses dans l'ensemble des couples* (Σ, λ), $\Sigma \in V_n$, $\lambda \in F^1 H^2(\Sigma) \cap H^2(\Sigma, \mathbb{R})^0$.

Un des ingrédients de la preuve de 0.4 est un argument dû à M. Green (*cf.* [15], [20], introduction) réduisant 0.4 à un énoncé formel concernant les variations infinitésimales de structure de Hodge de $\Sigma \in V_n$.

On explique également dans [20] (*cf.* aussi [19]) comment les couples (Σ, λ) satisfaisant 0.4, (i) (ii) (iii) se déforment uniquement avec $X_t \in \mathcal{M}_X$, fournissant des familles de 1-cycles $Z_\lambda(t) \in CH_1(X_t)_{hom} \otimes \mathbb{Q}$ paramétrées par la base $\mathcal{M}_X$. Le théorème 0.1 est obtenu en montrant que pour au moins une de ces familles on a, pour t général dans $\mathcal{M}_X$, $\Phi_{X_t}(Z_\lambda(t) \neq 0$ dans $J(X_t)$ modulo torsion.

Dans la section 1, on décrit en termes de variation de structure de Hodge mixte des ouverts $U_t = X_t \setminus \Sigma_t$ les conséquences de l'annulation des fonctions normales $\nu_\lambda(t) := \Phi_{X_t}(Z_\lambda(t))$. On ne suppose pas dans le paragraphe 1 que X est de Calabi-Yau. La base B, $(t \in B)$, paramètre des déformations du couple (Σ, X), la seule hypothèse étant l'existence d'une classe λ_t localement constante, $\lambda_t \in H^2(\Sigma_t, \mathbb{Q})^0$, algébrique sur Σ_t. Les énoncés rassemblés dans cette section ne sont pas nouveaux.

Dans la section 2, on fait l'hypothèse supplémentaire « K_X trivial » et, utilisant le théorème 0.4, on montre la proposition 2.8 qui décrit les conséquences, en termes de variation infinitésimale de structure de Hodge mixte des ouverts $X \setminus \Sigma$, $\Sigma \in V_n$, de l'hypothèse « Φ_{X_t} triviale pour t général dans $\mathcal{M}_X$ ».

Dans la section 3 on conclut par l'absurde la preuve du théorème 0.1 en étudiant d'un point de vue algébrique les propriétés génériques de ces variations infinitésimales.

Je remercie F. Bardelli qui m'a suggéré le recours au formalisme des variations de structure de Hodge mixte des ouverts $X \setminus \Sigma$ dans cette étude.

1. Variations de structure de Hodge mixte et trivialité des fonctions normales

1.0. Soient X une variété projective de dimension 3, $\Sigma \underset{j_\Sigma}{\subsetneq} X$ une surface lisse. On notera $U = X \setminus \Sigma$. Faisant l'hypothèse $H^1(\mathcal{O}_X) = 0$, et $\mathcal{O}_X(\Sigma)$ ample on a la suite exacte:

1.0.1.

$$0 \to H^3(X) \to H^3(U) \xrightarrow{\text{Res}} H^2(\Sigma)^0 \to 0,$$

où $H^2(\Sigma)^0$ est le noyau du morphisme de Gysin $j_{\Sigma *} : H^2(\Sigma) \to H^4(X)$. 1.0.1 est une suite exacte pour les groupes de cohomologie entière modulo torsion, qu'on notera $H^\cdot(-, \mathbb{Z})$, ainsi que pour les espaces de cohomologie complexe. De plus chacun de ces espaces est muni d'une filtration de Hodge qu'on notera F^i et telle que:

$$F^i H^3(U, \mathbb{C}) \cap H^3(X, \mathbb{C}) = F^i H^3(X), \qquad \text{Res}\, F^i H^3(U, \mathbb{C}) = F^{i-1} H^2(\Sigma, \mathbb{C})^0, \quad [6].$$

1.1. Supposons maintenant qu'il existe une classe $\lambda \in H^2(\Sigma)^0$ algébrique, c'est-à-dire $\lambda \in H^2(\Sigma, \mathbb{Z})^0 \cap F^1 H^2(\Sigma, \mathbb{C})^0$. Sous les hypothèses de 1.0, on a $H^1(\Sigma, \mathbb{Z}) = 0$ et λ détermine un cycle $Z_\lambda \in CH_1(\Sigma)$, tel que $[Z_\lambda] = \lambda$. Comme $j_{\Sigma *}(\lambda) = 0$, le cycle $j_{\Sigma *}(Z_\lambda)$ est dans $CH_1(X)_{\text{hom}}$ et on dispose donc du point $\Phi_X(j_{\Sigma *}(Z_\lambda)) \in JX$, où $\Phi_X : CH_1(X)_{\text{hom}} \to JX$ est l'application d'Abel-Jacobi de X à valeurs dans la jacobienne intermédiaire de X :

$$JX = H^3(X, \mathbb{C})/F^2 H^3(X, \mathbb{C}) + H^3(X, \mathbb{Z}) \quad (cf.\ [12]).$$

On a le lemme suivant:

1.2. LEMME. — *Le point* $\Phi_X(j_{\Sigma *}(Z_\lambda))$ *est obtenu de la manière suivante*:

Comme 1.0.1 *est exacte au niveau de la cohomologie entière, il existe une classe* $\lambda'_{\mathbb{Z}} \in H^3(U, \mathbb{Z})$ *telle que* $\text{Res}\, \lambda'_{\mathbb{Z}} = \lambda$.

Comme 1.0.1 *est stricte pour les filtrations de Hodge, il existe* $\lambda'_F \in F^2 H^3(U, \mathbb{C})$, *telle que* $\text{Res}\, \lambda'_F = \lambda \in F^1 H^2(\Sigma, \mathbb{C})^0$. *La différence* $\lambda'_{\mathbb{Z}} - \lambda'_F$ *est alors dans* $H^3(X, \mathbb{C})$ *et bien définie modulo* $H^3(X, \mathbb{Z}) + F^2 H^3(X, \mathbb{C})$. *C'est l'élément de* JX *cherché.*

Le lemme 1.2 résulte immédiatement de la description de l'application d'Abel-Jacobi donnée dans [7], et due à Deligne; le cycle Z_λ peut être représenté par une combinaison $\Sigma n_i C_i$ avec $C_i \subset \Sigma$. Soit $Z = UC_i$. On a une structure de Hodge mixte sur $H^3(X \setminus Z)$, compatible (strictement) avec la suite exacte.

1.2.1.
$$0 \to H^3(X) \to H^3(X \setminus Z) \to H^4_z(X) \to H^4(X),$$

et les filtrations de Hodge sur $H^3(X)$, et $H^4_Z(X)$ [cette dernière étant triviale, pure de type (2, 2)].

Le cycle Z_λ admet une classe α_λ dans $H^4_Z(X) = F^2 H^4_Z(X)$, s'annulant par hypothèse dans $H^4(X, \mathbb{Z})$; dans [7], il est montré que $\Phi_X(Z_\lambda)$ est égal à la différence, bien définie dans JX, de deux relèvements $\alpha'_{\lambda, \mathbb{Z}}$ et $\alpha'_{\lambda, F}$ de α_λ dans $H^3(X \setminus Z, \mathbb{Z})$ et $F^2 H^3(X \setminus Z, \mathbb{C})$ respectivement.

Le lemme 1.2 est donc une conséquence de l'existence d'un morphisme naturel entre les suites exactes 1.2.1 et 1.0.1:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & H^3(X) & \to & H^3(U) & \to & H^2(\Sigma) \\ & \| & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 \to & H^3(X) & \to & H^3(X \setminus Z) & \to & H^4_Z(X) = H^2_Z(\Sigma) \end{array}$$

où toutes les flèches verticales sont des morphismes de structure de Hodge mixtes.

Du lemme 1.2, on déduit immédiatement le corollaire suivant:

1.3. Corollaire. — *Avec les notations et les hypothèses de* 1.0, 1.1 *on a* $\Phi_X(j_{\Sigma_*}(Z_\lambda)) = 0$ *dans* JX, *modulo torsion, si et seulement si il existe une classe* $\lambda' \in H^3(U, \mathbb{Q}) \cap F^2 H^3(U)$ *telle que* $\operatorname{Res} \lambda' = \lambda$.

1.4. Dans la suite, on considérera des classes λ rationnelles et algébriques, plutôt qu'entières. Tout ce qui précède s'étend mot pour mot, à condition de tensoriser les groupes de Chow par $\mathbb{Q}$ et de considérer l'application d'Abel-Jacobi à valeurs dans JX modulo torsion. En particulier, le corollaire 1.3 reste valide en supposant $\lambda \in H^2(\Sigma, \mathbb{Q})^0 \cap F^1 H^2(\Sigma, \mathbb{C})^0$.

On peut reformuler le corollaire 1.3 en utilisant le lemme suivant:

1.5. Lemme. — *Pour l'ouvert* U *de* 1.0, *l'application* Res *induit un isomorphisme*:

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{Res}: & F^2 H^3(U) \cap H^3(U, \mathbb{R}) & \stackrel{\sim}{\to} & F^1 H^2(\Sigma)^0 \cap H^2(\Sigma, \mathbb{R})^0 \\ & \| & & \| \\ & \mathrm{W}_{\mathbb{R}} & & H^{1,1}_{\mathbb{R}}(\Sigma)^0 \end{array}$$

Démonstration. — Le noyau de cette application est égal à $F^2 H^3(X) \cap H^3(X, \mathbb{R})$ qui est nul. Si d'autre part $\lambda \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(\Sigma)^0$ λ admet des relèvements $\lambda'_{\mathbb{R}} \in H^3(U, \mathbb{R})$, et $\lambda'_F \in F^2 H^3(U, \mathbb{C})$. On peut modifier $\lambda'_{\mathbb{R}}$ par $\lambda''_{\mathbb{R}} \in H^3(X, \mathbb{R})$ et λ'_F par $\lambda''_F \in F^2 H^3(X, \mathbb{C})$. Comme $H^3(X, \mathbb{C}) = H^3(X, \mathbb{R}) + F^2 H^3(X)$, on peut trouver $\lambda''_{\mathbb{R}}$ et λ''_F tels que

$\lambda'_{\mathbb{R}}-\lambda'_{F}=\lambda''_{\mathbb{R}}-\lambda''_{F}$ dans $H^3(X, \mathbb{C})$, et donc $\lambda'_{\mathbb{R}}-\lambda''_{\mathbb{R}}=\lambda'_{F}-\lambda''_{F}\in W_{\mathbb{R}}$ et est envoyé sur λ par Res.

Si $\lambda\in H^2(\Sigma, \mathbb{Q})^0\cap F^1H^2(\Sigma)^0$ est tel que son image $\tilde{\lambda}\in W_{\mathbb{R}}$ par $(\mathrm{Res}_{|W_{\mathbb{R}}})^{-1}$ est dans $H^3(U, \mathbb{Q})$, le corollaire 1.3 montre que $\Phi_X(j_{\Sigma_*}(Z_\lambda))=0$ dans JX (mod. torsion). Inversement si $\Phi_X(j_{\Sigma_*}(Z_\lambda))=0$ dans JX (mod. torsion), le corollaire 1.3 fournit $\lambda'\in H^3(U, \mathbb{Q})\cap F^2H^3(U)$ tel que Res $\lambda'=\lambda$. On a alors nécessairement $\lambda'=\tilde{\lambda}$ par 1.5. On a donc prouvé :

1.6. Proposition. — *Pour* $\lambda\in H^2(\Sigma, \mathbb{Q})^0\cap F^1H^2(\Sigma)^0$ *on a* $\Phi_X(j_{\Sigma_*}(Z_\lambda))=0$ *dans* JX *(mod. torsion) si et seulement si le relèvement* $\tilde{\lambda}$ *de* λ *dans* $W_{\mathbb{R}}$ *est un élément de* $H^3(U, \mathbb{Q})$.

1.7. Notation. — On notera $W_{\mathbb{C}}=W_{\mathbb{R}}\otimes\mathbb{C}\subset F^2H^3(U)$ et $\bar{W}_{\mathbb{C}}$ son image dans $F^2H^3(U)/F^3H^3(U)$. Comme $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(\Sigma)^0\otimes\mathbb{C}\simeq F^1H^2(\Sigma)^0/F^2H^2(\Sigma)^0\simeq H^1(\Omega_\Sigma)^0$ et que Res est compatible aux filtrations de Hodge et donc fournit une application notée de la même manière :

$$\mathrm{Res}:\quad F^2H^3(U)/F^3H^3(U)\to F^1H^2(\Sigma)^0/F^2H^2(\Sigma)^0,$$

le lemme 1.5 donne un isomorphisme :

$$\mathrm{Res}_{|\bar{W}_{\mathbb{C}}}:\quad \bar{W}_{\mathbb{C}}\to H^1(\Omega_\Sigma)^0.$$

1.8. On considère maintenant une déformation de la situation 1.0, qu'on supposera paramétrée par une base lisse B. On se donne donc une variété lisse $\mathscr{X}$, une application $\pi:\mathscr{X}\to B$ propre et lisse, à fibres de dimension trois projectives, et un diviseur lisse $\mathscr{G}\underset{j_\Sigma}{\subsetneq}\mathscr{X}$ tel que $\pi_\Sigma:=\pi_{|\mathscr{G}}:\mathscr{G}\to B$ reste propre et lisse. Soient $\mathscr{U}=\mathscr{X}\setminus\mathscr{G}$ et $\pi_U=\pi_{|\mathscr{U}}$.

1.8.1. On notera H^3_X, H^3_U et $(H^2_\Sigma)^0$ les systèmes localement constants sur B égaux respectivement à $R^3\pi_*\mathbb{Z}$, $R^3\pi_{U_*}\mathbb{Z}$, $\mathrm{Ker}(R^2\pi_{\Sigma_*}\mathbb{Z}\xrightarrow[j_{\Sigma_*}]{}R^4\pi_*\mathbb{Z})$ (cohomologie entière mod. torsion). La version en famille de 1.0.1 donne la suite exacte :

1.8.2.

$$0\to H^3_X\to H^3_U\xrightarrow{\mathrm{Res}}(H^2_\Sigma)^0\to 0.$$

1.8.3. Soient $\mathscr{H}^3_X$, $\mathscr{H}^3_U$, $(\mathscr{H}^2_\Sigma)^0$ les fibrés vectoriels holomorphes plats, munis de leur connexion de Gauss-Manin ∇, égaux respectivement à $H^3_X\otimes_{\mathbb{Z}}\mathscr{O}_B$, $H^3_U\otimes_{\mathbb{Z}}\mathscr{O}_B$, $(H^2_\Sigma)^0\otimes_{\mathbb{Z}}\mathscr{O}_B$. D'après ([12], [21]), chacun de ces fibrés est muni de sa filtration de Hodge par des sous-fibrés $F^i\mathscr{H}$, et la suite exacte :

1.8.4.

$$0\to\mathscr{H}^3_X\to\mathscr{H}^3_U\xrightarrow{\mathrm{Res}}(\mathscr{H}^2_\Sigma)^0\to 0$$

est strictement compatible avec F.

D'autre part, pour chacun de ces fibrés, ∇ satisfait la condition de transversalité :

1.8.5. $$\nabla F^i \mathscr{H} \subset F^{i-1} \mathscr{H} \otimes \Omega_B.$$

1.8.6. Soient $(\mathscr{H}_U^3)_{\mathbb{R}}^\infty$ le fibré $\mathscr{C}^\infty$ réel égal à $H_U^3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{C}^\infty(B, \mathbb{R})$ et $(\mathscr{H}_U^3)_{\mathbb{C}}^\infty$ le fibré $\mathscr{C}^\infty$ complexe égal à $H_U^3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{C}^\infty(B, \mathbb{C})$. De même soit $((\mathscr{H}_\Sigma^2)^0)_{\mathbb{R}}^\infty = (H_\Sigma^2)^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{C}^\infty(B, \mathbb{R})$. On a un sous-fibré $\mathscr{C}^\infty$ réel $\mathscr{H}_{\mathbb{R}}^{1,1} \subset ((\mathscr{H}_\Sigma^2)^0)_{\mathbb{R}}^\infty$ défini par :

$$\mathscr{H}_{\mathbb{R}}^{1,1} = (F^1 \mathscr{H}_\Sigma^2)^0 \otimes_{\mathscr{O}_B} \mathscr{C}^\infty(B, \mathbb{C}) \cap ((\mathscr{H}_\Sigma^2)^0)_{\mathbb{R}}^\infty.$$

1.8.7. Le lemme 1.5 « mis en famille » montre que :

$$W_{\mathbb{R}} = F^2 \mathscr{H}_U^3 \otimes_{\mathscr{O}_B} \mathscr{C}^\infty(B, \mathbb{C}) \cap (\mathscr{H}_U^3)_{\mathbb{R}}^\infty$$

détermine un sous-fibré $\mathscr{C}^\infty$ réel de $(\mathscr{H}_U^3)_{\mathbb{R}}^\infty$, tel que le résidu $\operatorname{Res} : (\mathscr{H}_U^3)_{\mathbb{R}}^\infty \to ((\mathscr{H}_\Sigma^2)^0)_{\mathbb{R}}^\infty$ fournisse un isomorphisme $\operatorname{Res} : W_{\mathbb{R}} \to \mathscr{H}_{\mathbb{R}}^{1,1}$. Pour λ une section de $\mathscr{H}_{\mathbb{R}}^{1,1}$ on notera $\tilde{\lambda} \in W_{\mathbb{R}}$ son image par $(\operatorname{Res}_{|W_{\mathbb{R}}})^{-1}$.

1.9. Supposons qu'on ait une section localement constante rationnelle $\lambda \in (H_\Sigma^2)^0 \otimes \mathbb{Q}$. Si λ est algébrique sur B, *i.e.* $\lambda \in F^1(\mathscr{H}_\Sigma^2)^0$ on définit $\nu_\lambda \in \mathscr{J} \otimes \mathbb{Q}$, la fonction normale associée à λ, de la façon suivante : $\mathscr{J} = \mathscr{H}_X^3 / F^2 \mathscr{H}_X^3 \oplus H_X^3$ est le faisceau de sections holomorphes de la famille de jacobiennes intermédiaires

$$t \in B \to J(X_t), \qquad \text{et} \qquad \mathscr{J} \otimes \mathbb{Q} = \mathscr{H}_X^3 / F^2 \mathscr{H}_X^3 \oplus H_X^3 \otimes \mathbb{Q}.$$

Soient comme en 1.2 des relèvements $\lambda'_{\mathbb{Q}}$ et λ'_F de λ dans $H_U^3 \otimes \mathbb{Q}$ et $F^2 \mathscr{H}_U^3$ respectivement. Alors ν_λ est définie comme l'image de $\lambda'_{\mathbb{Q}} - \lambda'_F$ dans $\mathscr{J} \otimes \mathbb{Q}$.

1.9.1. D'après le lemme 1.2, ν_λ peut aussi se définir comme la section $t \mapsto \Phi_{X_t}(j_{\Sigma_*}(Z_{\lambda,t}))$ de la famille de jacobiennes intermédiaires (modulo torsion), où $Z_\lambda, t \in \operatorname{Pic} \Sigma_t \otimes \mathbb{Q}$ varie holomorphiquement avec t, et est tel que $[Z_{\lambda,t}] = \lambda_t \in H^2(\Sigma_t, \mathbb{Q})$.

La proposition 1.6 fournit alors :

1.10. Proposition. — *Sous les hypothèses de* 1.9, *et identifiant*

$$\lambda \in (H_\Sigma^2)^0 \otimes \mathbb{Q} \cap F^1(\mathscr{H}_\Sigma^2)^0$$

à une section λ *de* $\mathscr{H}_{\mathbb{R}}^{1,1}$, *on a* : $\nu_\lambda = 0$ *dans* $\mathscr{J} \otimes \mathbb{Q}$ *si et seulement si* $\tilde{\lambda} \in W_{\mathbb{R}}$ *est rationnelle* i.e. *provient, en tant que section de* $(\mathscr{H}_U^3)_{\mathbb{R}}^\infty$, *de* $H_U^3 \otimes \mathbb{Q} \subset (\mathscr{H}_U^3)_{\mathbb{R}}^\infty$.

Comme les sections rationnelles sont aussi plates, on en déduit :

1.11. Corollaire. — *Sous les hypothèses de* 1.9, *si* $\nu_\lambda = 0$, *la section* $\tilde{\lambda}$ *de* $W_{\mathbb{R}} \subset F^2 \mathscr{H}_U^3 \otimes \mathscr{C}^\infty(B) \subset (\mathscr{H}_U^3)_{\mathbb{C}}^\infty$ *est une section plate de* $\mathscr{H}_U^3$, *contenue dans* $F^2 \mathscr{H}_U^3$.

1.12. La transversalité de la connexion de Gauss-Manin $\nabla^U : \mathscr{H}_U^3 \to \mathscr{H}_U^3 \otimes \Omega_B$ (*cf.* 1.8.5), permet de définir l'application $\bar{\nabla}^U$ $\mathscr{O}_B$-linéaire :

$$\bar{\nabla}^U : F^2 \mathscr{H}_U^3 / F^3 \mathscr{H}_U^3 \to (F^1 \mathscr{H}_U^3 / F^2 \mathscr{H}_U^3) \otimes \Omega_B,$$

qui rend commutatif le diagramme suivant :

1.12.1.

$$\begin{array}{ccc} \nabla^{\mathrm{U}}: \mathrm{F}^3\,\mathscr{H}^3_{\mathrm{U}} & \to & \mathrm{F}^2\,\mathscr{H}^3_{\mathrm{U}} \otimes \Omega_{\mathrm{B}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \nabla^{\mathrm{U}}: \mathrm{F}^2\,\mathscr{H}^3_{\mathrm{U}} & \to & \mathrm{F}^1\,\mathscr{H}^3_{\mathrm{U}} \otimes \Omega_{\mathrm{B}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar\nabla^{\mathrm{U}}: \mathrm{F}^2\,\mathscr{H}^3_{\mathrm{U}}/\mathrm{F}^3\,\mathscr{H}^3_{\mathrm{U}} & \to & (\mathrm{F}^1\,\mathscr{H}^3_{\mathrm{U}}/\mathrm{F}^2\,\mathscr{H}^3_{\mathrm{U}}) \otimes \Omega_{\mathrm{B}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}.$$

On notera $\bar\nabla^{\mathrm{U}}_t: \mathrm{F}^2\,\mathrm{H}^3(\mathrm{U}_t)/\mathrm{F}^3\,\mathrm{H}^3(\mathrm{U}_t) \to (\mathrm{F}^1\,\mathrm{H}^3(\mathrm{U}_t)/\mathrm{F}^2\,\mathrm{H}^3(\mathrm{U}_t)) \otimes \Omega_{\mathrm{B},\,t}$ la fibre de $\bar\nabla^{\mathrm{U}}$ au point $t \in \mathrm{B}$.

1.13. Pour une section plate $\tilde\lambda$ de $\mathscr{H}^3_{\mathrm{U}}$, contenue dans $\mathrm{F}^2\,\mathscr{H}^3_{\mathrm{U}}$, la commutativité de 1.12.1 montre que la projection $\bar\lambda$ de $\tilde\lambda$ dans $\mathrm{F}^2\,\mathscr{H}^3_{\mathrm{U}}/\mathrm{F}^3\,\mathscr{H}^3_{\mathrm{U}}$ est dans le noyau de $\bar\nabla^{\mathrm{U}}$ en chaque point $t \in \mathrm{B}$.

La proposition suivante résulte donc de 1.11.

1.14 Proposition. — *Sous les hypothèses de* 1.9, *soit*

$$0 \in \mathrm{B}, \qquad et \qquad \lambda_0 \in \mathrm{H}^2(\Sigma_0,\,\mathbb{Q})^0 \cap \mathrm{F}^1\,\mathrm{H}^2(\Sigma_0)$$

la valeur de la section λ *au point* 0. *Voyons* λ_0 *comme un élément de* $\mathrm{H}^1(\Omega_{\Sigma_0})^0$ *et soit* $\bar{\bar\lambda}_0$ *son relèvement dans* $\bar{\mathrm{W}}_{\mathbb{C}}(0) \subset \mathrm{F}^2\,\mathrm{H}^3(\mathrm{U}_0)/\mathrm{F}^1\,\mathrm{H}^3(\mathrm{U}_0)$, *où* $\bar{\mathrm{W}}_{\mathbb{C}}(0)$ *est défini en* 1.7. *Alors, si* $\nu_\lambda = 0$ *on a* : $\bar{\bar\lambda}_0 \in \operatorname{Ker} \bar\nabla^{\mathrm{U}}_{(0)}$.

2. Le cas des variétés de Calabi-Yau

2.0. Dans cette section, on suppose que X est une variété de Calabi-Yau de dimension 3. (En fait cette hypothèse n'intervient réellement qu'à partir de 2.5). On note $\mathscr{M}_{\mathrm{X}}$ un ouvert usuel (qu'on s'autorise à choisir arbitrairement petit) de la famille universelle locale des déformations de X. $\mathscr{M}_{\mathrm{X}}$ est lisse au point 0 paramétrant la variété $\mathrm{X} = \mathrm{X}_0$ [8]. Soit L un fibré inversible ample sur X. Pour tout entier n, soit $\mathrm{V}_n \subset \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathrm{X},\,\mathrm{L}^n))$ l'ouvert paramétrant les surfaces lisses $\Sigma \subset \mathrm{X}$, $\Sigma \in |\mathrm{L}^n|$. On notera $\mathscr{M}^n_{\mathrm{X},\,\Sigma} = \bigcup_{t \in \mathscr{M}_{\mathrm{X}}} \mathrm{V}_{n,\,t}$ [comme $\mathrm{H}^1(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}) = \mathrm{H}^2(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}) = 0$, le fibré L se déforme uniquement en L_t]. Soit $p: \mathscr{M}^n_{\mathrm{X},\,\Sigma} \to \mathscr{M}_{\mathrm{X}}$ la projection naturelle, de fibre $\mathrm{V}_{n,\,t}$ au-dessus de $t \in \mathscr{M}_{\mathrm{X}}$.

Pour n assez grand on a alors :

2.1. Lemme. — (i) $\mathscr{M}^n_{\mathrm{X},\,\Sigma}$ *est lisse en chacun des points de* $\mathrm{V}_n = \mathrm{V}_{n,\,0}$.

(ii) *L'espace tangent à* $\mathscr{M}^n_{\mathrm{X},\,\Sigma}$ *au point* 0′ *paramétrant* (X, Σ), $\Sigma \in \mathrm{V}_n$, *s'identifie à* $\mathrm{H}^1(\mathrm{T}^\Sigma_{\mathrm{X}})$, *où* $\mathrm{T}^\Sigma_{\mathrm{X}}$ *est défini par la suite exacte* :

2.1.1 $$0 \to \mathrm{T}^\Sigma_{\mathrm{X}} \to \mathrm{T}_{\mathrm{X}} \to \mathrm{N}_\Sigma \mathrm{X} \to 0.$$

(iii) *L'application naturelle* $T_X^\Sigma \to T_\Sigma$ *rendant commutatif le diagramme* 2.1.2.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & T_X^\Sigma & \to & T_X & \to & N_\Sigma X & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & T_\Sigma & \to & T_{X|\Sigma} & \to & N_\Sigma X & \to & 0 \end{array}$$

induit un isomorphisme $H^1(T_X^\Sigma) \to H^1(T_\Sigma)$.

Démonstration. — (i) Soient $\pi : \mathscr{X} \to \mathscr{M}_X$ la famille universelle paramétrée par $\mathscr{M}_X$ et $\mathscr{L}^n \to \mathscr{X}$ le fibré inversible étendant uniquement L^n ($H^1(\mathscr{O}_X) = H^2(\mathscr{O}_X) = 0$, et $\operatorname{Pic} \mathscr{M}_X = 0$). Alors $\mathscr{M}_{X,\Sigma}^n$ est un ouvert de $\mathbb{P}(R^0 \pi_* \mathscr{L}^n)$ et $R^0 \pi_* \mathscr{L}^n$ est localement libre sur $\mathscr{M}_X$ dès que $H^1(X, L^n) = 0$, ce qui montre (i).

(ii) En complétant 2.1.1, on obtient la suite exacte:

2.1.3.
$$0 \to T_X(-\Sigma) \to T_X^\Sigma \to T_\Sigma \to 0;$$

pour n suffisamment grand on a:

$$H^1(T_X(-\Sigma)) = 0 = H^2(T_X(-\Sigma)),$$

ce qui prouve (iii).

(ii) $H^1(T_X^\Sigma)$ est l'espace tangent à la famille des déformations du couple (Σ, X), $\Sigma \subset X$; on a donc une application naturelle classifiante: $T\mathscr{M}_{X,\Sigma(0')}^n \to H^1(T_X^\Sigma)$. On a le diagramme suivant:

2.1.4.
$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & H^1(T_X^\Sigma) & \to & H^1(T_X) & & \\ & & & & \wr\| & & \wr\| & & \\ 0 & \to & H^0(N_\Sigma X) & \to & H^1(T_\Sigma) & \to & H^1(T_{X|\Sigma}) & \to & 0. \end{array}$$

La suite exacte du bas est obtenue en vérifiant que $H^0(T_{X|\Sigma}) = 0 = H^1(N_\Sigma X)$ pour n assez grand. L'isomorphisme vertical de droite est donné par l'annulation $H^1(T_X(-\Sigma)) = 0 = H^2(T_X(-\Sigma))$ pour n assez grand.

On obtient donc:

2.1.5.
$$0 \to H^0(N_\Sigma X) \to H^1(T_X^\Sigma) \to H^1(T_X) \to 0.$$

Finalement d'après la preuve de (i) p est submersive au point $0'$ et on a donc une suite exacte:

2.1.6.
$$0 \to T\mathscr{M}_{X,\Sigma(0')}^{n\,\text{vert}} \to T\mathscr{M}_{X,\Sigma(0')}^n \to T\mathscr{M}_{X(0)} \to 0$$

qu'on identifie facilement à 2.1.5 moyennant les isomorphismes

$$T\mathscr{M}_{X,\Sigma(0')}^{n\,\text{vert}} \simeq TV_{n(\Sigma)} \simeq H^0(N_\Sigma X) \qquad \text{et} \qquad T\mathscr{M}_{X(0)} \simeq H^1(T_X).$$

Ce qui montre (ii).

2.2. Désormais n est supposé assez grand pour que les conclusions de 2.1 soient satisfaites.

Au-dessus de la variété $\mathcal{M}^n_{X,\Sigma}$ on a alors la famille $\mathcal{X}_n := \mathcal{X} \times_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}^n_{X,\Sigma}$ et le diviseur universel $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{X}_n$ satisfaisant les hypothèses de 1.8. Notant $\mathcal{U}_n = \mathcal{X} \setminus \mathcal{G}_n$ on dispose donc des objets définis en 1.8, dont on reprend les notations, en faisant $B = \mathcal{M}^n_{X,\Sigma}$.

2.3. Soient $0' = (\Sigma, X) \in \mathcal{M}^n_{X,\Sigma}$ et $U = X \setminus \Sigma$. On rappelle en 2.3-2.4 la description cohomologique de la fibre $\bar{\nabla}^U_{0'}$ en $0'$ de l'application $\bar{\nabla}^U$ de 1.12, décrivant la variation infinitésimale de la filtration de Hodge sur $H^3(U)$.

On notera $\bar{\nabla}^\Sigma_{0'}$ la fibre en $0'$ de l'application

$$\bar{\nabla}^\Sigma : \quad F^1(\mathcal{H}^2_\Sigma)^0/F^2(\mathcal{H}^2_\Sigma)^0 \to ((\mathcal{H}^2_\Sigma)^0/F^1(\mathcal{H}^2_\Sigma)^0) \otimes \Omega_{\mathcal{M}^n_{X,\Sigma}}$$

décrivant la variation infinitésimale de structure de Hodge des surfaces Σ paramétrées par $\mathcal{M}^n_{X,\Sigma}$.

Utilisant le diagramme 1.12.1 et son analogue pour Σ:

2.3.1.

$$\begin{array}{ccc}
\nabla^\Sigma : F^2(\mathcal{H}^2_\Sigma)^0 & \to & F^1(\mathcal{H}^2_\Sigma)^0 \otimes \Omega_{\mathcal{M}^n_{X,\Sigma}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\nabla^\Sigma : F^1(\mathcal{H}^2_\Sigma)^0 & \to & (\mathcal{H}^2_\Sigma)^0 \otimes \Omega_{\mathcal{M}^n_{X,\Sigma}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\bar{\nabla}^\Sigma : F^1(\mathcal{H}^2_\Sigma)^0/F^2(\mathcal{H}^2_\Sigma)^0 & \to & ((\mathcal{H}^2_\Sigma)^0/F^1(\mathcal{H}^2_\Sigma)^0) \otimes \Omega_{\mathcal{M}^n_{X,\Sigma}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

et notant que l'application Res, étant plate et compatible avec les filtrations de Hodge, fournit un morphisme entre 1.12.1 et 2.3.1, on obtient le diagramme commutatif suivant:

2.3.2.

$$\begin{array}{ccc}
\bar{\nabla}^U_{0'} : F^2 H^3(U)/F^3 H^3(U) & \to & (F^1 H^3(U)/F^2 H^3(U)) \otimes \Omega_{\mathcal{M}^n_{X,\Sigma}(0')} \\
{\scriptstyle \mathrm{Res}}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{Res}}\downarrow \\
\bar{\nabla}^\Sigma_{0'} : F^1 H^2(\Sigma)^0/F^2 H^2(\Sigma)^0 & \to & (H^2(\Sigma)^0/F^1 H^2(\Sigma)^0) \otimes \Omega_{\mathcal{M}^n_{X,\Sigma}(0')} . \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

2.4. Utilisant les identifications:

$$F^1 H^2(\Sigma)^0/F^2 H^2(\Sigma)^0 \simeq H^1(\Omega_\Sigma)^0, \qquad H^2(\Sigma)^0/F^1 H^2(\Sigma)^0 \simeq H^2(\mathcal{O}_\Sigma)$$

[par $H^2(\mathcal{O}_X) = 0$] et $\Omega_{\mathcal{M}^n_{X,\Sigma}(0')} \simeq H^1(T_\Sigma)^*$ [*cf.* (2.1)], on a d'après [12] l'identification de $\bar{\nabla}^\Sigma_0$, avec l'application:

2.4.1. $H^1(\Omega_\Sigma)^0 \to \mathrm{Hom}(H^1(T_\Sigma), H^2(\mathcal{O}_\Sigma))$ déduite du cup-produit:

$$H^1(T_\Sigma) \otimes H^1(\Omega_\Sigma)^0 \to H^2(\mathcal{O}_\Sigma).$$

D'autre part, par construction [6], la filtration de Hodge sur $H^3(U)$ est l'aboutissement de la filtration de Hodge, dite bête, sur le complexe logarithmique $\Omega_X^0(\log\Sigma)$ dont l'hypercohomologie calcule $H^3(U)$, et d'après [6] la suite spectrale associée à cette filtration dégénère en E_1; on a donc les identifications:

$$F^2H^3(U)/F^3H^3(U)\simeq H^1(\Omega_X^2(\log\Sigma))$$

et

$$F^1H^3(U)/F^2H^3(U)\simeq H^2(\Omega_X(\log\Sigma)).$$

Finalement une généralisation immédiate de [12] ou de la construction donnée dans [14] de ∇ fournit l'identification de $\bar\nabla^U_{0'}$, avec l'application:

2.4.2. $H^1(\Omega_X^2(\log\Sigma))\to \mathrm{Hom}(H^1(T_X^\Sigma), H^2(\Omega_X(\log\Sigma)))$ dérivée du cup-produit:

$$H^1(\Omega_X^2(\log\Sigma))\otimes H^1(T_X^\Sigma)\to H^2(\Omega_X(\log\Sigma))$$

en notant les égalités:

$$\Omega_X^2(\log\Sigma)\simeq\Lambda^2(\Omega_X(\log\Sigma))\qquad\text{et}\qquad T_X^\Sigma=\Omega_X(\log\Sigma)^*.$$

A l'aide de 2.4, le diagramme 2.3.2 se réécrit maintenant sous la forme:

2.4.3.

$$\begin{array}{ccc}
\bar\nabla^U_{0'}: H^1(\Omega_X^2(\log\Sigma)) & \to & \mathrm{Hom}(H^1(T_X^\Sigma), H^2(\Omega_X(\log\Sigma)) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} \\
\bar\nabla^\Sigma_{0'}: H^1(\Omega_\Sigma))^0 & \to & \mathrm{Hom}(H^1(T_X^\Sigma), H^2(\mathcal{O}_\Sigma))
\end{array}$$

2.5. L'hypothèse « K_X trivial » fournit maintenant par dualité de Serre un isomorphisme (dépendant d'une trivialisation de K_X) : $H^1(T_X^\Sigma)\simeq H^2(T_X^{\Sigma *})^*\simeq H^2(\Omega_X(\log\Sigma))^*$. Via cet isomorphisme et l'identification 2.4.2 on voit que $\bar\nabla^0_U$ est duale du cup-produit $H^1(T_X^\Sigma)\otimes H^1(T_X^\Sigma)\to H^2(\Lambda^2T_X^\Sigma)$ qui est symétrique. On a donc montré:

2.6. LEMME. — K_X *étant trivialisé, on a*: $H^2(\Omega_X(\log\Sigma))\simeq H^1(T_X^\Sigma)^*$ *et l'image de* $\bar\nabla^U_0$ *dans* $\mathrm{Hom}(H^1(T_X^\Sigma), H^1(T_X^\Sigma)^*)$ *est constituée d'homomorphismes symétriques.*

2.7. On dispose d'après 2.1.4 de l'injection $H^0(N_\Sigma X)\hookrightarrow H^1(T_\Sigma)$ et on a sous l'hypothèse « K_X trivial » les égalités: $\dim H^0(N_\Sigma X)=h^0(K_\Sigma)=h^2(\mathcal{O}_\Sigma)$. On rappelle le théorème montré dans [20]:

2.7.1. THÉORÈME. — *Pour n suffisamment divisible, et pour* Σ *générique dans* V_n, *il existe* $\lambda\in H^1(\Omega_\Sigma)^0$ *tel que*:

2.7.2. *La restriction de* $\bar\nabla^\Sigma_{0'}(\lambda)$ *à* $H^0(N_\Sigma X)$ *induise un isomorphisme:* $H^0(N_\Sigma X)\to H^2(\mathcal{O}_\Sigma)$.

La conclusion de 2.7.1 est alors satisfaite pour λ dans un ouvert de Zariski de $H^1(\Omega_\Sigma)^0$, qu'on notera $H^1(\Omega_\Sigma)^0_{\mathrm{gen}}$. Reprenant la notation 1.7, on dispose de $\bar W_{\mathbb C}\subset H^1(\Omega_X^2(\log\Sigma))$, muni de l'isomorphisme $\mathrm{Res}:\bar W_{\mathbb C}\to H^1(\Omega_\Sigma)^0$, et $\bar W_{\mathbb C}$ a une structure réelle: $\bar W_{\mathbb C}=\bar W_{\mathbb R}\otimes\mathbb C$, où $\bar W_{\mathbb R}$ est l'image de $W_{\mathbb R}$ (*cf.* 1.7) dans $H^1(\Omega_X^2(\log\Sigma))$.

Soit $(\bar{W}_{\mathbb{C}})_{\text{gen}} := (\text{Res}_{|\bar{W}_{\mathbb{C}}})^{-1}(H^1(\Omega_\Sigma)^0_{\text{gen}})$.

Le reste de cette section est consacré à la preuve de l'énoncé suivant :

2.8. Proposition. — *Soit n suffisamment divisible pour que la conclusion de* 2.7.1 *ait lieu. Si pour une déformation générale X_t de X l'application d'Abel-Jacobi Φ_{X_t} de X_t est nulle modulo torsion, pour Σ générique dans V_n et $\lambda \in H^1(\Omega_\Sigma)^0_{\text{gen}}$ le relèvement $\bar{\bar{\lambda}} \in \bar{W}_{\mathbb{C}\,\text{gen}}$ de λ satisfait* :

2.8.1. $\bar{\nabla}^U_{0'}(\bar{\bar{\lambda}}) \in \text{Hom}(H^1(T^\Sigma_X), H^2(\Omega_X(\log \Sigma)))$ s'annule sur $\text{Ker}\,\bar{\nabla}^\Sigma_{0'}(\lambda) \subset H^1(T^\Sigma_X)$, où $\bar{\nabla}^\Sigma_{0'}(\lambda) \in \text{Hom}(H^1(T^\Sigma_X), H^2(\mathcal{O}_\Sigma))$.

Démonstration. — Clairement la propriété 2.8.1 est fermée au sens de Zariski sur $\bar{W}_{\mathbb{C}\,\text{gen}}$. Il suffit donc de montrer qu'elle est satisfaite sur

$$\bar{W}_{\mathbb{R}\,\text{gen}} := \bar{W}_{\mathbb{R}} \cap \bar{W}_{\mathbb{C}\,\text{gen}} \simeq H^1(\Omega_\Sigma)^0_{\mathbb{R}\,\text{gen}}.$$

Mais comme expliqué en détail dans [20], où l'on reprend un argument dû à M. Green, on a le résultat suivant, conséquence de 2.7.1.

2.8.2. Soit $\lambda \in H^1(\Omega_\Sigma)^0_{\mathbb{R}\,\text{gen}}$; alors il existe une suite (Σ_i, λ_i), avec $\Sigma_i \in V_n$, $\lim_{i \to \infty} \Sigma_i = \Sigma$, et $\lambda_i \in F^1 H^2(\Sigma_i)^0 \cap H^2(\Sigma_i, \mathbb{Q})^0 \subset H^1(\Omega_{\Sigma_i})^0_{\mathbb{R}}$ et $\lim_{i \to \infty} \lambda_i = \lambda$. (On utilise la topologie usuelle sur V_n et sur le fibré $\mathscr{C}^\infty$ réel $\mathscr{H}^{1,1}_{\mathbb{R}}$ sur V_n.) Comme la propriété 2.7.2 est ouverte sur $\mathscr{H}^{1,1}_{\mathbb{R}}$ elle est satisfaite par λ_i pour i assez grand, soit : $\lambda_i \in H^1(\Omega_{\Sigma_i})^0_{\text{gen}}$.

Finalement, comme la propriété 2.8.1 est fermée sur l'ouvert $\bigcup_{t \in V_n} H^1(\Omega_{\Sigma_t})^0_{\mathbb{R}\,\text{gen}}$ il suffit de montrer :

2.8.3. 2.8.1 a lieu lorsque $\Sigma \in V_n$, $\lambda \in F^1 H^2(\Sigma)^0 \cap H^2(\Sigma, \mathbb{Q})^0 \subset H^1(\Omega_\Sigma)^0$, et $\lambda \in H^1(\Omega_\Sigma)^0_{\text{gen}}$.

Or 2.8.3 résulte de la proposition 1.14 de la façon suivante :

2.8.4. Soit (Σ, λ) comme en 2.8.3; sous l'hypothèse $\lambda \in H^1(\Omega_\Sigma)^0_{\text{gen}}$ la composante locale $\mathscr{S}_\lambda \subset \mathscr{M}^n_{X,\Sigma}$ du lieu de Noether-Lefschetz définie par λ, c'est-à-dire la sous-variété de $\mathscr{M}^n_{X,\Sigma}$ définie par la condition « λ_t est de type (1,1) dans $H^2(\Sigma_t)$ », où $\lambda_t \in H^2(\Sigma_t, \mathbb{Q})^0$ est déduite de λ par transport parallèle, est lisse en 0′ et étale au-dessus de $\mathscr{M}_X$ (*cf.* [19], [20]). De plus son espace tangent en 0′ s'identifie à $\text{Ker}\,\bar{\nabla}^\Sigma_{0'}(\lambda) \subset H^1(T^\Sigma_X)$.

Faisant maintenant $B = \mathscr{S}_\lambda$ on est dans la situation décrite en 1.8, 1.9, et on a la fonction normale $\nu_\lambda \in \mathscr{J} \otimes \mathbb{Q}$, dont la valeur en $t \in B \simeq \mathscr{M}_X$ est dans l'image de Φ_{X_t} modulo torsion (*cf.* 1.9.1). Mais si Φ_{X_t} est nulle modulo torsion pour t général on vérifie par un argument de dénombrabilité que cela entraîne, au moins pour $\dim \mathscr{M}_X > 0$, que ν_λ est identiquement nulle. On applique alors 1.14, ce qui donne : $\bar{\nabla}^U_{0'}(\bar{\bar{\lambda}})_{|T\mathscr{S}_{\lambda(0')}} = 0$, c'est-à-dire 2.8.1 puisque $T\mathscr{S}_{\lambda(0')} = \text{Ker}\,\bar{\nabla}^\Sigma_{0'}(\lambda)$.

Finalement si $\dim \mathscr{M}_X = 0$, 2.8.1 est trivialement satisfaite puisque $H^2(\Omega_X(\log \Sigma))$ est isomorphe à $H^2(\mathcal{O}_\Sigma)$ (via Res) sous l'hypothèse « K_X trivial » (ce cas sera d'ailleurs exclu par la suite).

3. Fin de la démonstration du théorème 0.1

Dans cette section on va montrer (théorème 3.1) que 2.8.1 ne peut pas avoir lieu pour dim $\mathscr{M}_X > 0$, n suffisamment divisible, Σ générique dans V_n, et λ générique dans $H^1(\Omega_\Sigma)^0$, concluant la preuve du théorème 0.1 par l'absurde.

3.1. THÉORÈME. — *Soit* X *une variété de Calabi-Yau telle que* dim $\mathscr{M}_X > 0$. *Soit* $L \to X$ *un fibré inversible ample. Pour n suffisamment divisible, et* Σ *générique dans* V_n, *il n'existe pas de sous-espace* $W \subset H^1(\Omega_X^2(\log \Sigma))$ *tel que* $W \simeq H^1(\Omega_\Sigma)^0$ *par le résidu* Res, *et tel qu'un élément générique* $\tilde{\lambda}$ *de* W *satisfait les propriétés* 2.7.2 *et* 2.8.1.

La preuve de 3.1 utilise essentiellement le lemme 2.6 et une extension de la méthode employée dans [20]. On se contentera donc de résumer les étapes du raisonnement fait dans [20], après avoir réduit la preuve du théorème 3.1 à un énoncé algébrique (3.12) semblable à la proposition 1.10 de [20].

3.2. Soit $\Sigma \in V_n$ et soit $W \subset H^1(\Omega_X^2(\log \Sigma))$ un sous-espace tel que $\mathrm{Res}_{|W}$ soit un isomorphisme $W \xrightarrow{\sim} H^1(\Omega_\Sigma)^0$. On notera $\lambda \to \tilde{\lambda}$ la réciproque de $\mathrm{Res}_{|W}$. On dispose du diagramme 2.4.3 qui, par restriction de $\bar{\nabla}_{0'}^U$ à W fournit:

3.2.1.

$$\begin{array}{ccc} \bar{\nabla}_{0'}^U : W & \to & \mathrm{Hom}(H^1(T_X^\Sigma), H^2(\Omega_X(\log \Sigma))) \\ {\scriptstyle \mathrm{Res}} \downarrow \wr & & \downarrow {\scriptstyle \mathrm{Res}} \\ \bar{\nabla}_{0'}^\Sigma : H^1(\Omega_\Sigma)^0 & \to & \mathrm{Hom}(H^1(T_X^\Sigma), H^2(\mathscr{O}_\Sigma)) \end{array}.$$

D'après le lemme 2.6, l'image de $\bar{\nabla}_0^U$, est contenue dans l'ensemble des homomorphismes symétriques $H^1(T_X^\Sigma) \to H^1(T_X^\Sigma)^*$ via l'isomorphisme de 2.5:

$$H^2(\Omega_X(\log \Sigma)) \simeq H^1(T_X^\Sigma)^*.$$

3.3. Supposons n suffisamment divisible et Σ générique dans V_n de sorte que la propriété 2.7.2 est satisfaite pour λ générique dans $H^1(\Omega_\Sigma)^0$. Si l'on suppose maintenant que W contredit le théorème 3.1, *i.e.* pour $\lambda \in H^1(\Omega_\Sigma)^0_{\mathrm{gen}}$, on a:

3.3.1.

$$\bar{\nabla}_{0'}^U(\tilde{\lambda}) \text{ s'annule sur } \mathrm{Ker}\, \bar{\nabla}_{0'}^\Sigma(\lambda),$$

on obtient: pour $\tilde{\lambda}$ générique dans W le morphisme symétrique

$$\bar{\nabla}_{0'}^U(\tilde{\lambda}) \in \mathrm{Hom}(H^1(T_X^\Sigma), H^1(T_X^\Sigma)^*)$$

a un noyau de dimension égale à $h^1(T_X)$ (qui est strictement supérieur à zéro par hypothèse).

3.4. Comme $\mathbb{P}(\mathrm{Ker}\, \bar{\nabla}_{0'}^U(\tilde{\lambda}))$ s'identifie au lieu singulier de la quadrique $q_{\tilde{\lambda}}$ sur $\mathbb{P}(H^1(T_X^\Sigma))$ définie par le morphisme symétrique $\bar{\nabla}_{0'}^U(\tilde{\lambda})$, on obtient par Bertini:

3.4.1. Pour $\tilde{\lambda}$ générique dans W, $\mathbb{P}(\mathrm{Ker}\, \bar{\nabla}_{0'}^U(\tilde{\lambda}))$ est non vide et contenu dans le base locus $Bl(\tilde{Q}_W)$ du système linéaire de quadriques $\tilde{Q}_W$ sur $\mathbb{P}(H^1(T_X^\Sigma))$ défini par $\mathrm{Im}\, \bar{\nabla}_{0'}^U(W)$.

3.5. Comme dans [20], la première étape, pour montrer la non-existence d'un tel W, consiste à borner la dimension de $Bl(\tilde{Q}_W)$. Pour cela on note simplement la commutativité du diagramme suivant (*cf.* 2.4.3):

3.5.1.

$$\begin{array}{rcl} \bar{\nabla}^{\Sigma}_{0'}: W & \to & \operatorname{Hom}(H^1(T^{\Sigma}_X), H^1(T^{\Sigma}_X)^*) \\ \wr\| & & \downarrow \alpha \\ \bar{\nabla}^{\Sigma}_{0'}: H^1(\Omega_\Sigma)^0 & \to & \operatorname{Hom}(H^0(N_\Sigma X), H^2(\mathcal{O}_\Sigma)) \end{array}$$

Dans la seconde ligne, la flèche encore notée $\bar{\nabla}^{\Sigma}_{0'}$ est déduite de la flèche $\bar{\nabla}^{\Sigma}_{0'}$ de 3.2.1 par l'injection $H^0(N_\Sigma X) \to H^1(T^{\Sigma}_X)$. La flèche α est obtenue en utilisant

$$H^0(N_\Sigma X) \hookrightarrow H^1(T^{\Sigma}_X) \qquad \text{et} \qquad H^1(T^{\Sigma}_X)^* \simeq H^2(\Omega_X(\log \Sigma)) \xrightarrow{\text{Res}} H^2(\mathcal{O}_\Sigma).$$

Notant comme dans [20] l'existence de l'isomorphisme (dépendant d'une trivialisation de K_X) $H^0(N_\Sigma X) \simeq H^2(\mathcal{O}_X)^*$, dont on vérifie facilement qu'il identifie

$$\text{Res}: H^2(\Omega_X(\log \Sigma)) \to H^2(\mathcal{O}_\Sigma)$$

au dual de l'injection $H^0(W_\Sigma X) \to H^1(T^{\Sigma}_X)$, on voit que l'on peut interpréter α, restreinte aux morphismes symétriques, comme l'application de restriction:

$$\{\text{quadriques sur } \mathbb{P}(H^1(T^{\Sigma}_X))\} \to \{\text{Quadriques sur } \mathbb{P}(H^0(N_\Sigma X))\}.$$

Notant comme dans [20] Q_Σ le système de quadriques sur $\mathbb{P}(H^0(N_\Sigma X))$ fourni par l'image de $\bar{\nabla}^{\Sigma}_{0'}$, et $Bl(Q_\Sigma)$ son base locus, on obtient immédiatement la borne suivante pour $\dim Bl(\tilde{Q}_W)$:

3.6. Lemme. — $\dim Bl(\tilde{Q}_W) \leqq \dim Bl(Q_\Sigma) + h^1(T_X)$.

En effet ce qui précède montre que $Bl(Q_\Sigma) = Bl(\tilde{Q}_W) \cap \mathbb{P}(H^0(N_\Sigma X)))$ et la codimension de $\mathbb{P}(H^0(N_\Sigma X))$ dans $\mathbb{P}(H^1(T^{\Sigma}_X))$ est égale à $h^1(T_X)$.

Dans ([20], 1.8.2) on a obtenu la borne suivante pour $\dim Bl(Q_\Sigma)$.

3.7. Lemme. — *Pour n suffisamment grand,* Σ *générique dans* V_n, *on a*: $\dim Bl(Q_\Sigma) \leqq 4(h^0(\mathcal{O}_X(n/4)) - 4) + 34$ [*où* $L =: \mathcal{O}_X(1)$].

On écrira cette inégalité sous la forme asymptotique suivante:

$$\dim Bl(Q_\Sigma) \leqq (1/16)\, h^0(\mathcal{O}_X(n)) + O(n^2),$$

pour Σ générique dans V_n, et l'on a alors d'après 3.6 la même borne pour $\dim Bl(\tilde{Q}_W)$.

Soit $Y \subset \mathbb{P}(H^1(T^{\Sigma}_X)) \times W$ la variété définie par $Y = \{(u, \tilde{\lambda}) / \tilde{\nabla}^{U}_{0'}(\tilde{\lambda})(u) = 0\}$; alors sous les hypothèses de 3.3, on a établi dans les numéros 3.4 à 3.7.

3.8. Lemme. — (i) Y *a une unique composante irréductible* Y_0 *qui domine* W *par* pr_2 *et* Y_0 *s'identifie à une composante de* $Z := \{(U, \lambda) \in \mathbb{P}(H^1(T^{\Sigma}_X) \times H^1(\Omega_\Sigma)^0 / \bar{\nabla}^{\Sigma}_{0'}(\lambda)(U) = 0$ *dans* $H^2(\mathcal{O}_\Sigma)\}$.

(ii) *La projection* S *de* Y_0 *dans* $\mathbb{P}(H^1(T_X^\Sigma))$ *est contenue dans* $Bl(\tilde{Q}_W)$ *qui est de dimension bornée asymptotiquement par* $(1/16)\, h^0(\mathcal{O}_X(n)) + O(n^2)$.

[Notons que (i) n'est autre que l'hypothèse 3.3.]

3.8.1. Notons: $H^1(T_X^\Sigma) \to \mathrm{Hom}(H^1(\Omega_\Sigma)^0, H^2(\mathcal{O}_\Sigma))$ l'application déduite de

$$\bar{\nabla}_{0'}^\Sigma : \quad H^1(\Omega_\Sigma)^0 \to \mathrm{Hom}(H^1(T_X^\Sigma), H^2(\mathcal{O}_\Sigma)).$$

On déduit du lemme 3.8 le lemme suivant:

3.9. Lemme. — *Sous les hypothèses de* 3.3 *on a, pour u générique dans* S: $\mathrm{rang}\,\mu(u) \leqq \dim S$.

Démonstration. — Y_0 s'identifie à une composante de Z par 3.8 (i). Soit u un point générique de S. Alors la fibre de Z au-dessus de u est égale à $\mathrm{Ker}\,\mu(u)$, où $\mu(u) \in \mathrm{Hom}(H^1(\Omega_E)^0, H^2(\mathcal{O}_\Sigma))$. On en déduit: $\dim Y_0 = \dim S + h^1(\Omega_\Sigma)^0 \text{-} \mathrm{rang}\,\mu(u)$. Comme Y_0 domine $H^1(\Omega_\Sigma)^0$ par pr_2, on a $\dim Y_0 \geqq h^1(\Omega_\Sigma)^0$, ce qui montre le lemme.

3.9.1. Notons S′ l'intersection de S avec $\mathbb{P}(H^0(N_\Sigma X))$. On a l'inclusion $S' \subset Bl(Q_\Sigma)$, par 3.8 (ii) et 3.6.1.

3.9.2. Notons encore $\mu : H^0(N_\Sigma X) \to \mathrm{Hom}(H^1(\Omega_\Sigma)^0, H^2(\mathcal{O}_\Sigma))$ la restriction de l'application μ de 3.8.1 à $H^0(N_\Sigma X)$. Cette application et les ensembles de rang qui lui sont associés ont été étudiés dans [20].

Des lemmes 3.7, 3.9 on déduit finalement:

3.10 Lemme. — *Sous les hypothèses de* 3.3 *on a, pour tout* $u \in S'$,

$$\mathrm{rang}\,\mu(u) \leqq \dim S \leqq \dim S' + h^1(T_X) \qquad \textit{avec} \quad \dim S' \leqq (1/16)\, h^0(\mathcal{O}_X(n)) + O(n^2).$$

Dans [20] on a montré le résultat suivant (*cf.* [20], prop. 1.10-1.11):

3.11. Proposition. — *Pour n suffisamment divisible,* Σ *générique, il n'existe pas de sous-ensemble non vide* $S' \subset \mathbb{P}(H^0(N_\Sigma X))$ *satisfaisant*:

3.11.1 $$\forall u \in S', \quad \mathrm{rang}\,\mu(u) \leqq \dim S'.$$

3.11.2 $$\dim S' \leqq (1/16)\, h^0(\mathcal{O}_X(b)) + O(n^2).$$

On résume brièvement en 3.12.3-3.12.8 la preuve de 3.11 donnée dans [20], en expliquant comment elle donne tout aussi bien:

3.12. Proposition. — *Pour n suffisamment divisible,* Σ *générique dans* V_n, *il n'existe pas de sous-ensemble algébrique non vide* $S' \subset \mathbb{P}(H^0(N_\Sigma X))$ *satisfaisant*:

3.12.1 $$\forall u \in S', \quad \mathrm{rang}\,\mu(u) \leqq \dim S' + h^1(T_X)$$

3.12.2 $$\dim S' \leqq (1/16)\, h^0(\mathcal{O}_X(n)) + O(n^2).$$

3.12.3. L'idée de la preuve de 3.11 est la suivante: on commence par trouver une borne α_1 pour la dimension de $\{u \in \mathbb{P}\, H^0(N_\Sigma X) / \mathrm{rang}\,\mu(u) \leqq (1/16)\, h^0(\mathcal{O}_X(n)) + \mathcal{O}(n^2)\}$, pour Σ générique dans V_n. Cette borne est asymptotiquement de la forme $\beta_1 h^0(\mathcal{O}_X(n))+O(n^2)$ où β_1 est strictement plus petit que 1/16.

3.12.4. Un ensemble $S' \subset \mathbb{P}(H^0(N_\Sigma X))$ satisfaisant 3.11.1 et 3.11.2 est alors de dimension $\leqq \alpha_1$ et donc contenu dans

$$\{u \in \mathbb{P}(H^0(N_\Sigma X))/\operatorname{rang}\mu(u) \leqq \beta_1 h^0(\mathcal{O}_X(n)+\mathcal{O}(n^2)\}.$$

Il est prouvé dans [20] qu'on peut réitérer ce procédé de manière à obtenir une suite de bornes du type $\dim S' \leqq \beta_i h^0(\mathcal{O}_X(n))+O(n^2)$ avec β_i tendant vers 0.

Finalement, on montre également dans [20], prop. 3.1, que pour certaines constantes β, γ dépendant de $(X, \mathcal{O}_X(1))$ on a :

3.12.5. Pour n suffisamment divisible, Σ générique dans V_n on a :

$$\dim\{u \in \mathbb{P}(H^0(N_\Sigma X))/\operatorname{rang}\mu(u) \leqq \beta h^0(\mathcal{O}_X(n))\} \leqq \gamma.$$

Comme un ensemble S' satisfaisant 3.11.1, 3.11.2 est par 3.12.4 de dimension $\leqq \beta h^0(\mathcal{O}_X(n))$ avec β arbitrairement petit, on en déduit par 3.12.5 qu'on a aussi :

3.12.6. $\dim S' \leqq \gamma$ et donc, par 3.11.1 : $\operatorname{rang}\mu(u) \leqq \gamma$ pour n dans S'.

Le fait que S' est vide résulte alors de :

3.12.7. Soit γ une constante fixée; pour n suffisamment grand, Σ générique dans V_n on a : $\{u \in \mathbb{P}(H^0(N_\Sigma X))/\operatorname{rang}\mu(u) \leqq \gamma\}$ est vide (*cf.* [20] 3.14.1).

3.12.8. Il est clair que ce schéma de démonstration convient aussi bien à la preuve de 3.12 qu'à celle de 3.11. (Il suffit dans 3.12.6 de remplacer « $\operatorname{rang}\mu(u) \leqq \gamma$ » par $\operatorname{rang}\mu(u) \leqq \gamma + h^1(T_X)$ et d'appliquer 3.12.7 à la constante $\gamma + h^1(T_X)$). La proposition 3.12 est donc démontrée.

3.13. Reprenant les notations des numéros précédents la preuve par l'absurde de la non existence de W contredisant 3.1 se fait de la manière suivante.

Comme on a $S' = \mathbb{P}(H^0(N_\Sigma X)) \cap S$ et que S' est vide par 3.12 (pour Σ générique dans V_n, n suffisamment divisible) on a $\dim S \leqq h^1(T_X) - 1$.

Mais par construction (*cf.* 3.8) S contient $\mathbb{P}(\operatorname{Ker} \bar{\nabla}^\Sigma_{0'}(\lambda))$ pour λ générique dans $H^1(\Omega_\Sigma)^0$.

Comme pour λ générique on a $\dim \mathbb{P}(\operatorname{Ker} \bar{\nabla}^\Sigma_{0'}(\lambda)) = h^1(T_X) - 1$ on en déduit.

3.14. Lemme. — *Soit Σ générique dans V_n, n suffisamment divisible; s'il existe* $W \subset H^1(\Omega^2_X(\log \Sigma))$ *contredisant* 3.1, *on a : pour λ générique dans* $H^1(\Omega_\Sigma)^0$, *le noyau de* $\bar{\nabla}^\Sigma_{0'}(\lambda)$ *est un sous-espace constant* K *de* $H^1(T^\Sigma_X)$, *de dimension* $h^1(T_X) > 0$.

Soit alors K comme dans la conclusion du lemme 3.14. Soit $v \in K$; pour λ générique dans $H^1(\Omega_\Sigma)^0$ on a : $\bar{\nabla}^\Sigma_{0'}(\lambda)(u) = 0$ dans $H^2(\mathcal{O}_\Sigma)$. Ceci a donc lieu pour tout $\lambda \in H^1(\Omega_\Sigma)^0$. Mais alors u est orthogonal à l'image de l'application $\nu_\Sigma : H^1(\Omega_\Sigma)^0 \otimes H^0(K_\Sigma) \to H^1(T^\Sigma_X)^*$ déduite de $\bar{\nabla}^\Sigma_{0'} : H^1(\Omega_\Sigma)^0) \to \operatorname{Hom}(H^1(T^\Sigma_X), H^2(\mathcal{O}_\Sigma))$.

La preuve par l'absurde du théorème 3.1 se conclut donc par lemme suivant :

3.15. LEMME. — *Pour n suffisamment grand, et pour tout* $\Sigma \in V_n$, *l'application* ν_Σ *est surjective.*

Démonstration. — Identifions $H^1(T_X^\Sigma)$ à $H^1(T_\Sigma)$ par le lemme 2.1. On a $H^1(T_\Sigma)^* \simeq H^1(\Omega_\Sigma(K_\Sigma))$ par dualité de Serre sur Σ. L'application

$$\bar{\nabla}_{0'}^{\Sigma}: \quad H^1(\Omega_\Sigma)^0 \to \mathrm{Hom}(H^1(T_\Sigma), H^2(\mathcal{O}_\Sigma))$$

est induite d'après [12] par le cup-produit : $H^1(\Omega_\Sigma) \otimes H^1(T_\Sigma) \to H^2(\mathcal{O}_\Sigma)$. On en déduit immédiatement que l'application $\nu_\Sigma : H^1(\Omega_\Sigma)^0 \otimes H^0(K_\Sigma) \to H^1(\Omega_\Sigma(K_\Sigma))$ est donnée par le produit.

Utilisant la suite exacte : $0 \to \mathcal{O}_\Sigma(-\Sigma) \to \Omega_{X\,|\,\Sigma} \to \Omega_\Sigma \to 0$, on obtient aussi : $0 \to \Omega_\Sigma(-\Sigma) \to \Omega^2_{X\,|\,\Sigma} \to K_\Sigma \to 0$ qui fournit pour n assez grand des applications surjectives :

$$H^0(K_\Sigma^{\otimes 2}) \longrightarrow H^1(\Omega_\Sigma)^0 \qquad \text{et} \qquad H^0(K_\Sigma^{\otimes 3}) \longrightarrow H^1(\Omega_\Sigma(K_\Sigma))$$

(*cf.* [10], repris dans [20]).

Ces applications sont évidemment compatibles avec la multiplication par $H^0(K_\Sigma)$, *i.e.* le diagramme suivant est commutatif :

3.15.1.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\nu} : H^0(K_\Sigma^{\otimes 2}) \otimes H^0(K_\Sigma) & \to & H^0(K_\Sigma^{\otimes 3}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \nu_\Sigma : H^1(\Omega_\Sigma)^0 \otimes H^0(K_\Sigma) & \to & H^1(\Omega_\Sigma(K_\Sigma)). \end{array}$$

Il reste donc simplement à voir que $\tilde{\nu}$ est surjectif pour n assez grand : mais comme K_X est trivial on a $K_\Sigma = \mathcal{O}_X(n)_{|\Sigma}$, et pour n grand la restriction : $H^0(\mathcal{O}_X(3n)) \to H^0(K_\Sigma^{\otimes 3})$ est surjective par annulation de $H^1(\mathcal{O}_X(2n))$. La surjectivité de $\tilde{\nu}$ résulte alors de celle du produit $H^0(\mathcal{O}_X(2n)) \otimes H^0(\mathcal{O}_X(n)) \to H^0(\mathcal{O}_X(3n))$ pour n grand, qui est bien connue.

Le théorème 3.1 est donc montré, ce qui entraîne par la proposition 2.8 l'absurdité de l'hypothèse « Φ_{X_t} triviale modulo torsion pour t général dans $\mathcal{M}_X$ et $\dim \mathcal{M}_X > 0$ », et donc le théorème 0.1.

3.16. *Remarque.* — Dans l'introduction de [20], on avait suggéré une autre approche possible du théorème 0.1, consistant à montrer que pour la plupart des fonctions normales ν_λ construites sur les variétés $\mathcal{S}_\lambda$ localement isomorphes à $\mathcal{M}_X$ (*cf.* 2.8.2, 2.8.4) l'invariant infinitésimal $\delta\nu_{\lambda\,(0)} \in \mathrm{Hom}(H^1(T_X), H^2(\Omega_X)/\mathrm{Im}\,\bar{\nabla}_0^X$ est non nul. Je ne sais pas si ce dernier énoncé est vrai, lorsque $h^1(T_X) \geqq 2$, et pour $h^1(T_X) = 1$, il est faux dès que $\bar{\nabla}_0^X \neq 0$ puisqu'alors $\mathrm{Hom}(H^1(T_X), H^2(\Omega_X))/\mathrm{Im}\,\bar{\nabla}_0^X = 0$.

La relation entre les invariants infinitésimaux $\delta\nu_\lambda$ et les invariants $\bar{\nabla}_{0'}^U(\bar{\bar{\lambda}})\,|_{\mathrm{Ker}\,\bar{\nabla}_0^\Sigma(\lambda)}$ utilisés dans la proposition 2.8 est simplement la suivante :

Considérons $\lambda \in H^1(\Omega_\Sigma^0)$ induisant un isomorphisme :

$$\bar{\nabla}_{0'}^{\Sigma}(\lambda)\,|_{H^0(N_\Sigma X)} : H^0(N_\Sigma X) \to H^2(\mathcal{O}_X).$$

Alors on a un isomorphisme naturel entre $\operatorname{Ker} \bar{\nabla}^{\Sigma}_{0'}(\lambda)$ et $H^1(T_X)$ obtenu comme le composé:

3.16.1.
$$\operatorname{Ker}(\bar{\nabla}^{\Sigma}_{0'}(\lambda)) \subset H^1(T^{\Sigma}_X) \underset{p_*}{\rightarrow} H^1(T_X).$$

On a le diagramme suivant qui relie les variations infinitésimales des filtrations de Hodge de X, Σ et U et dont les colonnes sont exactes:

3.16.2.
$$\begin{array}{rccc}
 & 0 & & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
\bar{\nabla}^{X}_{0'}: & H^1(\Omega^2_X) & \rightarrow & \operatorname{Hom}(H^1(T^{\Sigma}_X), H^2(\Omega_X)) \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
\bar{\nabla}^{U}_{0'}: & H^1(\Omega^2_X(\log \Sigma)) & \rightarrow & \operatorname{Hom}(H^1(T^{\Sigma}_X), H^2(\Omega_X(\log \Sigma))) \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
\bar{\nabla}^{\Sigma}_{0'}: & H^1(\Omega_{\Sigma})^0 & \rightarrow & \operatorname{Hom}(H^1(T^{\Sigma}_X), H^2(\mathcal{O}_{\Sigma})) \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
 & 0 & & 0
\end{array}$$

D'autre par $\bar{\nabla}^{X}_{0'}$ se factorise évidemment de la manière suivante:

3.16.3.
$$H^1(\Omega^2_X) \xrightarrow{\bar{\nabla}^{X}_{0}} \operatorname{Hom}(H^1(T_X), H^2(\Omega_X)) \xrightarrow{p^*} \operatorname{Hom}(H^1(T^{\Sigma}_X), H^2(\Omega_X)).$$

Soit $\tilde{\lambda}$ un relèvement de λ dans $H^1(\Omega^2_X(\log \Sigma))$; alors $\bar{\nabla}^{U}_{0'}(\tilde{\lambda})_{|\operatorname{Ker} \bar{\nabla}^{\Sigma}_{0'}(\lambda)}$ est à valeurs dans $H^2(\Omega_X)$ et donc s'identifie par 3.16.1 à un élément de $\operatorname{Hom}(H^1(T_X), H^2(\Omega_X))$. Si on modifie le relèvement $\tilde{\lambda}$ par un élément de $H^1(\Omega^2_X)$, d'après 3.16.2 et 3.16.3, $\bar{\nabla}^{U}_{0'}(\tilde{\lambda})_{|\operatorname{Ker} \bar{\nabla}^{\Sigma}_{0'}(\lambda)}$ est modifié par l'ajout d'un élément de l'image de $\bar{\nabla}^{X}_{0}$. Il est facile de voir en utilisant la définition de $\delta\nu_{\lambda}$ ([11], [18]) et la description de ν_{λ} (*cf.* 1.9) que $\delta\nu_{\lambda}$ est l'image de $\bar{\nabla}^{U}_{0'}(\tilde{\lambda})_{|\operatorname{Ker} \bar{\nabla}^{\Sigma}_{0'}(\lambda)}$ dans $\operatorname{Hom}(H^1(T_X), H^2(\Omega_X)/\operatorname{Im} \bar{\nabla}^{X}_{0}$ qui est bien définie par ce qui précède.

L'invariant utilisé ici est donc plus fin, puisqu'il utilise le relèvement canonique $\bar{\tilde{\lambda}} \in \bar{W}_{\mathbb{C}}$ de λ (*cf.* 1.7), mais n'est pas algébrique car $\bar{W}_{\mathbb{C}}$ ne varie pas holomorphiquement avec (Σ, X), comme sous-espace de $F^2 H^3(U)/F^3 H^3(U)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ALBANO, *Infinite Generation of the Griffiths Group: a Local Proof* (*Thesis*, University of Utah, 1986).

[2] F. BARDELLI, *Curves of Genus Three on a General Abelian Threefold and the Non Finite Generation of the Griffiths Group*, dans: *Arithmetic of complex manifolds; Lecture Notes in Math.*, n° 1399 Springer, 1989, p. 10-26.

[3] F. BARDELLI et S. MÜLLER-STACH, *Algebraic Cycles on Certain Calabi-Yau Threefolds*, preprint de l'Université de Pise, 1992.

[4] H. CLEMENS, *Homological Equivalence, Modulo Algebraic Equivalence, is Not Finitely Generated* (*Inst. Hautes Études Sci., Publ. Math.*, vol. 58, 1983, p. 19-38).

[5] H. CLEMENS, *A Note on Some Formal Properties of the Infinitesimal Abel-Jacobi Mapping*, dans *Geometry today*, E. ARBARELLO *et al.* éd. (*Progress in Math.*, vol. 60, Birkhäuser, 1985, p. 69-73).

[6] P. DELIGNE, *Théorie de Hodge II* (*Inst. Hautes Études Sci., Publ. Math.*, vol. 40, 1971, p. 5-58).

[7] F. ELZEIN et S. ZÜCKER, *Extendability of Normal Functions Associated to Algebraic cycles*, dans: *Topics in Transcendental Algebraic Geometry*, P. GRIFFITHS éd. (*Ann. of Math. Studies*, Study, 106, Princeton University Press, 1984, p. 269-288).

[8] R. FRIEDMAN, *On Threefolds with Trivial Canonical Bundle*, preprint.

[9] M. GREEN, *Griffiths' Infinitesimal Invariant and the Abel-Jacobi Map* (*J. Differential Geom.*, vol. 29, 1989, p. 545-555).

[10] M. GREEN, *The Period Map for Hypersurface Sections of High Degree of an Arbitrary Variety* (*Compositio Math.*, vol. 55, 1985, p. 135-156).

[11] P. GRIFFITHS, *Infinitesimal Variations of Hodge Structure III: Determinantal Varieties and the Infinitesimal Invariant of Normal Functions* (*Compositio Math.*, vol. 50, 1983, p. 267-324).

[12] P. GRIFFITHS, *Periods of Integrals on Algebraic Manifolds I, II* (*Amer. J. Math.*, vol. 90, 1968, p. 568-626, 805-865).

[13] P. GRIFFITHS, *On the Periods of Certain Rational Integrals I, II* (*Ann. of Math.*, vol. 90, 1969, p. 460-541).

[14] N. KATZ, *The Regularity Theorem in Algebraic Geometry*, dans: *Actes du congrès international de Mathématiques*, Nice, 1970, tome 1, p. 437-443.

[15] S. O. KIM, *Noether-Lefschetz Locus for Surfaces* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 324, n° 1, 1991).

[16] M. NORI, *Cycles in the Generic Abelian Threefold* (*Proc. Indian Acad. Sci.*, vol. 99, 1989, p. 191-196).

[17] K. PARANJAPE, *Curves on Threefolds with Trivial Canonical Bundle* (*Proc. Indian Acad. Sci. Math.* vol. 101, 1991, n° 3, p. 199-213).

[18] C. VOISIN, *Une remarque sur l'invariant infinitésimal des fonctions normales* (*C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 307, Série I, 1988, p. 157-160).

[19] C. VOISIN, *Une approche infinitésimale du théoréme de H. Clemens sur les cycles d'une quintique générale de* $\mathbb{P}^4$ (*J. Algebraic Geometry*, vol. I, 1992, p. 157-174).

[20] C. VOISIN, *Densité du lieu de Noether-Lefschetz pour les sections hyperplanes des variétés de Calabi-Yau* (*International J. of Math.* vol. 3, n° 5, 1992, p. 699-715).

[21] J. STEENBRINK et S. ZÜCKER, *Variation of Mixed Hodge Structure I* (*Invent. Math.*, vol. 80, p. 489-542).

(Manuscrit reçu le 18 septembre 1992.)

C. VOISIN,
U.R.A. D0752 du C.N.R.S.,
Université de Paris-Sud,
Mathématique, Bât. 425,
91405 Orsay Cedex,
France.