ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

NICOLE BOPP

HUBERT RUBENTHALER

Fonction zêta associée à la série principale sphérique de certains espaces symétriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 26, nº 6 (1993), p. 701-745

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1993_4_26_6_701_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4^e série, t. 26, 1993, p. 701 à 745.

FONCTION ZÊTA ASSOCIÉE À LA SÉRIE PRINCIPALE SPHÉRIQUE DE CERTAINS ESPACES SYMÉTRIQUES

PAR NICOLE BOPP ET HUBERT RUBENTHALER

ABSTRACT. – In 1972, Godement and Jacquet obtained the functional equation of the zeta function of simple algebras. In the case where the groundfield is $\mathbb{C}$, such zeta functions are associated to each $K \times K$-finite coefficient of an irreducible admissible representation π of $GL(n, \mathbb{C})$.

In this paper we consider the case of a family of complex symmetric spaces G/H which are realized as Zariski open subsets of a vector space (in Godement-Jacquet's case, the space

$$GL(n, \mathbb{C}) \approx GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C})/GL(n, \mathbb{C})$$

is embedded in the full matrix space $M(n, \mathbb{C})$). This family of symmetric spaces corresponds to the prehomogeneous vector spaces of commutative parabolic type.

If π is a generic representation of the principal spherical series of G which has a natural H-invariant generalized vector, we define $\mathscr{C}^\infty$ and H-invariant coefficients of π and the zeta function associated to these coefficients. We obtain an explicit functional equation for this zeta function.

1. Introduction

Désignons par π une représentation admissible de $GL(n, \mathbb{C})$ dans un espace de Hilbert V (*cf.* [Kn], p. 207). Soit V* l'espace dual de V et soit $\check{\pi}$ la représentation contragrédiente de π définie par

$$\langle \pi(g) v, v^* \rangle = \langle v, \check{\pi}(g^{-1}) v^* \rangle \qquad (v \in V,\ v^* \in V^*).$$

On désigne par K le sous-groupe compact maximal $U(n)$ de $GL(n, \mathbb{C})$. On considère un coefficient $K \times K$-fini de π c'est-à-dire une fonction $g \mapsto c_\pi(g) = \langle \pi(g) v, v^* \rangle$ où v et v^* sont des éléments K-finis respectivement de V et de V*. La fonction qui à g associe $c_{\check{\pi}}(g) = c_\pi(g^{-1}) = \langle v, \check{\pi}(g) v^* \rangle$ est un coefficient $K \times K$-fini de $\check{\pi}$. Soit $M_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices de type $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. Si f est une fonction de l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(M_n(\mathbb{C}))$ des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur $M_n(\mathbb{C})$ et si s est un paramètre complexe, on définit une fonction zêta $\mathscr{Z}(f, s, c_\pi)$ par

$$\mathscr{Z}(f, s, c_\pi) = \int_{GL(n, \mathbb{C})} f(x) \,|\det(x)|^s c_\pi(x)\, d^* x$$

où $d^* x$ est une mesure de Haar sur $GL(n, \mathbb{C})$.

Dans le cas où π est une représentation de la série principale de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, le résultat ci-dessous a été démontré par Godement et Jacquet. Grâce au théorème du sous-quotient de Harish-Chandra, ils démontrent que ce résultat est aussi vérifié si π est irréductible.

THÉORÈME 1.1 ([G-J] Th. 8.7). — *L'intégrale définissant $\mathscr{Z}(f, s, c_\pi)$ converge pour* $\mathrm{Re}(s)$ *suffisamment grand et se prolonge en une fonction méromorphe du plan complexe qui vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\mathscr{Z}(f, s+n-1, c_\pi)=\gamma(\pi, s)\,\mathscr{Z}(\hat{f}, 1-s, c_{\check{\pi}}),$$

où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f, où $\gamma(\pi, .)$ est une fonction méromorphe qui est un quotient de facteurs eulériens.

Ce type de résultat étendu (comme l'ont fait Godement et Jacquet), au cas d'un corps local, puis au cas adélique, est intéressant, puisque le facteur local $\gamma(\pi, s)$ de l'équation fonctionnelle précédente est essentiellement un quotient de facteurs L locaux de Langlands. La méthode de Godement-Jacquet permet ainsi de prouver le prolongement méromorphe et l'équation fonctionnelle de certaines fonctions L (*voir* [Go-Ja], th. 13.8 et [G-S], chap. 2).

Une généralisation possible de cette situation est la suivante.

Soit G un groupe algébrique complexe, réductif et connexe. Soit $\rho: \mathrm{G} \to \mathrm{End}(\mathrm{V})$ une représentation rationnelle irréductible de dimension finie de G. On suppose de plus que $(\mathrm{G}, \rho, \mathrm{V})$ est un espace préhomogène, c'est-à-dire que G possède dans V une orbite ouverte pour la topologie de Zariski.

On note H le sous-groupe d'isotropie d'un point de l'orbite ouverte. Soit χ un caractère rationnel non trivial de G qui est trivial sur H (on suppose qu'un tel caractère existe), et soit π une représentation irréductible admissible possédant un vecteur généralisé H-invariant u_0. Soit v un vecteur C^∞ quelconque de la représentation π. On note c_π le coefficient de π donné par

$$c_\pi(g)=\langle\, \pi(g)\, u_0, v\,\rangle,$$

qui est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur G invariante à droite par H.

L'espace homogène G/H étant alors réalisé comme un ouvert de Zariski de V, on peut considérer toute fonction f de l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathrm{V})$ comme une fonction sur G/H et définir une fonction zêta en posant

$$\mathscr{Z}(f, s, c_\pi)=\int_{\mathrm{G/H}} f(\dot{g})\,|\,\chi(\dot{g})\,|^s\, c_\pi(\dot{g})\, d\dot{g},$$

où $\dot{g}$ désigne la classe de $g \in \mathrm{G}$ dans G/H et où $d\dot{g}$ est une mesure invariante sur G/H (l'existence d'une telle mesure est impliquée par l'existence du caractère non trivial χ, trivial sur H).

Il est alors naturel de se poser, dans ce cadre, la question de la convergence, du prolongement analytique et de l'équation fonctionnelle pour ces intégrales.

Dans cet article, nous étudions ce problème pour les espaces symétriques complexes correspondant aux espaces préhomogènes réguliers de type parabolique commutatifs (*voir* [Ru1], [M-R-S], et le paragraphe 2). La liste précise de ces espaces symétriques figure dans le tableau du paragraphe 2. Cette liste comprend le cas particulier $G=GL(n, \mathbb{C})\times GL(n, \mathbb{C})$, $H=GL(n, \mathbb{C})$ (plongé diagonalement dans G), qui correspond au cas de Godement et Jacquet.

Ces espaces préhomogènes (G, ρ, V) sont essentiellement caractérisés par le fait que si $\mathfrak{g}$ désigne l'algèbre de Lie de G, l'espace $\tilde{\mathfrak{p}}=\mathfrak{g}\oplus V$ se réalise comme une sous-algèbre parabolique d'une algèbre semi-simple $\tilde{\mathfrak{g}}$, dont $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lévi, dont le plus grand idéal nilpotent V est commutatif et telle que la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans V est $d\rho$.

L'intérêt manifesté par différents auteurs pour ces objets n'est pas nouveau, surtout si l'on considère qu'ils correspondent bijectivement aux algèbres de Jordan simples sur $\mathbb{C}$ ou encore aux espaces hermitiens symétriques de type tube (pour la correspondance entre ces trois types d'objets, on pourra consulter le livre de Satake [Sa]). Notons par exemple, que les généralisations récentes des identités de Capelli ([H-U], [W]) se placent dans ce contexte.

Nous démontrons l'analogue du théorème 1.1 pour les coefficients $\mathscr{C}^\infty$ et H-invariants à droite d'une famille générique de représentations de la série principale sphérique, plus précisément pour celles qui admettent un vecteur généralisé H-invariant par prolongement méromorphe (*voir* [VdB] et le paragraphe 5).

Une question naturelle se pose alors. Peut-on, comme le font Godement et Jacquet, obtenir une équation fonctionnelle analogue pour les coefficients K-finis à gauche et H-invariants à droite de toute représentations sphérique irréductible?

Donnons à présent une brève description de l'article.

Dans le paragraphe 2 nous introduisons les espaces préhomogènes de type parabolique commutatifs. Il s'agit essentiellement de considérer une $\mathbb{Z}$-graduation d'une algèbre de Lie simple $\tilde{\mathfrak{g}}$ sur $\mathbb{C}$ de la forme

$$\tilde{\mathfrak{g}}=V^-\oplus\mathfrak{g}\oplus V^+,$$

où ($[V^-, V^+]\subset\mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, V^\pm]\subset V^\pm$, V^+ et V^- commutatifs, et qui est assujettie, de plus, à la condition supplémentaire de *régularité*.

Soit $\tilde{G}$ le groupe adjoint de $\tilde{\mathfrak{g}}$ et soit G le sous-groupe analytique de $\tilde{G}$ correspondant à $\mathfrak{g}$. Les représentations adjointes de $\mathfrak{g}$ dans V^+ et V^- (qui sont duales l'une de l'autre grâce à la forme de Killing) sont les dérivées des représentations Adjointes de G dans les mêmes espaces. Le groupe G possède dans V^+ et V^- un nombre fini (noté $n+1$) d'orbites (ce nombre n est un invariant important de l'espace préhomogène considéré et intervient de manière constante dans tout l'article). Il existe donc dans V^+ et V^- des orbites Ω^+ et Ω^- qui sont ouvertes pour la topologie de Zariski. Ces deux orbites s'identifient chacune au même espace symétrique G/H.

On introduit un sous-groupe parabolique P^- de G qui possède dans V^+ (resp. V^-) une orbite ouverte $\mathcal{O}^+$ (resp. $\mathcal{O}^-$) donnée par

$$\mathcal{O}^+ = \{ x \in V^+ \mid \Delta_0(x)\Delta_1(x)\dots\Delta_n(x) \neq 0 \}.$$
$$(\text{resp. } \mathcal{O}^- = \{ y \in V^- \mid \nabla_0^*(y)\nabla_1^*(y)\dots\nabla_n^*(y) \neq 0 \}).$$

où les Δ_i (resp. les ∇_i^* $(i=0, \dots, n)$) sont des polynômes irréductibles de degré $n+1-i$.

Dans le paragraphe 3, nous considérons les fonctions zêta locales des espaces préhomogènes (P^-, V^+) et (P^-, V^-) qui sont définies comme suit (*voir* F. Sato [S]). Pour $f \in \mathcal{S}(V^+)$, $g \in \mathcal{S}(V^-)$ et $s = (s_0, s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ on pose:

$$Z(f, s) = \int_{V^+} f(x)\Delta_0^{s_0}(x)\Delta_1^{s_1}(x)\dots\Delta_n^{s_n}(x)\,dx,$$

$$Z^*(g, s) = \int_{V^-} g(y)\nabla_0^{*s_0}(y)\nabla_1^{*s_1}(y)\dots\nabla_n^{*s_n}(y)\,dy.$$

Nous montrons que les prolongements méromorphes de ces intégrales vérifient une équation fonctionnelle de la forme

$$Z(f, s) = \delta(s)Z^*(\hat{f}, t(s)),$$

où $t(s) = (-s_0 - s_1 - \dots - s_n - k/(n+1), s_n, s_{n-1}, \dots, s_1)$ $(k = \dim V^+)$, où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f définie à l'aide de la forme de Killing de $\tilde{\mathfrak{g}}$ (de ce fait $\hat{f} \in \mathcal{S}(V^-)$), et où δ est une fonction méromorphe indépendante de f que nous calculons explicitement en fonction des facteurs rho de Tate (th. 3.16).

Notons que pour certaines formes réelles des espaces préhomogènes considérés ici des résultats analogues avaient été prouvés par Faraut et Satake [S-F] lorsque $s_0 = s_1 = \dots = s_n$, puis par Blind [B] par une méthode différente de la nôtre. Comme corollaire, nous calculons certains polynômes de type Bernstein (th. 3.19).

Le paragraphe 4 est consacré à la transcripion des résultats précédents sur l'espace symétrique G/H.

Le paragraphe 5 débute par une étude détaillée de la structure des espaces symétriques G/H qui interviennent. En appliquant les résultats de Van den Ban [VdB], on y montre que le sous-groupe P^- introduit au paragraphe 2 est (à conjugaison près) l'unique sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable minimal de G, que, si $P^- = MAN$ est une décomposition de Langlands de P^-, la série principale sphérique $\pi_{\xi \otimes \lambda}$ est induite à partir d'un caractère ξ de M et d'un caractère complexe λ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ de A (Remarque 5.10 et Lemme 5.11), et que $\pi_{\xi \otimes \lambda}$ admet en général un unique vecteur généralisé H-invariant que l'on note $a_{\xi \otimes \lambda}$.

On définit un coefficient H-invariant associé à $a_{\xi \otimes \lambda}$ en posant

$$c_{\xi \otimes \lambda}(g) = \langle a_{\xi \otimes \lambda}, \pi_{\xi \otimes \lambda}(g^{-1})\Phi \rangle,$$

où Φ est un vecteur C^∞ de l'espace de $\pi_{\xi \otimes \lambda}$ (par abus de notation, nous n'indiquons pas ici la dépendance par rapport à Φ de ce coefficient).

On définit alors la fonction zêta associée à $c_{\xi \otimes \lambda}$ par

$$\mathscr{Z}(f, z, c_{\xi \otimes \lambda}) = \int_{G/H} f(\dot{g}) \, |\chi(\dot{g})|^z \, c_{\xi \otimes \lambda}(\dot{g}) \, d\dot{g},$$

où $z \in \mathbb{C}$, où $f \in \mathscr{S}(V^+)$ et où χ est un caractère de G trivial sur H.

Nous montrons que cette intégrale a un sens pour $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Re}(-\bar{\lambda})$ assez grands et qu'elle se prolonge en une fonction méromorphe des paramètres z et λ qui vérifie l'équation fonctionnelle suivante (th. 5.18):

$$\mathscr{Z}\left(f, z + \frac{k}{n+1}, c_{\xi \otimes \lambda}\right) = \delta(\xi, \lambda, z) \, \mathscr{Z}(\hat{f}, -z, \check{c}_{\xi \otimes \lambda}),$$

où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier lue sur G/H et où $\check{c}_{\xi \otimes \lambda}(\dot{g}) = c_{\xi \otimes \lambda}(\sigma(\dot{g}))$ (σ étant l'involution de l'espace symétrique G/H).

Le facteur $\delta(\xi, \lambda, z)$ est donné explicitement en fonction des facteurs *rho* de Tate. Les démonstrations reposent essentiellement sur les relations entres les fonctions zêta précédentes et celles du paragraphe 3 via le noyau de Poisson.

Les résultats de cet article avaient été annoncés par les auteurs dans une Note [B-R]. Les résultats analogues pour les représentations de dimension finie se trouvent dans [R-S]. A la suite d'une conférence de H. Rubenthaler sur ce sujet à l'Université de Kyoto, A. Gyoja a résolu un problème analogue pour des groupes algébriques sur un corps fini [Gy].

Nous traiterons dans des articles ultérieurs deux problèmes qui nous semblent constituer une suite naturelle des résultats présentés ici. Le premier est d'étendre les résultats précédents au cas d'un corps local quelconque. Le deuxième est d'étudier dans quelle mesure le théorème du sous-module sphérique de Delorme [D] permet de répondre à la question posée plus haut c'est-à-dire de démontrer une équation fonctionnelle analogue à celle de cet article pour des coefficients K-finis à gauche et H-invariants à droite de représentations sphériques irréductibles quelconques.

H. Rubenthaler tient à remercier S. Rallis et R. Stanton pour l'intérêt porté à ce travail et pour leur invitation à un séjour très stimulant au département de Mathématiques de l'université de l'Ohio durant le mois de juin 1991.

2. Les espaces préhomogènes de type parabolique commutatif

2.1. Les espaces préhomogènes: définition et propriétés générales. — Soit G un groupe algébrique défini sur $\mathbb{C}$, connexe. Rappelons qu'une représentation rationnelle $\rho : G \to GL(V)$ dans un espace vectoriel V est dite préhomogène si G possède dans V une orbite Zariski-ouverte. Le triplet (G, ρ, V) ou, plus simplement, le couple (G, V) est alors appelé espace préhomogène. Ces espaces, lorsque G est réductif et ρ irréductible ont été classifiés par Sato et Kimura [S-K]. *Nous renvoyons le lecteur à leur travail pour tout ce qui concerne la théorie générale de ces espaces.*

Une fraction rationnelle R sur V est appelée *invariant relatif* de (G, V) s'il existe un caractère algébrique χ sur G tel que $R(g.x)=\chi(g)R(x)$, $g\in G$, $x\in V$ (nous noterons $g.x$ plutôt que $\rho(g)x$ l'action de g sur x). Le caractère χ d'un invariant relatif est nécessairement trivial sur le sous-groupe d'isotropie H d'un point de l'orbite ouverte. Inversement, la donnée d'un caractère χ trivial sur H, détermine, à une constante près, un unique invariant relatif dont le caractère est χ.

Soit Ω l'orbite ouverte de G dans V. L'ensemble $S=V-\Omega$ est appelé le lieu singulier de (G, V). Désignons par S_i $(i=1, \ldots, l)$ les composantes irréductibles de codimension 1 de S. Il existe des polynômes irréductibles P_i (uniques à la multiplication par une constante près) tels que $S_i=\{x\in V \mid P_i(x)=0\}$. On montre alors que les P_i sont des invariants relatifs et que tout invariant relatif R est de la forme $R=cP_1^{m_1}\ldots P_l^{m_l}$ où $c\in\mathbb{C}$ et $m_i\in\mathbb{Z}$. Les invariants relatifs $P_1, \ldots, P_l$ sont appelés invariants relatifs fondamentaux.

Une notion essentielle pour les espaces préhomogènes est celle de régularité. Un espace préhomogène est dit *régulier* s'il existe un invariant relatif f dont le Hessien est non identiquement nul. Lorsque nous nous restreignons aux groupes G réductifs la régularité est caractérisée par le fait que S est une hypersurface. Si de plus la représentation est irréductible cette hypersurface sera irréductible. Dans ce cas le polynôme Δ_0 tel que $S=\{x\in V \mid \Delta_0(x)=0\}$ est l'unique invariant relatif qui est un polynôme irréductible et tout invariant relatif est de la forme $c\Delta_0^n$ $(c\in\mathbb{C}, n\in\mathbb{N})$.

2.2. Les espaces préhomogènes (G, V^+). — Nous allons à présent rappeler la structure de certains espaces préhomogènes très particuliers, appelés espaces préhomogènes de type parabolique commutatifs (*voir* [M-R-S] pour les détails). Soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ une algèbre de Lie réductive complexe, $\mathfrak{j}$ une sous-algèbre de Cartan de $\tilde{\mathfrak{g}}$ et $\tilde{\mathcal{R}}$ le système de racines de $\tilde{\mathfrak{g}}$ par rapport à $\mathfrak{j}$. Soit Ψ une base de $\tilde{\mathcal{R}}$ et $\tilde{\mathcal{R}}^+$ (resp. $\tilde{\mathcal{R}}^-$) l'ensemble des racines positives (resp. négatives) par rapport à Ψ. On fixe une partie Θ de Ψ astreinte aux deux conditions suivantes :

$$\operatorname{card}(\Psi-\Theta)=1, \tag{2.1}$$

(2.2) Si $\{\alpha_0\}=\Psi-\Theta$ alors le coefficient de α_0 dans la décomposition suivant Ψ de toute racine positive est 0 ou 1.

L'ensemble des racines qui sont combinaison linéaire d'éléments de Θ est un système de racines $\mathcal{R}$ dont Θ est une base. On désigne par $\mathcal{R}^+$ (resp. $\mathcal{R}^-$) les racines positives (resp. négatives) correspondantes.

Soit H_0 l'unique élément de $\mathfrak{j}\cap[\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}}]$ tel que

$$\alpha_0(H_0)=2 \qquad \text{et} \qquad \alpha(H_0)=0 \qquad \text{pour} \quad \alpha\in\Theta.$$

On note $\mathfrak{g}$ le centralisateur de H_0 dans $\tilde{\mathfrak{g}}$. L'algèbre $\mathfrak{g}$ est réductive, l'algèbre $\mathfrak{j}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$ est $\mathcal{R}$. En désignant comme d'habitude par $\tilde{\mathfrak{g}}^{\alpha}$ (ou $\mathfrak{g}^{\alpha}$) l'espace radiciel correspondant à la racine α on pose:

$$V^{+}=\bigoplus_{\alpha\in\tilde{\mathcal{R}}^{+}\setminus\mathcal{R}^{+}}\tilde{\mathfrak{g}}^{\alpha},$$

$$V^{-}=\bigoplus_{\alpha\in\tilde{\mathcal{R}}^{+}\setminus\mathcal{R}^{+}}\tilde{\mathfrak{g}}^{-\alpha}.$$

La sous-algèbre $\tilde{\mathfrak{p}}=\mathfrak{g}\oplus V^{+}$ est alors une sous-algèbre parabolique maximale de $\tilde{\mathfrak{g}}$ et la condition (2.2) équivaut à la commutativité de V^{+} qui est le plus grand idéal nilpotent de $\tilde{\mathfrak{p}}$.

Soit $\tilde{G}$ le groupe adjoint de $\tilde{\mathfrak{g}}$ et G le centralisateur de H_0 dans $\tilde{G}$ (c'est aussi le sous-groupe analytique de $\tilde{G}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$). Le groupe G opère irréductiblement dans V^{+} et on sait qu'il existe une orbite Ω^{+} qui est ouverte pour la topologie de Zariski. Ce résultat est d'ailleurs vrai dans le contexte plus général des $\mathbb{Z}$-graduations des algèbres de Lie réductives [Vi].

On a donc obtenu un espace préhomogène qu'on note (G, V^{+}). Ce sont ces espaces qu'on appelle espaces préhomogènes de type parabolique commutatifs ([Ru1], [M-R-S]).

Remarque 2.1. — La représentation (G, V^{-}), qui est aussi préhomogène, s'identifie à la représentation contragrédiente de (G, V^{+}), grâce à la forme de Killing $\tilde{B}$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Notons qu'on peut, sans restreindre la généralité, supposer $\tilde{\mathfrak{g}}$ simple en considérant l'idéal simple de $\tilde{\mathfrak{g}}$ correspondant à la composante connexe du graphe de Dynkin de Ψ contenant α_0. Cela ne change pas V^{+} et remplace G par un quotient par un sous-groupe invariant qui opère trivialement sur V^{+}. Toutefois les constructions que nous allons faire introduisent de façon naturelle des algèbres semi-simples ou réductives même si on part d'une algèbre simple.

Soit $\tilde{\mathcal{R}}_1$ l'ensemble des racines orthogonales à α_0; ce sont aussi les racines fortement orthogonales à α_0. Si H_α est la coracine dans $\mathfrak{j}$ de la racine α, on pose

$$\mathfrak{j}_1=\sum_{\alpha\in\tilde{\mathcal{R}}_1}\mathbb{C}H_\alpha \qquad \text{et} \qquad \tilde{\mathfrak{g}}_1=\mathfrak{j}_1\oplus\bigoplus_{\alpha\in\tilde{\mathcal{R}}_1}\tilde{\mathfrak{g}}^{\alpha}.$$

L'espace $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ est une sous-algèbre semi-simple de $\tilde{\mathfrak{g}}$, dont $\mathfrak{j}_1$ est une sous-algèbre de Cartan. Le système de racines de $(\tilde{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{j}_1)$ est $\tilde{\mathcal{R}}_1$. Posons $\Phi_1^{+}=(\tilde{\mathcal{R}}^{+}-\mathcal{R}^{+})\cap\tilde{\mathcal{R}}_1$ et soit $\Theta_1=\Psi\cap\tilde{\mathcal{R}}_1$ l'ensemble des racines simples fortement orthogonales à α_0. Si $\Phi_1^{+}=\varnothing$ alors Θ_1 est une base de $\tilde{\mathcal{R}}_1$ et la construction que nous sommes en train de décrire est terminée. Si $\Phi_1^{+}\neq\varnothing$, on montre qu'il existe une unique racine $\alpha_1\in\Phi_1^{+}$, telle que tout élément de Φ_1^{+} soit somme de α_1 et d'une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs ou nuls d'éléments de Θ_1. Il en résulte que $\{\alpha_1\}\cup\Theta_1$ est une base de $\tilde{\mathcal{R}}_1$ telle que les racines positives correspondantes soient les éléments de $\tilde{\mathcal{R}}_1^{+}=\tilde{\mathcal{R}}_1\cap\tilde{\mathcal{R}}^{+}$.

Le point clé est que la donnée $(\tilde{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{j}_1, \Psi_1, \alpha_1)$ est alors analogue à la donnée $(\tilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{j}, \Psi, \alpha_0)$ et qu'on obtient ainsi, avec les notations évidentes, un nouvel espace préhomogène de type parabolique commutatif $(\mathfrak{g}_1, V_1^{+})$. On poursuit jusqu'à l'arrêt de la construction. Pour $i=0, \ldots, n$, on obtient ainsi une suite de racines α_i, et une suite $(\mathfrak{g}_i, V_i^{+})$ d'espaces préhomogènes (on a posé $(\mathfrak{g}_0, V_0^{+})=(\mathfrak{g}, V^{+})$).

Fixons une fois pour toute une base de Chevalley X_α ($\alpha \in \tilde{\mathscr{R}}$), H_γ ($\gamma \in \Psi$) de $\tilde{\mathfrak{g}}$ (*cf.* [Bou], p. 84). On démontre que les éléments :

$$0,\ X_{\alpha_0},\ X_{\alpha_0}+X_{\alpha_1},\ X_{\alpha_0}+X_{\alpha_1}+X_{\alpha_2},\ \ldots,\ I^+=X_{\alpha_0}+X_{\alpha_1}+\ldots+X_{\alpha_n},$$

constituent un système complet de représentants des orbites de G dans V^+, l'élément I^+ étant le représentant de l'orbite ouverte.

De plus l'espace préhomogène (G, V^+) est régulier si et seulement si l'élément H_0 défini plus haut est égal à $H_{\alpha_0}+H_{\alpha_1}+\ldots+H_{\alpha_n}$ ([R-S] prop. 2.2). Dans le cas où $\tilde{\mathfrak{g}}$ est simple, on peut aussi caractériser un espace régulier de la façon suivante. Désignons par $\tilde{w}_0$ l'unique élément du groupe de Weyl de $\tilde{\mathscr{R}}$ qui transforme $\tilde{\mathscr{R}}^+$ en $\tilde{\mathscr{R}}^-$. Alors (G, V^+) est régulier si et seulement si $\tilde{w}_0\alpha_0=-\alpha_0$ ([Ru1] prop. 1.4.1 et th. 1.4.2).

Cela conduit naturellement à la classification du tableau suivant où $\mathfrak{g}'=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, et où la racine encerclée sur le diagramme de Dynkin de $\tilde{\mathscr{R}}$ est la racine α_0 de la construction précédemment décrite. L'entier *d* qui figure dans le tableau pour les cas réguliers est défini au paragraphe 3.3 (3.23).

Remarque 2.2. — Désignons par X = G/K un espace hermitien symétrique irréductible ([He] Chap. 8). Ici G est un groupe de Lie réel semi-simple et K un sous-groupe compact maximal possédant un centre Z(K) non trivial de dimension 1. Soit $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ la complexifiée de l'algèbre de Lie de G. Il existe un élément H appartenant à l'algèbre de Lie de Z(K) tel que l'on ait

$$\mathfrak{g}_\mathbb{C}=\mathfrak{p}^-\oplus\mathfrak{k}_\mathbb{C}\oplus\mathfrak{p}^+$$

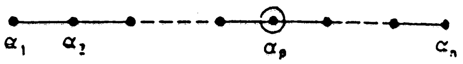
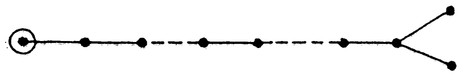
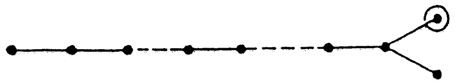
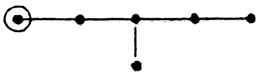
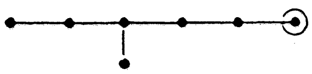
où $\mathfrak{p}^+$ (resp. $\mathfrak{p}^-$) est l'espace propre de ad H pour la valeur propre i (resp. $-i$). La représentation ($\mathfrak{k}_\mathbb{C}$, $\mathfrak{p}^+$) correspond à un espace préhomogène de type parabolique commutatif et on peut montrer qu'inversement tout espace préhomogène de type parabolique commutatif est ainsi obtenu à partir d'un espace hermitien symétrique. On peut également montrer que dans ce contexte la régularité est équivalente au fait que l'espace hermitien symétrique est de type tube.

Remarque 2.3. — *a*) Il est important de noter pour la suite que si l'espace préhomogène ($\mathfrak{g}$, V^+) est régulier, alors tous les espaces préhomogènes ($\mathfrak{g}_i$, V_i^+) ($0 \leqq i \leqq n$) de la suite précédemment construite sont réguliers ([M-R-S] prop. 2.4).

b) Dans les cas qui nous intéressent ici on peut démontrer ([Ru1], [Ru2]) que la régularité de ($\mathfrak{g}$, V^+) est équivalente à l'existence d'un invariant relatif non trivial.

2.3. L'ESPACE PRÉHOMOGÈNE (P^-, V^+). — *Dans toute la suite de l'article nous nous placerons dans le cas régulier*. Nous noterons Δ_i l'invariant relatif fondamental de ($\mathfrak{g}_i$, V_i^+) que nous considérerons comme un polynôme irréductible sur $V_0^+=V^+$ grâce au choix naturel du supplémentaire de V_i^+ dans V^+ qui est formé de la somme des espaces radiciels de V^+ qui ne sont pas dans V_i^+. Nous normalisons ces polynômes en posant $\Delta_i(I^+)=1$ et nous noterons χ_i le caractère de Δ_i.

TABLEAU I

$\tilde{\mathfrak{g}}$			$\mathfrak{g}'$	$\frac{d}{2}$
A_n		régulier si $n=2k+1$ et si $p=k+1$	$A_{p-1}\times A_{n-p}$	1
B_n		toujours régulier	B_{n-1}	$\frac{2n-3}{2}$
C_n		toujours régulier	A_{n-1}	$\frac{1}{2}$
$D_{n,1}$		toujours régulier	D_{n-1}	$n-2$
$D_{n,2}$		régulier si n pair	A_{n-1}	2
E_6		non régulier	D_5	
E_7		régulier	E_6	4

Nous désignons par B^+ (respectivement B^-) le sous-groupe de Borel de G correspondant à $\mathscr{R}^+$ (respectivement $\mathscr{R}^-$). Rappelons alors le *Lemme de Gauss*:

THÉORÈME 2.4. — 1) *Soit* x *un élément de* V^+ *tel que* $\Delta_i(x)$ *soit non nul pour* $i=0, 1, \ldots, n$. *Il existe alors* $g\in B^-$ *tel que* $gx=I^+$.

2) *La représentation* (B^-, V^+) *est un espace préhomogène dont l'orbite ouverte est*:

$$\mathcal{O}^+=\{x\in V^+ \mid \Delta_0(x)\Delta_1(x)\ldots\Delta_n(x)\neq 0\}.$$

3) *Tout invariant relatif de* (B^-, V^+) *est de la forme*

$$c\,\Delta_0^{a_0}\Delta_1^{a_1}\ldots\Delta_n^{a_n}\ (c\in\mathbb{C},\ a_i\in\mathbb{Z},\ i=0,\ \ldots,\ n).$$

Pour la démonstration du théorème précédent on pourra se reporter à [M-R-S] (th. 3.6 et prop. 3.8). On en déduit notamment que les polynômes Δ_i sont aussi des invariants relatifs de B^-. Leur caractère χ_i s'étend donc en un caractère de B^- encore noté χ_i qui est donné par le lemme suivant qui sera utile ultérieurement.

LEMME 2.5. — *Pour* $H\in\mathfrak{j}$ *et* $n\in\exp(\oplus_{\alpha\in\mathcal{R}^+}\mathfrak{g}^{-\alpha})$ *on a*:

$$\chi_j(\exp H\,.\,n)=e^{\sum_{i=j}^{n}\alpha_i(H)}.$$

Démonstration. — Les caractères χ_i sont triviaux sur le groupe N^- d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}^-=\oplus_{\alpha\in\mathcal{R}^+}\mathfrak{g}^{-\alpha}$ puisque ce dernier est nilpotent. Tout élément H de $\mathfrak{j}$ s'écrit

$$H=\sum_{i=0}^{n} z_i H_{\alpha_i}+H' \qquad \text{où} \qquad \alpha_i(H')=0$$

pour tout $i=0,\ \ldots,\ n$. On a alors $\exp(H)\,.\,I^+=e^{\operatorname{ad}H}\,.\,I^+=\sum_{i=1}^{n} e^{2z_i}X_{\alpha_i}$. On obtient donc, en considérant, ainsi que nous l'avons dit plus haut, les polynômes Δ_i comme des polynômes sur V^+ :

$$\Delta_j\left(\sum_{i=0}^{n} e^{2z_i}X_{\alpha_i}\right)=\Delta_j\left(\sum_{i=j}^{n} e^{2z_i}X_{\alpha_i}\right)=\prod_{i=j}^{n} e^{2z_i}$$

(*voir* la démonstration du th. 3.5 de [R-S]). Puisque $\alpha_i(H)=2z_i$, on a bien le résultat voulu. □

Remarque 2.6. — *a*) Les polynômes $\Delta_i\,(1\leqq i\leqq n)$ *ne sont pas* des invariants relatifs de G.

b) Il existe une généralisation du théorème 2.4 au cas non régulier ([R-S]).

Exemple. — Dans le cas C_n du tableau, on a $G=GL(n,\mathbb{C})$ et V^+ est l'espace $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ des matrices symétriques complexes de type $n\times n$. L'action de G sur V^+ est l'action naturelle $(g, x)\rightarrow gxg^t$. Dans cette situation les Δ_i sont les mineurs principaux de x et le théorème 2.4 se réduit essentiellement au lemme classique de Gauss qui dit qu'une matrice symétrique dont tous les mineurs principaux sont non nuls se réduit à la forme diagonale par une matrice g triangulaire.

Nous allons à présent décrire un sous-groupe parabolique P^- de G qui contient (parfois strictement) le sous groupe de Borel B^- et pour lesquels les différents polynômes Δ_i sont encore des invariants relatifs.

Pour cela nous utilisons le lemme ci-dessous qui détermine la restriction des racines de $\mathscr{R}$ à l'ensemble

$$\mathfrak{a}_0 = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathbb{R}\,\mathrm{H}_{\alpha_i} \subset \mathfrak{j}.$$

LEMME 2.7. — *Si α est une racine de $\mathscr{R}$ dont la restriction à $\mathfrak{a}_0$ est non nulle il existe deux éléments i et j de $\{0, \ldots, n\}$ tels que*

$$\alpha(\mathrm{H}_{\alpha_i}) = -1; \qquad \alpha(\mathrm{H}_{\alpha_j}) = 1; \qquad \alpha(\mathrm{H}_{\alpha_l}) = 0 \qquad \textit{pour} \quad l \neq i \ \textit{et} \ l \neq j.$$

De plus α appartient à $\mathscr{R}^+$ si et seulement si $i<j$.

Démonstration. — Pour une racine α de $\mathscr{R}$ posons $p_j = \alpha(\mathrm{H}_{\alpha_j})$ pour $j=1, \ldots, n$. C'est un entier et comme $\mathrm{H}_0 = \mathrm{H}_{\alpha_0} + \ldots + \mathrm{H}_{\alpha_n}$ appartient au centre de $\mathfrak{g}$ on a $p_0 + p_1 + \ldots + p_n = 0$. D'autre part on a ([M-R-S] (3.1), p. 113)

$$|p_0| + |p_1| + \ldots + |p_n| \leqq 2.$$

On en déduit soit que la restriction de α à $\mathfrak{a}_0$ est nulle, soit qu'il existe deux entiers $i \neq j$ tels que

$$\alpha(\mathrm{H}_{\alpha_i}) = -1, \qquad \alpha(\mathrm{H}_{\alpha_j}) = 1 \qquad \text{et} \quad \alpha(\mathrm{H}_{\alpha_l}) = 0 \quad \text{pour} \ l \neq i \quad \text{et} \quad l \neq j.$$

Il reste à vérifier que α est positive si et seulement si $i<j$. Supposons que $i<j$ et utilisons la construction par récurrence des α_j. On a vu précédemment que $\alpha(\mathrm{H}_0) = \ldots = \alpha(\mathrm{H}_{\alpha_{i-1}}) = 0$ implique l'appartenance de α à $\tilde{\mathscr{R}}_i$. Or le système de racines $\tilde{\mathscr{R}}_i$ admet pour base $\Theta_i \cup \alpha_i$ où $\Theta_i \subset \mathscr{R}$ et $\alpha_i \in \tilde{\mathscr{R}}_i^+ \setminus \mathscr{R}^+$. Comme la racine α appartient à $\mathscr{R}$, elle est combinaison linéaire d'éléments de Θ_i. Or $\alpha(\mathrm{H}_{\alpha_i}) < 0$ implique que $\alpha + \alpha_i \in \tilde{\mathscr{R}}_i$, ce qui n'est possible que si α est positive. On montre de même que $i>j$ implique l'appartenance de α à $\tilde{\mathscr{R}}^-$, d'où le résultat. □

On désigne par $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_0)$ le centralisateur de $\mathfrak{a}_0$ dans $\mathfrak{g}$. L'espace

$$\mathfrak{p}^- = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}_0) + \Big(\bigoplus_{\alpha \in \mathscr{R}^-} \mathfrak{g}^{\alpha}\Big),$$

qui contient $\mathfrak{b}^-$ (l'algèbre de Lie de B^-), est une sous algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$. En effet le lemme 2.7 implique que la famille de racines définissant $\mathfrak{p}^-$ est close. Notons que dans les notations de [M-R-S] (lemme 3.18) on a $\mathfrak{p}^- = \mathfrak{p}\,(1, 1, \ldots, 1)$. Si P^- est le sous-groupe parabolique de G correspondant à $\mathfrak{p}^-$, l'orbite ouverte de P^- dans V^+ est alors la même que l'orbite ouverte de B^- dans V^+ et les polynômes (Δ_i) $0 \leqq i \leqq n$ sont alors aussi les invariants relatifs fondamentaux de $(\mathrm{P}^-, \mathrm{V}^+)$ ([M-R-S] lemme 3.20).

2.4. L'ORBITE OUVERTE RÉALISÉE COMME ESPACE SYMÉTRIQUE. — Nous désignons toujours par Ω^+ l'orbite ouverte de G dans V^+. Rappelons qu'on a :

$$\Omega^+ = \{ x \in \mathrm{V}^+ \mid \Delta_0(x) \neq 0 \}.$$

Nous avons vu que l'élément $I^+ = X_{\alpha_0} + \ldots + X_{\alpha_n}$ est un élément de Ω^+ (les vecteurs X_α étant pris dans la base de Chevalley précédemment choisie). Alors l'élément $I^- = X_{-\alpha_0} + \ldots + X_{-\alpha_n}$ est un élément de l'orbite ouverte Ω^- de G dans V^- et l'orthogonalité forte des racines α_i implique que

$$[I^-, I^+] = \sum_{i=0}^{n} H_{\alpha_i}.$$

Comme la régularité de (G, V^+) implique l'égalité $H_0 = \sum_{i=0}^{n} H_{\alpha_i}$, le triplet (I^-, H_0, I^+) est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet. Considérons l'élément de $\tilde{G}$ défini par

$$w_0 = e^{\operatorname{ad} I^+} e^{\operatorname{ad} I^-} e^{\operatorname{ad} I^+}.$$

L'action de w_0 sur le $\mathfrak{sl}_2$-triplet (I^-, H_0, I^+) est celle de l'élément non trivial du groupe de Weyl de ce $\mathfrak{sl}_2$-triplet, c'est-à-dire $w_0 . H_0 = -H_0$, $w_0 . I^+ = I^-$ et $w_0 . I^- = I^+$. On en déduit que w_0 stabilise $\mathfrak{g}$ et échange V^+ et V^-. De plus on a :

LEMME 2.8 ([Ru1] prop. 1.4.5). — 1) *Le carré de* w_0 *dans* $\tilde{G}$ *est égal à l'élément neutre.*

2) *L'ensemble des points fixes de* w_0 *dans* $\mathfrak{g}$ *est égal au centralisateur dans* $\mathfrak{g}$ *de* I^+, *qui est aussi le centralisateur de* I^-.

Démonstration. — L'action de l'algèbre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ engendrée par le $\mathfrak{sl}_2$-triplet (I^-, H_0, I^+) munit $\mathfrak{g}$ d'une structure de $\mathfrak{sl}_2$-module de dimension finie. Dans la décomposition en $\mathfrak{sl}_2$-modules irréductibles de $\tilde{\mathfrak{g}}$ n'interviennent que des sous-modules de poids dominants 0 et 2. L'action de w_0^2 sur l'un de ces modules est triviale ([Bou] 8.1.5) d'où la première partie du lemme.

D'autre part $\mathfrak{g}$ est égal à la somme des espaces de poids 0 de ces différents modules (puisque $\mathfrak{g}$ est le centralisateur de H_0 dans $\tilde{\mathfrak{g}}$). S'il s'agit d'un module de poids dominant 0, c'est le $\mathfrak{sl}_2$-module trivial et l'action de w_0 est triviale. S'il s'agit d'un module de poids dominant 2, l'élément w_0 opère par $-\mathrm{Id}$ sur l'espace de poids 0 ([Bou] 8.1.5). On en déduit aisément la deuxième partie du lemme. □

Pour respecter les conventions usuelles, nous noterons σ l'involution de $\mathfrak{g}$ définie par w_0 et aussi par σ l'involution de G définie par

$$\sigma(g) = w_0 g w_0^{-1}, \qquad g \in G.$$

PROPOSITION 2.9. — *Soit* H *le sous-groupe d'isotropie de* I^+ *dans* G. *Ce sous-groupe est aussi le sous-groupe d'isotropie de* I^- *dans* G. *De plus* H *est un sous-groupe ouvert du groupe* G^σ *des points fixes de* σ *dans* G.

Démonstration. — Il existe une application G-équivariante de Ω^+ dans Ω^- qui envoie I^+ sur un multiple de I^- ([Ru1] th. 1.3.6). Elle est donnée par l'application (*voir* [S-K] pour les détails) :

$$\Omega^+ \to V^* = V^-$$
$$x \mapsto \operatorname{gradlog} \Delta_0(x) = \frac{1}{\Delta_0(x)} d\Delta_0(x).$$

On en déduit l'égalité des groupes d'isotropie de I^+ et I^-. Le lemme 2.8 2) implique que H et G^σ ont même algèbre de Lie. Pour montrer que H est contenu dans G^σ, on remarque que puisque H est contenu dans le groupe connexe G, tout élément h de H fixe chaque élément du $\mathfrak{sl}_2$-triplet (I^-, H_0, I^+). Par conséquent l'action de h sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ commute avec celle de w_0. Puisque $\tilde{G}$ est le groupe adjoint de $\tilde{\mathfrak{g}}$ on en déduit que $h = \sigma(h)$. $\square$

Remarque 2.10. — Il résulte de ce qui précède qu'à l'involution σ de G est associé un espace réductif symétrique (complexe) G/H qui se réalise comme l'ouvert de Zariski Ω^+ de V^+ d'une part et comme l'ouvert de Zariski Ω^- de V^- d'autre part.

3. Équation fonctionnelle

3.1. ÉQUATION FONCTIONNELLE ABSTRAITE. — Nous allons démontrer l'équation fonctionnelle de la fonction zêta locale de l'espace préhomogène (P^-, V^+). Rappelons que l'orbite ouverte de P^- dans V^+ (qui est aussi l'orbite ouverte de B^-) est l'ensemble

$$\mathcal{O}^+ = \{ x \in V^+ \mid \Delta_0(x) \Delta_1(x) \ldots \Delta_n(x) \neq 0 \}.$$

La représentation (P^-, V^-) est bien entendu aussi préhomogène, les invariants relatifs fondamentaux étant des polynômes $\nabla_0^*, \nabla_1^*, \ldots, \nabla_n^*$ de degrés respectifs $n+1-i$. L'orbite ouverte de P^- (ou de B^-) dans V^- est l'ensemble

$$\mathcal{O}^- = \{ y \in V^- \mid \nabla_0^*(y) \nabla_1^*(y) \ldots \nabla_n^*(y) \neq 0 \}.$$

Comme dans [R-S] nous normaliserons toujours les polynômes Δ_i et ∇_i^* par la condition $\Delta_i(I^+) = \nabla_i^*(I^-) = 1$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Dans la base de Chevalley choisie au paragraphe 2, les polynômes Δ_i et ∇_i^* sont alors à coefficients réels.

Nous désignerons toujours par $|z|$ le *carré du module usuel* d'un nombre complexe z et par β_j $(j \in \mathbb{Z})$ le caractère unitaire de $\mathbb{C}^*$ défini par

$$\beta_j(z) = (z/|z|^{1/2})^j.$$

Pour $l = (l_0, l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ et $s = (s_0, s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ on pose

$$(\Delta)_l |\Delta|^s = \prod_{i=0}^{n+1} (\beta_{l_i} \circ \Delta_i) |\Delta_i|^{s_i}$$

et

$$(\nabla^*)_l \,|\, \nabla^* \,|^s = \prod_{i=0}^{n+1} (\beta_{l_i} \circ \nabla_i^*) \,|\, \nabla_i^* \,|^{s_i}.$$

La transformée de Fourier d'une fonction f de $\mathscr{S}(\mathrm{V}^+)$ est la fonction $\hat{f}$ de $\mathscr{S}(\mathrm{V}^-)$ définie par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathrm{V}^+} f(x)\, \tau \circ \mathrm{B}(x, y)\, dx$$

où τ est le caractère de $\mathbb{C}$ donné par $\tau(z) = \exp(4 i \pi \operatorname{Re}(z))$ et où B est égal au produit de la forme de Killing $\tilde{\mathrm{B}}$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$ par $-(n+1)/4k$, ($k = \dim \mathrm{V}^+ = \dim \mathrm{V}^-$). On choisit une mesure de Lebesgue dx sur V^+ et on prend pour mesure de Lebesgue dy sur V^- la mesure duale de dx pour la transformée de Fourier définie ci-dessus (ce qui signifie que l'inversion de Fourier se fait sans facteur constant).

Pour $f \in \mathscr{S}(\mathrm{V}^+)$, $g \in \mathscr{S}(\mathrm{V}^-)$, $l \in \mathbb{Z}^{n+1}$, on définit, pour $s \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $\operatorname{Re}(s) > 0$ les fonctions zêta suivantes :

$$\mathrm{Z}(f, l, s) = \int_{\mathrm{V}^+} f(x)\, (\Delta(x))_l \,|\, \Delta(x) \,|^s\, dx,$$

$$\mathrm{Z}^*(g, l, s) = \int_{\mathrm{V}^-} g(y)\, (\nabla^*(y))_l \,|\, \nabla^*(y) \,|^s\, dy.$$

Pour $l \in \mathbb{Z}^{n+1}$ et $s \in \mathbb{C}^{n+1}$ on définit les involutions

$$v(l) = (-l_0 - l_1 - \ldots - l_n, l_n, l_{n-1}, \ldots, l_1)$$

$$t(s) = \left(-s_0 - s_1 - \ldots - s_n - \frac{k}{(n+1)}, s_n, s_{n-1}, \ldots, s_1\right).$$

THÉORÈME 3.1 Équation fonctionnelle abstraite. – *Pour* $f \in \mathscr{S}(\mathrm{V}^+)$ *et* $l \in \mathbb{Z}^{n+1}$, *les intégrales définissant* $\mathrm{Z}(f, l, s)$ *et* $\mathrm{Z}^*(\hat{f}, l, s)$ *se prolongent en des fonctions méromorphes sur* $\mathbb{C}^{n+1}$ *et il existe une fonction méromorphe* $\delta(l, s)$ *telle que*

$$\mathrm{Z}(f, l, s) = \delta(l, s)\, \mathrm{Z}^*(\hat{f}, v(l), t(s)). \tag{3.1}$$

Le reste du paragraphe 3.1 est consacré à la démonstration de ce théorème.

Remarque 3.2. – Cette équation fonctionnelle abstraite, pour ce type d'espaces préhomogènes, est énoncée et démontrée par F. Sato [S]. Il nous semble cependant que sa démonstration passe trop rapidement sur un point essentiel qui consiste à démontrer que certaines distributions tempérées dépendant d'un paramètre complexe sont d'ordre fini, indépendant du paramètre, sur un ouvert borné (*voir* [S], p. 459 l. 9). Pour cela nous utilisons un résultat récent de C. Sabbah ([Sab]) sur l'existence de polynômes de Bernstein à plusieurs variables. Notre démonstration, différente de celle de F. Sato, consiste alors à étendre au cas de plusieurs variables la démonstration de l'équation fonctionnelle de Shintani ([Sh]).

PROPOSITION 3.3 (C. Sabbah, [Sab], Prop. 1.2). — *Pour $k=0, \ldots, n$, il existe un opérateur différent différentiel $P_k(x, s, \partial_x)$ sur V^+, à coefficients polynômiaux en x et en $s=(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ tel que*

$$(3.2)\qquad P_k(x, s, \partial_x)\,\Delta_0^{s_0}\Delta_1^{s_1}\ldots\Delta_n^{s_n}=B_k(s)\,\Delta_0^{s_0}\Delta_1^{s_1}\ldots\Delta_k^{s_k-1}\ldots\Delta_n^{s_n}$$

où:

— $B_k(s)=\prod_{i\in I_k}\alpha_{k,i}(s)^{\gamma_{k,i}}$

et où:

— *l'ensemble I_k est fini,*

— $\alpha_{k,i}(s)=a_{k,i}^0 s_0+a_{k,i}^1 s_1+\ldots+a_{k,i}^n s_n+b_{k,i}$, *avec* $a_{k,i}^j\in\mathbb{N}$, $b_{k,i}\in\mathbb{Q}^+$,

— $\gamma_{k,i}\in\mathbb{N}^*$.

(*La relation* (3.2) *est vraie localement pour n'importe quelle détermination de* $\Delta_0^{s_0}\Delta_1^{s_1}\ldots\Delta_n^{s_n}$.)

Puisque les Δ_i sont réels sur la forme réelle définie par la base de Chevalley choisie précédemment, on a aussi:

$$(3.3)\qquad P_k(\bar{x}, s, \partial_{\bar{x}})\,\bar{\Delta}_0^{s_0}\ldots\bar{\Delta}_n^{s_n}=B_k(s)\,\bar{\Delta}_0^{s_0}\bar{\Delta}_1^{s_1}\ldots\bar{\Delta}_k^{s_k-1}\ldots\bar{\Delta}_n^{s_n},$$

ce qui implique que

$$(3.4)\qquad P_k(x, s, \partial_x)\,P_k(\bar{x}, s, \partial_{\bar{x}})\,|\Delta_0|^{s_0}\ldots|\Delta_n|^{s_n}=B_k(s)^2\,|\Delta_0|^{s_0}\ldots|\Delta_k|^{s_k-1}\ldots|\Delta_n|^{s_n}$$

où le symbole *barre* au-dessus de la variable x représente la conjugaison par rapport à la forme réelle définie par la base de Chevalley et où, rappelons le, $|z|$ désigne le carré du module usuel du nombre complexe z.

Pour $i\in\mathbb{Z}$, l'entier k étant fixé, nous désignerons par $i(k)$ l'élément de N^{n+1} défini par $i(k)=(0, \ldots, i, \ldots, 0)$ où l'entier i est à la k^e place. Alors les identités (3.2), (3.3), (3.4) ci-dessus s'écrivent respectivement:

$$(3.5)\qquad P_k(x, s, \partial_x)\,\Delta^s=B_k(s)\,\Delta^{s-1(k)},$$

$$(3.6)\qquad P_k(\bar{x}, s, \partial_{\bar{x}})\,\bar{\Delta}^s=B_k(s)\,\bar{\Delta}^{s-1(k)},$$

$$(3.7)\qquad P_k(x, s, \partial_x)\,P_k(\bar{x}, s, \partial_{\bar{x}})\,|\Delta|^s=B_k(s)^2\,|\Delta|^{s-1(k)},$$

ce qui implique, en utilisant les notations précédentes,

$$(3.8)\qquad P_k(x, s, \partial_x)\,P_k(\bar{x}, s, \partial_{\bar{x}})\,|\Delta|^s(\Delta)_l=B_k\left(s+\frac{l}{2}\right)B_k\left(s-\frac{l}{2}\right)|\Delta|^{s-1(k)}(\Delta)_l.$$

Notons également que l'opérateur différentiel *holomorphe* $P_k(x, s, \partial_x)$ commute avec l'opérateur différentiel *antiholomorphe* $P_k(\bar{x}, s, \partial_{\bar{x}})$.

Pour $m\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\{0, 1, \ldots, n\}$, on pose

$$\mathrm{D}_m^k(\partial, s)=\mathrm{P}_k(x, s-(m-1)(k), \partial_x)\ldots\mathrm{P}_k(x, s, \partial_x)$$
$$\times\mathrm{P}_k(\bar{x}, s-(m-1)(k), \partial_{\bar{x}})\ldots\mathrm{P}_k(\bar{x}, s, \partial_{\bar{x}}).$$

(Ici l'ordre des opérateurs différentiels importe dans la partie holomorphe et dans la partie antiholomorphe, mais les opérateurs $\mathrm{P}_k(x, s+i(k), \partial_x)$ et $\mathrm{P}_k(\bar{x}, s+j(k), \partial_{\bar{x}})$ commutent.)

Par itération de la formule (3.8) on obtient:

$$(3.9)\quad \mathrm{D}_m^k(\partial, s)\,|\Delta|^s(\Delta)_l=\mathrm{B}_k\left(s+\frac{l}{2}\right)\ldots\mathrm{B}_k\left(s+\frac{l}{2}-(m-1)(k)\right)$$
$$\times\mathrm{B}_k\left(s-\frac{l}{2}\right)\ldots\mathrm{B}_k\left(s-\frac{l}{2}-(m-1)(k)\right)|\Delta|^{s-m(k)}(\Delta)_l.$$

LEMME 3.4. — *Pour toute fonction $f\in\mathscr{S}(\mathrm{V}^+)$, la fonction $s\mapsto\mathrm{Z}(f, l, s)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}^{n+1}$, holomorphe dans l'ouvert*

$$\mathrm{U}=\{s\in\mathbb{C}^{n+1}\,|\,\mathrm{B}_k(s+l/2+p(k))\neq 0 \text{ et } \mathrm{B}_k(s-l/2+p(k))\neq 0,\ \forall k=0, 1, \ldots, n \text{ et } p\in\mathbb{N}\}.$$

De plus $\mathrm{Z}(f, l, s)$ vérifie pour tout $k=0, 1, \ldots, n$ et $m\in\mathbb{N}^*$ l'équation fonctionnelle suivante:

$$(3.10)\quad \mathrm{Z}({}^t\mathrm{D}_m^k(\partial, s)f, l, s)=\prod_{i=0}^{m-1}\mathrm{B}_k\left(s-i(k)+\frac{l}{2}\right)\mathrm{B}_k\left(s-i(k)-\frac{l}{2}\right)\mathrm{Z}(f, l, s-m(k))$$

où ${}^t\mathrm{D}_m^k(\partial, s)$ est le transposé de l'opérateur $\mathrm{D}_m^k(\partial, s)$.

Démonstration. — Elle est classique modulo la proposition 3.3. On commence par démontrer la relation (3.10) lorsque $\mathrm{Re}(s-m(k))>|l|/2$. Dans un tel domaine, la fonction $\mathrm{D}_m(\partial, s)\,|\Delta|^s(\Delta)_p$ est continue, de sorte que la relation (3.10) s'obtient à partir de (3.9) par une intégration par parties. Le prolongement méromorphe (holomorphe sur U) est alors une conséquence facile de (3.10). □

Il est bien connu que la fonction $s\mapsto\mathrm{Z}(f, s, l)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}^{n+1}$ ([B-G]). Le résultat de Sabbah (prop. 3.3) permet d'obtenir ce prolongement avec plus de précisions (lemme 3.4) (c'était d'ailleurs ainsi que faisait Bernstein dans le cas d'une variable).

On numérote de 1 à $2k$ les éléments $(\mathrm{X}_\alpha, i\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha\in\tilde{\mathrm{R}}^+\setminus\mathrm{R}^+}$ qui constituent une base de V^+ sur $\mathbb{R}$ (les X_α appartiennent à la base de Chevalley de $\tilde{\mathfrak{g}}$ choisie précédemment). Pour un élément $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k})\in\mathbb{N}^{2k}$ on note D_α l'opérateur différentiel $\partial^{\alpha_1}/\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial^{\alpha_{2k}}/\partial x_{2k}^{\alpha_{2k}}$ sur V^+, où les x_i sont les coordonnées dans cette base.

Pour M et $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$ on définit les semi-normes continues suivantes sur $\mathscr{S}(\mathrm{V}^+)$:

$$\nu_{\mathrm{M},\mathrm{N}}(f)=\max_{|\alpha|\leqq\mathrm{N}}\sup_x\{(1+\|x\|^2)^{\mathrm{M}}\,|\mathrm{D}_\alpha f(x)|\},$$

où $\|\ \|$ est une norme sur V^+ et où $|\alpha|=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)$.

Puisque l'opérateur $D_m^k(\partial, s)$ est à coefficients polynomiaux en les variables réelles de V^+ et en s, le lemme suivant est immédiat.

LEMME 3.5. — *Soit* K *un compact de* $\mathbb{C}^{n+1}$. *Il existe* $(M_0, N_0) \in \mathbb{N}^2$ *et une constante* C *positive* (*dépendant toutes du compact* K) *telles que*

$$\sup_{x \in V^+,\, s \in K} |{}^t D_m^k(\partial, s) f| \leqq C\, \nu_{M_0, N_0}(f).$$

LEMME 3.6. — *Soit* $l \in \mathbb{Z}^{n+1}$ *et soit* $\tilde{U}$ *l'ouvert de* $\mathbb{C}^{n+1}$ *sur lequel* $Z(f, l, s)$ *est holomorphe pour toute* $f \in \mathcal{S}(V^+)$. *Soit* K *un compact de* $\tilde{U}$. *Il existe alors trois constantes* $C \in \mathbb{R}_+^*$, M, $N \in \mathbb{N}^*$ *dépendant du compact* K *telles que*:

$$(3.11) \qquad |Z(f, l, s)| \leqq C\, \nu_{M, N}(f).$$

Cela implique notamment que $f \mapsto Z(f, l, s)$ *est une distribution tempérée d'ordre* $\leqq N$ *sur* K.

Démonstration. — Commençons par démontrer le résultat sur l'ouvert U du lemme 3.4. Soit K un compact de U et soit $m = (m_0, m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tel que $\operatorname{Re}(s+m) > |l|/2$, $\forall s \in K$.

On définit l'opérateur différentiel $D_m(\partial, s)$ par:

$$D_m(\partial, s) = D_{m_n}^n(\partial, s) \ldots D_{m_1}^1(\partial, s)\, D_{m_0}^0(\partial, s),$$

et le polynôme $B(s, l, m)$ par:

$$D_m(\partial, s)\, |\Delta|^s (\Delta)_l = B(s, l, m)\, |\Delta|^{s-m} (\Delta)_l.$$

(On pourrait calculer $B(s, l, m)$ en fonction des B_k grâce à la relation (3.9), notons simplement que la fonction $B(s+m, l, m)$ est non nulle sur U.)

Désignons par ${}^t D_m(\partial, s)$ l'opérateur transposé de $D_m(\partial, s)$. On a alors l'analogue de la relation (3.10):

$$(3.12) \qquad Z(f, l, s) = \frac{1}{B(s+m, l, m)} Z({}^t D_m(\partial, s+m) f, l, s+m).$$

Si $s \in K$ alors $Z({}^t D_m(\partial, s+m) f, l, s+m)$ est défini par l'intégrale convergente $\int_{V^+} {}^t D_m(\partial, s+m) f(\Delta)_l |\Delta|^{s+m} dx$, et on en déduit que:

$$|Z({}^t D_m(\partial, s+m) f, l, s+m)| \leqq \int_{V^+} |{}^t D_m(\partial, s) f|\, |\Delta|^{\operatorname{Re}(s)+m} dx.$$

Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que:

$$|\Delta_i(x)| \leqq C_1 (1 + \|x\|^2)^{n+1} \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Posons $\sigma(s)=\Sigma \operatorname{Re}(s_i)$ et $\sigma(m)=\Sigma m_i$. On a alors:

$$|Z({}^t D_m(\partial, s+m) f, l, s+m)|$$
$$\leqq \int_{V^+} |{}^t D_m(\partial, s+m) f(x)| C_1^{(\sigma(s)+\sigma(m))} (1+\|x\|^2)^{(n+1)(\sigma(s)+\sigma(m))} dx.$$

Cela implique que

$$|Z({}^t D_m(\partial, s+m) f, l, s+m)| \leqq C_1^{(\sigma(s)+\sigma(m))} \operatorname{Sup}\{(1+\|x\|^2)^{(n+1)(\sigma(s)+\sigma(m))+\alpha}$$
$$\times |{}^t D_m(\partial, s+m) f|\} \int_{V^+} (1+\|x\|^2)^{-\alpha} dx,$$

où α est un entier suffisamment grand pour que $C_2=\int_{V^+} (1+\|x\|^2)^{-\alpha} dx<+\infty$. On en déduit que pour $s\in K$, il existe $C_3\in \mathbb{R}_+^*$ et $M_0\in \mathbb{N}$ tel que

$$|Z({}^t D_m(\partial, s+m) f, l, s+m)| \leqq C_3 \nu_{M_0, 0}({}^t D_m(\partial, s+m) f).$$

Le lemme 3.5 et le fait que dans la relation (3.12) la fonction $1/B(s+m, l, m)$ soit bornée sur K impliquent alors immédiatement la majoration (3.11) sur U.

Il reste à montrer que la même majoration a lieu sur un compact K de $\tilde{U}$. Pour cela il suffit de montrer que (3.11) est vraie sur un voisinage compact d'un point s^0 où $Z(f, l, s)$ est holomorphe et appartenant à une réunion finie d'hyperplans d'équations $\alpha_{k, i}(s+p)=0$, où $p\in\mathbb{N}$. Pour cela on choisit un polydisque de centre s^0 et ne contenant aucun autre point des hyperplans précédents. Des majorations classiques, à partir de la formule de Cauchy en plusieurs variables relative au polycercle frontière du polydisque, aboutissent au résultat. □

Désignons par $\mathscr{D}(\mathcal{O}^+)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact inclus dans $\mathcal{O}^+$.

LEMME 3.7. — *Il existe une fonction méromorphe $\delta(l, s)$ telle que pour $f\in\mathscr{D}(\mathcal{O}^+)$ on ait*

$$Z(f, l, s)=\delta(l, s) Z^*(\hat{f}, v(l), t(s))$$

(*égalité entre fonctions méromorphes sur* $\mathbb{C}^{n+1}$).

Démonstration. — Rappelons que $\mathcal{O}^+$ est l'orbite ouverte de B^- (ou de P^-) dans V^+ et que les invariants relatifs fondamentaux de cette action sont les polynômes Δ_i (théorème 2.4).

Désignons comme au paragraphe 2 par χ_i les caractères respectifs des Δ_i et par ∇_i^* les invariants relatifs fondamentaux de l'action de B^- (ou de P^-) sur V^- ($i=1, 2, \ldots, n$). On sait ([R-S], p. 421) que les caractères χ_i^* des polynômes ∇_i^* sont donnés par:

$$(3.13) \qquad \chi_0^*=\chi_0^{-1}, \qquad \chi_i^*=\frac{\chi_{n+1-i}}{\chi_0} \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Parfois, pour des raisons typographiques nous noterons aussi $\mathcal{F} f$ la transformée de Fourier de $f \in \mathcal{S}(V^+)$, et pour $b \in B^-$ on posera $f_b(x) = f(b^{-1}x)$. Un calcul évident montre que

(3.14) $$\mathcal{F} f_b(y) = |\chi_0(b)|^{k/(n+1)} (\mathcal{F} f)_b(y).$$

D'autre part on a

(3.15) $$\beta_{l_i}(\nabla_i^*(by)) = \beta_{l_i}\left(\frac{\chi_{n+1-i}(b)}{\chi_0(b)}\right) \beta_{l_i}(\nabla_i^*(y)) \ \forall y \in V^-, \quad \forall b \in B^-.$$

Soit alors $f \in \mathcal{D}(\mathcal{O}^+)$. On montre facilement en utilisant les relations (3.13), (3.14) et (3.15) que

(3.16) $$Z^*(\mathcal{F}(f_b), l, s) = \chi(b) Z^*(\mathcal{F} f, l, s) \quad \forall b \in B^-$$

où

$$\chi(b) = |\chi_0(b)|^{-s_0-s_1-\dots-s_n} |\chi_n(b)|^{s_1} \dots |\chi_1(b)|^{s_n} \beta_{l_0+l_1+\dots+l_n}(\chi_0^{-1}(b)) \times \beta_{l_1}(\chi_n(b)) \dots \beta_{l_n}(\chi_1(b)).$$

Un calcul analogue au précédent montre que

(3.17) $$Z(f_b, v(l), t(s)) = \chi(b) Z(f, v(l), t(s)).$$

Les relations (3.16) et (3.17) montrent que les deux distributions sur $\mathcal{O}^+$:

$$f \mapsto Z(f, v(l), t(s))$$

et

$$f \mapsto Z^*(\hat{f}, l, s)$$

se transforment suivant le même caractère χ de B^-. Puisque $\mathcal{O}^+$ est un espace homogène de B^- le résultat d'unicité des distributions invariantes de Bruhat ([B]) montre qu'il existe une constante $\delta(l, s)$ telle que

$$Z(f, l, s) = \delta(l, s) Z^*(\hat{f}, v(l), t(s)) \ (f \in \mathcal{D}(\mathcal{O}^+)).$$

Puisque les fonctions $Z^*(\hat{f}, v(l), t(s))$ et $Z(f, l, s)$ sont méromorphes sur $\mathbb{C}^{n+1}$, l'identité précédente montre que $\delta(l, s)$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}^{n+1}$. □

Suite de la démonstration du Théorème 3.1. — Il s'agit de montrer que le lemme 3.7 est encore vrai pour une fonction $f \in \mathcal{S}(V^+)$, avec la même fonction méromorphe $\delta(l, s)$.

Pour cela définissons la distribution T_s par

$$\langle T_s, f \rangle = Z(f, l, s) - \delta(l, s) Z^*(\hat{f}, v(l), t(s)).$$

Il suffit, bien entendu, de démontrer que cette distribution est nulle pour tout s. Puisque $s \mapsto T_s$ est méromorphe il suffit de montrer que T_s est nulle sur un compact d'intérieur non vide au voisinage duquel T_s est holomorphe.

LEMME 3.8. — *Il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que*

$$|\Delta_0|^p |\Delta_1|^p \dots |\Delta_n|^p T_s = 0.$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que, puisque $|z|$ désigne le carré du module usuel, les fonctions $|\Delta_i|^p$ sont de classe C^∞. Il ressort du lemme 3.7 que la distribution T_s a son support dans le complémentaire de $\mathcal{O}^+$, c'est-à-dire

$$\operatorname{Supp}(T_s) \subset \{ x \in V^+ \,|\, |\Delta_0(x)| |\Delta_1(x)| \dots |\Delta_n(x)| = 0 \}. \tag{3.18}$$

Supposons que K soit un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{C}^{n+1}$ tel que $Z(f, l, s)$ soit holomorphe au voisinage de K et que $Z^*(\hat{f}, v(l), t(s))$ soit holomorphe au voisinage de $t(K)$. Soit $r(K)$ un entier tel que la distribution $Z(f, l, s)$ soit d'ordre $\leqq r(K)$ si $s \in K$. Cela est possible grâce au lemme 3.6. Le lemme 3.7 à nouveau et le fait que $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}(V^+)$ sur $\mathcal{S}(V^-)$ montrent qu'il existe un entier $r(t(K))$ tel que la distribution $Z^*(\hat{f}, v(l), t(s))$ soit d'ordre $\leqq r(t(K))$ si $s \in K$. On en déduit que si $s \in K$, la distribution T_s est d'ordre $\leqq r$ où $r = \max(r(K), r(t(K)))$.

D'après un résultat bien connu (*voir* [Sh], lemme 1.3 par exemple) on en déduit que si $p = r + 1$, on a

$$|\Delta_0|^p |\Delta_1|^p \dots |\Delta_n|^p T_s = 0 \qquad \text{pour} \quad s \in K.$$

L'égalité a alors lieu partout par prolongement analytique. □

On définit des opérateurs différentiels à coefficients constants $\Delta_i(\partial)$ et $\Delta_i(\bar{\partial})$ sur V^- par :

$$\begin{aligned} &\Delta_i(\partial)\, e^{\widetilde{B}(x, y)} = \Delta_i(x)\, e^{\widetilde{B}(x, y)}, \\ &\Delta_i(\bar{\partial})\, e^{\overline{\widetilde{B}(x, y)}} = \overline{\Delta_i(x)}\, e^{\overline{\widetilde{B}(x, y)}}, \qquad \text{où} \quad x \in V^+ \quad \text{et} \quad y \in V^-. \end{aligned}$$

LEMME 3.9. — *a) Il existe des polynômes $b_0, b_1, \dots, b_n$ en $s = (s_0, s_1, \dots, s_n)$ tels que*

$$\Delta_0(\partial)\, \nabla_0^{*s_0} \dots \nabla_n^{*s_n} = b_0(s)\, \nabla_0^{*s_0-1} \nabla_1^{*s_1} \dots \nabla_n^{*s_n},$$

$$(i \neq 0) \quad \Delta_i(\partial)\, \nabla_0^{*s_0} \dots \nabla_n^{*s_n} = b_i(s)\, \nabla_0^{*s_0-1} \nabla_1^{*s_1} \dots \nabla_{n-i+1}^{*s_{n-i+1}+1} \dots \nabla_n^{*s_n}.$$

b) On a aussi :

$$\Delta_0(\bar{\partial})\, \bar{\nabla}_0^{*s_0} \dots \bar{\nabla}_n^{*s_n} = b_0(s)\, \bar{\nabla}_0^{*s_0-1} \bar{\nabla}_1^{*s_1} \dots \bar{\nabla}_n^{*s_n},$$

$$(i \neq 0) \quad \Delta_i(\bar{\partial})\, \bar{\nabla}_0^{*s_0} \dots \bar{\nabla}_n^{*s_n} = b_i(s)\, \bar{\nabla}_0^{*s_0-1} \bar{\nabla}_1^{*s_1} \dots \bar{\nabla}_{n-i+1}^{*s_{n-i+1}+1} \dots \bar{\nabla}_n^{*s_n}.$$

Démonstration. — Nous n'en indiquons que le principe. Il suffit, bien entendu, de démontrer la partie *a*). Désignons par τ l'action naturelle de G sur l'algèbre $\mathbb{C}[V^+]$ des polynômes sur V^+ :

$$(\tau(g) P)(x) = P(g^{-1} x) \qquad g \in G, \quad x \in V^+.$$

Pour $i=1, 2, \ldots, n$, on a les relations suivantes:

(3.19) $$\tau(b)\circ\Delta_i(\partial)=\chi_i(b)^{-1}\Delta_i(\partial)\circ\tau(b) \qquad b\in \mathrm{B}^-$$

qui se démontrent sans peine en se restreignant aux fonctions $e^{\tilde{\mathrm{B}}(x,\, y)}$.

En utilisant les relations (3.19) on montre alors que les deux membres des relations à démontrer sont des invariants relatifs de B^- pour le même caractère. Puisque $(\mathrm{B}^-, \mathrm{V}^+)$ est un espace préhomogène d'après le théorème 2.4, ces deux polynômes ne diffèrent que par une constante multiplicative $b_i(s)$ qui est un polynôme en s (pour plus de détails on pourra voir la démonstration du lemme 5.6 *b*) de [R-S] qui est analogue). □

La démonstration du lemme suivant est classique.

LEMME 3.10. — *Pour tout entier p on a*

$$\mathscr{F}((|\Delta_0|^p\ldots|\Delta_n|^p)f)=\left(-2i\pi\frac{n+1}{4k}\right)^{-p(n+1)(n+2)}\left[\prod_{i=0}^{n}(\Delta_i(\partial)\Delta_i(\bar{\partial}))^p\right]\mathscr{F}f.$$

Fin de la démonstration du théorème 3.1.

Pour p comme dans le Lemme 3.8, posons $|\Delta|^p=|\Delta_0|^p|\Delta_1|^p\ldots|\Delta_n|^p$ et $\Delta(\partial, \bar{\partial})^p=\prod_{i=0}^{n}(\Delta_i(\partial)\Delta_i(\bar{\partial}))^p$. On a alors, pour $\mathrm{Re}(s)$ assez grand:

$$\mathrm{Z}^*(\mathscr{F}(|\Delta|^p f), v(l), t(s))=\int_{\mathrm{V}^-}\mathscr{F}(|\Delta|^p f)(y)\,\beta_{v(l)}(\nabla^*(y))\,|\nabla^*(y)|^{t(s)}\,dy$$

$$=\left(-2i\pi\frac{n+1}{4k}\right)^{-p(n+1)(n+2)}\int_{\mathrm{V}^-}\mathscr{F}f(y)\,\Delta(\partial, \bar{\partial})^p\,\beta_{v(l)}(\nabla^*(y))\,|\nabla^*(y)|^{t(s)}\,dy$$

(grâce au Lemme 3.10).

$$=\left(-2i\pi\frac{n+1}{4k}\right)^{-p(n+1)(n+2)}\mathrm{P}(l, s)\int_{\mathrm{V}^-}\mathscr{F}f(y)\,\beta_{v(l)}(\nabla^*(y))\,|\nabla^*(y)|^{\alpha(t(s))}\,dy,$$

où $\mathrm{P}(l, s)$ est un polynôme en s, grâce au lemme 3.9, et où

$$\alpha(s)=(s_0-(n+1)p,\ s_1+p,\ \ldots,\ s_n+p).$$

On en déduit que

(3.20) $$\mathrm{Z}^*(\mathscr{F}(|\Delta|^p f), v(l), t(s))$$
$$=\left(-2i\pi\frac{n+1}{4k}\right)^{-p(n+1)(n+2)}\mathrm{P}(l, s)\,\mathrm{Z}^*(\mathscr{F}f, l, \alpha(t(s))).$$

D'autre part un calcul immédiat montre que

(3.21) $$\mathrm{Z}(|\Delta|^p f, l, s)=\mathrm{Z}(f, l, t(\alpha(t(s)))).$$

Les relations (3.20) et (3.21) impliquent que

$$\langle |\Delta|^p T_s, f\rangle = Z(f, l, t(\alpha(t(s))))$$
$$-\delta(l, s)\left(-2i\pi\frac{n+1}{4k}\right)^{-p(n+1)(n+2)} P(l, s) Z^*(\hat{f}, l, \alpha(t(s)))$$

Comme, d'après le lemme 3.8, la distribution $|\Delta|^p T_s$ est nulle, on en déduit l'existence d'une fonction méromorphe $\delta(l, s)$ (qui, pour des raisons évidentes, est la même que celle du Lemme 3.7) telle que

$$Z(f, l, s) = \delta(l, s) Z^*(\hat{f}, v(l), t(s)) \qquad \text{pour} \quad f \in \mathscr{S}(V^+). \quad \square$$

3.2. Équation fonctionnelle explicite. — Dans cette partie, nous allons calculer explicitement le facteur méromorphe $\delta(l, s)$ de l'équation fonctionnelle (3.1) en fonction des facteurs locaux *rho* de Tate. Ces deux facteurs dépendent respectivement de la mesure choisie sur V^+ et de la mesure choisie sur $\mathbb{C}$.

Rappelons la définition du facteur *rho*. On choisit pour mesure sur $\mathbb{C}$ la mesure

$$dz = 2\, dx\, dy \quad (z = x + iy),$$

où dx et dy désignent la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Cette mesure est autoduale pour la transformée de Fourier définie par

$$\mathscr{F}(\varphi)(z') = \hat{\varphi}(z') = \int_{\mathbb{C}} \varphi(z)\tau(zz')\, dz \qquad \text{pour} \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{C}),$$

où τ est le caractère de $\mathbb{C}$ défini plus haut par $\tau(z) = \exp(4i\pi \operatorname{Re}(z))$. Prenons toujours la convention de désigner par $|z|$ le carré du module habituel et choisissons $d^* z = dz/|z|$ comme mesure de Haar sur $\mathbb{C}^*$. Pour $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{Z}$ et $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$, on pose :

$$\zeta(\varphi, n, s) = \int_{\mathbb{C}} \varphi(z)\beta_n(z)|z|^s d^* z.$$

La fonction $\zeta(\varphi, n, s)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui vérifie l'équation fonctionnelle suivante ([Ta]) :

$$(3.22) \qquad \zeta(\varphi, n, s) = \rho(n, s)\zeta(\hat{\varphi}, -n, 1-s),$$

où

$$\rho(n, s) = (-i)^{|n|}(2\pi)^{1-2s}\frac{\Gamma(s+|n|/2)}{\Gamma(1-s+|n|/2)} \qquad ([\text{Ta}], \text{ p. } 319).$$

Lemme 3.12. — *Il existe un seul couple de mesures* (dx, dy) *sur* V^+ *et* V^- *respectivement qui sont duales l'une de l'autre pour la transformée de Fourier définie au paragraphe* 3.1

et telles que, si w_0 est l'élément de $\tilde{G}$ défini au paragraphe 2.4, *on ait*

$$\int_{V^+} f(w_0 x)\,dx = \int_{V^-} f(y)\,dy \qquad \text{pour} \quad f \in \mathscr{S}(V^-).$$

La démonstration de ce lemme est analogue à celle du lemme 7.2 de [R-S].

Nous choisissons dorénavant ce couple de mesures.

En utilisant les notations du paragraphe 2, on pose

$$H_1 = \sum_{i=0}^{n-1} H_{\alpha_i}, \qquad H_2 = H_{\alpha_n}.$$

Pour p, $q \in \mathbb{Z}$ on définit alors les espaces

$$K(p, q) = \{X \in \tilde{\mathfrak{g}} \mid [H_1, X] = pX,\ [H_2, X] = qX\}.$$

D'après [M-R-S] (lemme 3.10) on a :

$$V^+ = K(2, 0) \oplus K(1, 1) \oplus K(0, 2)$$
$$V^- = K(-2, 0) \oplus K(-1, -1) \oplus K(0, -2)$$
$$\mathfrak{g} = K(1, -1) \oplus K(0, 0) \oplus K(-1, 1).$$

On notera que $K(0, 2) = \mathfrak{g}^{\alpha_n}$ (*voir* [M-R-S], fin de la démonstration du lemme 2.15).

Désignons par $G(0, 0)$ le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $K(0, 0)$. Il est facile de voir que $(G(0, 0), K(2, 0))$ et $(G(0, 0), K(0, 2))$ sont des espaces préhomogènes de type parabolique commutatif, les sous-algèbres correspondants à $\tilde{\mathfrak{g}}$ étant égales respectivement à $\tilde{\mathfrak{g}}_1 = K(-2, 0) \oplus K(0, 0) \oplus K(2, 0)$ et à $\tilde{\mathfrak{g}}_2 = K(0, -2) \oplus K(0, 0) \oplus K(0, 2)$. On choisit un couple de mesures (du, du') (resp. (dv, dv')) sur $K(2, 0) \times K(-2, 0)$ (resp. $K(0, 2) \times K(0, -2)$) vérifiant les conditions du lemme 3.12.

Étudions les différents éléments intervenant dans la définition de ces mesures.

L'élément w_0 associé respectivement à l'espace préhomogène $(G(0, 0), K(0, 2))$ et à l'espace $(G(0, 0), K(2, 0))$ est égal à la restriction à $\tilde{\mathfrak{g}}_1$, respectivement à $\tilde{\mathfrak{g}}_2$, de l'élément w_0 associé à (G, V^+).

La transformée de Fourier sur $K(2, 0)$, que l'on notera $\mathscr{F}_u$ $(u \in K(2, 0))$ est définie à l'aide du caractère $\tau \circ B_1$, où $B_1 = -\dim K(2, 0)/n\ \tilde{B}_1$ ($\tilde{B}_1$ désigne la forme de Killing sur $\tilde{\mathfrak{g}}_1$) car n est le degré de l'invariant relatif de $(G(0, 0), K(2, 0))$.

De même la transformée de Fourier sur $K(0, 2)$, que l'on notera $\mathscr{F}_v$ $(v \in K(0, 2))$, est définie à l'aide du caractère $\tau \circ B_2$, où $B_2 = -\tilde{B}_2$ ($\tilde{B}_2$ est la forme de Killing sur $\tilde{\mathfrak{g}}_2$) car $K(0, 2)$ est de dimension 1 et l'invariant relatif de $(G(0, 0), K(0, 2))$, qui est égal à la restriction à $K(0, 2)$ de Δ_n, est de degré 1.

Remarque 3.13. — Si on identifie $\mathbb{C}$ avec $K(0, 2)$ par l'application $z \mapsto z X_{\alpha_n}$, on vérifie que la transformée de Fourier définie ci-dessus sur $\mathbb{C}$ s'identifie à $\mathscr{F}_v$.

Soit d l'entier défini par la relation

$$(3.23)\qquad k=n+1+\frac{dn(n+1)}{2}\quad (k=\dim V^{+},\ n+1=d^{0}\Delta_{0}).$$

La valeur de d dans les différents cas considérés est indiquée dans le tableau (paragraphe 2.2). L'entier associé de façon analogue à l'espace préhomogène $(G(0, 0), K(2, 0))$ est en fait égal à d ([M-R-S] lemme 4.3). On a donc aussi

$$(3.24)\qquad \dim K(2, 0)=n+\frac{d(n-1)n}{2}.$$

On en déduit que la dimension de $K(1, 1)$ est égale à dn, ce qui permet de montrer la

PROPOSITION 3.14 ([Mu] théorème de décomposition (2)). — *Il existe une mesure* dA *sur* $K(1, -1)$ *telle que pour* $f\in\mathscr{S}(V^{+})$ *on ait*

$$\int_{V^{+}} f(x)\,dx=\int_{K(2,0)\times K(1,-1)\times K(0,2)} f(e^{\operatorname{ad} A}(u+v))\,|\Delta_{n}(v)|^{dn}\,du\,dA\,dv.$$

Les choix de mesures faits ci-dessus impliquent que pour $f\in\mathscr{S}(V^{-})$ *on a*

$$\int_{V^{-}} f(y)\,dy=\int_{K(-2,0)\times K(1,-1)\times K(0,-2)} f(e^{\operatorname{ad} A}(u'+v'))\,|\tilde{\nabla}_{0}^{*}(u')|^{d}\,du'\,dA\,dv',$$

où $\tilde{\nabla}_{0}^{*}$ *est l'invariant relatif de* $(G(0, 0), K(-2, 0))$ normalisé par la condition $\tilde{\nabla}_{0}^{*}(X_{-\alpha_{0}}+\ldots+X_{-\alpha_{n-1}})=1$.

On pose alors pour $\varphi\in\mathscr{S}(V^{+})$, $u\in K(2, 0)$ et $v\in K(0, 2)$

$$T_{\varphi}(u, v)=|\Delta_{n}(v)|^{(d/2)n}\int_{K(1,-1)} \varphi(e^{\operatorname{ad} A}(u+v))\,dA.$$

On pose, de même, pour $\psi\in\mathscr{S}(V^{-})$, $u'\in K(-2, 0)$ et $v'\in K(0, -2)$

$$T_{\psi}^{*}(u', v')=|\tilde{\nabla}_{0}^{*}(u')|^{d/2}\int_{K(1,-1)} \psi(e^{\operatorname{ad} A}(u'+v'))\,dA.$$

Les choix faits ici permettent d'écrire ainsi le résultat suivant de I. Muller

PROPOSITION 3.15 ([Mu] théorème de décomposition (3))

$$\mathscr{F}_{u}\mathscr{F}_{v}T_{\varphi}=T_{\mathscr{F}\varphi}^{*}.$$

THÉORÈME 3.16. — *Pour* $f\in\mathscr{S}(V^{+})$ *les intégrales définissant* $Z(f, l, s)$ *et* $Z^{*}(f, l, s)$ *se prolongent en des fonctions méromorphes sur* $\mathbb{C}^{n+1}$ *qui vérifient l'équation fonctionnelle*

$$Z(f, l, s)=\delta(l, s)\,Z^{*}(\hat{f}, v(l), t(s))$$

où

$$\delta(l, s)=\prod_{j=0}^{n} \rho\left(l_0+l_1+\ldots+l_j, \frac{d}{2} j+s_0+s_1+\ldots+s_j+1\right).$$

Démonstration. — D'après le théorème 3.1, il ne reste qu'à montrer que le facteur méromorphe $\delta(l, s)$ est bien celui annoncé. Il suffit donc de faire le calcul pour un type particulier de fonction f. Nous allons prendre une fonction $f \in \mathscr{D}(\mathcal{O}^+)$ (l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans $\mathcal{O}^+$). Pour une telle fonction l'intégrale définissant $Z(f, l, s)$ est absolument convergente pour tout l et tout s. La démonstration se fera par récurrence sur l'entier n, que nous allons appeler le *cran* de l'espace préhomogène $(\mathfrak{g}, V^+)$. Si le cran est nul, alors $\tilde{\mathfrak{g}}$ est $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ et l'espace préhomogène (G, V^+) se réduit à $(\mathbb{C}^*, \mathbb{C})$ (avec l'action par homothétie de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}$) et l'équation fonctionnelle précédente est l'équation fonctionnelle de Tate (3.22).

Nous supposons donc que le résultat est vrai pour les espaces préhomogènes de type parabolique commutatif de cran $\leqq n-1$.

Désignons par $B^-(0, 0)$ le sous-groupe de Borel $G(0, 0) \cap B^-$ de $G(0, 0)$. Soient $\tilde{\Delta}_0, \ldots, \tilde{\Delta}_{n-1}$ les invariants relatifs fondamentaux de l'action de $B^-(0, 0)$ sur $K(2, 0)$ normalisés par la condition $\tilde{\Delta}_j(X_{\alpha_0}+\ldots+X_{\alpha_{n-1}})=1$.

Puisque les Δ_j sont des invariants relatifs de l'action de B^- et que $\exp K(1, -1)$ est un sous-groupe du radical unipotent de B^-, on a pour $A \in K(1, -1)$, $u \in K(2, 0)$ et $v \in K(0, 2)$

$$\Delta_j(e^{\operatorname{Ad} A}(u+v))=\Delta_j(u+v) \qquad \text{pour} \quad j=0, \ldots, n.$$

On a, de plus, l'égalité suivante entre invariants relatifs sous l'action de $B^-(0, 0)$

$$\Delta_j(u+v)=\begin{cases} \tilde{\Delta}_j(u)\, \Delta_n(v) & \text{pour} \quad j=0, \ldots, n-1 \\ \Delta_n(v) & \text{pour} \quad j=n. \end{cases}$$

Ces relations impliquent que pour $\varphi(x)=f(x)(\Delta(x))_l\,|\Delta(x)|^s$ (qui est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ vu l'hypothèse sur f) on a :

$$T_\varphi(u, v)=|\tilde{\Delta}(u)|^{\tilde{s}}(\tilde{\Delta}(u))_{\tilde{l}}\,|\Delta_n(v)|^{s_0+\ldots+s_n}\,\beta_{l_0+\ldots+l_n}(\Delta_n(v))\,T_f(u, v),$$

où on a posé $\tilde{s}=(s_0, s_1, \ldots, s_{n-1})$ et $\tilde{l}=(l_0, l_1, \ldots, l_{n-1})$.

La proposition 3.14 implique alors que :

$$Z(f, l, s)=\int_{K(2, 0) \times K(0, 2)} |\tilde{\Delta}(u)|^{\tilde{s}}(\tilde{\Delta}(u))_{\tilde{l}} \times |\Delta_n(v)|^{(d/2)\,n+s_0+\ldots+s_n}\,\beta_{l_0+\ldots+l_n}(\Delta_n(v))\,T_f(u, v)\,du\,dv.$$

En appliquant l'équation fonctionnelle de Tate, (*i.e.* la relation (3.22) écrite avec la mesure additive) à la variable v (*cf.* la remarque 3.13) on obtient :

$$
\begin{aligned}
Z(f, l, s) = {} & \rho(l_0 + \ldots + l_n, (d/2)n + s_0 + \ldots + s_n + 1) \\
& \times \int_{K(2,0)\times K(0,-2)} |\tilde{\Delta}(u)|^{\tilde{s}} (\tilde{\Delta}(u))_{\tilde{l}} \\
& \times |\Delta_n^*(v')|^{-(d/2)n - s_0 - \ldots - s_n - 1} \beta_{-l_0 - \ldots - l_n}(\Delta_n^*(v')) [\mathscr{F}_v T_f](u, v')\, du\, dv',
\end{aligned}
$$

où Δ_n^* est l'invariant relatif de degré 1 pour l'action de B^+ sur V^-, normalisé par la condition $\Delta_n^*(X_{-\alpha_n}) = 1$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence à l'espace préhomogène $(G(0, 0), K(2, 0))$ qui est de cran $n-1$, c'est-à-dire à la variable u dans les formules précédentes, et en utilisant la proposition 3.15, on obtient :

$$
\begin{aligned}
(3.25) \quad Z(f, l, s) = {} & \rho(l_0 + \ldots + l_n, (d/2)n + s_0 + \ldots + s_n + 1) \\
& \times \prod_{k=0}^{n-1} \rho(l_0 + \ldots + l_k, (d/2)k + s_0 + \ldots + s_k + 1) \\
& \times \int_{K(0,-2)} |\Delta_n^*(v')|^{-(d/2)n - s_0 - \ldots - s_n - 1} \beta_{-l_0 - \ldots - l_n}(\Delta_n^*(v')) \\
& \times \left[\int_{K(-2,0)} |\tilde{\nabla}^*(u')|^{\tilde{t}(\tilde{s})} (\tilde{\nabla}^*(u'))_{\tilde{v}(\tilde{l})} T_f^*(u', v')\, du' \right] dv',
\end{aligned}
$$

où les polynômes $\tilde{\nabla}_i^*$ sont les invariants relatifs de l'action de $B^-(0, 0)$ sur $K(-2, 0)$, et où on a noté pour appliquer l'hypothèse de récurrence

$$
\tilde{t}(\tilde{s}) = \left(-s_0 - \ldots - s_{n-1} - \frac{\tilde{k}}{n}, s_{n-1}, \ldots, s_1 \right) \quad (\tilde{k} = \dim K(0, 2)),
$$

$$
\tilde{v}(\tilde{l}) = (-l_0 - \ldots - l_{n-1}, l_{n-1}, \ldots, l_1).
$$

D'autre part, le membre de droite de l'équation fonctionnelle du théorème 3.16 est :

$$
(3.26) \qquad \prod_{k=0}^{n} (\rho(l_0 + \ldots + l_k, (d/2)k + s_0 + \ldots + s_k + 1))\, Z^*(\hat{f}, v(l), t(s)).
$$

Nous allons calculer $Z^*(\hat{f}, v(l), t(s))$ en utilisant à nouveau la proposition 3.14, mais, cette fois, sur V^-.

Puisque les ∇_j^* sont des invariants relatifs de l'action de B^- sur V^-, on a pour $A \in K(1, -1)$, $u' \in K(-2, 0)$ et $v' \in K(0, -2)$

$$
\nabla_j^*(e^{\operatorname{ad} A}(u' + v')) = \nabla_j^*(u' + v') \qquad \text{pour} \quad j = 0, \ldots, n.
$$

On a, de plus, l'égalité suivante entre invariants relatifs sous l'action de $B^-(0, 0)$

$$\nabla_j^*(u'+v')=\begin{cases}\tilde{\nabla}_0^*(u')\,\Delta_n^*(v') & \text{pour } j=0,\\ \tilde{\nabla}_{j-1}^*(u') & \text{pour } j=1, \ldots, n.\end{cases}$$

On en déduit, comme plus haut, que

$$Z^*(\hat{f}, v(l), t(s))=\int_{K(-2, 0)\times K(0, -2)} |\tilde{\nabla}^*(u')|^{s'}(\tilde{\nabla}^*(u'))_{\tilde{v}(\tilde{l})}$$
$$\times |\Delta_n^*(v')|^{-s_0-\ldots-s_n-(k/(n+1))}\beta_{-l_0-\ldots-l_n}(\Delta_n^*(v'))\,T_f^*(u', v')\,du'\,dv'.$$

où on a posé

$$s'=\left(-s_0-\ldots-s_{n-1}-\frac{k}{n+1}+\frac{d}{2}, s_{n-1}, \ldots, s_1\right).$$

En utilisant les identités (3.25) et (3.26) on constate que le théorème 3.16 sera démontré à condition que les deux identités suivantes soient vérifiées :

$$\frac{k}{n+1}=\frac{d}{2}n+1,$$
$$s'=\tilde{t}(\tilde{s})).$$

La première est l'égalité (3.23) et la seconde, qui est équivalente à l'égalité

$$\tilde{k}/n=(k/(n+1))-(d/2),$$

se déduit des deux égalités (3.23) et (3.24), d'où le résultat. □

Remarque 3.17. — Le facteur $\delta(l, s)$ est donc bien un facteur eulérien au sens de Godement et Jacquet ([G-J], p. 113).

3.3. Calcul explicite de certains polynômes de type Bernstein. — Comme corollaire du calcul de l'équation fonctionnelle du théorème 3.16 nous allons pouvoir déterminer certains polynômes analogues aux polynômes b_i du lemme 3.9.

On définit des opérateurs différentiels à coefficients constants $\nabla_j^*(\partial)$ et $\nabla_j^*(\bar{\partial})$ sur V^+ ($j=0, 1, \ldots, n$) par les formules :

$$\nabla_j^*(\partial)\,e^{\tilde{B}(x, y)}=\nabla_j^*(y)\,e^{\tilde{B}(x, y)},$$
$$\nabla_j^*(\bar{\partial})\,e^{\tilde{B}(x, y)}=\overline{\nabla_j^*(y)}\,e^{\tilde{B}(x, y)},$$

où $x\in V^+$, $y\in V^-$ et $\tilde{B}$ est la forme de Killing.

La démonstration du lemme suivant est classique et analogue à celle du lemme 3.10.

LEMME 3.18. — *Soit* $f \in \mathscr{S}(\mathrm{V}^-)$. *On a*:

$$\mathscr{F}(\nabla_j^*(\partial)\nabla_j^*(\bar\partial)f)(y) = \left(\frac{i\pi(n+1)}{2k}\right)^{2(n+1-j)} |\nabla_j^*(y)|\,\mathscr{F}f(y).$$

(Rappelons que $|\ \ |$ désigne toujours le carré du module usuel).

Pour $s=(s_0, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, on pose

$$t_j(s) = (s_0 - 1, s_1, \ldots, s_{n-j}, s_{n+1-j}+1, \ldots, s_n)$$

(avec la convention $t_0(s) = (s_0 - 1, s_1, \ldots, s_n)$). Rappelons aussi que nous avons posé $\Delta^s = \Delta_0^{s_0} \ldots \Delta_n^{s_n}$.

THÉORÈME 3.19. — *On a*

$$\nabla_j^*(\partial)\,\Delta^s = b_j(s)\,\Delta^{t_j(s)}$$

où

$$b_j(s) = \left(-\frac{n+1}{4k}\right)^{(n+1-j)} \prod_{i=0}^{n-j}\left(s_0 + s_1 + \ldots + s_i + i\frac{d}{2}\right).$$

Démonstration. — L'existence des polynômes b_j se démontre de la même manière que celle des polynômes de même nom du lemme 3.9.

Écrivons l'équation fonctionnelle du théorème 3.16 dans le cas où $l=0$:

$$(3.27) \qquad \int_{\mathrm{V}^+} f(x)\,|\Delta(x)|^s\,dx = \delta(0, s)\int_{\mathrm{V}^-} \hat f(y)\,|\nabla^*(y)|^{t(s)}\,dy.$$

Il est entendu que si l'une des intégrales ci-dessus ne converge pas, on convient de considérer son prolongement méromorphe.

Calculons l'intégrale

$$\mathrm{I}(s) = \int_{\mathrm{V}^+} (\nabla_j^*(\partial)\nabla_j^*(\bar\partial)f)(x)\,|\Delta(x)|^s\,dx.$$

En remplaçant f par $\nabla_j^*(\partial)\nabla_j^*(\bar\partial)f$ dans la relation (3.27), puis en appliquant le lemme 3.18, on obtient

$$(3.28) \qquad \mathrm{I}(s) = \delta(0, s)\left(\frac{i\pi(n+1)}{2k}\right)^{2(n+1-j)} \int_{\mathrm{V}^-} \hat f(y)\,|\nabla^*(y)|^{t(s)}\,|\nabla_j^*(y)|\,dy.$$

D'autre part, une intégration par parties dans l'intégrale définissant $\mathrm{I}(s)$ donne

$$\mathrm{I}(s) = \int_{\mathrm{V}^+} f(x)\,b_j(s)^2\,|\Delta(x)|^{t_j(s)}\,dx,$$

et en appliquant à nouveau le théorème 3.16 on obtient

$$\text{(3.29)} \qquad \mathrm{I}(s) = b_j(s)^2\,\delta(0, t_j(s)) \int_{\mathrm{V}^-} \hat{f}(y)\,|\nabla^*(y)|^{t(t_j(s))}\,dy.$$

Comme

$$t(t_j(s)) = t(s) + 1(j),$$

La comparaison des égalités (3.28) et (3.29) montre que :

$$b_j(s)^2 = \left(\frac{i\pi(n+1)}{2k}\right)^{2(n+1-j)} \frac{\delta(0, s)}{\delta(0, t_j(s))}.$$

En utilisant la valeur explicite de δ donnée par le théorème 3.16 on a alors :

$$\text{(3.30)} \qquad b_j(s)^2 = \left(\frac{i\pi(n+1)}{2k}\right)^{2(n+1-j)} \prod_{i=0}^{n} \frac{\rho(1, d/2\,i + s_0 + s_1 + \ldots + s_i + 1)}{\rho(1, d/2\,i + \sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_i + 1)},$$

où on a posé $\sigma_i = s_i$ si $i \neq 0$ et $i \neq n+1-j$, $\sigma_0 = s_0 - 1$ et $\sigma_{n+1-j} = s_{n+1-j} + 1$. On remarque que

$$\sigma_0 + \ldots + \sigma_i = \begin{cases} s_0 + \ldots + s_i + 1 & \text{pour } i = 0, \ldots, n-j, \\ s_0 + \ldots + s_i & \text{pour } i = n+1-j, \ldots, n. \end{cases}$$

On a d'autre part pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\frac{\rho(1, z)}{\rho(1, z-1)} = \frac{(2\pi)^{1-2z}}{(2\pi)^{3-2z}} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(1-z)} \frac{\Gamma(2-z)}{\Gamma(z-1)} = \frac{1}{(2\pi)^2}(z-1)(1-z).$$

On déduit alors de l'égalité (3.30) que :

$$\begin{aligned} b_j(s)^2 &= \left(\frac{\pi(n+1)}{2k}\right)^{2(n+1-j)} \frac{1}{(2\pi)^{2((n+1)-j)}} \prod_{i=0}^{n-j} \left(s_0 + s_1 + \ldots + s_i + \frac{d}{2}i\right)^2 \\ &= \left(\frac{(n+1)^2}{16k^2}\right)^{(n+1-j)} \prod_{i=0}^{n-j} \left(s_0 + s_1 + \ldots + s_i + \frac{d}{2}i\right)^2 \end{aligned}$$

L'ambiguïté de signe pour $b_j(s)$ est levée par la détermination explicite du signe de $b_j(1, 0, \ldots 0)$. □

La connaissance de ces polynômes n'est cependant pas suffisante pour obtenir la localisation des singularités de la fonction zêta. Il faudrait pour cela connaître les polynômes de Bernstein B_k intervenant dans la proposition 3.3.

4. L'équation fonctionnelle écrite sur l'espace symétrique G/H

L'équation fonctionnelle obtenue dans le théorème 3.16 relie $Z(f, l, s)$ à $Z^*(\hat{f}, v(l), t(s))$ où f appartient à $\mathscr{S}(V^+)$ et sa transformée de Fourier $\hat{f}$ à $\mathscr{S}(V^-)$. D'après la remarque 2.10 les G-orbites ouvertes Ω^+ et Ω^- s'identifient au même espace symétrique G/H, la première par l'application $g \mapsto g\,I^+$, la seconde par l'application $g \mapsto g\,I^-$. Il est donc naturel, et c'est ce que nous allons faire, d'interpréter les deux membres de l'équation fonctionnelle comme des intégrales (ou prolongements analytique d'intégrales) sur G/H.

Les fonctions Δ_j et ∇_j^* peuvent donc être considérées comme des fonctions sur G/H. Le lemme ci-dessous décrit leur relation.

LEMME 4.1. — *On a pour* $g \in G$:

$$\nabla_0^*(g\,I^-) = \frac{1}{\Delta_0(g\,I^+)},$$

$$\nabla_j^*(g\,I^-) = \frac{\Delta_{n+1-j}(g\,I^+)}{\Delta_0(g\,I^+)} \qquad (j \neq 0).$$

Démonstration. — Comme ∇_j^* et Δ_j sont respectivement des invariants relatifs pour l'action du sous-groupe de Borel B^-, que l'orbite sous B^- de I^+ (resp. I^-) est l'ouvert dense $\mathcal{O}^+$ (resp. $\mathcal{O}^-$) et que nous avons normalisé ces polynômes en imposant que leur valeur en I^+ (resp. I^-) soit 1, il suffit de regarder les caractères obtenus par l'action de B^-. Le lemme découle donc directement de l'égalité (3.13). □

On définit pour $s = (s_0, s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $l = (l_0, l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ la fonction $c_{s,l}$ sur G/H par

$$c_{s,l}(\dot{g}) = \prod_{j=0}^{n} \beta_{l_j}(\Delta_j(g\,I^+))\,|\Delta_j(g\,I^+)|^{s_j}.$$

Si on pose, comme au paragraphe 3, mais cette fois-ci pour $s \in \mathbb{C}^{n+1}$:

$$v(s) = (-s_0 - s_1 - \ldots - s_n, s_n, s_{n-1}, \ldots, s_1),$$

on déduit du lemme 4.1 que

$$(4.1) \qquad (\nabla^*(g\,I^-))_{v(l)}\,|\nabla^*(g\,I^-)|^{v(s)} = c_{s,l}(\dot{g}).$$

L'action de w_0 qui envoie V^+ sur V^- permet de *ramener* la transformée de Fourier sur V^+. On définit en effet, pour $f \in \mathscr{S}(V^+)$, la fonction $\tilde{f}$ appartenant aussi à $\mathscr{S}(V^+)$ par

$$\tilde{f}(x) = \hat{f}(w_0 x) \qquad (x \in V^+).$$

Comme l'involution σ de G est la conjugaison par l'élément w_0 dont le carré est égal à 1 (lemme 2.8) on a:

$$\hat{f}(g\,I^-) = \tilde{f}(\sigma(g)\,I^+).$$

Grâce à l'identification de Ω^+ avec G/H, toute fonction f de $\mathscr{S}(V^+)$ peut être considérée comme une fonction encore notée f sur G/H. D'autre part σ s'étend de façon naturelle à G/H en définissant $\sigma(\dot{g})$ comme la classe de $\sigma(g)$ dans G/H de sorte que l'on obtient:

$$\hat{f}(g\,\mathrm{I}^-)=\tilde{f}(\sigma(\dot{g})) \qquad \text{pour} \quad f\in\mathscr{S}(\mathrm{V}^+).$$

Si dx et dy sont des mesures de Lebesgue sur V^+ et V^- respectivement, les mesures $|\Delta_0(x)|^{-(k/(n+1))}dx$ et $|\nabla_0^*(y)|^{-(k/(n+1))}dy$ induisent des mesures invariantes sur G/H ([R-S], p. 437). Le choix fait pour dx et dy au lemme 3.12 implique que ces deux mesures induisent la même mesure invariante sur G/H (que l'on note $d\dot{g}$) car $\nabla_0^*(w_0 x)=\Delta_0(x)$ pour $x\in V^+$. C'est la mesure déterminée dans le lemme 7.2 de [R-S].

Le caractère χ_0 de l'invariant relatif Δ_0 sous l'action de G peut aussi être considéré comme défini sur G/H. On pose alors pour $f\in\mathscr{S}(V^+)$, $s\in\mathbb{C}^{n+1}$, $l\in\mathbb{Z}^{n+1}$ et $z\in\mathbb{C}$:

$$\zeta(f,\,z,\,c_{s,\,l})=\int_{\mathrm{G/H}} f(\dot{g})\,\chi_0(\dot{g})^z\,c_{s,\,l}(\dot{g})\,d\dot{g}.$$

On pose aussi $s+z=(s_0+z,\,s_1,\,\ldots,\,s_n)$ et $\check{c}_{s,\,l}(\dot{g})=c_{s,\,l}(\sigma(\dot{g}))$.

THÉORÈME 4.2. — *L'intégrale définissant* $\zeta(f,\,z,\,c_{s,\,l})$ *converge pour* $\operatorname{Re}(s+z)$ *assez grand et se prolonge en une fonction méromorphe des paramètres* $(s,\,z)\in\mathbb{C}^{n+2}$ *qui vérifie l'équation fonctionnelle*:

$$\zeta\left(f,\,z+\frac{k}{n+1},\,c_{s,\,l}\right)=\delta(l,\,s+z)\,\zeta(\tilde{f},\,-z,\,\check{c}_{s,\,l})$$

où δ *est la même fonction que celle figurant dans le théorème* 3.16.

Démonstration. — Partons de l'équation fonctionnelle du théorème 3.16 où on a remplacé s par $s+z$.

Vu la définition de la mesure invariante sur G/H et les notations introduites ci-dessus le membre de gauche de l'égalité s'écrit:

$$\int_{\mathrm{G/H}} f(\dot{g})\,|\chi_0(\dot{g})|^{z+(k/(n+1))}\,c_{s,\,l}(\dot{g})\,d\dot{g}=\zeta\left(f,\,z+\frac{k}{n+1},\,c_{s,\,l}\right).$$

Le membre de droite est égal à:

$$\delta(l,\,s+z)\int_{\mathrm{G/H}} \hat{f}(g\,\mathrm{I}^-)\,|\nabla_0^*(g\,\mathrm{I}^-)|^{-z}\,(\nabla^*(g\,\mathrm{I}^-))_{v(l)}\,|\nabla^*(g\,\mathrm{I}^-)|^{v(s)}\,d\dot{g}.$$

Comme $\hat{f}(g\,\mathrm{I}^-)$ est égal à $\tilde{f}(\sigma(\dot{g}))$, on utilise le changement de variable $\dot{g}\mapsto\sigma(\dot{g})$ pour lequel la mesure $d\dot{g}$ est invariante. En utilisant la formule (4.1), on vérifie que le membre de droite est égal à:

$$\delta(l,\,s+z)\int_{\mathrm{G/H}} \tilde{f}(\dot{g})\,|\chi_0(\sigma(\dot{g}))|^z\,c_{s,\,l}(\sigma(\dot{g}))\,d\dot{g}.$$

Comme $\sigma(H_{\alpha_j}) = -H_{\alpha_j}$ pour tout j, on a $\chi_0(\sigma(b)) = \chi_0(b)^{-1}$ pour tout $b \in B^-$ et on en déduit comme dans le lemme 4.1 que $\chi_0(\sigma(\dot{g})) = \chi_0(\dot{g})^{-1}$, d'où le résultat. □

5. Série principale sphérique pour G/H

Nous allons dans ce paragraphe appliquer les résultats de Van den Ban ([VdB]) pour calculer un coefficient H-invariant d'une représentation de la série principale sphérique de l'espace symétrique G/H, puis nous déterminerons l'équation fonctionnelle de la fonction zêta associée à ce coefficient.

5.1. Étude infinitésimale. — Nous allons expliciter une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ qui commute à σ. On a choisi au paragraphe 2 un système de Chevalley de $\tilde{\mathfrak{g}}$, notée $(X_\alpha, H_\alpha)_{\alpha \in \tilde{\mathcal{R}}}$. Par conséquent, l'application $\tilde{\theta}$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$ dans lui-même qui pour tout $\alpha \in \tilde{\mathcal{R}}$ envoie H_α sur $-H_\alpha$ et X_α sur $X_{-\alpha}$ est un automorphisme de la $\mathbb{C}$-algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$. La restriction de $\tilde{\theta}$ à la forme réelle déployée de $\tilde{\mathfrak{g}}$ définie par

$$\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha \in \tilde{\mathcal{R}}} (\mathbb{R} X_{-\alpha} \oplus \mathbb{R} H_\alpha \oplus \mathbb{R} X_\alpha)$$

est une involution de la $\mathbb{R}$-algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{R}}$. On note θ son prolongement antilinéaire à $\tilde{\mathfrak{g}}$, qui est une involution de Cartan de $\tilde{\mathfrak{g}}$ ([He], p. 181). Comme $\theta(H_0)$ est égal à $-H_0$, l'involution θ stabilise $\mathfrak{g}$. C'est donc une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Proposition 5.1. — *Les involutions σ et θ commutent sur* $\mathfrak{g}$.

Comme l'involution θ envoie I^+ sur I^-, la proposition est la conséquence directe du

Lemme 5.2. — *Pour* $X \in \mathfrak{g}$, *on a*

$$\sigma(X) = X + \operatorname{ad} I^- \operatorname{ad} I^+ (X).$$

Démonstration. — Rappelons que nous avons posé

$$\sigma(X) = w_0 . X = e^{\operatorname{ad} I^+} e^{\operatorname{ad} I^-} e^{\operatorname{ad} I^+} X.$$

En utilisant la graduation de $\tilde{\mathfrak{g}}$ en $\tilde{\mathfrak{g}} = V^- \oplus \mathfrak{g} \oplus V^+$ relativement à l'action de $\operatorname{ad} H_0$ on obtient pour $X \in \mathfrak{g}$

$$e^{\operatorname{ad} I^+} X = X + \operatorname{ad} I^+ X,$$
$$e^{\operatorname{ad} I^-} e^{\operatorname{ad} I^+} X = Z + X + \operatorname{ad} I^- \operatorname{ad} I^+ (X) + Y \qquad \text{avec} \quad Z \in V^- \quad \text{et} \quad Y \in V^+.$$

En appliquant $e^{\operatorname{ad} I^+}$ à cette égalité et en utilisant le fait que $\sigma(X)$ appartient à $\mathfrak{g}$, on montre tout d'abord que Z est nul, puis que $\sigma(X)$ est nécessairement égal à $X + \operatorname{ad} I^- \operatorname{ad} I^+ (X)$. □

On utilise les décompositions classiques de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \quad \text{où} \quad \mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\},$$
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q} \quad \text{où} \quad \mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = X\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = -X\},$$

Remarque 5.3. — Nous sommes ici dans la situation particulière où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe (ce qui implique $\mathfrak{p}=i\mathfrak{k}$) et où σ est une involution complexe.

Vu la construction de θ la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{j}$ de $\mathfrak{g}$ est stable par θ. Elle est aussi stable par σ car le lemme 5.2 et la forte orthogonalité des racines α_i impliquent que

$$\sigma(\mathrm{H})=\mathrm{H}-\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(\mathrm{H})\,\mathrm{H}_{\alpha_j} \qquad \text{pour} \quad \mathrm{H}\in\mathfrak{j}.$$

On en déduit que

$$\mathfrak{j}\cap\mathfrak{h}=\{\mathrm{H}\in\mathfrak{j}\,|\,\alpha_j(\mathrm{H})=0 \text{ pour } j=0, \ldots, n\},$$

$$\mathfrak{j}\cap\mathfrak{q}=\bigoplus_{j=0}^{n}\mathbb{C}\,\mathrm{H}_{\alpha_j}=\mathfrak{a}_{0,\,\mathbb{C}}$$

où $\mathfrak{a}_{0,\,\mathbb{C}}$ désigne la complexification de l'algèbre abélienne $\mathfrak{a}_0=\bigoplus_{j=0}^{n}\mathbb{R}\,\mathrm{H}_{\alpha_j}$ (définie en 2.3). La définition de θ implique que $\mathfrak{a}_0$ est égal à l'intersection de $\mathfrak{j}$ avec $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$.

PROPOSITION 5.4. — *L'espace* $\mathfrak{a}_0$ *est abélien maximal dans* $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ *et* $\mathfrak{a}_{0,\,\mathbb{C}}$ *est un sous-espace de Cartan de la paire* $(\mathfrak{g}, \sigma)$.

Démonstration. — Comme $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ est une forme réelle de $\mathfrak{q}$, il suffit de démontrer la deuxième partie du lemme, c'est-à-dire que $\mathfrak{a}_{0,\,\mathbb{C}}$ est abélien maximal dans $\mathfrak{q}$.

Soit X un élément de $\mathfrak{q}$ commutant avec les éléments de $\mathfrak{a}_0$. Il existe une partie S du système de racines $\mathscr{R}$ telle

$$\mathrm{X}=\mathrm{H}+\sum_{\beta\in\mathrm{S}}\mathrm{Y}_\beta \qquad \text{où} \quad \mathrm{H}\in\mathfrak{j}, \quad \mathrm{Y}_\beta\in\mathfrak{g}^\beta\,(\mathrm{Y}_\beta\neq 0).$$

Si β appartient à S, elle est alors orthogonale à toutes les racines α_j ($j=0, \ldots, n$) ce qui implique qu'elle est fortement orthogonale à ces racines (*voir* la construction des α_j). Par conséquent Y_β commute avec les éléments X_{α_j} et donc avec I^+. Le lemme 5.2 implique alors l'égalité $\sigma(\mathrm{Y}_\beta)=\mathrm{Y}_\beta$. Mais, comme σ stabilise $\mathfrak{j}$, l'égalité $\sigma(\mathrm{X})=-\mathrm{X}$ implique la nullité des Y_β et par conséquent l'égalité $\mathrm{X}=\mathrm{H}$, d'où l'appartenance de X à $\mathfrak{a}_{0,\,\mathbb{C}}$. □

On obtient un sous-espace de Cartan de la paire $(\mathfrak{g}, \theta)$ en prenant $\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}=\sum_{\alpha\in\mathscr{R}}\mathbb{R}\,\mathrm{H}_\alpha$. Il est stable par σ et on a

$$\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}=\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}\cap\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{a}_0.$$

Comme $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe, le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{j}_{\mathbb{R}})$ est aussi égal à $\mathscr{R}$. D'autre part les racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_0)$ forment un système de racines, que l'on note $\mathscr{R}_0$ et on a

$$\mathscr{R}_0=\{\alpha_{|\,\mathfrak{a}_0}\,|\,\alpha_{|\,\mathfrak{a}_0}\neq 0 \text{ et } \alpha\in\mathscr{R}\}.$$

L'ordre choisi sur $\mathscr{R}$ est compatible avec la restriction à $\mathfrak{a}_0$ car le lemme 2.7 implique

$$\left.\begin{array}{c}\alpha\in\mathscr{R}^+\\ \alpha_{|\mathfrak{a}_0}\neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha^\sigma\in\mathscr{R}^- \tag{5.1}$$

où α^σ désigne la racine définie par $\alpha^\sigma(H)=\alpha(\sigma(H))$ pour $H\in\mathfrak{j}$. On munit $\mathscr{R}_0$ de l'ordre induit et on appelle $\mathscr{R}_0^+$ l'ensemble des racines positives pour cet ordre.

Nous avons introduit au paragraphe 2.3 la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}^-$ définie par

$$\mathfrak{p}^-=\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_0)+(\bigoplus_{\alpha\in\mathscr{R}^+}\mathfrak{g}^{-\alpha})=\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_0)\oplus(\bigoplus_{\{\alpha\in\mathscr{R}^+\,|\,\alpha_{|\mathfrak{a}_0}\neq 0\}}\mathfrak{g}^{-\alpha}).$$

PROPOSITION 5.5. — *La sous-algèbre parabolique* $\mathfrak{p}^-$ *est* $\sigma\theta$*-stable et elle est minimale parmi les sous-algèbres paraboliques* $\sigma\theta$*-stables de* $\mathfrak{g}$.

Démonstration. — Soit F le sous-ensemble de la base Θ de $\mathscr{R}$ défini par

$$F=\{\alpha\in\Theta\,|\,\alpha_{|\mathfrak{a}_0}=0\}.$$

Si on désigne par $\langle F\rangle$ l'espace vectoriel engendré par F on a

$$\mathscr{R}\cap\langle F\rangle=\{\alpha\in\mathscr{R}\,|\,\alpha_{|\mathfrak{a}_0}=0\}. \tag{5.2}$$

En effet, soit α une racine de $\mathscr{R}$ dont la restriction à $\mathfrak{a}_0$ est nulle. Si on la suppose positive par exemple on a

$$\alpha=\sum_{\beta\in\Theta}m_\beta\beta \qquad \text{avec} \quad m_\beta\in\mathbb{Z}^+.$$

On applique l'involution σ à cette égalité. Comme α et α^σ sont égales, ainsi que β et β^σ dans le cas où $\beta\in F$ on obtient

$$\sum_{\beta\in\Theta\setminus F}m_\beta\beta=\sum_{\beta\in\Theta\setminus F}m_\beta\beta^\sigma.$$

Or la propriété (5.1), c'est-à-dire la cohérence des ordres sur $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}_0$, implique que β^σ est négative pour $\beta\in\Theta\setminus F$, d'où la nullité des deux membres de l'égalité ci-dessus. On en déduit l'égalité (5.2) (l'autre inclusion étant évidente).

On vérifie alors sans peine que la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}^-$ est égale à la sous-algèbre parabolique négative standard définie par F c'est-à-dire

$$\mathfrak{p}^-=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n}$$

où

$$\mathfrak{a}=\{H\in\mathfrak{j}_\mathbb{R}\,|\,\alpha(H)=0\ \forall\alpha\in F\},$$

$\mathfrak{m}$ est l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ pour la forme $\tilde{B}_\theta(X, Y) = -\tilde{B}(\theta(X), Y)$, $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \mathscr{R}^+ \setminus \langle F \rangle} \mathfrak{g}^{-\alpha}$.

Le corollaire 2.7 de [VdB] démontre que $\mathfrak{p}^-$ est minimale $\sigma\theta$-stable. □

5.2. PROPRIÉTÉS DES DIFFÉRENTS GROUPES. — Comme G est un groupe connexe réductif, qui est complexe, il appartient à la classe de Harish-Chandra et tous ses sous-groupes de Cartan sont abéliens. Le groupe H est un sous-groupe ouvert du groupe des points fixes de σ dans G (prop. 2.9). L'espace G/H est donc un espace symétrique qui vérifie les hypothèses de [VdB].

Comme $\tilde{G}$ est le groupe adjoint de $\tilde{\mathfrak{g}}$, l'involution de Cartan θ de $\tilde{\mathfrak{g}}$ se remonte sur $\tilde{G}$ et l'ensemble des points fixes de θ dans $\tilde{G}$ est un sous-groupe compact maximal connexe $\tilde{K}$ de $\tilde{G}$. Comme G est connexe, θ stabilise G et commute à σ. D'autre part H est le sous-groupe d'isotropie dans G de I^+ et de I^- et θ envoie I^+ sur I^- ce qui implique que $\theta(H) = H$. Le sous-groupe des points fixes de θ dans G est le groupe compact $K = \tilde{K} \cap G$ qui admet $\mathfrak{k}$ pour algèbre de Lie.

LEMME 5.6. — *Le groupe* K *est un sous-groupe compact maximal connexe de* G.

Démonstration. — Soit $\tilde{G} = \tilde{K}.\exp \tilde{\mathfrak{p}}$ où $\tilde{\mathfrak{p}} = \{X \in \tilde{\mathfrak{g}} \mid \theta(X) = -X\}$ la décomposition de Cartan du groupe $\tilde{G}$. Soit g un élément de G et $g = k \exp X$ son écriture dans cette décomposition. Montrons que k appartient à G et que X appartient à $\mathfrak{p}$.

La stabilité de G par θ implique que l'élément $\exp 2X = \theta(g)^{-1} g$ appartient à G. Par conséquent $e^{2 \operatorname{ad} X}$ fixe H_0. Comme X appartient à $\tilde{\mathfrak{p}}$, l'application $\operatorname{ad} X$ qui est symétrique pour la forme $\tilde{B}_\theta$ est diagonalisable avec des valeurs propres réelles, d'où l'on déduit que H_0 appartient au sous-espace propre de $\operatorname{ad} X$ associé à la valeur propre 0. Il s'ensuit que X centralise H_0 et appartient donc à $\mathfrak{g} \cap \tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$, ce qui implique aussi l'appartenance de k à G.

On en déduit que K est l'image de G par l'application qui à $g = k \exp X$ ($k \in \tilde{K}$, $X \in \tilde{\mathfrak{p}}$) associe k, d'où la connexité de K. D'autre part, si K_1 est un sous-groupe compact de G contenant strictement K, il existe alors un élément $X \neq 0$ de $\mathfrak{p}$ tel que $\exp X$ (et donc aussi $\exp nX$ pour tout entier n) appartient à K_1, ce qui est impossible. □

On note $W_{K \cap H}$ l'image de $N_{K \cap H}(\mathfrak{a}_0)$ dans le groupe de Weyl W_0 du système de racines $\mathscr{R}_0$, groupe qui est isomorphe à $N_K(\mathfrak{a}_0)/Z_K(\mathfrak{a}_0)$ ([VdB] lemme 1.2). D'autre part $\mathfrak{a}_0$ est un sous-espace de Cartan de la paire riemannienne

$$(\mathfrak{g}_{\sigma\theta}, \theta) \qquad \text{où} \qquad \mathfrak{g}_{\sigma\theta} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma\theta(X) = X\} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{q} \cap \mathfrak{p}.$$

Comme $\mathfrak{g}_{\sigma\theta}$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$, le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}_{\sigma\theta}, \mathfrak{a}_0)$ est égal à $\mathscr{R}_0$ et son groupe de Weyl $W_{\sigma\theta}$ est identique à W_0. Comme $W_{\sigma\theta}$ s'injecte naturellement dans $W_{K \cap H}$ on obtient

$$W_{\sigma\theta} = W_{K \cap H} = W_0.$$

Le lemme 4.1 de [VdB] implique alors que H est essentiellement connexe c'est-à-dire $H = H^0 Z_{K \cap H}(\mathfrak{a}_0)$, où H^0 est la composante neutre de H.

On note P^- le sous-groupe parabolique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}^-$. Le quotient $W_0/W_{K\cap H}$ paramètre les classes de conjugaison par $K\cap H^0$ des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables minimaux ([VdB], p. 366) ainsi que les orbites ouvertes de P^- dans G/H ([VdB], prop. B.1). On a donc la

PROPOSITION 5.7. — *A conjugaison par* $K\cap H^0$ *près,* P^- *est l'unique sous-groupe parabolique minimal parmi les paraboliques* $\sigma\theta$*-stables de* G *et* P^-H *est un ouvert dense de* G.

La deuxième partie de la proposition résulte du fait que P^- possède une orbite ouverte, que l'on a notée $\mathcal{O}^+$, dans $\Omega^+\approx G/H$ (*voir* 2.3).

Nous avons démontré (prop. 5.5) que $\mathfrak{p}^-$ est la sous-algèbre parabolique standard associée à la partie F de la base Θ de $\mathcal{R}$. La décomposition de Langlands relative à θ de P^- est donnée par $P^-=MAN$ avec

$$N=\exp\mathfrak{n} \text{ où } \mathfrak{n}=\bigoplus_{\{\alpha\in\mathcal{R}^+\,|\,\alpha_{|\mathfrak{a}_0}\neq 0\}}\mathfrak{g}^{-\alpha}$$

$$A=\exp\mathfrak{a},$$

$$M=Z_K(\mathfrak{a})\,M^0 \text{ où } M^0 \text{ est le groupe analytique d'algèbre de Lie } \mathfrak{m}.$$

PROPOSITION 5.8. — 1) A *admet la décomposition en produit direct* $A=(A\cap H)\exp\mathfrak{a}_0$;
2) M *est connexe et* $M=(M\cap H)\exp(i\,\mathfrak{a}_0)$. *De plus*

$$(M\cap H)\cap\exp(i\,\mathfrak{a}_0)=\{\exp iX\,|\,X\in\mathfrak{a}_0 \quad\text{et}\quad \alpha_j(X)\in 2\pi\mathbb{Z}\ (j=0,\ \ldots,\ n)\}.$$

Démonstration. — Comme $\mathfrak{a}$ est stable par σ et que $\mathfrak{a}_0$, qui est contenu dans $\mathfrak{a}$, est abélien maximal dans $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$, on a $\mathfrak{a}=(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{h})\oplus\mathfrak{a}_0$, d'où la première partie de la proposition en passant à l'exponentielle.

Comme le groupe G est complexe et que les éléments de $\mathfrak{a}$ sont semi-simples, le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans G, qui est égal à MA est connexe. On en déduit que M est lui-même connexe.

Comme $\mathfrak{m}$ est stable par σ et θ et que $\mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}$ est abélien maximal dans $\mathfrak{q}$, on a $\mathfrak{m}=(\mathfrak{m}\cap\mathfrak{h})\oplus i\,\mathfrak{a}_0$. On en déduit la décomposition de M en passant à l'exponentielle car M est connexe et $\exp(i\,\mathfrak{a}_0)$ est contenu dans le centre de M.

Soit X un élément de $\mathfrak{a}_0$. L'élément $\exp iX$ appartient à H si et seulement si $e^{i\,\mathrm{ad}\,X}$ fixe I^+. Or

$$e^{i\,\mathrm{ad}\,X}I^+=\sum_{j=0}^{n}e^{i\,\alpha_j(X)}X_{\alpha_j}.$$

On en déduit la dernière partie de la proposition. □

5.3. LA SÉRIE PRINCIPALE SPHÉRIQUE. — On définit, comme usuellement, un élément $\rho\in\mathfrak{a}^*$ par

$$\rho(H)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\,H_{|\mathfrak{n}}) \qquad \text{pour} \quad H\in\mathfrak{a}.$$

Vu la structure complexe de $\mathfrak{g}$ et l'égalité (5.2) on a pour $H \in \mathfrak{a}$

$$\rho(H) = - \sum_{\{\alpha \in \mathscr{R}^+ \mid \alpha|_{\mathfrak{a}_0} \neq 0\}} \alpha(H).$$

De plus l'égalité (5.1) implique que la restriction de ρ à $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}$ est nulle ([VdB] lemma 3.1).

A tout couple (λ, ξ) où λ est un élément du dual complexe $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{a}$ et où ξ est une représentation unitaire irréductible de M dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}_\xi$, on associe une représentation de G de la façon suivante: on désigne par $\chi_{\xi \otimes \lambda}$ la représentation de $P^- = MAN$ donnée par

$$\chi_{\xi \otimes \lambda}(man) = a^{\lambda+\rho} \xi(m) \quad \text{pour tout } a \in A, \qquad m \in M, \qquad n \in N;$$

on désigne par $\mathscr{C}^\infty(\xi \otimes \lambda)$ l'espace des fonctions f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur G à valeurs dans $\mathscr{H}_\xi$ telles que

$$f(pg) = \chi_{\xi \otimes \lambda}(p) f(g) \quad \text{pour tout } p \in P^- \quad \text{et} \quad g \in G;$$

le groupe G opère par translation à droite dans cet espace de Fréchet et on note $\pi_{\xi \otimes \lambda}$ cette représentation qui est l'induite à G de la représentation $\xi \otimes \lambda \otimes 1$ de $P^- = MAN$.

DÉFINITION 5.9 ([V-d-B], p. 368). — *On dit que la représentation* $\pi_{\xi \otimes \lambda}$ *appartient à la série principale sphérique de* G/H *si* $\lambda|_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}} = 0$ *et si* ξ *est une représentation de* M *admettant un vecteur généralisé* $M \cap H$-*invariant*.

Comme nous allons le voir la représentation $\pi_{\xi \otimes \lambda}$ admet dans ce cas un vecteur généralisé H-invariant.

Remarque 5.10. — Van den Ban suppose en fait qu'il existe un représentant $s \in N_K(\mathfrak{a}_0)$ d'un élément du groupe de Weyl W_0 tel que ξ admet un vecteur généralisé fixé par le groupe $s(M \cap H)s^{-1}$. Comme ici W_0 se réalise dans $K \cap H$, la définition que nous avons donnée n'est pas restrictive.

LEMME 5.11. — *Toute représentation unitaire irréductible de* M *admettant un vecteur généralisé* $M \cap H$-*invariant est de dimension* 1. *C'est un caractère* ξ *de* M *trivial sur* $M \cap H$ *et dont la valeur sur* $\exp i\mathfrak{a}_0$ *est donnée par*

$$\xi(\exp iX) = e^{i\langle d\xi, X\rangle} \qquad (X \in \mathfrak{a}_0),$$

où $d\xi$ *est une combinaison linéaire à coefficients entiers des restrictions à* $\mathfrak{a}_0$ *des racines* α_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$.

Démonstration. — Si ξ est une représentation irréductible de M admettant un vecteur généralisé fixé par $M \cap H$, c'est en fait une représentation de dimension finie de M ([VdB] lemma 3.5). Ceci est lié au fait que l'espace symétrique $M/(M \cap H)$ est en bijection avec l'espace symétrique $(M \cap K)/(M \cap K \cap H)$ qui est compact. Il existe donc un vecteur de l'espace de la représentation ξ qui est fixé par $M \cap H$. Comme, de plus, M est égal au produit de $\exp i\mathfrak{a}_0$ par $M \cap H$ (prop. 5.8), cette représentation est de dimension 1. C'est donc un caractère ξ de M, qui est trivial sur $M \cap H$. Il reste à déterminer sa valeur sur $\exp i\,\mathfrak{a}_0$.

Tout caractère de $\exp i\,\mathfrak{a}_0$ est de la forme

$$\exp iX \mapsto e^{i\langle d\xi, X\rangle} \qquad (X \in \mathfrak{a}_0), \tag{5.3}$$

où $d\xi$ est un élément du dual complexe de $\mathfrak{a}_0$. Comme les racines α_j forment une base du dual de $\mathfrak{a}_0$, $d\xi$ est de la forme $\sum_{j=0}^{n} \xi_j \alpha_j$ où les ξ_j appartiennent à $\mathbb{C}$.

L'élément $\exp iX$ où $X = \pi H_{\alpha_j}$ appartient à $M \cap H$ par la proposition 5.8. Comme le caractère ξ est trivial sur $M \cap H$, on en déduit que

$$e^{2i\pi\xi_j} = e^{i\langle d\xi, X\rangle} = 1,$$

d'où l'appartenance des ξ_j à $\mathbb{Z}$. Il est alors clair que la formule (5.3) définit bien un caractère de $\exp i\,\mathfrak{a}_0$ trivial sur $(\exp i\,\mathfrak{a}_0) \cap H$ si $d\xi$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers de α_j. □

Nous supposerons désormais que $\pi_{\xi \otimes \lambda}$ appartient à la série principale sphérique de G/H ce qui implique ici, que ξ est un caractère de M, trivial sur $M \cap H$, qui est défini par la formule (5.3) sur $\exp i\,\mathfrak{a}_0$ et que $\chi_{\xi \otimes \lambda}$ est un caractère de P^-. On peut, de plus, considérer λ comme un élément du dual complexe de $\mathfrak{a}_0$.

On définit le noyau de Poisson $P_{\xi \otimes \lambda}$ sur G par

$$P_{\xi \otimes \lambda}(g) = \begin{cases} \chi_{\xi \otimes \lambda}(p) & \text{si } g \in pH\,(p \in P^-) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Le noyau de Poisson peut être considéré comme une fonction sur G/H, que l'on a identifié par l'application $g \mapsto g\,I^+$ à l'ouvert Ω^+. Nous allons voir qu'il s'exprime en fonction des invariants Δ_j. Pour cela définissons un élément $l = (l_0, l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ par l'égalité

$$d\xi = l_0\alpha_0 + (l_0 + l_1)\alpha_1 + \ldots + (l_0 + l_1 + \ldots + l_n)\alpha_n, \tag{5.4}$$

et un élément $s = (s_0, s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ par l'égalité

$$\lambda + \rho = 2(s_0\alpha_0 + (s_0 + s_1)\alpha_1 + \ldots + (s_0 + s_1 + \ldots + s_n)\alpha_n). \tag{5.5}$$

LEMME 5.12. — *On a pour* $g \in G$

$$P_{\xi \otimes \lambda}(g) = \begin{cases} \prod_{j=0}^{n} \beta_{l_j}(\Delta_j(g\,I^+))\,|\Delta_j(g\,I^+)|^{s_j} & \text{si } g \in P^- H, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

c'est-à-dire, avec les notations du paragraphe 4

$$P_{\xi \otimes \lambda}(g) = c_{s,l}(\dot{g}) \qquad \text{pour } g\,I^+ \in \mathcal{O}^+.$$

Démonstration. — Comme le noyau de Poisson ainsi que la fonction $c_{s,l}$ sont des invariants relatifs pour l'action de P^-, prenant tous deux la valeur 1 au point I^+, il suffit de regarder les caractères obtenus sous l'action de P^-. Le lemme découle alors du lemme 2.5 et de la définition de s et l. □

Si φ est un élément de $\mathscr{D}(G)$ (l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact sur G), on lui associe une fonction φ^0 appartenant à $\mathscr{D}(G/H)$ en posant

$$\varphi^0(\dot{g}) = \int_H \varphi(gh)\, dh,$$

où on a normalisé les mesures sur G et H de sorte que

$$\int_G \varphi(g)\, dg = \int_{G/H} \varphi^0(\dot{g})\, d\dot{g}.$$

On a alors en utilisant les notations du paragraphe 4

$$\begin{aligned}\int_G P_{\xi\otimes\lambda}(g)\,\bar{\varphi}(g)\, dg &= \int_{G/H} c_{s,l}(\dot{g})\,\bar{\varphi}^0(\dot{g})\, d\dot{g} \\ &= \zeta(\bar{\varphi}^0, 0, c_{s,l}).\end{aligned}$$

Cette intégrale converge pour $\operatorname{Re} s$ suffisamment grand (théorème 4.2) et admet un prolongement méromorphe en s (ou en λ) de sorte qu'on peut définir la distribution anti-linéaire $T_{\xi\otimes\lambda}$ sur G comme prolongement méromorphe de

$$\langle T_{\xi\otimes\lambda}, \varphi \rangle = \int_G P_{\xi\otimes\lambda}(g)\,\bar{\varphi}(g)\, dg.$$

On désigne par $L_{\xi\otimes\lambda}$ l'application linéaire surjective de $\mathscr{D}(G)$ sur $\mathscr{C}^\infty(\xi\otimes\lambda)$ définie par

$$L_{\xi\otimes\lambda}(\varphi)(g) = \int_{P^-} \chi_{\xi\otimes\lambda}^{-1}(p)\,\varphi(pg)\, dp,$$

où dp est une mesure de Haar à droite sur P^-.

THÉORÈME 5.13 (Van den Ban). — *Pour λ appartenant au complémentaire d'une réunion dénombrable d'hyperplans du dual complexe de $\mathfrak{a}_0$, la représentation $\pi_{\xi\otimes\lambda}$ possède un unique vecteur généralisé* H-*invariant $a_{\xi\otimes\lambda}$ dont la valeur en $\Phi \in \mathscr{C}^\infty(\xi\otimes\lambda)$ est donnée par*

$$\langle a_{\xi\otimes\lambda}, \Phi \rangle = \langle T_{\xi\otimes-\bar{\lambda}}, \varphi \rangle,$$

où φ est un élément de $\mathscr{D}(G)$ tel que $\Phi = L_{\xi\otimes\lambda}(\varphi)$.

Il n'est pas difficile de vérifier que, pour les valeurs de λ pour lesquelles $T_{\xi\otimes-\bar{\lambda}}$ est définie, la formule ci-desssus donne bien un vecteur généralisé H-invariant de $\pi_{\xi\otimes\lambda}$. Par contre le fait que c'est le seul est une conséquence du corollaire 5.11 de [VdB]. En effet, comme il n'y a ici qu'une seule orbite ouverte de P^- dans G/H (prop. 5.7), la dimension de l'espace des vecteurs H-invariants de $\pi_{\xi\otimes\lambda}$ est génériquement égale à la dimension des vecteurs $M \cap H$-invariants de ξ qui est égale à 1 car ξ est de dimension finie ([VdB] lemma 5.4).

Remarque 5.14. — On note l comme ci-dessus l'élément de $\mathbb{Z}^{n+1}$ associé au caractère ξ de M par la formule (5.4) et on note $s'=(s'_0, \ldots, s'_n)$ l'élément de $\mathbb{C}^{n+1}$ associé à $-\bar{\lambda}$ par la formule (5.5) c'est-à-dire

$$-\bar{\lambda}+\rho=2(s'_0\alpha_0+(s'_0+s'_1)\alpha_1+\ldots+(s'_0+s'_1+\ldots+s'_n)\alpha_n).$$

Le vecteur généralisé $a_{\xi\otimes\lambda}$ est défini si et seulement si s' appartient au domaine d'holomorphie de $\zeta(f, 0, c_{s', l})$ pour toute fonction $f\in\mathscr{S}(V^+)$.

5.4. Coefficient H-invariant de $\pi_{\xi\otimes\lambda}$. — On se place dans la situation où la représentation $\pi_{\xi\otimes\lambda}$ admet un vecteur généralisé $a_{\xi\otimes\lambda}$ qui est H-invariant.

A tout élément $\varphi\in\mathscr{D}(G)$, on associe un élément Φ de l'espace de la représentation en posant $\Phi=L_{\xi\otimes\lambda}(\varphi)$ et un coefficient $c^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda}$ de la représentation en posant

$$c^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda}(g)=\langle a_{\xi\otimes\lambda}, \pi_{\xi\otimes\lambda}(g^{-1})\Phi\rangle \qquad (g\in G).$$

Ce coefficient est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur G car la représentation de G sur $\mathscr{C}^\infty(\xi\otimes\lambda)$ est différentiable. L'invariance de $a_{\xi\otimes\lambda}$ sous l'action de H implique l'invariance à droite de $c^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda}$ par H.

On note s' (resp. l) l'élément de $\mathbb{C}^{n+1}$ (resp. $\mathbb{Z}^{n+1}$) associé à $-\bar{\lambda}$ (resp. ξ) par la formule (5.4) (resp. (5.5)).

Lemme 5.15. — (i) *Pour* $\varphi\in\mathscr{D}(G)$ *et* $g\in G$, *l'application* $\bar{\lambda}\mapsto c^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda}(g)$ *est méromorphe sur le dual complexe de* $\mathfrak{a}_0$.

(ii) *Pour* $\operatorname{Re} s'\geqq |l|/2$ (*ce qui équivaut à la continuité de* $P_{\xi\otimes-\bar{\lambda}}$ *sur* G) *on a*

$$c^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda}(g)=\int_K P_{\xi\otimes-\bar{\lambda}}(kg)\bar{\Phi}(k)\,dk.$$

Démonstration. — (i) La définition de $L_{\xi\otimes\lambda}$ implique que pour $g\in G$ on a

$$\pi_{\xi\otimes\lambda}(g^{-1})\Phi=L_{\xi\otimes\lambda}[R(g^{-1})\varphi],$$

où $[R(g)\varphi](x)=\varphi(xg)$ pour x et g éléments de G.

On déduit de la définition de $a_{\xi\otimes\lambda}$ que pour $g\in G$ on a

$$c^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda}(g)=\langle T_{\xi\otimes-\bar{\lambda}}, \overline{R(g^{-1})\varphi}\rangle,$$

d'où la partie (i) du lemme.

(ii) Si $P_{\xi\otimes-\bar{\lambda}}$ est une fonction continue sur G, la formule ci-dessus s'écrit

$$c^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda}(g)=\int_G P_{\xi\otimes-\bar{\lambda}}(xg)\bar{\varphi}(x)\,dx.$$

La formule d'intégration pour la décomposition $G=P^- K$ (*cf.* [Kn], p. 139) s'écrit

$$\int_G f(x)\,dx=\int_{P^-}\int_K f(pk)\,\delta(p)^{-1}\,dp\,dk,$$

où δ qui prend la valeur $a^{2\rho}$ pour $p=$man est la fonction module de P^-. Comme $P_{\xi\otimes-\bar\lambda}(pk)=\chi_{\xi\otimes-\bar\lambda}(p)\,P_{\xi\otimes-\bar\lambda}(k)$ on obtient

$$c^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda}(g)=\int_K P_{\xi\otimes-\bar\lambda}(kg)\int_{P^-}\chi_{\xi\otimes-\bar\lambda}(p)\,\delta(p)^{-1}\,\bar\varphi(pk)\,dp\,dk.$$

En remarquant que le conjugué de $\chi_{\xi\otimes-\bar\lambda}(p)\,\delta(p)^{-1}$ est égal à l'inverse de $\chi_{\xi\otimes\lambda}(p)$, on obtient le résultat. □

5.5. Fonction zêta associée à un coefficient. — On suppose toujours que le vecteur généralisé $a_{\xi\otimes\lambda}$ de la représentation $\pi_{\xi\otimes\lambda}$ est défini. On rappelle que le caractère χ_0 de l'invariant relatif Δ_0 peut être considéré comme défini sur G/H. Il en est de même pour la fonction $c^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda}$, qui peut être considérée comme une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur G/H. On pose pour $f\in\mathscr{D}(G/H)$ et $z\in\mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z>0$

$$\mathscr{Z}(f, z, c^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda})=\int_{G/H} f(\dot g)\,|\chi_0(\dot g)|^z\,c^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda}(\dot g)\,d\dot g.$$

Nous allons montrer que l'on peut étendre cette définition au cas où f est la restriction à G/H d'une fonction de $\mathscr{S}(V^+)$. Pour $f\in\mathscr{S}(V^+)$, $x\in V^+$ et $k\in K$, on pose $[L(k)f](x)=f(k^{-1}x)$.

Lemme 5.16. — *Pour* $\operatorname{Re} z>0$, *pour* $\operatorname{Re} s'\geqq|l|/2$ (*ce qui équivaut à la continuité de* $P_{\xi\otimes-\bar\lambda}$ *sur* G) *et pour* $f\in\mathscr{D}(G/H)$ *on a*

$$\mathscr{Z}(f, z, c^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda})=\int_K \zeta(L(k)f, z, c_{s',l})\,\bar\Phi(k)\,dk,$$

où $\Phi=L_{\xi\otimes\lambda}(\varphi)$ (ζ *a été définie au paragraphe* 4).

Démonstration. — En appliquant la partie (ii) du lemme 5.15 et l'invariance de la mesure $d\dot g$ on obtient

$$\mathscr{Z}(f, z, c^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda})=\int_{G/H}\int_K f(k^{-1}\dot g)\,|\chi_0(k^{-1}\dot g)|^z\,P_{\xi\otimes-\bar\lambda}(\dot g)\,\bar\Phi(k)\,dk\,d\dot g.$$

Comme la fonction f est à support compact, on peut intervertir les deux intégrales. Comme le caractère χ_0 prend des valeurs de module 1 sur le groupe compact K, on obtient en utilisant l'égalité de $P_{\xi\otimes-\bar\lambda}$ et de $c_{s',l}$ (lemme 5.12)

$$\mathscr{Z}(f, z, c^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda})=\int_K\int_{G/H}[L(k)f](\dot g)\,|\chi_0(\dot g)|^z\,c_{s',l}(\dot g)\,d\dot g\,\bar\Phi(k)\,dk,$$

d'où le résultat. □

LEMME 5.17. — *Soient* $\varphi \in \mathscr{D}(G)$, $f \in \mathscr{S}(V^+)$ *et* ξ *un caractère de* M *trivial sur* $M \cap H$. *L'application*

$$(\bar{\lambda}, z) \mapsto \int_K \zeta(L(k)f, z, c_{s', l}) \overline{L_{\xi \otimes \lambda}(\varphi)}(k)\, dk$$

définit une fonction méromorphe sur $(\mathfrak{a}_0)^*_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$. *Si* (s', z) *appartient à l'ouvert de* $\mathbb{C}^{n+2}$ *sur lequel* $\zeta(f, z, c_{s', l})$ *est holomorphe pour toute fonction* $f \in \mathscr{S}(V^+)$, *l'application*

$$f \mapsto \int_K \zeta(L(k)f, z, c_{s', l}) \overline{\Phi(k)}\, dk$$

(*où* $\Phi = L_{\xi \otimes \lambda}(\varphi)$) *est une distribution tempérée.*

Démonstration. — Soit K_0 un compact de l'ouvert de $\mathbb{C}^{n+2}$ sur lequel $(s', z) \mapsto \zeta(f, z, c_{s', l})$ est holomorphe pour toute fonction f de $\mathscr{S}(V^+)$. Comme $\zeta(f, z, c_{s', l})$ est égale à $Z(f, s' + z - k/n+1, l)$ (on additionne comme plus haut z et $-k/(n+1)$ à la première coordonnée de s') on déduit du lemme 3.6 qu'il existe trois constantes $C \in \mathbb{R}^*_+$, $M \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$ dépendant de K_0 telles que

$$|\zeta(f, z, c_{s', l})| \leqq C\, \nu_{M, N}(f).$$

Comme L est une représentation du groupe compact K sur $\mathscr{S}(V^+)$, il existe trois constantes $C' \in \mathbb{R}^*_+$, $M' \in \mathbb{N}^*$ et $N' \in \mathbb{N}^*$ telles que pour tout $k \in K$ et toute $f \in \mathscr{S}(V^+)$ on ait

$$\nu_{M, N}(L(k)f) \leqq C'\, \nu_{M', N'}(f).$$

Lorsque (s', z) parcourt K_0, λ décrit un compact et comme φ est elle même à support compact on peut majorer $|L_{\xi \otimes \lambda}(\varphi)(k)|$ par une constante C''. Pour tout $k \in K$, la fonction $(s', z) \mapsto \zeta(L(k)f, z, c_{s', l}) \overline{L_{\xi \otimes \lambda}(\varphi)(k)}$ est holomorphe sur K_0 à cause de la relation entre s' et $-\bar{\lambda}$ (*cf.* Remarque 5.14). On en déduit que l'intégrale étudiée dans ce lemme est une fonction holomorphe sur K_0 et que pour $(s', l) \in K_0$ et $f \in S(V^+)$ on peut la majorer ainsi :

$$\left| \int_K \zeta(L(k)f, z, c_{s', l}) \overline{L_{\xi \otimes \lambda}(\varphi)}(k)\, dk \right| \leqq CC'C''\, \nu_{M', N'}(f),$$

d'où la deuxième partie du lemme. □

On déduit des lemmes précédents que $f \mapsto \mathscr{Z}(f, z, c^{\varphi}_{\xi \otimes \lambda})$ est une distribution tempérée pour (λ, z) appartenant au complémentaire d'une réunion dénombrable d'hyperplans complexes de $(\mathfrak{a}_0)^*_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$. On l'appelle *la fonction zêta associée au coefficient* $c^{\varphi}_{\xi \otimes \lambda}$ de $\pi_{\xi \otimes \lambda}$.

Si F est une fonction définie sur G/H on pose comme plus haut

$$\check{F}(\dot{g}) = F(\sigma(\dot{g})) \qquad \text{pour} \quad \dot{g} \in G/H.$$

THÉORÈME 5.18 Équation fonctionnelle. — *La fonction zêta associée au coefficient* $c^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda}$ *de* $\pi_{\xi\otimes\lambda}$, *que l'on note* $\mathscr{Z}(f, z, c^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda})$, *est une fonction méromorphe des paramètres* $(\bar{\lambda}, z) \in (\mathfrak{a}_0)^*_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$ *qui, sur son domaine d'holomorphie, est une distribution tempérée de la variable f. Elle vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\mathscr{Z}\left(f, z+\frac{k}{n+1}, c^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda}\right)=\delta(\xi, \lambda, z)\, \mathscr{Z}(\tilde{f}, -z, \check{c}^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda}),$$

où k désigne la dimension de V^+, *où* $n+1$ *est le degré de* Δ_0 *et où* $\delta(\xi, \lambda, z)$ *désigne la valeur de la fonction* δ *du théorème* 3.16 *prise en* $(l, s'+z)$, *avec* l (resp. s') *associé à* ξ (resp. $-\bar{\lambda}$) *par la formule* (5.4) (resp. (5.5)).

Démonstration. — On se place sur l'intersection des ouverts de $\mathbb{C}^{n+2}$ où les fonctions $(s', z) \mapsto \zeta(f, z+k/(n+1), c_{s', l})$ et $(s', l) \mapsto \zeta(\tilde{f}, -z, \check{c}_{s', l})$ sont holomorphes pour toute fonction $f \in \mathscr{S}(V^+)$. On déduit du théorème 4.2 que pour tout élément $k \in K$ on a

$$\zeta\left(L(k)f, z+\frac{k}{n+1}, c_{s', l}\right)=\delta(l, s'+z)\, \zeta(\widetilde{L(k)f}, -z, \check{c}_{s', l}).$$

Le lemme 5.17 nous permet d'intégrer sur K le produit de cette égalité par $\bar{\Phi}(k)=\overline{L_{\xi\otimes\lambda}(\varphi)}(k)$ et on obtient

$$(5.6) \qquad \mathscr{Z}\left(f, z+\frac{k}{n+1}, c^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda}\right)=\delta(l, s'+z)\int_K \zeta(\widetilde{L(k)f}, -z, \check{c}_{s', l})\, \bar{\Phi}(k)\, dk.$$

On vérifie que

$$\widetilde{L(k)f}=L(\sigma(k))\tilde{f} \qquad \text{pour} \quad k \in K.$$

En effet, en utilisant l'invariance de la mesure dx sur V^+ sous l'action de K ainsi que l'invariance de la forme de Killing, on a

$$\widetilde{L(k)f}(x)=\int_{V^+} f(u)\, \tau\circ B(u, k^{-1} w_0 x)\, du=\hat{f}(k^{-1} w_0 x).$$

Comme $k^{-1} w_0$ est égal à $w_0 \sigma(k)^{-1}$, la définition de $\tilde{f}$ (*voir* paragraphe 4) permet de conclure. L'égalité (5.6) s'écrit alors

$$(5.7) \qquad \mathscr{Z}(f, z+\frac{k}{n+1}, c^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda})=\delta(l, s'+z)\int_K \zeta(L(k)\tilde{f}, -z, \check{c}_{s', l})\, \bar{\Phi}(\sigma(k))\, dk.$$

En remplaçant $\bar{\Phi}$ par $\bar{\Phi}\circ\sigma$ dans la démonstration du lemme 5.16 on vérifie que pour $F \in \mathscr{D}(G/H)$, $\operatorname{Re} z>0$ et $\operatorname{Re} s' \geqq |l|/2$ on a

$$(5.8) \qquad \int_K \zeta(L(k)F, z, \check{c}_{s', l})\, \bar{\Phi}(\sigma(k))\, dk=\int_{G/H} F(\dot{g})\, |\chi_0(\dot{g})|^z\, \check{c}^{\varphi}_{\xi\otimes\lambda}(\dot{g})\, d\dot{g}.$$

L'intégrale du membre de gauche de cette égalité est définie pour $F \in \mathscr{S}(V^+)$ et admet un prolongement méromorphe en (s', l) (démonstration analogue à celle du Lemme 5.17). Vu l'égalité (5.8), cette intégrale est notée $\mathscr{Z}(F, z, \check{c}^{\varphi}_{\xi \otimes \lambda})$ et appelée fonction zêta associée à $\check{c}^{\varphi}_{\xi \otimes l}$. L'égalité (5.7) donne alors l'équation fonctionnelle annoncée. □

Remarquons, que dans les conditions où l'égalité (5.8) est vérifiée, le membre de droite est aussi égal à $\mathscr{Z}(\check{F}, z, c^{\varphi}_{\xi \otimes \lambda})$ car le caractère χ_0 prend les mêmes valeurs au point g et $\sigma(g)$ et la mesure $d\dot{g}$ est invariante par la transformation $\dot{g} \mapsto \sigma(\dot{g})$.

Remarque 5.19. — Soit P le sous-groupe parabolique de G opposé à P^-, c'est-à-dire le sous-groupe $P = MA\bar{N}$ où $\bar{N} = \exp \bigoplus_{\{\alpha \in \mathscr{R}^+ \mid \alpha|_{\mathfrak{a}_0} \neq 0\}} \mathfrak{g}^{\alpha}$. On note $\bar{\pi}_{\xi \otimes \lambda}$ la représentation qui est l'induite à G de la représentation $\xi \otimes \lambda \otimes 1$ de P (définie comme au début du paragraphe 5.3). Alors $\check{c}^{\varphi}_{\xi \otimes \lambda}$ est en fait le coefficient de la représentation $\bar{\pi}_{\xi^{-1} \otimes -\lambda}$ associé comme au paragraphe 5.4 à la fonction $\varphi \circ \sigma$ de $\mathscr{D}(G)$. Ceci est une conséquence du

LEMME 5.20. — *On note* $\bar{P}_{\xi \otimes \lambda}$ *le noyau de Poisson défini sur* G *par*

$$\bar{P}_{\xi \otimes \lambda}(g) = \begin{cases} \bar{\chi}_{\xi \otimes \lambda}(p) & \textit{si} \quad g \in p\mathrm{H}\ (p \in \mathrm{P}) \\ 0 & \textit{sinon}, \end{cases}$$

où $\bar{\chi}_{\xi \otimes \lambda}$ *désigne le caractère de* $P = MA\bar{N}$ *donné par* $\bar{\chi}_{\xi \otimes \lambda}(man) = a^{\lambda - \rho}\xi(m)$ *pour tout* $a \in A$, $m \in M$, $n \in \bar{N}$. *On a alors*

$$P_{\xi \otimes \lambda}(\sigma(g)) = \bar{P}_{\xi^{-1} \otimes -\lambda}(g).$$

Démonstration. — Elle découle des résultats du paragraphe 5.1, plus précisément du fait que σ stabilise A et M, et envoie N sur $\bar{N}$ d'après la formule (5.1). De plus si g appartient à $\exp \mathfrak{a}_0$ ou à $\exp i\mathfrak{a}_0$, on a $\sigma(g) = g^{-1}$. Ceci montre, en utilisant la proposition 5.8 que

$$\chi_{\xi \otimes \lambda} \circ \sigma(p) = \bar{\chi}_{\xi^{-1} \otimes -\lambda}(p) \qquad \text{pour} \quad p \in P,$$

d'où le lemme. □

BIBLIOGRAPHIE

[VdB] E. P. VAN DEN BAN, *The Principal Series for a Reductive Symmetric Space I, H-Fixed Distribution Vectors* (*Ann. Scient. de l'E.N.S.*, vol. 21, 1988, p. 359-412).

[B-G] I. N. BERNSTEIN et S. I. GELFAND, *Meromorphic Properties of the* P^{λ} (*Funct. Anal. Appl.*, vol. 3, 1969, p. 68-69).

[B1] B. BLIND, *Distributions zeta à plusieurs variables associées aux algèbres de Jordan simples euclidiennes* (*C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 311, 1990, p. 215-217).

[B-R] N. BOPP et H. RUBENTHALER, *Fonction zêta associée à la série principale sphérique de certains espaces symétriques* (*C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 310, 1990, p. 505-508).

[Bou] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie ch. VII et VIII* (Hermann, Paris, 1975).

[B] F. BRUHAT, *Sur les représentations induites des groupes de Lie* (*Bull. Soc. Math. France*, vol. 84, 1956).

[D] P. DELORME, *Injection de modules sphériques pour les espaces symétriques réductifs dans certaines représentations induites*, p. 108-143 in Non-Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups, *Proc. Marseille-Luminy* 1985, *Springer Lecture Notes* in *Math.*, *n°* 1243, J. CARMONA, P. DELORME, M. VERGNE eds.

[G-S] S. GELBART et F. SHAHIDI, *Analytic Properties of Automorphic* L-*Functions* (*Perspectives in Mathematics, Academic Press*, 1988).

[G-J] R. GODEMENT et H. JACQUET, *Zeta Functions of Simple Algebras* (*Springer Lecture Notes in Math.*, n° 260, 1972).

[Gy] A. GYOJA, *Vector Valued Invariants of Prehomogeneous Vector Spaces*, preprint, Osaka University.

[He] S. HELGASON, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces* (*Academic Press, New York*, 1978).

[H-U] R. HOWE et T. UMEDA, *The Capelli Identity, the Double Commutant Theorem and the Multiplicity Free Actions* (*Math. Ann.*, vol. 290, 1991, p. 565-619).

[Kn] A. KNAPP. — *Representation Theory of Semi-Simple Lie Groups* (*Princeton University Press*, 1986).

[Mu] I. MULLER. — *Décomposition orbitale des espaces préhomogènes réguliers de type parabolique et applications* (*C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 303, n° 11, 1986, p. 495-498).

[M-R-S-] I. MULLER, H. RUBENTHALER et G. SCHIFFMANN, *Structure des espaces préhomogènes associés à certaines algèbres de Lie graduées* (*Math. Ann.*, vol. 274, 1986, p. 95-123).

[Ru1] H. RUBENTHALER, *Espaces préhomogènes de type parabolique*, *Thèse*, Université de Strasbourg, 1982.

[Ru2] H. RUBENTHALER, *Espaces vectoriels préhomogènes, sous-groupes paraboliques et* $\mathfrak{sl}_2$-*triplets* (*C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 290, 1980, p. 127-129).

[Ru3] H. RUBENTHALER, *Espaces préhomogènes de type parabolique* (*Lect. Math. Kyoto Univ.*, vol. 14, 1988, p. 189-221).

[R-S] H. RUBENTHALER et G. SCHIFFMANN, *Opérateurs différentiels de Shimura et espaces préhomogènes* (*Inv. Math.*, vol. 90, 1987, p. 409-442).

[Sab] C. SABBAH, *Proximité évanescente II* (*Compositio Math.*, vol. 64, 1987, p. 213-241).

[Sa] I. SATAKE, *Algebraic Structure of Symmetric Domains* (*Iwanami Shoten and Princeton University Press*, 1980).

[S-F] I. SATAKE et J. FARAUT, *The Functional Equation of Zeta Distributions Associated with Formally Real Jordan Algebras* (*Tôhoku Math. J.*, vol. 36, 1984, p. 469-482).

[S] F. SATO, *Zeta Functions in Several Variables Associated with Prehomogeneous Vector Spaces* I: *Functional equations* (*Tohoku Math. J.*, vol. 34, 1982, p. 437-483).

[S-K] M. SATO et T. KIMURA, *A Classification of Irreducible Prehomogeneous Vector Spaces and their Relative Invariants* (*Nagoya Math. J.*, vol. 65, 1977, p. 1-155).

[Sh] T. SHINTANI, *On Dirichlet Series whose Coefficients are Class Numbers of Integral Binary Cubic Forms* (*J. Math. Soc. Japan*, vol. 24, 1972, p. 132-188).

[Ta] J. T. TATE, *Fourier Analysis in Number Field Theory and Hecke's Zeta-Function*, in Algebraic Number Theory (Cassels and Fröhlich editors) (*Acad. Press*, 1967, p. 305-347).

[Vi] E. B. VINBERG, *On the Classification of the Nilpotent Elements of Graded Lie Algebras* (*Soviet Math. Dokl*, vol. 16, 1975, p. 1517-1520).

[W] N. WALLACH, *Polynomial Differential Operators Associated with Hermitian Symmetric Spaces* (Preprint Rutgers University).

(Manuscrit reçu le 22 octobre 1991,
révisé le 9 octobre 1992.)

N. BOPP et H. RUBENTHALER
IRMA et Département de Mathématiques,
Université Louis-Pasteur,
7, rue René-Descartes,
67084 Strasbourg Cedex.