

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN-LOUIS CALLOT

Champs lents-rapides complexes à une dimension lente

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 26, n° 2 (1993), p. 149-173

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1993_4_26_2_149_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHAMPS LENTS-RAPIDES COMPLEXES À UNE DIMENSION LENTE

PAR JEAN-LOUIS CALLOT

ABSTRACT. — A slow-fast vector field with one slow dimension is locally defined by a differential equation of the type: $\varepsilon dY/dx=f(x, Y)$ where ε is an infinitesimal strictly positive number. The foliation associated to this field is structured by limited analytic curves where the field is limited. The main result of this study (theorems 2 and 3) is the determination of minimal existence domains for solutions infinitely close to these curves. This geometrical description of the complex foliation gives a simple explanation of the delayed bifurcation phenomenon in the slow-fast fields of \mathbb{R}^3 . By macroscopic observation, we also obtain a geometrical description of the foliation associated to an irregular singularity of a linear differential equation. This is illustrated with equations of Bessel and Airy.

Introduction

Depuis une quinzaine d'années, il apparaît de plus en plus clairement que l'étude de champs de vecteurs dont les composantes n'ont pas le même ordre de grandeur apporte une clarification considérable, non seulement dans les problèmes de perturbation singulière, mais également dans des problèmes en apparence très réguliers. C'est G. Reeb qui, le premier, a vu que l'analyse non standard est le cadre idéal pour aborder ce type de problème.

Le premier mérite de l'analyse non standard est de donner un sens aux ordres de grandeur. Il est alors possible de définir simplement un champ lent-rapide sans avoir à introduire une famille de champs dépendants d'un paramètre qui tend vers zéro. L'étude de tels champs dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 a d'abord servi à résoudre des problèmes de perturbation singulière (voir [8]) et a permis la découverte des canards [2]. Il est apparu ensuite que cette technique s'appliquait également à l'étude à grande échelle des champs standard, ce qui a conduit à la théorie des fleuves [6].

Les champs lents-rapides réels sont structurés par des courbes lentes où le champ n'est pas infiniment grand. Les trajectoires peuvent être décrites en disant qu'elles vont infiniment vite vers la courbe lente puis la longent (à moins qu'elles n'aillent infiniment vite infiniment loin). Sauf situation exceptionnelle, il est facile de déterminer jusqu'où la trajectoire longe la courbe lente en considérant uniquement l'attractivité de cette courbe. Les situations exceptionnelles correspondent au phénomène canard.

Il semble difficile de transposer cette description dans le cas de champs complexes. Une trajectoire ne longe pas une courbe lente complexe d'un point à un autre, mais sur

un domaine complexe bordé, si tout va bien, par une courbe et l'absence d'orientation de la variable indépendante complexe enlève tout sens à la notion d'attractivité. L'objet de cet article est de montrer que la transposition est non seulement possible, mais très naturelle.

Dans la première partie, je rappelle les résultats de A. Robinson sur les fonctions analytiques et je montre comment ils expliquent que les trajectoires vont « infiniment vite jusqu'à la région lente ».

Dans la deuxième partie, je montre, d'abord pour les champs de \mathbb{C}^2 , que les trajectoires sont lentes dans des domaines calculables (théorème 2). Précisément, il existe une fonction à valeur réelles qui se calcule au moyen des coefficients du champ, dont les lignes de niveau bordent les domaines où les trajectoires sont lentes. Cette fonction, que j'appelle relief, est très naturelle : son exponentielle mesure l'écart entre deux trajectoires voisines et on la fait apparaître par l'équation aux variations. Cette fonction joue déjà un rôle important dans les travaux de Poincaré. Le petit miracle qui se produit est que, lorsqu'elle est décroissante (sur un chemin), cette fonction renseigne encore sur l'écart entre une trajectoire et une courbe lente (ou sage dans terminologie que j'introduis pour les champs complexes) qui n'est pas une trajectoire.

En dimension plus grande, il est nécessaire de considérer simultanément plusieurs fonctions relief, mais il est encore possible de déterminer un domaine où une solution est lente (théorème 3).

La description géométrique du feuilletage complexe ainsi obtenue donne une explication simple du phénomène de retard à la bifurcation dans les champs lents-rapides de \mathbb{R}^3 (théorème 4). Il apparaît comme la trace réelle de l'existence de solutions lentes complexes.

Dans la troisième partie, application à des équations standard, j'essaie de montrer comment cette vision des feuilletages complexes apporte de manière très simple des renseignements sur les comportements asymptotiques des solutions d'équations linéaires. En particulier, il n'est possible d'associer un champ lent-rapide non trivial à une équation linéaire que si elle a une singularité irrégulière. L'étude des trajectoires lentes de ce champ fait apparaître de manière naturelle des développements asymptotiques, généralement divergents, dans des secteurs à l'infini.

I. Préliminaires

Le travail qui suit est réalisé dans le cadre de la théorie non standard IST de E. Nelson [9]. Le lecteur qui n'est pas familier de cette théorie et de ses développements par l'école de G. Reeb peut en trouver un exposé dans le livre de F. Diener et de G. Reeb [5]. Pour le principe de permanence, les halos et les galaxies, la meilleure référence est le livre de I. P. van der Berg [3].

1. Fonctions analytiques internes

Les résultats non standard en analyse complexe sont, me semble-t-il, assez peu connus et il me paraît utile d'en rappeler certains.

Abraham Robinson a montré [12] qu'une grande part de la théorie élémentaire des fonctions analytiques peut se résumer en une description des fonctions analytiques dans le halo d'un point.

THÉORÈME DE ROBINSON. — *Soit f une fonction analytique dans un domaine contenant le halo du point limité z_0 , telle que $f(z_0)$ est limité.*

a. *si f est limitée en tout point du halo de z_0 , alors :*

1) *f est S-continue en z_0 , c'est-à-dire que pour tout z infiniment voisin de z_0 , $f(z)$ est infiniment voisin de $f(z_0)$;*

2) *il existe un voisinage standard V de z_0 et une fonction standard f_0 analytique dans V telle que, pour tout $z \in V$:*

$$f_0(z) \simeq f(z) \quad \text{et} \quad f'_0(z) \simeq f'(z)$$

f_0 est l'ombre de f ;

b. *si f n'est pas S-continue en z_0 , l'image par f du halo de z_0 contient tous les nombres complexes limités sauf, éventuellement, une partie du halo d'un point;*

c. *si f est S-continue en z_0 et si son ombre est non constante, alors l'image par f du halo de z_0 est exactement le halo de $f(z_0)$.*

Malgré sa simplicité apparente, cet énoncé contient la totalité des propriétés particulières des fonctions analytiques dont j'ai besoin dans la suite. Il montre en particulier le rôle clé que jouent les fonctions analytiques limitées qui n'étonnera aucun lecteur familier de la théorie des familles normales.

DÉFINITION. — Une fonction analytique limitée dans le halo du point z_0 est dite *S-analytique* au point z_0 (ou *normale* dans la terminologie de Robinson).

Il est bon de remarquer que la notion de fonction S-analytique en un point n'est pas strictement locale. Elle est macroscopiquement locale puisqu'elle est liée aux propriétés de la fonction dans un voisinage standard du point et ne peut se vérifier par simple examen dans un voisinage infiniment petit. Le préfixe S- que j'utilise provient du fait qu'il s'agit d'une propriété locale pour la S-topologie de Robinson qui est une topologie externe.

2. Champs lents rapides complexes

Les champs de vecteurs que je considère dans la suite sont définis par un système différentiel du type :

$$\varepsilon \frac{dY}{dx} = F(x, Y), \quad x \in \mathbb{C}, \quad Y \in \mathbb{C}^n$$

où ε est un nombre réel strictement positif infiniment petit.

Cette écriture n'a d'intérêt que si la fonction F est limitée, ce qui assure que le champ a pour ordre de grandeur $1/\varepsilon$.

DÉFINITION. – Le champ de vecteurs défini par le système différentiel :

$$\varepsilon \frac{dY}{dx} = F(x, Y), \quad x \in \mathbb{C}, \quad Y \in \mathbb{C}^n$$

est dit lent-rapide au voisinage d'un point si la fonction F est S -analytique en ce point.

On peut distinguer deux régions (externes) dans un domaine limité où le champ est lent-rapide : la *région rapide* où le champ est infiniment grand et la *région lente* où le champ est limité. Les comportements des trajectoires dans ces deux régions sont bien sûr très différents. La description de ces comportements est moins aisée que pour les champs réels : l'absence d'orientation de la variable indépendante complexe interdit les analogies dynamiques.

Dans la région rapide, les solutions ont une dérivée infiniment grande et ne peuvent pas être S -analytique. Du point bY telle que $(x_0, Y(x_0))$ est dans la région rapide, prend presque toutes les valeurs limitées dans le halo du point x_0 . En particulier, s'il existe un Y_0 tel que (x_0, Y_0) est dans la région lente, la solution Y « passe » infiniment près de ce point.

On peut donc dire que la région rapide n'est le siège que de comportements transitoires des solutions. L'essentiel se passe infiniment près de la région lente.

Il peut, au contraire, exister des solutions qui « restent » dans la région lente, c'est à dire que $(x, Y(x))$ appartient à la région lente lorsque x varie dans un domaine contenant le halo d'un point x_0 . Une telle solution est limitée dans tout le halo de x_0 et est donc S -analytique.

DÉFINITION. – Une solution est dite sage en un point si elle est S -analytique en ce point.

Le théorème de Robinson montre que dans le cas analytique complexe, les solutions sont soit sages, soit rapides et qu'il n'y a pas de tiers cas. Précisément : si la fonction F n'est pas partout infiniment petite, soit $Y(x)$ une solution limitée au point x_0 ; alors ou bien Y est S -analytique au point x_0 et c'est une solution sage, ou bien Y n'est pas S -analytique au point x_0 et il existe x_1 infiniment voisin de x_0 tel que $(x_1, Y(x_1))$ appartient à la région rapide.

L'existence d'une solution sage ne se lit généralement pas dans l'équation différentielle. L'objet de ce travail est de montrer dans quelle mesure la région lente qui elle se lit dans l'équation, contient nécessairement des solutions sages.

II. Étude locale

Dans toute cette section, je considère un champ lent-rapide défini dans un voisinage microscopique de l'origine. Tous les résultats sont valables dans un voisinage standard convenable de l'origine. Pour alléger les énoncés, je n'y précise pas ce voisinage.

1. En dimension 2

Un champ lent-rapide au voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^2 est donné par une équation différentielle du premier ordre :

$$\varepsilon y' = f(x, y)$$

où la fonction f est S-analytique à l'origine.

a. Solutions voisines d'une solution sage. — Je suppose que l'équation possède une solution sage y_0 , c'est-à-dire une solution S-analytique en 0. Pour étudier les solutions voisines de y_0 , je mesure leur écart à y_0 en posant :

$$w = y - y_0$$

qui est solution de l'équation :

$$\varepsilon w' = w \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0(x)) + w^2 g(x, w)$$

où g est une fonction S-analytique à l'origine.

Cette équation définit encore un champ lent-rapide, mais ayant $w \equiv 0$ comme solution sage. Une telle équation se « désingularise » au moyen d'une loupe de Benoit [1] [2] en posant :

$$W = w^\varepsilon$$

d'où :

$$W' = W \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0(x)) + W^{1/\varepsilon} g(x, W^{1/\varepsilon}) \right]$$

Malgré son aspect barbare, cette équation permet de lire très simplement le comportement des solutions infiniment voisines de y_0 . En effet, lorsque $y(x)$ est infiniment proche de

$y_0(x)$, $W^{1/\varepsilon} = y - y_0$ est bien sûr infiniment petit, et on a alors :

$$W' \simeq W \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0(x))$$

et :

$$W(x) \simeq W(0) \exp \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, y_0(\xi)) d\xi.$$

Le domaine de validité de cette approximation n'est pas connu a priori, mais contient le domaine où $|W| \ll 1$, qui lui peut se lire sur l'approximation. Je définis, pour cela, la fonction à valeurs réelles :

$$R(x) = \operatorname{Re} \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, y_0(\xi)) d\xi$$

dont les lignes de niveau coïncident presque avec celles du module de W dans le domaine de validité de l'approximation.

PROPOSITION 1. — *Si $|y(0) - y_0(0)|^\varepsilon$ est nettement inférieur à 1, alors $y(x) \simeq y_0(x)$ en tout point x limité qui peut être joint à 0 par un chemin de classe S^1 le long duquel la fonction R est toujours négative ou nulle.*

Remarque. — Je dis qu'une fonction est de classe S^1 si elle est dérivable et que sa dérivée est limitée et S -continue. Cette définition ne coïncide pas exactement avec celle de [5].

Démonstration. — Soit γ un chemin satisfaisant les hypothèses de la proposition et tel que $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = x$. On a le long de ce chemin :

$$|W(\gamma(t))| = |W(0)| \exp \left[R(\gamma(t)) + \int_0^t W^{1/\varepsilon}(\gamma(\tau)) g(\gamma(\tau), W^{1/\varepsilon}(\gamma(\tau))) \gamma'(\tau) d\tau \right]$$

Soient :

$$H = \{ t \in [0, 1] \text{ tels que } 0 \leq \tau \leq t \Rightarrow y(\gamma(\tau)) \simeq y_0(\gamma(\tau)) \}$$

$$G = \{ t \in [0, 1] \text{ tels que } 0 \leq \tau \leq t \Rightarrow |W(\gamma(\tau))| \ll 1 \}$$

H est un pré-halo et G une pré-galaxie, et on a $G \subset H$. Mais si $t \in H$, $W^{1/\varepsilon}(\gamma(\tau))$ est infiniment petit pour $0 \leq \tau \leq t$ et l'expression ci-dessus de $|W(\gamma(t))|$ montre que $t \in G$ puisque $R(\gamma(t)) \leq 0$. Les ensembles G et H sont donc égaux et internes, ils sont nécessairement égaux à l'intervalle $[0, 1]$. Ceci montre que $1 \in H$, c'est-à-dire que $y(x) \simeq y_0(x)$. ■

Cette proposition n'est pas très satisfaisante, car elle suppose les deux solutions « très voisines » à l'origine. On peut se dispenser de cette hypothèse lorsque la dérivée partielle $(\partial f / \partial y)(0, y_0(0))$ n'est pas infinitésimale.

THÉORÈME 1. — Soit $y(x)$ une solution de $\varepsilon y' = f(x, y)$ infiniment voisine de la solution sage $y_0(x)$ à l'origine. On a $y(x) \simeq y_0(x)$ en tout point x limité qui peut être joint à 0 par un chemin γ de classe S^1 satisfaisant :

$$\gamma(0) = 0, \quad \frac{d}{dt} R(\gamma(t))|_{t=0} \ll 0$$

$R(\gamma(t)) \ll R(0)$ pour t appréciable positif.

Démonstration. — Ces conditions assurent que, pour $t=0$, la dérivée de $|W(\gamma(t))|$ est appréciable négative et qu'elle le reste jusqu'à un t_1 appréciable. Comme $|W(0)|$ est infiniment voisin de 1 ou inférieur à 1, $|W(\gamma(t_1))|$ est appréciablement inférieur à 1. Au delà de t_1 , on conclut en appliquant la proposition 1. ■

L'extrême proximité des solutions qui est supposée dans la proposition 1 n'est pas une situation exceptionnelle, mais au contraire normale dès que deux solutions sages sont voisines dans un domaine macroscopique, du moins lorsque $\partial f/\partial y$ n'est pas infinitésimal.

PROPOSITION 2. — Soit $y(x)$ une solution de $\varepsilon y' = f(x, y)$. Si cette solution est infiniment voisine de la solution sage $y_0(x)$ dans tout le halo de l'origine et si $(\partial f/\partial y)(0, y_0(0))$ n'est pas infinitésimal, alors ces deux solutions sont exponentiellement voisines, c'est à dire que $\varepsilon \text{Log}|y(x) - y_0(x)|$ est négatif non infinitésimal pour tout x infinitésimal.

Démonstration. — Puisque $y(x) - y_0(x) \simeq 0$ pour $x \simeq 0$, on a dans tout le halo de 0 :

$$W' \simeq W \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0(x)), \quad \text{où } W = (y - y_0)^\varepsilon$$

Si $|W(0)|$ est nettement inférieur à 1, $|W(x)|$ le reste dans tout le halo de 0 et on a la conclusion voulue.

Sinon, $|W(0)| \simeq 1$ et W est S -analytique d'ombre non constante; il existe alors $x_0 \simeq 0$ tel que $|W(x_0)| = 1$ (d'après le point c) du théorème de Robinson). Mais alors $|y(x_0) - y_0(x_0)| = 1$ ce qui est contraire à l'hypothèse. ■

b. Solutions voisines d'une courbe sage. — Le paragraphe précédent suppose l'existence d'une solution sage, solution qu'il est rarement possible de déceler à l'examen d'une équation. L'objet de ce paragraphe est de montrer que les courbes sages, qui, elles, se lisent sur l'équation, sont accompagnées de solutions sages.

DÉFINITION. — Une courbe sage pour l'équation $\varepsilon y' = f(x, y)$ est une courbe S -analytique, $y = \varphi(x)$, telle que $(1/\varepsilon) f(x, \varphi(x))$ est limité.

Le relief associé à cette courbe sage est la fonction à valeurs réelles :

$$R(x) = \text{Re} \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \varphi(\xi)) d\xi.$$

Ce relief est régulier au point x_0 si son gradient est appréciable en ce point ou, ce qui revient au même, si $(\partial f/\partial y)(x_0, \varphi(x_0))$ est appréciable.

THÉORÈME 2. — Soit $y_0(x)$ une solution de $\varepsilon y' = f(x, y)$ infiniment voisine de la courbe sage $\varphi(x)$ à l'origine. Pour tout point x accessible à partir de l'origine par un chemin γ de classe S^1 le long duquel $(d/dt) R(\gamma(t))$ est appréciable négatif, $y_0(x)$ est définie et infiniment voisine de $\varphi(x)$.

Démonstration. — Si le relief n'est pas régulier à l'origine, aucun point ne satisfait les hypothèses et le théorème est évident. Je peux donc supposer $(\partial f/\partial y)(0, \varphi(0))$ appréciable. Il existe alors une courbe sage ψ infiniment voisine de φ telle que $f(x, \psi(x)) = 0$ (dans un voisinage macroscopique de l'origine).

En prenant comme nouvelle inconnue : $u = f(x, y)$, l'équation initiale devient :

$$\varepsilon u' = u \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, u)) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x, u))$$

c'est-à-dire une équation de la forme :

$$\varepsilon u' = ug(x, u) + \varepsilon h(x, u)$$

où g et h sont deux fonctions S-analytiques et :

$$g(x, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \psi(x)) \simeq \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)).$$

Dans cette équation, $u=0$ est une courbe sage. Je note $u_0(x) = f(x, y_0(x))$ l'image par ce changement d'inconnue de la solution y_0 que je veux étudier. Par hypothèse, $u_0(0) \simeq 0$.

J'effectue maintenant un agrandissement autour de $u=0$, en posant :

$$u = \alpha U \quad \text{avec} \quad \alpha > 0, \quad \alpha \simeq 0, \quad \frac{\varepsilon}{\alpha} \simeq 0 \quad \text{et} \quad u_0(0)/\alpha \simeq 0.$$

L'équation devient :

$$\varepsilon U' = U g(x, \alpha U) + \frac{\varepsilon}{\alpha} h(x, \alpha U).$$

Je note $U_0(x) = u_0(x)/\alpha$ l'image de la solution à étudier par ce changement d'inconnue. La dernière hypothèse sur α assure que $U_0(0) \simeq 0$.

Le long du chemin γ , j'ai :

$$\frac{d}{dt} \text{Log} |U_0(\gamma(t))| = \frac{1}{\varepsilon} \text{Re} \left[\left(g(\gamma(t), \alpha U_0(\gamma(t))) + \frac{\varepsilon}{\alpha} h(\gamma(t), \alpha U_0(\gamma(t))) \frac{1}{U_0(\gamma(t))} \right) \gamma'(t) \right]$$

donc si U_0 est appréciable :

$$\frac{d}{dt} \text{Log} |U_0(\gamma(t))| = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{d}{dt} R(\gamma(t)) + \emptyset \right]$$

puisque $\gamma'(t)$ est limité (γ est de classe S^1).

Ainsi, lorsque U_0 est appréciable, son module est décroissant puisque la dérivée du relief le long de γ est appréciablement négative. Comme $U_0(0) \simeq 0$, U_0 reste infiniment petit tout le long de γ et y_0 reste infiniment près de φ . ■

De manière imagée, ce théorème exprime que les trajectoires d'un champ lent-rapide longent les courbes sages en descendant le relief, ou que les courbes sages sont attractives en restrictions aux chemins descendants.

Il est possible de préciser ce comportement :

PROPOSITION 3. — *En supposant le relief régulier à l'origine :*

a. si $y_0(x)$ est une solution infiniment voisine de la courbe sage $\varphi(x)$ dans tout le halo de l'origine, alors :

$$y_0(x) = \varphi(x) + \varepsilon \xi \quad \text{pour tout } x \simeq 0.$$

b. si $y_0(x)$ et $y_1(x)$ sont deux solutions infiniment voisines de la courbe sage dans tout le halo de l'origine, alors ces deux solutions sont exponentiellement voisines dans ce halo, c'est-à-dire :

$$\varepsilon \operatorname{Log} |y_0(x) - y_1(x)| \text{ est négatif non infinitésimal pour } x \simeq 0.$$

Démonstration. — Le point b) ne fait que reprendre la proposition 2.

Pour le point a), d'après le théorème de Robinson, puisque y_0 est infiniment proche de la fonction S-analytique φ dans tout le halo de l'origine, la dérivée de y_0 est infiniment proche de la dérivée de φ et est donc limitée.

Il en résulte que $f(x, y_0(x))$, comme $f(x, \varphi(x))$ est infiniment petit de l'ordre de ε pour x infiniment petit. Or :

$$f(x, y_0(x)) = f(x, \varphi(x)) + (y_0(x) - \varphi(x)) A(x)$$

où $A(x)$ est infiniment voisin de $(\partial f / \partial y)(0, \varphi(0))$ qui est appréciable par l'hypothèse de régularité. L'écart de y_0 à φ est donc infiniment petit d'ordre ε dans le halo de l'origine. ■

Cette estimation de l'écart à la courbe sage permet de préciser le lieu où les solutions cessent de longer la courbe sage.

PROPOSITION 4. — *Si le relief est régulier à l'origine et si $y_0(x)$ est une solution telle que :*

$$y_0(0) \simeq \varphi(0) \quad \text{et} \quad \frac{y_0(0) - \varphi(0)}{\varepsilon} \text{ est infiniment grand,}$$

alors, dans un voisinage macroscopique de l'origine :

- a. $y_0(x) \simeq \varphi(x)$ si $R(x) \ll R(0)$
- b. $y_0(x) \not\simeq \varphi(x)$ si $R(x) \gg R(0)$
- c. y_0 n'est pas S-analytique sur la courbe $R(x) = R(0)$.

Démonstration. — Le relief étant régulier à l'origine, une primitive de $(\partial f/\partial y)(x, \varphi(x))$ est une transformation conforme d'un voisinage de l'origine dont l'inverse a la propriété de redresser les lignes de niveau du relief R . Dans cette nouvelle variable, la dérivée du relief est appréciable le long d'un chemin rectiligne joignant deux points à des altitudes appréciablement différentes. En revenant à la coordonnée initiale, on a, au voisinage de l'origine :

si x_1 et x_2 vérifient $R(x_1) \gg R(x_2)$ il existe un chemin γ de classe S^1 joignant x_1 à x_2 sur lequel $(d/dt) R(\gamma(t)) \ll 0$.

L'application du théorème 2 pour $x_1 = 0$ nous donne le point a). Pour le point b), supposons qu'il existe x_1 tel que $R(x_1) \gg R(0)$ et $y_0(x_1) \simeq \varphi(x_1)$. Il en découlerait par le théorème 2 que pour tout $x_2 \simeq 0$, $y_0(x_2) \simeq \varphi(x_2)$ et par la proposition 3 que $y_0(0) - \varphi(0)/\varepsilon$ est limité. Ceci est contraire à l'hypothèse.

Le point c) est une conséquence immédiate des points a) et b). ■

2. En dimension supérieure à 2

Je considère maintenant un champ de vecteurs défini au voisinage de l'origine par un système différentiel de la forme :

$$\varepsilon Y' = F(x, Y)$$

où Y appartient à C^n , n limité, et F est une fonction de C^{n+1} dans C^n S -analytique à l'origine.

La notion de courbe sage se généralise sans difficulté à ce cas, par contre il n'est plus possible d'y associer une unique fonction relief.

DÉFINITION. — Une courbe sage pour l'équation $\varepsilon Y' = F(x, Y)$ est une courbe S -analytique $Y = \Phi(x)$ telle que $(1/\varepsilon)F(x, \Phi(x))$ est limité.

Si les n valeurs propres de $(\partial F/\partial Y)(x, \Phi(x)) : \lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont non infiniment petites et deux à deux non infiniment voisines, les n reliefs associés à la courbe sage $Y = \Phi(x)$ sont les fonctions à valeurs réelles :

$$R_i(x) = \operatorname{Re} \int_0^x \lambda_i(\xi) d\xi, \quad i = 1, \dots, n.$$

En dimension 2, les solutions longent la courbe sage le long des chemins descendants pour le relief. En dimension plus grande, il est clair que ceci s'étend aux chemins qui descendent pour tous les reliefs simultanément. Je vais montrer que cette condition peut être notablement affaiblie.

DÉFINITION. — Un domaine Δ est *accessible à partir de l'origine* pour l'équation $\varepsilon Y' = F(x, Y)$ ayant $Y = \Phi(x)$ comme courbe sage si :

- 1) Δ est simplement connexe,
- 2) les valeurs propres de $(\partial F/\partial Y)(x, \Phi(x))$ sont toutes appréciables et deux à deux non infiniment voisines en tout point de Δ ,

3) pour chaque point x de Δ et chaque relief R_i associé à Φ , il existe dans Δ un chemin $\gamma_{i,x}$ de classe S^1 joignant l'origine à x et tel que :

$$\frac{d}{dt} R_i(\gamma_{i,x}(t)) \text{ est appréciable négatif.}$$

THÉORÈME 3. — Soit $Y_0(x)$ une solution de $\varepsilon Y' = F(x, Y)$ telle que $Y_0(0) \simeq \Phi(0)$ où $Y = \Phi(x)$ est une courbe sage. Si Δ est un domaine accessible à partir de l'origine, alors Y_0 est définie et infiniment voisine de Φ dans Δ .

Démonstration. — Comme en dimension 2, je transforme l'équation pour avoir 0 comme courbe sage, et, en plus, je diagonalise sa partie linéaire. Ceci peut être obtenu par un changement d'inconnue S -analytique, puisque les valeurs propres sont supposées appréciables et nettement distinctes. J'arrive ainsi à une équation de la forme :

$$\varepsilon u' = A(x) \cdot u + B(x, u) + \varepsilon C(x, u)$$

où A est une matrice diagonale S -analytique ayant mêmes valeurs propres que $(\partial F / \partial Y)(x, \Phi(x))$, B et C sont des fonctions S -analytiques. La fonction B est d'ordre au moins deux en u . La courbe $u=0$ est sage pour cette équation et, à la solution $Y_0(x)$ de l'équation initiale, correspond une solution $u_0(x)$ qui est infiniment petite à l'origine.

Une loupe autour de $u=0$ va avoir pour effet de rendre infiniment petite la partie non linéaire de l'équation.

Soit $\alpha > 0$, $\alpha \simeq 0$ et tel que ε/α et $u_0(0)/\alpha$ sont infiniment petits.

En posant : $u = \alpha U$, j'obtiens :

$$\varepsilon U' = A(x) \cdot U + \delta K(x, U)$$

où $\delta = \max(\alpha, \varepsilon/\alpha) \simeq 0$ et K est une fonction S -analytique. A la solution $Y_0(x)$ de l'équation initiale, correspond par ce changement d'inconnue $U_0(x) = u_0(x)/\alpha$ qui est infiniment petit à l'origine.

Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que $U_0(x)$ est infinitésimal dans Δ .

En notant U_i , $i = 1 \dots n$, les composantes de U , le système à étudier est formé des équations :

$$\varepsilon U_i' = \lambda_i(x) U_i + \delta K_i(x, U_1, \dots, U_n), \quad i = 1 \dots n$$

Si chaque composante K_i de K ne dépend que de la composante de même indice U_i de U , les équations sont totalement découplées et le théorème 2 s'applique à chacune d'elles. Ce qui montre le résultat cherché dans ce cas particulier.

En général, il reste un couplage entre les équations, mais si U est limité, ce couplage est infiniment petit et le théorème 2 permet encore de conclure. Le domaine où U est limité n'est pas connu a priori et il faut un argument de permanence pour terminer la démonstration.

Soit a un nombre positif appréciable. Je note Δ_a le domaine interne défini de la même manière que Δ , mais en imposant que les dérivées $(d/dt)R_i(\gamma_{i,x}(t))$ sont non seulement appréciables négatives, mais inférieures à $-a$. Dans Δ_a , je distingue deux parties a priori externes :

G_a : la prégalaxie des points x de Δ_a tels que, pour chaque relief R_i il existe un chemin $\gamma_{i,x}$ dans Δ_a reliant l'origine à x sur lequel :

$$U_0 \text{ est limité et } \frac{d}{dt} R_i(\gamma_{i,x}(t)) < -a$$

H_a : le préhalo des points x de Δ_a tels que, pour chaque relief R_i il existe un chemin $\gamma_{i,x}$ dans Δ_a reliant l'origine à x sur lequel :

$$U_0 \text{ est infinitésimal et } \frac{d}{dt} R_i(\gamma_{i,x}(t)) < -a.$$

H_a est bien sûr inclus dans G_a , mais le théorème 2 montre que G_a est inclus dans H_a . Donc les ensembles H_a et G_a sont égaux et nécessairement internes. Ils sont donc égaux à Δ_a .

Ainsi, pour tout a appréciable positif, $U_0(x)$ est infiniment petit dans Δ_a . Donc $U_0(x)$ est infiniment petit dans Δ . ■

3. Retard à la bifurcation pour les champs de vecteurs de \mathbb{R}^3

Le théorème 3 donne une explication simple à un phénomène surprenant qui est apparu dans l'étude des champs de vecteurs de \mathbb{R}^3 ayant deux composantes rapides. Si un tel champ possède une courbe lente d'abord attractive, puis répulsive, et que les trajectoires spiralent autour de cette courbe lente, il existe toujours une trajectoire canard (qui longe la partie attractive puis la partie répulsive de la courbe lente sur une distance appréciable) au moins lorsque le champ est analytique.

Un premier exemple de ce phénomène a été donné par Shishkova [13], et il a été mis en évidence, indépendamment par Lobry et Wallet [7]. Ce phénomène diffère nettement de ce qui se passe en dimension 2 où les canards ont toujours la vie brève, c'est à dire peuvent être détruits par des perturbations exponentiellement petites.

Depuis les travaux de Neishtadt ([10], [11]) et les interprétations en termes de fonctions résurgentes ou de séries Gevrey [4], ces canards robustes apparaissent de plus en plus comme la trace réelle d'un phénomène complexe.

Il me semble que la description que donne le théorème 3 de la géométrie du feuilletage complexe au voisinage de la courbe sage montre que, d'une certaine manière, la courbe qui apparaît attractive puis répulsive dans le cas réel, est en fait globalement attractive lorsqu'on s'autorise des détours complexes. L'aspect canard n'est plus visible dans cette vision complexe, ce qui explique la robustesse du phénomène.

THÉORÈME 4. — Soit $\varepsilon(dY/dt) = F(t, Y)$, $t \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathbb{R}^3$ un système différentiel définissant un champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 tel que :

1. Il existe une courbe $Y = \Phi(t)$ sur laquelle le champ est limité,
2. $(\partial F / \partial Y)(t, \Phi(t))$ possède deux valeurs propres conjuguées $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ appréciables vérifiant : $\operatorname{Re} \lambda_1(0) = 0$ et $\operatorname{Re} \lambda_1'(0)$ appréciable positif.

Si F et Φ sont les restrictions réelles de fonctions complexes S -analytiques à l'origine, alors il existe une solution $Y_0(t)$ infiniment voisine de $\Phi(t)$ dans un voisinage appréciable de $t=0$.

Démonstration. — Je conserve les mêmes notations pour les extensions complexes des fonctions.

La courbe $Y = \Phi(x)$, $x \in \mathbb{C}$, est une courbe sage pour le champ lent-rapide complexe défini par l'équation $\varepsilon Y' = F(x, y)$. Les reliefs associés sont

$$R_1(x) = \operatorname{Re} \int_0^x \lambda_1(\xi) d\xi \quad \text{et} \quad R_2(x) = \operatorname{Re} \int_0^x \lambda_2(\xi) d\xi.$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont conjuguées en des points conjugués, les deux reliefs sont donc symétriques par rapport à l'axe réel. L'approximation quadratique de R_1 à l'origine est :

$$R_1(u + iv) = a(u^2 - v^2) + bv \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ appréciables, } a \text{ positif.}$$

Soit r un nombre positif appréciable assez petit. Je note C la composante connexe de l'origine du domaine $\{R_1(x) \leq r \text{ et } R_2(x) \leq r\}$. C'est un voisinage convexe appréciable de l'origine. L'intersection de C avec l'axe réel est un intervalle $[t_0, t_1]$ où $t_0 \ll 0 \ll t_1$.

Le domaine accessible à partir de t_0 , au sens du paragraphe précédent, contient tous les points de C qui ne sont pas infiniment voisins de son bord. Ainsi une solution $Y_0(x)$ infiniment voisine de la courbe sage $\Phi(x)$ au point t_0 reste infiniment voisine de cette courbe sage sur tout intervalle $[t_0, t_1 - \alpha]$ où α est appréciable positif. Et par permanence, sur un intervalle $[t_0, t_2]$ où $t_2 \simeq t_1$. ■

III. Exemples d'applications à des équations standard

L'étude d'une équation différentielle standard au voisinage de l'infini peut se ramener, au moyen d'un microscope, à l'étude d'une équation non standard à distance limitée. Lorsque l'équation obtenue définit un champ de vecteurs lent-rapide, les solutions sages mettent en évidence des solutions particulières de l'équation initiale. Ce point de vue est celui qui a permis de développer la théorie des fleuves pour les champs de vecteurs de \mathbb{R}^2 [6].

Je n'ai pas l'ambition de développer ici une théorie des fleuves complexes, mais simplement d'appliquer cette méthode macroscopique à quelques équations bien connues.

Le premier exemple est l'équation d'Euler : $Y' = Y + 1/X$ qui met en évidence l'essentiel des phénomènes.

J'applique ensuite cette méthode aux équations linéaires du second ordre à coefficients méromorphes à l'infini, qui définissent, via l'équation de Riccati associée, des champs de vecteurs dans \mathbb{C}^2 . Il apparaît que les équations qui permettent de définir un champ lent-rapide sont exactement celles qui ont une singularité irrégulière à l'infini. Les solutions sages de ce champ lent-rapide fournissent des estimations asymptotiques de solutions particulières dans des secteurs à l'infini. Encore une fois, je ne cherche pas à faire une théorie des singularités irrégulières, mais je détaille la méthode pour les équations de Bessel et d'Airy.

1. L'équation d'Euler : $Y' = Y + (1/X)$

L'équation d'Euler est à la fois un mauvais exemple et un bon. Mauvais parce que trop simple et trop connu : sa résolution explicite amène à des intégrales dont l'étude asymptotique présente peu de difficultés. Bon parce que très simple mais contenant toute la richesse de phénomènes qui peut apparaître dans les champs complexes de dimension 2. La présentation faussement naïve que j'en donne veut surtout montrer des techniques simples qui se transposent immédiatement à des équations moins simples.

Cette équation linéaire du premier ordre a une singularité à l'origine et une singularité à l'infini. Le comportement des solutions au voisinage de 0 s'obtient facilement en posant :

$$Y = e^X \text{Log } X + W.$$

La nouvelle inconnue W satisfait l'équation non singulière à l'origine :

$$W' = W + \frac{1 - e^X}{X}$$

dont les solutions sont des fonctions entières de la variable X .

Les solutions de l'équation d'Euler sont donc naturellement définies sur la surface de Riemann du logarithme. Dans toute la suite de ce paragraphe, je considère la variable indépendante sur cette surface de Riemann.

Pour aborder le comportement des solutions à l'infini, j'utilise un microscope, en posant : $x = \varepsilon X$, où ε est un réel strictement positif infiniment petit. Les valeurs appréciables de la nouvelle variable x correspondent à des valeurs infiniment grandes de X de l'ordre de $1/\varepsilon$. A cette échelle, l'équation devient :

$$\varepsilon \frac{dY}{dx} = Y + \frac{\varepsilon}{x}.$$

Cette équation définit un champ lent-rapide pour x appréciable (la fonction ε/x n'est pas S -analytique en 0). Ce champ n'est limité que si Y est infiniment petit de l'ordre de ε .

En particulier, les solutions sages de cette équation sont nécessairement infiniment petites de l'ordre de ε .

La courbe $Y=0$ (x appréciable) est une courbe sage de ce champ. Le relief qui lui est associé est $R(x) = \operatorname{Re}(x)$.

D'après le théorème 2, une solution qui est infiniment petite en un point appréciable x_0 est également infiniment petite en tout point appréciable qui peut être atteint à partir de x_0 par un chemin qui fait toujours décroître nettement la partie réelle. La situation est légèrement compliquée par le fait que les solutions sont définies sur la surface de Riemann du logarithme.

Si x_0 est un réel positif appréciable et y_0 une solution infiniment petite en x_0 , le domaine où $y_0(x)$ est infiniment petit contient tous les x appréciables tels que :

$$\operatorname{Re} x \ll x_0 \quad \text{et} \quad |\arg x| \ll \frac{3\pi}{2}$$

c'est-à-dire un domaine qui recouvre deux fois les x appréciables à partie réelle nettement négative.

Ce domaine est minimal, seul renseignement que donne le théorème 2, mais si $y_0(x_0)/\varepsilon$ est infiniment grand, c'est exactement le domaine de S-analyticité de y_0 pour x appréciable. En effet, on conclut par la proposition 4 que la solution y_0 n'est pas S-continue sur la ligne $\operatorname{Re} x = x_0$. Et pour voir que l'argument de x ne peut pas atteindre $\pm 3\pi/2$, il suffit d'écrire :

$$y_0(x) = e^{x/\varepsilon} \operatorname{Log} \frac{x}{\varepsilon} + w_0(x)$$

où w_0 est une fonction uniforme de x . Si $x_1 = e^{it/2} t$ et $x_2 = e^{-3it/2} t$ avec t réel appréciable :

$$y_0(x_1) - y_0(x_2) = e^{it/\varepsilon} i \frac{2\pi}{\varepsilon}.$$

Comme $y_0(x_1)$ est limité, il en résulte que $y_0(x_2)$ est infiniment grand et que la solution y_0 n'est pas S-analytique si $\arg x = -3\pi/2$. Il en est de même pour $\arg x = 3\pi/2$.

Parmi toutes les solutions sages de cette équation, il en est une qui est « meilleure » que les autres : celle qui est sage jusqu'à $+\infty$. Dans le cas réel, ceci correspond à l'unicité du fleuve répulsif. L'existence de cette solution distinguée peut se traduire par l'énoncé standard suivant :

PROPOSITION 5. — *L'équation d'Euler $Y' = Y + 1/X$ possède une unique solution Y_0 telle que, pour tout α , $0 < \alpha < 3\pi/2$:*

$$Y_0(X) = O(1/X)$$

lorsque X tend vers l'infini dans le secteur

$$|\arg X| \leq 3\pi/2 - \alpha.$$

ou par l'énoncé non standard :

PROPOSITION 5 bis. — Il existe une unique solution Y_0 de l'équation d'Euler telle que, pour tout ε strictement positif infiniment petit, $Y_0(X/\varepsilon)$ est de l'ordre de ε pour X appréciable dans le secteur $|\arg X| \ll 3\pi/2$.

Démonstration. — Il suffit de démontrer la proposition pour α standard. Soit α , $0 < \alpha < 3\pi/2$, un réel standard. Je note Σ le secteur : $|\arg X| \leq 3\pi/2 - \alpha$.

Soit ω un réel positif infiniment grand et \hat{Y} la solution de l'équation d'Euler de condition initiale $\hat{Y}(\omega) = 0$. Je vais montrer que \hat{Y} possède une ombre qui est la solution cherchée.

Je définis trois ensembles externes :

$$H = \{X \in \Sigma \text{ tels que } |X| \text{ infiniment grand et } |X| \leq \omega/2\}$$

$$A = \{X \in H \text{ tels que } \forall z \in H, |z| \geq |X| \Rightarrow \hat{Y}(z) \simeq 0\}$$

$$B = \{X \in H \text{ tels que } \forall z \in H, |z| \geq |X| \Rightarrow \hat{Y}(z) \text{ limité}\}$$

Les ensembles H et A sont des halos. Quant à l'ensemble B , c'est une galaxie sauf s'il est égal à H . Je vais montrer que $B = A$, donc B est un halo et est égal à H . Pour cela, il suffit de montrer que $B \subset A$.

Soit $X \in B$. Je pose $\varepsilon = 1/|X|$ et $x = \varepsilon X$, A cette nouvelle échelle, \hat{Y} est solution de l'équation :

$$\varepsilon \frac{dY}{dx} = Y + \frac{\varepsilon}{x}, \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \simeq 0$$

et $\hat{Y}(x)$ est limité si $|x| \geq 1$. C'est une solution sage, et nous avons vu que les solutions sages sont infiniment petites de l'ordre de ε . Cette simple remarque a deux conséquences :

d'une part $A = B = H$,

d'autre part, en tout point de H , $\hat{Y}(X)$ est le produit de $1/X$ par une quantité limitée.

Ainsi, dans le secteur Σ , $\hat{Y}(X)$ est limité pour X infiniment grand de module inférieur à $\omega/2$. Par permanence, il existe M limité tel que $\hat{Y}(X)$ est limité si $X \in \Sigma$, X limité et $|X| > M$. \hat{Y} a donc une ombre Y_0 qui est également solution de l'équation d'Euler (c'est une équation standard). Pour tout X appréciable dans Σ , on a :

$$Y_0(X) \simeq \hat{Y}(X) \quad \text{et} \quad X(\hat{Y}(X) - Y_0(X)) \simeq 0.$$

Par permanence, il existe ρ infiniment grand positif, que je peux choisir inférieur à $\omega/2$, tel que cette dernière relation persiste tant que $|X| \leq \rho$ dans Σ . Comme, pour X infiniment grand de module inférieur à ρ , $X\hat{Y}(X)$ est limité, il en résulte que $XY_0(X)$ est limité pour X infiniment grand, $|X| \leq \rho$ dans Σ .

La fonction Y_0 étant standard, ceci implique que

$$Y_0(X) = O(1/X) \text{ pour } X \text{ tendant vers l'infini dans } \Sigma.$$

J'ai ainsi montré l'existence de Y_0 . L'unicité est beaucoup plus simple. L'écart entre deux solutions ayant le comportement indiqué doit être une solution de $Y' = Y$ qui tend vers 0 en $+\infty$, ce ne peut être que la solution nulle. ■

En raffinant l'estimation des solutions sages, on peut déterminer le développement asymptotique de la solution Y_0 .

PROPOSITION 6. — Pour tout α , $0 < \alpha < 3\pi/2$ et tout entier N , on a :

$$Y_0(X) = \sum_{n=1}^N (-1)^n (n-1)! X^{-n} + O(X^{-(N+1)})$$

Lorsque X tend vers l'infini dans le secteur $|\arg X| \leq 3\pi/2 - \alpha$.

Démonstration. — La fonction Y_0 et le secteur Σ étant standard, il suffit de montrer que pour X infiniment grand dans Σ et N standard :

$$Y_0(X) = \sum_{n=1}^N (-1)^n (n-1)! X^{-n} + X^{-(N+1)} L(X, N)$$

où $L(X, N)$ est limité.

Pour cela, j'effectue un microscope en posant $\varepsilon = 1/|X|$, $x = \varepsilon X$ et $y_0(x) = Y_0(x/\varepsilon)$. A cette échelle, y_0 est une solution limitée de

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = y + \frac{\varepsilon}{x}$$

donc, comme on l'a déjà vu, $y_0(x) = \varepsilon l(x, 0)$ où $l(x, 0)$ est limité pour x appréciable dans Σ .

Je pose alors : $y_0(x) = \varepsilon y_1(x)$. La nouvelle fonction y_1 est une solution limitée pour x appréciable dans Σ de l'équation :

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = y + \frac{1}{x}$$

Cette équation définit un champ lent-rapide ayant $y = -1/x$ comme courbe sage pour x appréciable. Le relief associé est $R(x) = \operatorname{Re}(x)$. Il en résulte que la solution limitée y_1 doit être ε -voisine de la courbe sage aux points appréciables de Σ . Donc :

$$y_0(x) = -\frac{\varepsilon}{x} + \varepsilon^2 l(x, 1).$$

Le processus s'itère en posant : $y_0(x) = -\varepsilon/x + \varepsilon^2 y_2(x)$ où y_2 doit être une solution limitée de :

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = y - \frac{1}{x^2}.$$

A la p -ième étape, je pose $y_0(x) = \sum_{n=1}^{p-1} (-1)^n (n-1)! \varepsilon^n x^{-n} + \varepsilon^p y_p(x)$ où y_p doit être une solution limitée de :

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = y - (-1)^p (p-1)! x^{-p}.$$

Tant que p est limité, cette équation définit un champ lent-rapide ayant $y = (-1)^p (p-1)! x^{-p}$ comme courbe sage et toujours $R(x) = \operatorname{Re}(x)$ comme relief associé. Donc $y_p(x) = (-1)^p (p-1)! x^{-p} + \varepsilon 1(x, p)$.

En revenant à l'échelle initiale on a le résultat cherché. ■

Les propositions 5 et 6 appellent quelques remarques.

□ La solution particulière Y_0 est bien connue et a une expression intégrale très simple :

$$Y_0(X) = - \int_0^{\infty} \frac{e^{-tX}}{1+t} dt$$

dont le développement asymptotique s'obtient par intégration par partie. Le secteur dans lequel ce développement est effectivement asymptotique n'a rien d'évident, même s'il est relativement facile à déterminer dans ce cas.

□ Le point de vue que j'adopte ici montre immédiatement l'existence d'une solution particulière ayant un comportement régulier dans un secteur qui se lit sur l'équation.

□ Lorsqu'elle est considérée du point de vue réel, l'équation d'Euler possède deux fleuves : l'un répulsif en $+\infty$, l'autre attractif en $-\infty$. Le fleuve répulsif définit une solution unique (qui est la solution Y_0 de la proposition 5). Par contre, le fleuve attractif ne permet pas de distinguer une solution des autres.

□ Du point de vue complexe, la solution distinguée Y_0 est définie sur l'axe réel négatif mais de deux manières suivant qu'on considère l'argument π ou l'argument $-\pi$. On a ainsi deux solutions complexes conjuguées qui, d'une certaine manière, sont distinguées dans le fleuve attractif.

2. Equations linéaires du second ordre

Je ne considère que des équations standard, homogènes et à coefficients méromorphes à l'infini.

Toute équation $w'' = aw' + bw$ se ramène, par le changement d'inconnue $w = e^{\varphi} Y$, où $2\varphi' = a$, à la forme :

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = F(X) Y \quad \text{avec} \quad F(X) = \frac{a^2(X)}{4} - \frac{a'(X)}{2} + b(X).$$

Si les coefficients a et b sont méromorphes à l'infini, il en est de même pour la fonction F que je peux écrire :

$$F(X) = X^p f(1/X)$$

où p est un entier relatif standard et f est une fonction standard analytique au voisinage de 0 et non nulle on 0.

Une équation du second ordre non autonome définit, a priori, un champ de vecteurs en dimension 3, mais la linéarité de l'équation fait que sa dérivée logarithmique est solution d'une équation du premier ordre, l'équation de Riccati associée :

$$\text{si } U = \frac{Y'}{Y}, \quad \frac{dU}{dX} = X^p f\left(\frac{1}{X}\right) - U^2.$$

Comme pour l'équation d'Euler, le domaine naturel de la variable indépendante est la surface de Riemann du logarithme.

La non linéarité de l'équation de Riccati nécessite, pour l'étude des solutions à l'infini, d'utiliser non seulement un microscope pour la variable indépendante, mais également un changement d'échelle pour l'inconnue.

Je pose : $x = \varepsilon X$ et $u = \varepsilon^c U$ où ε est un réel strictement positif infiniment petit et c un paramètre réel. La nouvelle inconnue est solution de :

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon^{c-p-1} x^p f\left(\frac{\varepsilon}{x}\right) - \varepsilon^{-c-1} u^2.$$

Si $p \leq -2$, c'est-à-dire si la singularité à l'infini de l'équation linéaire est régulière, aucun choix du paramètre c ne permet d'obtenir un champ lent-rapide à courbe sage régulière.

Si $p > -2$, c'est-à-dire si la singularité est irrégulière, on a pour $c = p/2$:

$$\varepsilon^{1+p/2} \frac{du}{dx} = x^p f\left(\frac{\varepsilon}{x}\right) - u^2$$

Si je note $f_0 = f(0) \neq 0$, le champ lent-rapide défini par cette équation a une courbe sage φ telle que :

$$\varphi(x) \simeq \sqrt{f_0 x^p}$$

le relief R associé cette courbe sage vérifie :

$$R(x) \simeq -\frac{4}{p+2} \operatorname{Re} \sqrt{f_0 x^{p+2}}$$

en prenant soin de choisir la même détermination de la racine carrée pour la courbe sage et le relief qui lui est associé. Si p est pair, il y a deux courbes sages correspondant

aux deux déterminations de la racine; si p est impair, il y a une courbe sage ramifiée. Dans tous les cas, ces courbes sages sont régulières en tout point appréciable.

Le graphe de la fonction $R(x)$ peut se voir comme formé de montagnes et de vallées en éventail autour de l'origine.

Précisément, je dis que la direction θ appartient à une *montagne* si

pour t positif appréciable, $(d/dt) R(e^{i\theta} t) \geq 0$,

la direction θ appartient à une *vallée* si

pour t positif appréciable, $(d/dt) R(e^{i\theta} t) \leq 0$.

En tenant compte des deux branches de la courbe sage, le relief se compose de $p+2$ montagnes et $p+2$ vallées. Chaque montagne et chaque vallée occupe un secteur d'ouverture $2\pi/(p+2)$.

A chacune de ces montagnes correspond une unique solution qui est sage jusqu'à l'infini. La démonstration de ceci est identique à celle que j'ai donnée pour l'équation d'Euler (proposition 5).

Cette solution distinguée correspondant à une montagne est également sage dans les deux vallées adjacentes. Chaque vallée étant adjacente à deux montagnes, il y a, en général, deux solutions distinguées pour une vallée. La situation de confluence de ces deux solutions fera l'objet d'un autre article. C'est cette confluence qui constitue véritablement le phénomène canard pour les champs complexes.

Le développement asymptotique des solutions distinguées se calcule par application de loupes successives autour de la courbe sage comme dans la démonstration de la proposition 6. Ce développement est valable dans tout sous-secteur strict d'un secteur d'ouverture $6\pi/(p+2)$. On peut revenir, par une quadrature, à l'équation linéaire et obtenir ainsi des développements asymptotiques de solutions particulières.

Plutôt que de tenter une étude systématique des singularités irrégulières, je vais montrer comment la technique esquissée ici s'applique aux équations de Bessel et d'Airy.

3. L'équation de Bessel : $X^2 Y'' + XY' + (X^2 - \nu^2) Y = 0$

Pour appliquer la technique du paragraphe précédent, je commence par faire le changement d'inconnue qui fait disparaître la dérivée première, en posant :

$$Y = X^{-1/2} W \quad \text{d'où} \quad W'' = \frac{\nu^2 - 1/4 - X^2}{X^2} W.$$

L'équation de Riccati associée est, si $U = W'/W$:

$$U' = \frac{\nu^2 - 1/4 - X^2}{X^2} - U^2.$$

Je suis ici dans le cas $p=0$ du paragraphe précédent et le microscope à utiliser est :

$$x = \varepsilon X, \quad u = U$$

d'où :

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = -1 - u^2 + \varepsilon^2 \frac{v^2 - 1/4}{x^2}$$

Le champ lent-rapide défini par cette équation a deux courbes sages standard :

$$\varphi_1(x) = i \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = -i \quad \text{pour } x \text{ appréciable.}$$

Les reliefs correspondants sont :

$$R_1(x) = \text{Im}(2x) \quad \text{et} \quad R_2(x) = -\text{Im}(2x).$$

Il y a deux solutions distinguées qui satisfont pour x appréciable :

$$\begin{aligned} u_1(x) &= i + \varepsilon \mathcal{L}, & -\pi \ll \arg x \ll 2\pi \\ u_2(x) &= -i + \varepsilon \mathcal{L}, & -2\pi \ll \arg x \ll \pi \end{aligned}$$

Une loupe autour de la courbe sage permet de préciser l'approximation. Je pose $u_1(x) = i + \varepsilon v_1(x)$. La fonction v_1 est une solution limitée de l'équation :

$$\varepsilon \frac{dv}{dx} = -2iv + \varepsilon \frac{v^2 - 1/4}{x^2} - \varepsilon v^2$$

Le champ lent-rapide défini par cette équation a $v=0$ comme courbe sage, à laquelle est associé le relief $R(x) = \text{Im}(2x)$. La fonction $v_1(x)$ qui est une solution sage, est donc infiniment petite d'ordre ε pour x appréciable dans le secteur $-\pi \ll \arg x \ll 2\pi$, et

$$u_1(x) = i + \varepsilon^2 \mathcal{L} \quad -\pi \ll \arg x \ll 2\pi.$$

On a de même :

$$u_2(x) = -i + \varepsilon^2 \mathcal{L}, \quad -2\pi \ll \arg x \ll \pi.$$

En revenant à l'équation linéaire et à l'échelle initiale, j'obtiens deux solutions particulières caractérisées par leur comportement asymptotique :

$$\begin{aligned} W_1(X) &= e^{iX} (1 + O(1/X)), & -\pi < \arg X < 2\pi \\ W_2(X) &= e^{-iX} (1 + O(1/X)), & -2\pi < \arg X < \pi \end{aligned}$$

Il leur correspond, dans les mêmes secteurs, pour l'équation de Bessel, des multiples des fonctions de Hankel :

$$\begin{aligned} Y_1(X) &= X^{-1/2} e^{iX} (1 + O(1/X)), & -\pi < \arg X < 2\pi \\ Y_2(X) &= X^{-1/2} e^{-iX} (1 + O(1/X)), & -2\pi < \arg X < \pi. \end{aligned}$$

Lorsque le paramètre ν est réel, on doit avoir $Y_2(X) = \bar{Y}_1(\bar{X})$ puisque le comportement asymptotique de Y_2 détermine une unique solution.

La singularité à l'origine de l'équation de Bessel est régulière. Aucune solution distinguée ne lui est attachée. Mais par substitution dans l'équation, on voit facilement qu'il existe une solution de la forme :

$$Y_3(X) = X^\nu r(X^2)$$

où r est une fonction entière réelle si ν est réel et positif ou nul. Une telle solution est proportionnelle à la fonction de Bessel de première espèce J_ν .

Pour obtenir une estimation asymptotique de Y_3 à l'infini, pour ν réel positif, il suffit de remarquer que Y_3 est combinaison linéaire de Y_1 et Y_2 . Comme, sur l'axe réel positif, Y_3 est réelle et Y_1 et Y_2 sont conjuguées :

$$Y_3(X) = \lambda Y_1(X) + \bar{\lambda} Y_2(X).$$

La solution Y_3 n'étant fixée qu'à un facteur réel près, je peux poser :

$$\lambda = e^{i\theta} \quad \text{où } \theta \text{ est une fonction réelle et standard de } \nu.$$

Pour déterminer cet argument θ , il suffit d'observer les solutions sur l'axe imaginaire pure. Soit ε un réel strictement positif infiniment petit. Si t est un réel positif appréciable :

$$Y_3(it/\varepsilon) = (it/\varepsilon)^\nu r((it/\varepsilon)^2) = e^{i\nu\pi/2} \rho(t), \quad \rho \text{ fonction réelle,}$$

et

$$\begin{aligned} Y_3(it/\varepsilon) &= e^{i\theta} Y_1(it/\varepsilon) + e^{-i\theta} Y_2(it/\varepsilon) \\ &= e^{i\theta} e^{-i\pi/4} t^{-1/2} \exp(-t/\varepsilon + \varepsilon \xi) + e^{-i\theta} e^{-i\pi/4} t^{-1/2} \exp(t/\varepsilon + \varepsilon \xi) \\ &= e^{-i(\theta + \pi/4 + \varepsilon \xi)} \sigma(t) \end{aligned}$$

où $\sigma(t)$ est une fonction réelle. De la comparaison de ces deux expressions et du fait que θ est une fonction standard de ν , il découle que :

$$\theta = -\frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

J'en déduis, au moyen des estimations asymptotiques de Y_1 et Y_2 , le comportement de Y_3 dans le secteur $-\pi < \arg X < \pi$. C'est-à-dire, à une constante multiplicative réelle près, le comportement de la fonction de Bessel de première espèce J_ν :

$$Y_3(X) = X^{-1/2} [e^{i(X+\theta)+O(1/X)} + e^{-i(X+\theta)+O(1/X)}]$$

pour $-\pi < \arg X < \pi$.

En particulier, sur l'axe réel positif :

$$Y_3(T) = T^{-1/2} \cos\left(T - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + O(1/T)\right) (1 + O(1/T)), \quad T > 0.$$

4. L'équation d'Airy : $Y''' = XY$

Cette équation linéaire n'a pas de singularité en dehors de l'infini. Ses solutions sont des fonctions entières de la variable X . Les solutions de l'équation de Riccati associée :

$$\frac{dU}{dX} = X - U^2$$

sont méromorphes dans le plan tout entier et ont pour seules singularités des pôles simples.

On est ici dans le cas $p=1$ du paragraphe 2. Le microscope à utiliser est :

$$x = \varepsilon X, \quad u = \varepsilon^{1/2} U$$

d'où :

$$\varepsilon^{3/2} \frac{du}{dx} = x - u^2.$$

On peut aussi appliquer directement le microscope à l'équation linéaire en posant :

$$x = \varepsilon X \quad \text{et} \quad y(x) = Y(x/\varepsilon)$$

d'où :

$$\varepsilon^3 \frac{d^2 y}{dx^2} = xy.$$

(ceci montre que l'équation est invariante par rotation de $2\pi/3$) et on retrouve l'équation de Riccati macroscopée pour $u = \varepsilon^{3/2} (dy/ydx)$.

Cette équation définit un champ de vecteurs lent-rapide ayant une courbe sage standard :

$$\varphi(x) = x^{1/2} \quad \text{pour } x \text{ appréciable}$$

à laquelle est associée le relief

$$R(x) = \operatorname{Re} \left(-\frac{4}{3} x^{3/2} \right).$$

La détermination de la racine carrée doit être la même pour les deux fonctions.

Étant dans le cas $p=1$, il y a trois solutions distinguées qui pour x appréciable ont les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= -\sqrt{x + \varepsilon^{3/2} \mathfrak{L}}, & -\pi \ll \arg x \ll \pi \\ u_1(x) &= \sqrt{x + \varepsilon^{3/2} \mathfrak{L}}, & -5\pi/3 \ll \arg x \ll \pi/3 \\ u_2(x) &= \sqrt{x + \varepsilon^{3/2} \mathfrak{L}}, & -\pi/3 \ll \arg x \ll 5\pi/3 \end{aligned}$$

où \sqrt{x} est la détermination principale de la racine carrée.

La fonction u_0 qui est méromorphe dans le plan tout entier, ne peut pas être S-continue pour $\arg x = \pi$. Elle n'est donc pas limitée au voisinage de cette demi-droite et doit comporter des pôles infiniment voisins dans ce voisinage. Il en est de même pour les fonctions u_1 et u_2 le long des demi-droites $\arg x = \pi/3$ et $\arg x = -\pi/3$.

Les trois solutions distinguées sont bien distinctes, mais :

$u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont exponentiellement voisines pour $\pi/3 \ll \arg x \ll \pi$

$u_0(x)$ et $u_2(x)$ sont exponentiellement voisines pour $-\pi \ll \arg x \ll -\pi/3$.

Je peux améliorer l'approximation de u_0 en posant :

$$u_0(x) = -\sqrt{x} + \varepsilon^{3/2} v_0(x)$$

où v_0 est une solution limitée pour x appréciable et $-\pi \ll \arg x \ll \pi$ de :

$$\varepsilon^{3/2} v' = 2\sqrt{x} v + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \varepsilon^{3/2} v^2.$$

Il en résulte que

$$v_0(x) = -1/4 x + \varepsilon^{3/2} \mathcal{L} \quad \text{et} \quad u_0(x) = -\sqrt{x} - \varepsilon^{3/2}/4 x + \varepsilon^3 \mathcal{L}.$$

J'en déduis par quadrature une solution de l'équation linéaire macroscopée :

$$y_0(x) = \exp\left(\varepsilon^{-3/2} \int u_0\right) = x^{-1/4} \exp\left(-2/3 (x/\varepsilon)^{3/2} + (x/\varepsilon)^{-3/2} \mathcal{L}\right)$$

pour x appréciable et $-\pi \ll \arg x \ll \pi$

et pour l'équation initiale :

$$Y_0(X) = X^{-1/4} \exp\left[-2/3 X^{3/2} + O(X^{-3/2})\right] \quad -\pi < \arg X < \pi.$$

Cette solution est un multiple de la fonction d'Airy.

De la même manière, on obtient des estimations de solutions particulières de l'équation linéaire à partir des deux autres solutions distinguées de l'équation de Riccati. Ces solutions particulières s'obtiennent également au moyen de l'invariance par rotation de $2\pi/3$ de l'équation :

$$Y_1(X) = Y_0(e^{2i\pi/3} X) \quad \text{et} \quad Y_2(X) = Y_0(e^{-2i\pi/3} X).$$

On a ainsi trois solutions d'une équation linéaire du second ordre. Elles sont liées par une relation linéaire qui se détermine facilement en la considérant à l'origine ainsi que sa dérivée :

$$Y_0(X) + e^{2i\pi/3} Y_0(X) + e^{-2i\pi/3} Y_0(X) = 0.$$

Ceci permet de donner une estimation asymptotique de la solution Y_0 dans le secteur $\pi/3 < \arg X < 5\pi/3$:

$$Y_0(X) = 2(-X)^{-1/4} \sin(2/3(-X)^{3/2} + \pi/4 + O(X^{-3/2}))(1 + O(X^{-3/2})).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. BENOÎT, *Équation de van der Pol avec terme forçant* (Thèse de troisième cycle, Paris, 1979).
- [2] E. BENOÎT, J.-L. CALLOT, F. DIENER et M. DIENER, *Chasse au canard (Collectanea Mathematica, Barcelone, 31, 1981, p. 37-119).*
- [3] I. P. VAN DEN BERG, *Non standard asymptotic analysis*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.
- [4] B. CANDELPERGHER, F. DIENER et M. DIENER, Retard à la bifurcation : du local au global, in *Bifurcations of planar vector fields*, J. P. FRANÇOISE et R. ROUSSOIR éd., Springer, 1990, p. 1-19.
- [5] F. DIENER et G. REEB, *Analyse non standard*, Hermann, Paris, 1989.
- [6] M. DIENER et G. REEB, Champs polynomiaux : nouvelles trajectoires remarquables (*Bull. Soc. Math. Belgique*, **38**, 1987, p. 131-150).
- [7] C. LOBRY et G. WALLET, La traversée de l'axe imaginaire n'a pas toujours lieu là où l'on croit l'observer, in *Mathématiques finitaires et analyse non standard*, M. DIENER et G. WALLET éd. (*Publications Mathématiques de l'Université Paris-VII*, **1**, 31, 1989, p. 45-51).
- [8] R. LUTZ et M. GOZE, *Non standard analysis: a practical guide with applications*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.
- [9] E. NELSON, *Internal Set Theory (Bull. Amer. Math. Soc.*, **83**, 6, 1977, p. 1165-1198).
- [10] A. I. NEISHTADT, *Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, 1 (Differentsial'nye Uravneniya (Differential Equations)*, **23**, (12), 1987, (88), p. 2060-2067 (1385-1390)).
- [11] A. I. NEISHTADT, *Persistence of stability loss for dynamical bifurcations, 2 (Differentsial'nye Uravneniya (Differential Equations)*, **24** (12), 1988, (88), p. 226-233 (171-176)).
- [12] A. ROBINSON, *Non standard analysis*, North Holland, 1974.
- [13] M. A. SHISHKOVA, *Examination of a system of differential equations with a small parameter in the highest derivatives (Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **209**, 3, 1973, p. 576-579).

(Manuscrit reçu le 7 octobre 1991;
révisé le 9 janvier 1992).

J.-L. CALLOT,
Université de Haute Alsace,
laboratoire de Mathématiques,
4, rue des Frères-Lumière,
F-68093 Mulhouse Cedex,
France.