ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

F. CAMPANA

Compactifications kähleriennes de voisinages ouverts de cycles géométriquement positifs

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 23, nº 4 (1990), p. 521-542
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1990_4_23_4_521_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 23, 1990, p. 521 à 542.

COMPACTIFICATIONS KÄHLERIENNES DE VOISINAGES OUVERTS DE CYCLES GÉOMÉTRIQUEMENT POSITIFS

PAR F. CAMPANA

0. Introduction

Soit Z un espace analytique complexe compact irréductible et réduit, soit A un sous-ensemble analytique fermé de Z, et U un voisinage ouvert de A dans Z.

On montre ici (th. 3.1) que les compactifications analytiques Z′ de U qui sont dans la classe C de Fujiki (c. à. d.: biméromorphes à une variété Kählerienne compacte) sont toutes dominées par l'une d'entre elles lorsque A est « géométriquement positif » (Def. 2.1) dans U, dans un sens voisin de celui de Steinlifβ ([St]). Plus précisément ceci signifie que A contient un cycle analytique compact Y_0 admettant dans U une famille analytique de déformations $(Y_s)_{s \in S}$, $0 \in S$ irréductible, telle que :

1) pour s générique dans S, Y_s est irréductible et rencontre A.

2) la réunion des Y_s, $s \in S$, est d'intérieur non vide dans U.

Il résulte de [St] que le résultat précédent reste valable lorsque seul un voisinage formel de A dans Z est connu, pourvu que la condition de positivité géométrique faible qui y est introduite, et qui est un peu plus forte que la condition de connexité, soit satisfaite. La démarche pour passer ici du local au global est analogue à celle employée dans [Hz] et [St] pour passer du formel au local.

Sous cette dernière forme, des résultats analogues ont été obtenus en géométrie algébrique dans [Hi], [H-M] et [Ha], lorsque les compactifications considérées sont projectives lisses au voisinage de A, intersection complète locale avec un fibré normal ample. Les démonstrations qui en sont données sont cependant algébriques. La méthode utilisée ici est géométrique, et fournit de manière plus explicite une compactification dominante dans les cas considérés.

Cette méthode de construction permet de montrer (Prop. 4.4) que, lorsque A et Z sont lisses, et U analytiquement isomorphe a un voisinage de la section nulle de $N_{Z|A}$, fibré normal à A dans Z, la compactification dominante est alors $\mathbb{P}(N_{Z|A} \oplus 1_A)$, la compactification projective sur A de $N_{Z|A}$, ceci lorsque $N_{Z|A}$ est suffisamment positif. Il en résulte (corollaire 4.5) que Z est unirationnel exactement lorsque A l'est.

On applique ensuite ce résultat au problème ayant originellement motivé ce travail, et abordé dans [Kh] pour n pair et supérieur à 4 : la détermination des variétés $M=(M^{2n}, g, +)$ riemanniennes compactes connexes orientées conformément plates de dimension paire $2n$ dont l'espace des twisteurs $Z(M)$ (*voir* § 5 pour plus de détails) est dans la classe C : il n'y en a pas d'autres, à équivalence conforme près, que les sphères S^{2n}, munies de leurs métriques canoniques (Th. 5.2). Le lien entre les deux thèmes réside dans l'observation que les fibres twistorielles de $Z(M)$, qui sont des variétés rationnelles, ont des voisinages tubulaires (définition 2.6) dans lesquels elles sont quasi-amples (Prop. 5.1.3), d'où l'on déduit à l'aide de 4.5 que $Z(M)$ est une variété unirationnelle si $Z(M)$ est dans la classe C.

Remarquons que la classification des M pour lesquelles $Z(M)$ est une variété kählérienne compacte avait été obtenue dans [H1], [F-K], [S] et [P.d.B-A.N-L.M] par des méthodes de géométrie différentielle.

Ceci montre que le phénomène mis en évidence par Y. S. Poon dans [P] : l'existence d'espaces de twisteurs Moishezon mais non projectifs ne se produit pas dans le cas conformément plat.

Le résultat précédent, utilisé conjointement avec d'autres, dus à J. P. Bourguignon et N. J. Hitchin, permet par ailleurs d'établir le résultat de géométrie riemannienne suivant : si $M=(M^4, g, +)$ est conformément plate, à courbure scalaire strictement positive et b_1 nul, alors M est conformément équivalente à S^4 munie de sa métrique canonique.

1. Équivalence d'inclusions

1.1. Notations, conventions. — Les espaces analytiques considérés ici sont réduits. Si Z est un espace analytique et d un entier, on note $C_d(Z)$ l'espace analytique réduit des cycles analytiques compacts de dimension pure d de Z construit dans [Ba].

Si A est un sous-ensemble analytique fermé de Z, on note $C_d(Z)_A$ le sous-ensemble analytique fermé de $C_d(Z)$ constitué des cycles dont le support rencontre A.

Soit S un sous-ensemble analytique localement fermé de $C_d(Z)$ et U un ouvert de Z; on note $S(U)$ l'ouvert de S constitué des s de S dont le cycle de Z naturellement associé a son support contenu dans U.

On note G_S le graphe de la famille universelle $(Y_s)_{s\in S}$ (dite aussi pour abréger : « famille S ») de cycles de Z paramétrée par S : c'est un cycle analytique fermé et S-propre de $S\times Z$; on note $p_S: G_S\to S$ et $q_S: G_S\to Z$ les restrictions des projections naturelles.

Le support du cycle Y_s sera noté $|Y_s|$, on notera $\{Y_s\}$ le point correspondant de $C_d(Z)$.

Si $f: Z\to Z'$ est un morphisme d'espaces analytiques, on notera $f_*: C(Z)\to C(Z')$ l'application d'image directe de cycles par f; elle est analytique aux points en lesquels $C(Z)$ est localement irréductible.

1.2. Définition. — On appellera inclusion analytique $I=(A, Z)$, ou plus simplement inclusion la donnée d'un triplet $I=(A, Z)$ constitué d'un couple d'espaces analytiques compacts et réduits A et Z, avec Z irréductible et A un sous-espace de Z, tel qu'aucune composante irréductible de A ne soit contenue dans le lieu singulier de Z.

1.3. DÉFINITION. — Une équivalence locale $E=(U, U', f)$ entre deux inclusions $I=(A, Z)$ et $I'=(A', Z')$ est un isomorphisme analytique $f: U \to U'$ entre des voisinages ouverts U de A dans Z et U' de A' dans Z' envoyant A sur A'.

1.4. DÉFINITION. — De manière analogue une équivalence globale entre deux inclusions I et I' est une équivalence locale admettant un prolongement biméromorphe nécessairement unique $F: Z \to Z'$.

On dira que I et I' sont localement (resp. globalement) équivalentes si elles admettent une équivalence locale (resp. globale).

1.5. DÉFINITION. — On dira que $I=(A, Z)$ domine $I'=(A', Z')$ s'il existe une application de domination entre I et I', c. à. d. : une application méromorphe $F: Z \to Z'$ (nécessairement surjective et génériquement finie) dont la restriction à U est une équivalence locale $f: U \to U'$ entre I et I'.

1.6. DÉFINITION. — Soit $\mathscr{E}$ une classe d'espaces analytiques compacts. On dira que $I=(A, Z)$ est une $\mathscr{E}$-inclusion si Z est dans $\mathscr{E}$. On dira alors que I est $\mathscr{E}$-dominante (ou dominante parmi les $\mathscr{E}$-inclusions) si I est une $\mathscr{E}$-inclusion qui domine toutes les $\mathscr{E}$-inclusions qui lui sont localement équivalentes.

1.7. REMARQUES. — La relation de domination passe au quotient, et définit une relation de préordre partiel sur l'ensemble $\mathscr{E}(I)$ des classes d'équivalence globale de $\mathscr{E}$-inclusions localement équivalentes à I.

Cette relation de préordre n'est pas en général une relation d'ordre. Cependant, dans les situations considérées ici, c'est une relation d'ordre (*voir* remarque 3.3).

L'inclusion I est donc $\mathscr{E}$-dominante si $\mathscr{E}(I)$ admet un élément maximum, qui est la classe d'équivalence globale de I.

Si $I=(A, Z)$ domine $I'=(A', Z')$, Z et Z' ont même dimension algébrique; de plus : Z est dans C si et seulement si Z' est dans $\mathscr{T}$.

Rappelons ([F]) que Z est dans C s'il existe une application méromorphe surjective $\beta: V \to Z$ dans laquelle V est une variété kählérienne compacte.

1.8. DÉFINITION. — Soit $I=(A, Z)$ une inclusion, et S un sous-ensemble analytique fermé irréductible de $C_d(Z)_A$. Nous dirons que S est adaptée à I si :

(i) il existe s' dans S tel que le support du cycle $Y_{s'}$ est contenu dans A.

(ii) il existe une composante irréductible A^0 de A telle que pour s générique dans S, Y_s est irréductible et réduit, $(Y_S \cap A^0)$ est de dimension pure, et chaque composante irréductible de $(Y_S \cap A^0)$ contient un point a en lequel Y_S et Z sont lisses.

Une donnée d'extension est un triplet $J=(A, Z, S)$ constitué d'une inclusion $I=(A, Z)$ et de S adapté à I.

1.9. DÉFINITION. — Une équivalence locale E entre deux données d'extension $J=(A, Z, S)$ et $J'=(A', Z', S')$ est une équivalence locale $E=(U, U', f)$ entre $I=(A, Z)$

et $I' = (A', Z')$ telle que $f_*(S^0(U))$ est contenu dans $S'(U')$, où $S^0(U)$ est une composante irréductible de $S(U)$ contenant un point s' tel que le support du cycle $Y_{S'}$ est contenu dans A. On notera alors par abus de notation : $f_*(S) = S'$.

1.10. Définition. — Une équivalence globale entre J et J′ est une équivalence locale admettant un prolongement biméromorphe nécessairement unique $F : Z \to Z'$.

1.11. Définition. — On dira que J domine J′ s'il existe une équivalence locale entre J et J′ qui est la restriction d'une application méromorphe $F : Z \to Z'$ (nécessairement surjective et génériquement finie).

1.12. Définition. — La donnée d'extension $J = (A, Z, S)$ est dite une C-donnée d'extension (resp. est dite compactifiable) si Z est dans C (resp. si S est compact). On notera $C(J)$ (resp. $C^*(J)$) la classe des C-donnés d'extension (resp. des données d'extension compactifiables) qui sont localement équivalentes à J.

2. Inclusions connexes

On désigne dans le § 2 par $I = (A, Z)$ une inclusion analytique.

2.1. Définition. — L'inclusion $I = (A, Z)$ est dite connexe s'il existe une donnée d'extension $J = (A, Z, S)$ qui est connexe, c. à. d. telle que $p_{S(U)}(G_{S(U)})$ contienne un ouvert non vide V de Z (ou encore par tout point v de V passe au moins un cycle de la famille $S(U)$).

Soit $\{Y\}$ un élément de $C(Z)$ de support contenu dans A. On dira que l'inclusion $I = (A, Z)$ est Y-connexe s'il existe une donnée d'extension connexe $J = (A, Z, S)$ telle que $\{Y\}$ appartienne à S. Remarquer que le support du cycle Y est connexe.

2.2. Remarque. — S'il existe un voisinage ouvert irréductible U de A dans Z et une application analytique non constante $f : U \to V$ envoyant A sur un ensemble fini, l'inclusion I n'est pas connexe.

2.3. Remarque. — Les inclusions connexes sont stables par images directes et images réciproques. Plus précisément, soit $f : Z \to Z'$ une application analytique surjective entre espaces compacts et irréductibles.

Si $I = (A, Z)$ est connexe, l'inclusion $f(I) := (f(A), Z')$ l'est aussi.

Si les fibres génériques de f sont irréductibles et si l'inclusion $I' = (A', Z')$ est connexe, l'inclusion $f^*(I') := (f^{-1}(A'), Z)$ l'est aussi. Si de plus I′ est compactifiable, $f^*(I')$ l'est aussi.

2.4. Exemple. — Si A est un diviseur connexe de Z tel qu'existe un entier positif m pour lequel $\dim_{\mathbb{C}}(|m.A|)$ est non nul, le membre générique du système linéaire $|m.A|$ étant irréductible et rencontrant A, alors l'inclusion $I = (A, Z)$ est compactifiable et connexe.

Les conditions précédentes sont satisfaites en particulier lorsque A est lisse et $N_Z A$ numériquement effectif et de dimension de Kodaira-Iitaka $n := \dim_{\mathbb{C}}(Z)$, auquel cas I est

m. A-connexe pour m assez grand; la donnée d'extension $J := (A, Z, \mathbb{P}(H^0(Z, \mathcal{O}_Z(m.A))^*)$ est alors compactifiable et quasi-ample (2.7).

2.5. PROPOSITION. — Soit $I = (A, \mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$ une inclusion avec A irréductible. Alors I est connexe.

Démonstration. — Soit $Z := \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, $G := \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(Z)$, et $a : G \times Z \times Z \to Z \times Z \times Z \times Z$ l'application définie par : $a(g, b, c) = (g.b, b, g.c, c)$. Son image contient l'ouvert de Zariski constitué des quadruplets (d, b, e, c) tels que b (resp. d) soit distinct de c (resp. e). En particulier, si z est générique dans Z l'image réciproque par a de $(A \times A \times \{z\} \times A)$ est non vide et il existe donc g dans G tel que g.A rencontre A et passe par z.

2.6. DÉFINITION. — La donnée d'extension $J = (A, Z, S)$ est dite quasi-ample si :

(i) il existe, pour tout voisinage U de A dans Z, des voisinages ouverts $U_1 \subset U_2$ de A dans Z, contenus dans U et tels que, pour (z, z') générique dans $U_1 \times U_2$, il existe $s \in S(U_2)$ tel que le cycle Y_s passe par z et pas par z'. (Il suffit de vérifier la condition précédente dans un ouvert assez petit).

(ii) $S(U)_z$ est irréductible, pour z générique dans U.

2.7. DÉFINITION. — Soit $I = (A, Z)$ une inclusion connexe. On dira que l'inclusion I est quasi-ample (resp. compactifiable) s'il existe une donnée d'extension quasi-ample (resp. compactifiable) $J = (A, Z, S)$. On dira que I est quasi-ample et compactifiable s'il existe $J = (A, Z, S)$ quasi-ample et compactifiable.

Si I est une inclusion connexe, on notera C(I) (resp. C* (I)) la classe des C-inclusions (resp. des inclusions compactifiables) qui sont localement équivalentes à I. Par abus de notation, on notera de la même façon leur quotient par la relation d'équivalence induite par l'équivalence globale.

2.8. EXEMPLE. — Soit A une courbe rationnelle lisse et connexe de Z contenue dans le lieu de lissité de Z. Supposons que le fibré normal $N_Z A$ de A dans Z soit ample sur A. Alors : $I = (A, Z)$ est quasi-ample. Plus précisément : la donnée d'extension $J = (A, S, Z)$ est quasi-ample, où S est la composante irréductible de $C_1(Z)_A$ contenant le point $\{A\}$ correspondant au cycle réduit A.

Les assertions précédentes résultent toutes de [Ko], puisque $H^1(A, N_Z A) = 0$.

2.9. REMARQUE. — Les propriétés de connexité et de quasi-amplitude sont stables par équivalence locale.

2.10. REMARQUES. — Rappelons (*voir* [C 1], corollaire 3, p. 9) que si Z est dans C, toute composante irréductible de C(Z) est dans C, et en particulier compacte. Toute donnée d'extension $J = (A, Z, S)$ est donc compactifiable. Si, de plus, J est connexe, alors $q_S : G_S \to Z$ est surjective, puisque S et donc G_S sont compacts. Autrement dit : les cycles de la famille S recouvrent Z et rencontrent A. D'où le terme de connexité employé.

2.11. REMARQUES. — Si A est un diviseur ample de dimension strictement positive de Z, alors l'inclusion $I = (A, Z)$ est quasi-ample, d'après les théorèmes de Bertini. (On prend pour S la famille des diviseurs de Z linéairement équivalents à $(n.A)$, où n est un entier assez grand).

Si l'inclusion (A, Z) est connexe, A Moishezon, et Z dans C, alors Z est Moishezon (c. à. d. : biméromorphe à une variété projective). Ceci résulte du théorème 3, p. 206, de [C2].

Lorsque $d=1$, on peut obtenir la conclusion précédente sans supposer Z dans C : il suffit que $J=(A, Z, S)$ soit compactifiable. On le voit en appliquant la remarque 1, p. 208 suivant le corollaire du théorème 3, p. 206 de [C2].

2.12. Remarque. — Lorsque l'inclusion $I=(A, Z)$ est quasi-ample et compactifiable, les projections $p_S: G_S \to S$ et $q_S: G_S \to Z$ sont des morphismes de Moishezon (c. à. d. : biméromorphes à des morphismes projectifs).

En effet, quitte à remplacer Z par la factorisation de Stein de q_S, après normalisation de G_S, la condition 1.12.(ii) n'est pas changée et les deux applications « fibres » (*voir* [C3], p. 378, ligne 25 pour cette notion) $P: S \to C(Z)$ et $Q: Z \to C(S)$ de p_S et q_S respectivement sont génériquement injectives. Comme, d'autre part, p_S et q_S sont à fibres génériques irréductibles, le théorème, p. 8, de [C1] fournit la conclusion. En particulier, les fibres de p_S sont Moishezon, c. à. d. que les cycles de la famille S sont Moishezon. Si, d'autre part, A est Moishezon, on en déduit que Z est Moishezon.

2.13. Définition. — Soit $I=(A, Z)$ une inclusion avec A lisse et connexe et ne rencontrant pas le lieu singulier de Z. On dira que I est lisse.

On définit alors comme suit l'inclusion tangente $I^N := (A^*, N_Z A^*)$ associée à I, où A^* est la section nulle de $N_Z A$, et $N_Z A^*$ est la compactification projective naturelle $\mathbb{P}(1_A \oplus N_Z A)$ de $N_Z A$. On notera $N: N_Z A^* \to A$ la projection naturelle.

2.14. Définition. — On dit que I est tubulaire (resp. tubulaire-connexe) si elle est localement équivalente à I^N (resp. si I est tubulaire et A-connexe). (On remarquera que cette dernière propriété n'est pas simplement la conjonction des propriétés de connexité et de tubularité.)

2.15. Proposition. — Soit $I=(A, Z)$ une inclusion lisse telle que $H^1(A, N_Z A)=0$. Pour que I soit A-connexe, il faut et il suffit que I^N soit A^*-connexe.

Démonstration. — Ceci résulte, comme 2.8 qui en est un cas particulier, de [Ko].

2.16. Proposition. — Soit $I=(A, Z)$ une inclusion lisse, I^N l'inclusion tangente associée. On note $H^{00}(A, N_Z A)$ le cône de $H^0(A, N_Z A)$ constitué des sections de $N_Z A$ s'annulant en au moins un point de Z.

(i) Pour qye I^N soit A^*-connexe, il faut et il suffit que pour n générique dans $N_Z A$ il existe s dans $H^{00}(A, N_Z A)$ dont l'image passe par n.

(ii) Si I^N est A^*-connexe, il existe une application biméromorphe de $(N_Z A^*)$ sur $(A \times \mathbb{P}_r(\mathbb{C}))$, où r est le rang de $N_Z A$, c. à. d. la codimension de A dans Z.

Démonstration. — La première assertion est immédiate, si l'on identifie $H^0(A, N_Z A)$ à un sous-ensemble ouvert et fermé de $C(N_Z A)$ en associant à toute section son image réduite.

Démontrons la seconde assertion : les applications analytiques naturelles au-dessus de A qui définissent l'addition et la multiplication scalaire dans les fibres de $(N_Z A)$ admettent des prolongements méromorphes à $(N_Z A^*)$. Il en résulte que pour tout sous-espace vectoriel V de $H^0(A, N_Z A)$ son image dans $C(N_Z A)$ a pour adhérence dans $C(N_Z A^*)$ un sous-ensemble analytique rationnel V^*, biméromorphe à $\mathbb{P}_r(\mathbb{C})$, dans lequel V est Zariski-ouvert.

Puisque I^N est A^*-connexe, il existe un sous-espace vectoriel V de $H^0(A, N_Z A)$, de dimension r, et naturellement isomorphe à la fibre générique de N par l'application d'évaluation naturelle.

La conclusion résulte alors de ce que la projection naturelle sur $(N_Z A^*)$ du graphe de la famille V^* est une modification, et de ce que l'application naturelle d'évaluation de $V \times A$ dans $N_Z A$ se prolonge de manière méromorphe à $(V^* \times A)$, prenant ses valeurs dans $(N_Z A^*)$, et fournissant d'autre part une application biméromorphe de $(V^* \times A)$ sur le graphe de la famille V^*.

2.17. Question. — Si $I=(C, Z)$ est l'inclusion d'une courbe lisse connexe et compacte C dans une variété compacte Z, et si $N_Z C$ est ample, l'inclusion $I=(C, Z)$ est-elle connexe? Autrement dit, la courbe $m.C$ admet-elle des déformations irréductibles et réduites dans toutes les directions pour une multiplicité m suffisamment grande sur C?

Une réponse positive à cette question montrerait que :

(i) si Z appartient, de plus, à la classe C de Fujiki, alors Z est de Moishezon.

(ii) la conclusion de 3.1 ci-dessous est satisfaite par toute inclusion lisse $I=(Y, Z)$ dans laquelle $N_Z Y$ est ample, et Z dans C. De plus, Z est alors Moishezon.

2.18. Remarque. — Lorsque l'inclusion $I:=(C, Z)$ est tubulaire et comme en 2.17 ci-dessus, il résulte de [C-F] que la question 2.17 a une réponse positive.

3. Existence d'inclusions dominantes

3.1. Théorème. — Soit $I=(A, Z)$ une C-inclusion connexe. Il existe une C-inclusion connexe $I^+=(A^+, Z^+)$ localement équivalente à I et C-dominante.

3.1.2. Question. — Il serait intéressant de savoir si la conclusion précédente peut être obtenue en supposant seulement qu'il existe une donnée d'extension $J=(A, Z, S)$ telle que S soit génératrice de Z (définition de [C2], p. 109). Un exemple est fourni par une inclusion $I=(A, Z)$ dans laquelle A est irréductible et engendre le tore complexe Z.

3.2. Théorème. — Soit $I=(A, Z)$ une inclusion quasi-ample et compactifiable. Il existe une inclusion $I^+=(A^+, Z^+)$ quasi-ample et compactifiable, localement équivalente à I et dominant toutes les inclusions quasi-amples et compactifiables localement équivalentes à I.

3.2.2. Remarque. — Dans les deux cas 3.1 et 3.2 précédents, on a la condition suffisante de dominance suivante : pour que I soit dominante, c. à. d. globalement équivalente à I^+, il suffit qu'il existe une donnée d'extension $J=(A, Z, S)$ telle que tout a générique dans A^0 admette une base fondamentale de voisinages ouverts V dans Z tels que $(q_S^{-1})(V)$ soit irréductible. Cette condition est satisfaite en particulier lorsque : Z est localement irréductible en a et lorsque $S_z := q_S^{-1}(z)$ est irréductible, pour z générique dans Z.

3.3. REMARQUE. — On peut encore formuler ces résultats comme suit : C(I) (resp. C* (I)) admet un élément maximum si I est connexe (resp. quasi-ample et compactifiable). Dans ces deux cas, la relation de préordre sur C(I) et C* (I) respectivement est alors une relation d'ordre. En effet, utilisant 6.6 ci-dessous, on voit que si F (resp. G) est une application de domination entre $I=(A, Z)$ et $I'=(A', Z')$ (resp. I' et I), alors $G \circ F$ est une application de domination entre I et elle-même qui est une équivalence globale si les deux F et G sont des équivalences globales. Si ce n'est pas le cas, on obtient alors une contradiction avec le fait que le degré de l'application r_S définie en 6.3 ne dépend que de la donnée d'extension connexe $J=(A, Z, S)$, et que d'autre part, ce nombre doit être égal aux produits : $r.d$ et $r.d'$, où r est le degré de l'application r_{S^+} définie en 6.6 et d (resp. d') est le degré de la relation de domination F^+ entre $I^+=(A^+, Z^+)$ et I (resp. est le degré de $(G \circ F \circ F^+)$).

Lorsque I est seulement connexe, il résulte du corollaire 6.6 que tout élément de C* (I) est dominé par un élément maximal de C* (I). Néanmoins l'ensemble des éléments maximaux de C* (I) peut n'être pas dénombrable (*voir* l'exemple 3.5 ci-dessous).

Lorsque I est quasi-ample, la classe des inclusions localement équivalentes à I peut n'être pas inductif. En particulier, un élément de cette classe peut ne pas être dominé par un élément maximal (*voir* l'exemple 3.4 ci-dessous).

3.4. EXEMPLE. — On considère ici $I=(A, Z)=(C, \mathbb{P}_3(\mathbb{C}))$, où C est une droite projective de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$. C'est évidemment une C-inclusion quasi-ample. Remarquons que $Z=\mathbb{P}_3(\mathbb{C})=Z(S^4)$ est l'espace des twisteurs de S^4 munie de sa métrique canonique, et que C peut être supposée une fibre de la fibration twistorielle $T: Z(S^4) \to S^4$ de Z (*voir* § 5 pour ces notions).

Soit $M=(M^4, g, +)$ une variété riemannienne compacte et connexe orientée conformément plate de dimension 4; $T: Z(M) \to M$ son espace des twisteurs, et C_M une fibre de T : l'inclusion $I_M := (C_M, Z(M))$ est donc localement équivalente à I.

Soit $M^4(1) := R \times S^2$ le produit riemannien de S^2 canonique (c. à. d. : munie de sa métrique canonique) et d'une surface différentiable orientée, compacte et connexe R de genre au moins 2, munie d'une métrique riemannienne à courbure constante négative égale à (-1). Notons g_1 la métrique (conformément plate) correspondante sur $M^4(1)$. Soit R_n le revêtement riemannien de degré 2^n, $n \geqq 0$ de R obtenu par récurrence sur n en prenant un revêtement riemannien de degré 2 de R_{n-1}. On notera $M(1) := (M^4(1), g_1, +)$ et $M(n)$ le revêtement riemannien de degré 2^n, $n \geqq 0$ de $M(1)$ obtenu par produit riemannien de S^2 et R_n. On notera $C_{M(n)}$ une fibre twistorielle de $Z(M(n))$ au-dessus d'un point fixé de $M^4(1)$.

Le système d'inclusions $I(n) := (C_{M(n)}, Z(M(n)))$ est un système projectif pour les relations naturelles de domination. Il n'existe cependant pas d'inclusion I'' localement équivalente à I et dominant simultanément tous les $I(n)$.

3.5. EXEMPLE. — On s'inspire ici d'une construction due à U. Persson :

Soit $f : U \to V$ une submersion analytique entre deux variétés analytiques complexes connexes U et V telles que $\dim_{\mathbb{C}}(U) = 1 + \dim_{\mathbb{C}}(V)$, et $r' : V \to U$ une section analytique de f. Soit E une courbe elliptique et $L_{r'}(U \times E)$ la variété complexe obtenue en appliquant simultanément, pour chaque v de V, la transformation logarithmique de multiplicité un le long de la fibre $(r'(v) \times E)$ à la surface elliptique $S_v := ((f^{-1}(v) \times E)$ dont la base est $f^{-1}(v))$.

Si $r = (r', r'')$ est un couple de telles sections, on notera $L_r(U \times E)$ la composée : $L_{r''} \circ L_{r'}(U \times E)$, pourvu que les images de r' et r'' soient disjointes.

On prend alors : $U := (\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}))$, $V = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ et pour f (resp. g) la première (resp. seconde) projection. Soit $Z := U \times E$, et soit C une courbe ample et lisse de U. On note : $A := p^{-1}(C) = A \times C$, où $p : U \times E \to U$ est la projection naturelle. L'inclusion $I := (A, Z)$ est alors une C-inclusion connexe.

Soit u un point de U non sur C, $h : B_u(U) := U' \to U$ l'éclatement de U en u, et $r = (r', r'')$ les transformées strictes par h de deux sections disjointes de f telles que $(g \circ h \circ r')$ et $(g \circ h \circ r'')$ soient constantes, égales à c' et c'', avec $c' = g(u)$. On remarquera que l'image de r' rencontre la courbe exceptionnelle F de h, et que l'image de r'' rencontre la composante exceptionnelle G distincte de F de la fibre de $(f \circ h) := f' : U' \to V$ au-dessus de $f(u)$.

On note alors : $Z' := L_r(U' \times E)$, $p' : Z' \to U'$ la projection naturelle, et $A' := p'^{-1}(C')$, où C' est la transformée stricte de C par h.

3.6. PROPOSITION. — L'inclusion $I' := (A', Z')$ est compactifiable et connexe, localement équivalente à $I = (A, Z)$.

Démonstration. — La connexité résulte de l'équivalence locale, la compactifiabilité de ce que U' est projective et $A' = p'^{-1}(C')$. Nous montrons l'assertion d'équivalence locale. Il suffit pour cela d'établir l'existence d'un isomorphisme analytique au-dessus de U de Z et de $L_s(U \times E)$, ou $s := (s', s'')$, avec : $s' = (h \circ r')$ et $s'' = (h \circ r'')$. On obtient un tel isomorphisme en observant que : $L_s(U \times E)$ est naturellement isomorphe à : $(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times (L_c(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times E)))$, où $(L_c(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times E)$ désigne le produit des deux transformations logarithmiques de $(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times E)$ appliquées en $\{c'\} \times E$ et $\{c''\} \times E$. Enfin il est bien connu et facile à vérifier directement que : $L_{c'}(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times E)$ est une surface de Hopf, tandis que $L_c(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times E)$ est isomorphe à $(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times E)$.

3.7. COROLLAIRE. — Les inclusions I et I' sont des éléments maximaux distincts de $C^*(I)$, et Z' n'est pas dans la classe $\mathscr{C}$.

Démonstration. — La variété Z' contient la réunion de deux surfaces de Hopf : $(f \circ h \circ p')^{-1}(f(u))$, et n'est donc pas dans C. Il en résulte que I et I' ne peuvent être dominées simultanément par une même inclusion, et donc que $\mathscr{C}^*(I)$ contient deux éléments maximaux distincts. Il est facile de vérifier que toute inclusion I'' au-dessus de U et localement équivalente à I est maximale, ce qui établit la maximalité de I et I'. Nous omettons la démonstration de ce dernier point, non utilisé dans la suite.

3.8. Remarque. — L'ensemble ordonné $\mathscr{T}^*(\mathrm{I})$ a en fait une infinité non dénombrable d'éléments maximaux. On peut en construire en choisissant $n > 3$ points $u := (u_1, \ldots, u_n)$ de U en position générale, et $2n$ sections disjointes $r = (r_1, \ldots, r_{2n})$ de f dont les n premières passent respectivement par $(u_1, \ldots, u_n)$. On note encore $\mathrm{B}_u \mathrm{U}$ l'éclaté de U en u, et r la transformée stricte par cet éclatement de la section multiple r.

On définit alors $\mathrm{I}_{u,r} := (\mathrm{A}_{u,r}, \mathrm{Z}_{u,r})$ où $\mathrm{Z}_{u,r} := \mathrm{L}_r(\mathrm{B}_u(\mathrm{U}) \times \mathrm{E})$ et où $\mathrm{A}_{u,r}$ est l'image réciproque de C par la projection naturelle de $\mathrm{Z}_{u,r}$ sur U.

Alors $\mathrm{I}_{u,r}$ et $\mathrm{I}_{u',r'}$ sont maximaux dans $\mathrm{C}^*(\mathrm{I})$ et globalement équivalentes si il existe un automorphisme analytique de $(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}))$ envoyant u sur u' et r sur r', ce qui établit l'assertion de non-dénombrabilité.

4. Exemples d'inclusions connexes dominantes

Ces exemples proviennent tous de l'application des critères de domination donnés en 3.2.2.

4.1. Proposition. — Soit $\mathrm{I} = (\mathrm{A}, \mathrm{Z})$ une inclusion dans laquelle A un diviseur de Z tel que, pour un entier positif m, $\dim_{\mathbb{C}}(|m.\mathrm{A}|) > 0$ et tel que le membre générique de $|m.\mathrm{A}|$ soit irréductible et rencontre A.

Alors l'inclusion I est dominante, c. à. d. : domine toutes les inclusions qui lui sont localement équivalentes.

Démonstration. — On prend ici $\mathrm{S} := \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathrm{Z}, m.\mathrm{A})^*)$. Alors S_z est un espace projectif, et est donc irréductible, pour tout z de Z. La conclusion résulte donc de 3.1.

Remarque. — En particulier : les inclusions localement équivalentes à I lui sont toutes globalement équivalentes. Il est facile de fournir des exemples montrant que ce phénomène est particulier à la codimension un.

4.2. Proposition. — Soit $\mathrm{I} = (\mathrm{A}, \mathrm{Z})$ une inclusion dans laquelle $\mathrm{Z} = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Alors I est C-dominante.

Démonstration. — On reprend les notations de 2.4. La fibre générique de l'application a est irréductible. Donc $\mathrm{E}_z := a^{-1}(\mathrm{A} \times \mathrm{A} \times \{z\} \times \mathrm{A})$ est irréductible pour z générique dans Z. Or S_z n'est autre que l'adhérence dans $\mathrm{C}(\mathrm{Z})$ de l'image de E_z par la projection sur G, composée avec l'application envoyant g de G dans le point $\{g.\mathrm{A}\}$ de $\mathrm{C}(\mathrm{Z})$. Il en résulte que S_z est irréductible. La conclusion découle à nouveau de 3.2.2.

4.3. Remarque. — Il est probable que la propriété précédente de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est, plus généralement, satisfaite par les variétés bihomogènes, c. à. d. : homogènes et presque-homogènes sous l'action du groupe d'isotropie de l'un de leurs points.

4.4. Proposition. — Soit $\mathrm{I} = (\mathrm{A}, \mathrm{Z})$ une C-inclusion tubulaire-connexe (*voir* définition 2.6). Alors l'inclusion tangente associée est C-dominante.

Démonstration. — Soit H^0 (resp. H^{00}) l'espace vectoriel (resp. le cône des sections de $\mathrm{N}_{\mathrm{Z}}\mathrm{A}$ (resp. des sections qui admettent au moins un zéro), soit $\mathrm{E}^0 : \mathrm{H}^0 \times \mathrm{A} \to \mathrm{N}_{\mathrm{Z}}\mathrm{A}$

l'application naturelle d'évaluation. Soit $X := (E^0)^{-1}(A^*)$ l'image réciproque de A^*, section nulle de $N_Z A$, par E : c'est un sous-fibré linéaire du A-fibré trivial $(H^0 \times A)$. Soit X^0 l'unique composante irréductible de X qui se projette surjectivement sur A. Soit H l'image de X^0 par la projection de $(H^0 \times A)$ sur H^0 : c'est un sous-cône de H^{00}, appelé sa composante principale.

Nous notons maintenant E la restriction de E^0 à $H \times A$. Pour a générique dans $A^* = A$, il existe une base fondamentale de voisinages ouverts irréductibles V de a dans $(N_Z A)$ tels que les $E^{-1}(V)$ forment une base fondamentale de voisinages ouverts irréductibles de $E^{-1}(a)$ dans $(H \times A)$. En effet, pour tout voisinage ouvert convexe disqué W de l'élément nul d'une fibre $N^{-1}(a')$ de N suffisamment voisine de $N^{-1}(a)$, l'image réciproque par E de W est irréductible, puisqu'elle s'identifie à l'intersection de H et du voisinage ouvert convexe et disqué $(E^0)^{-1}(W)$ de l'élément nul de H^0.

La conclusion résulte alors de ce que le graphe de E s'identifie à un ouvert du graphe de la famille S de cycles de $(N_Z A^*)$, si S est la composante irréductible de $C(N_Z A^*)_{A^*}$ contenant $\{A^*\}$ et l'image de H dans $C(N_Z A^*)_{A^*}$ par l'application qui identifie une section et son image réduite.

4.5. COROLLAIRE. — Soit $I = (A, Z)$ une C-inclusion tubulaire-connexe. Soit r la codimension de A dans Z. Alors :

(i) il existe une application méromorphe surjective génériquement finie $M : (A \times \mathbb{P}_r(\mathbb{C})) \to Z$.

(ii) Si A est Moishezon (resp. unirationnelle), Z est Moishezon (resp. unirationnelle).

(iii) $\pi_1(A)$ est d'indice fini dans $\pi_1(Z)$; en particulier : si $\pi_1(A)$ est un groupe fini, $\pi_1(Z)$ est un groupe fini.

Démonstration. — L'assertion (i) résulte de ce que I^N domine I, et de ce que I^N étant A^*-connexe, $(N_Z A^*)$ est biméromorphe à $(A \times \mathbb{P}_r(\mathbb{C}))$. La seconde assertion résulte de ce que la classe des variétés de Moishezon (resp. unirationnelles) est stable par images et par produits. L'assertion (iii) résulte de (i), de ce que $\pi_1(A \times \mathbb{P}_r(\mathbb{C}))$ est naturellement isomorphe à $\pi_1(A)$, et du lemme suivant :

4.6. LEMME. — Soit $M : Z^* \to Z$ une application méromorphe surjective et génériquement finie, avec Z^* lisse, compacte et connexe.

Alors : $M_*(\pi_1(Z^*))$ est d'indice fini dans $\pi_1(Z)$; si Z est normal.

Démonstration. — Soit Z^0 un ouvert lisse, de Zariski dense de Z au-dessus duquel, que l'on peut supposer analytique, est non ramifiée. Soit $Z^{*0} := M^{-1}(Z^0)$, et soit M^0 la restriction de M à Z^{*0}. Alors $(M^0)_*(\pi_1(Z^{*0}))$ est d'indice fini dans $\pi_1(Z^0)$. La conclusion résulte alors de ce que l'injection naturelle induit une application surjective de $\pi_1(Z^0)$ sur $\pi_1(Z)$, puisque (Z/Z^0) est de codimension complexe au moins un dans Z, normal.

4.7. REMARQUES. — (i) La proposition 4.5 fournit un grand nombre d'exemples d'inclusions non tubulaires, puisque toute C-inclusion A-connexe $I = (A, Z)$ dans laquelle Z n'est pas uniréglée est non-tubulaire.

(ii) Cependant, même lorsque $Z = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, les inclusions $I = (A, Z)$, avec A lisse, ne sont en général pas tubulaires, puisque la suite exacte du fibré normal de A dans Z n'est pas scindée. Même dans le cas où Z est uniréglée, les inclusions tubulaires sont donc l'exception (remarque due au référée).

(iii) Une étude des rapports entre $\pi_1(Z)$ et $\pi_1(A)$ pour les inclusions connexes et compactifiables (non nécessairement tubulaires) $I=(A, Z)$ est faite dans [C5].

4.8. Corollaire. — Soit $I=(A, Z)$ une inclusion tubulaire compactifiable dans laquelle A est une courbe rationnelle telle que $(N_Z A)$ est ample sur A. Alors Z est unirationnelle.

Démonstration. — C'est un cas particulier de 4.6.(ii), car il résulte de [C3], corollaire p. 208, que Z est Moishezon.

4.9. Question. — Peut-on supprimer l'hypothèse de tubularité dans le corollaire précédent? Plus précisément : soit Z une variété lisse et connexe de Moishezon contenant une courbe rationnelle à fibré normal $N_Z Y$ ample. Alors Z est-elle unirationnelle? On peut se ramener au cas particulier où $N_Z Y$ est isomorphe à une somme directe de fibrés $\mathcal{O}(1)$. Remarquons qu'une réponse affirmative à cette question entraînerait l'unirationnalité des fibrés en coniques de base rationnelle, et de l'hypersurface quartique générique de $\mathbb{P}_4(\mathbb{C})$ (observation due à Y. Kawamata). On démontre la simple connexité d'un tel Z dans [C5].

4.10. Remarque. — Si Y est une courbe conique lisse de $\mathbb{P}_4(\mathbb{C})$ contenue dans une hypersurface cubique lisse Z de $\mathbb{P}_4(\mathbb{C})$, alors : $N_Z Y=\mathcal{O}(1)\oplus\mathcal{O}(1)$. Cependant, $I=(Y, Z)$ n'est pas tubulaire. Ceci résulte de 7.1, puisque si I était tubulaire, la composante irréductible S de $C_1(Z)_a$ serait biméromorphe à $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, où a est un point générique de Y. On va montrer que S est une surface de type général : Soit Z une hypersurface cubique lisse de $\mathbb{P}_4(\mathbb{C})=P$. Il est établi dans [C-G] que l'espace Σ des droites projectives de P contenues dans Z est une surface lisse de type général, dont l'application d'Albanese est génériquement injective. Soit a un point générique de Z, par lequel ne passent qu'un nombre fini de droites de la famille Σ. On va montrer que la famille S des coniques de P contenues dans Z et passant par a est une surface biméromorphe à Σ. Une application biméromorphe $\beta:\Sigma\to S$ est définie par : $\beta(\sigma)=s$, où d est l'intersection du plan P engendré par a et la droite σ (supposée ne pas passer par a) et de Z, privée de la droite σ.

4.11. Remarque. — Soit $I=(C, S)$ l'inclusion d'une courbe lisse et compacte dans une surface compacte S. Nous dirons que cette inclusion est biméromorphiquement tubulaire s'il existe une application biméromorphe $b: S\to S'$ telle que l'inclusion $(C':=b(C), S')$ soit tubulaire. Il résulte de 4.6 que si I est aussi quasi-ample, alors S est biméromorphe à une surface réglée. On obtient ainsi des exemples d'inclusions quasi-amples non biméromorphiquement tubulaires. Il est facile de fournir des exemples d'inclusions quasi-amples $I=(C, S)$ non tubulaires mais biméromorphiquement tubulaires : $S=\mathbb{P}(E)$, où E est l'extension non triviale : $0\to\mathcal{O}_C\to E\to\mathcal{L}_p\to 0$, avec $\mathcal{L}_p$ le fibré en droites de degré 1 sur la courbe elliptique C qui admet une section non nulle s'annulant en $p\in C$, et C est identifiée avec l'ensemble des droites du sous-fibré $\mathcal{O}_C$.

5. Variétés riemanniennes conformément plates à complexifiée compacte

Cette partie renvoit systématiquement, pour la définition des notions utilisées, aux articles où elles ont été définies. Je remercie D. Barlet et L. Bérard-Bergery pour m'avoir signalé une erreur dans une version antérieure de cette partie.

5.1. Rappels. — Soit $M=(M^{2n}, g, +)$ une variété riemannienne compacte et connexe orientée de dimension paire $2n$. L'espace des twisteurs $T: Z(M) \to M$ peut alors être défini comme variété analytique complexe, une fibre (dite twistorielle) arbitraire Y de T étant une sous-variété complexe lisse et connexe de $Z=Z(M)$, dans les deux cas suivants :

5.1.1.1. $n=2$ et g est auto-duale ([A-H-S], [Pe]). Dans ce cas, les fibres de T sont des courbes rationnelles (complexes) dont le fibré normal dans $Z=Z(M)$ est isomorphe à la somme directe de 2 copies de $\mathcal{O}(1)$.

5.1.1.2. La métrique g est conformément plate. Alors Y est rationnelle de dimension $d=n.(n-1)/2$, et $I=(Y, Z)$ est tubulaire ([S], [D-V], [B.B-O]). Cette dernière propriété résulte de l'invariance conforme de $Z(M)$, et du fait qu'elle est satisfaite pour $M=S^{2n}$, munie de sa métrique canonique.

5.1.2. Définition. — Dans ces deux cas, il existe une unique composante irréductible ZM de $C(Z)$ contenant les fibres réduites de T; ZM est lisse au voisinage de chacun des points correspondant à l'une de ces fibres, de dimension complexe $2n$, et est appelée la complexifiée de M (remarquer que M se plonge naturellement différentiablement dans ZM lorsque l'on associe à $m \in M$ la fibre twistorielle Y_m de T au-dessus de m). Dans le premier cas, ceci résulte de [Ko], et dans le dernier, de ce que l'inclusion $(Y_m, Z(M))$ est tubulaire et de ce que : $h^0(Y_m, N_Z Y_m)=2n$ ([S]).

Remarquons d'autre part que l'argument utilisé dans le cas 5.1.1 s'applique aussi à l'espace des twisteurs $Z(M)$ d'une variété quaternionnienne $M=(M^{4n}, g, +)$ (défini dans [Sa] et [Bes], § 14), puisque les fibres de T sont des courbes rationnelles (complexes) dont le fibré normal dans $Z=Z(M)$ est isomorphe à la somme directe de $2n$ copies de $\mathcal{O}(1)$, et permet donc de définir de la même manière la complexifiée ZM de M dans ce cas aussi.

5.1.3. Proposition. — L'inclusion $I:=(Y, Z)$ est quasi-ample, où $Z:=Z(M)$.

Démonstration. — Dans les deux premiers cas, cela résulte de 2.5. Dans le dernier cas, on peut, puisque $I=(Y, Z)$ est tubulaire, se ramener au cas de l'inclusion tangente de Y dans $N_Z Y'$. On a alors ([S]) une suite exacte de fibrés holomorphes sur Y :

$$0 \to K \to V'' \times Y \to N_Z Y \xrightarrow{t} 0$$

où V'' est le complexifié de $V=T_m M$, l'espace tangent à M en m, t est le quotient naturel, et K est l'ensemble des $((u+iJv), J)$ pour u et v dans V et J dans Y, qui est alors identifié à la variété complexe des structures d'espace vectoriel complexe sur V qui sont compatibles avec l'orientation naturelle de V et qui sont compatibles avec g (c.à.d.: $g(Ju, Jv)=g(u, v)$). L'application naturelle $t_*: H^0(Y, V'' \times Y)=V'' \to H^0(Y, N_Z Y)$ est alors un isomorphisme ([S]). D'autre part, $N_Z Y$ n'est alors autre que l'espace des twisteurs de V, et s'identifie naturellement différentiablement à : $V \times Y$. Si $z=(w, J)$ est un point de $N_Z Y$, avec $w \neq 0$ dans V, une section $s=u+iv$ passe par z, c. à. d. : est telle que $s(J)=w$ et s'annule en au moins un point de Y si : $w=u+Jv$, avec $g(u, u)=g(v, v)$ et $g(u, v)=0$. Un calcul facile montre alors que ces conditions équivalent aux suivantes : $u=(w/2)+h$, $Jv=(w/2)-h$, où h est dans l'orthogonal, noté H, pour g du sous-espace vectoriel complexe (pour J) de V engendré par w. On en déduit facilement la condition 1.14.(i) de quasi-amplitude pour $I=(Y, Z)$, puisque deux structures complexes sur V compatibles avec g et $+$, et coincidant sur H sont identiques. Pour voir que la condition 1.14.(ii) est aussi satisfaite, on peut supposer que $U=T^{-1}(B)$, où B est une boule ouverte euclidienne de rayon $r>0$ centrée en p, avec $Y=T^{-1}(p)$. La description précédente des sections de $(N_Z Y)$ qui admettent un zéro montre alors que $S_z(U)$ est lisse et convexe, donc connexe, pour z dans U. D'où la quasi-amplitude de $I^N=(Y', N_Z Y')$.

5.2. Théorème. — Soit $(M, g, +)$ une variété riemannienne connexe, compacte orientée de dimension $2n \geqq 4$, et conformément plate. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) La complexifiée ZM de M est compacte.

2) L'espace des twisteurs Z de M est biméromorphe à une variété kählérienne compacte.

3) Z est Moishezon.

4) Z est unirationnel.

4') Z est rationnel.

5) $\pi_1(Z)=0$.

6) $(M, g, +)$ est conformément équivalente à S^{2n} munie de sa métrique canonique.

Démonstration. — Les implications $4') \Rightarrow 4) \Rightarrow 3) \Rightarrow 2) \Rightarrow 1)$ (cette dernière implication résulte essentiellement de [Bi], voir [F] ou [L]) et $4) \Rightarrow 5)$ ([Se], ou § 3 ci-dessous) sont classiques.

L'implication $6) \Rightarrow 4)$ se trouve dans [D-V] et [S]. L'implication $5) \Rightarrow 6)$ résulte du théorème de Kuiper ([Ku]). L'implication $1) \Rightarrow 4)$ résulte alors de 4.5, compte tenu des rappels 5.1 précédents, et de la remarque 1.19, qui fournit déjà l'implication : $1) \Rightarrow 3)$.

5.3. Corollaire. — Soit $M=(M^4, g, +)$ comme ci-dessus. On suppose que g est conformément plate et à courbure scalaire strictement positive, et que $b_1(M)=0$. Alors : $(M, g, +)$ est conformément équivalente à S^4 munie de sa métrique canonique.

Démonstration. — Il résulte de [Bo] que $b_2(M)=0$. Puisque $b_1(M)=0$, on a donc : $\chi(M)=2$, et $\tau(M)=0$. Or, d'après [H1], on a : $c_1^3(Z)=16(2\chi(M)-3\tau(M))>0$. D'autre part, le corollaire 3.8 de [H2] et la dualité de Serre montrent que $H^2(Z, K_Z^{-m})=0$ pour $m>0$. Le théorème de Riemann-Roch montre alors que K_Z^{-1} est de dimension de Kodaira-Iitaka égale à 3.

Donc Z est de Moishezon, et la conclusion découle de 5.2.

5.4. Remarque. — Soit M^3 pour une variété riemannienne compacte connexe orientée telle que $b_1(M^3)=0$, et dont le revêtement universel riemannien est l'espace hyperbolique réel H^3 (de telles variétés existent, bien qu'il semble difficile de trouver des références). Alors : le produit riemannien $(S^p \times M^3)$ est, si $p \geqq 2$, conformément plat, à b_1 nul, et sa courbure scalaire est constante, et peut être choisie des trois signes possibles en faisant varier le rayon de S^p. Ceci montre que le corollaire 5.3 ne se généralise pas en dimension supérieure à 4. Il est clair, par ailleurs que l'on ne peut y supprimer la condition sur la courbure scalaire.

5.5. REMARQUE. — On démontre (à l'aide de [D] et [F]) dans [C5] que les conditions : $n=2$, g auto-duale et ZM compacte entraînent que M est soit S^4, soit homéomorphe à la somme connexe d'un certain nombre de copies de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

6. Plan de la démonstration

On désigne dans toute la suite par $J=(A, Z, S)$ et $J'=(A', Z', S')$ des données d'extension compactifiables localement équivalentes, et par $E=(U, U', f)$ une équivalence locale entre J et J'. On utilisera les notations introduites dans les définitions 1.8, 1.9 et 1.10.

La démonstration de 3.1 et 3.2 repose sur les étapes suivantes :

6.1. PROPOSITION. — L'isomorphisme analytique : $f_*: S^0(U) \to S'^0(U') := f_*(S^0(U))$ admet un (unique) prolongement biméromorphe $F_*: S \to S'$ (*voir* remarque 7.3).

Démonstration. — Elle repose sur la technique de [C1] de détermination des cycles irréductibles par leur m-jet en un point; elle sera donnée au paragraphe 7.

6.2. PROPOSITION. — On suppose, de plus, que l'une des deux conditions (i) ou (ii) suivantes est satisfaite :

(i) Z et Z' sont dans la classe C.

(ii) J et J' sont quasi-amples et compactifiables.

Alors l'isomorphisme analytique induit par l'application produit :

$$(f_* \times f): G_{S(U)} \to G_{S'(U')}$$

admet un unique prolongement biméromorphe $H: G_S \to G_{S'}$ au-dessus de S et S'. De plus, H satisfait : $(p_{S'} \circ H) = (F_* \circ P_S)$, où F_* est défini en 6.1.

Démonstration. — Elle sera donnée au paragraphe 8 (resp. au § 9) sous l'hypothèse (i) (resp. (ii)).

6.3. NOTATIONS. — On suppose J et J' connexes. Soit $n: G_S^0 \to G_S$ la normalisation de G_S; soit p_S^0 et q_S^0 respectivement les composées de p_S et q_S avec n. Soit $q_S^*: G_S^0 \to Z^*$ et $r_S: Z^* \to Z$ la factorisation de Stein de $q_S^0 = (r_S \circ q_S^*)$.

6.4. PROPOSITION. — On suppose que J et J' sont connexes, et que l'isomorphisme analytique induit par l'application produit : $(f_* \times f): G_{S(U)} \to G_{S'(U')}$ admet un prolongement biméromorphe $H: G_S \to G_{S'}$ au-dessus de S et S'.

Alors, il existe une unique application biméromorphe $B: Z^* \to Z'^*$ telle que : $(q_{S'}^*) \circ H^0 = B \circ (q_S^*)$, où H^0 est le relèvement de $(H \circ n)$ à valeurs dans $G_{S'}^0$.

6.5. Corollaire. — On conserve les hypothèses de 6.3 et 6.4. Alors : il existe une donnée d'extension $J''=(A'', Z'', S'')$ compactifiable et connexe dominant J et J'' par des applications méromorphes surjectives $F: Z'' \to Z$ et $F': Z'' \to Z'$. De plus, il existe une application méromorphe surjective $F'': Z^* \to Z''$ telle que $r_S=(F \circ F'')$, où les notations sont celles de 6.3.

Démonstration. — On définit $Z'':=b(Z^*)$, où $b: Z^* \to Z \times Z'$ est égale à $(r_S \times (r_{S'} \circ B))$. Il existe donc bien des applications méromorphes surjectives F et F' possédant les propriétés de commutation annoncées. Il existe, de plus, une inclusion $I''=(A'', Z'')$ telle que F et F'' induisent des équivalences locales, par restriction au voisinage de A'', puisque l'une des composantes irréductibles de $(F^{-1}(U))$ s'identifie au graphe de l'isomorphisme $f: U \to U'$. Cette composante est obtenue comme image de $G_{S(U)}$ par l'application produit $(p_S \times (p_{S'} \circ H))$, puisque H prolonge $(f_* \times f)$.

6.6. Corollaire. — Soit $J=(A, Z, S)$ une donnée d'extension compactifiable et connexe. Il existe une donnée d'extension $J^+=(A^+, Z^+, S^+)$ dominant toutes les données d'extension $J'=(A', Z', S')$ compactifiables et connexes telles qu'existe une équivalence locale $E=(U, U', f)$ entre J et J' pour laquelle l'application produit : $(f_* \times f): G_{S(U)} \to G_{S'(U')}$ admet un prolongement biméromorphe $H: G_S \to G_{S'}$.

Démonstration. — Il suffit de prendre J^+ telle que le degré de l'application $r_{S^+}: G_{S^+} \to (Z^+)^*$ soit minimum. Le corollaire 6.5 montre alors que J^+ possède la propriété de domination annoncée.

6.7. Démonstration de 3.1. — Soit $I'=(A', Z')$ une $\mathscr{T}$-inclusion connexe localement équivalente à I par l'équivalence locale $E=(U, U', f)$. Soit $J=(A, Z, S)$ une donnée d'extension connexe. Alors E induit une équivalence locale entre J et $J'=(A', Z', S')$, avec $S':=f_*(S)$. De plus, J' est compactifiable puisque Z' est dans $\mathscr{T}$. Soit alors J^+ une donnée d'extension possédant la propriété énoncée en 6.6. Il résulte de 6.2 que $I^+=(A^+, Z^+)$ est $\mathscr{T}$-dominante.

Démontrons maintenant le critère de domination énoncé en 3.2.2, en utilisant les notations de 6.3 : la propriété énoncée entraîne l'existence pour a générique dans A^0 d'une base fondamentale d'ouverts irréductibles V de a dans Z tels que $(r_S)^{-1}(V)$ soit irréductible dans Z^*. Si $I^+=(A^+, Z^+)$ est dominante, et si $F: Z^+ \to Z$ est une application de domination de degré au moins 2, il existe une application surjective $b^+: Z^* \to Z^+$ telle que $(r_S)=(F \circ b^+)$. Ceci est une contradiction si F est de degré au moins 2. D'où le résultat.

6.8. Démonstration de 3.2. — Soit $I=(A, Z)$ une inclusion quasi-ample et compactifiable. Quitte à changer I, soit $J=(A, Z, S)$ et $J'=(A', Z', S')$ des données d'extension quasi-amples et compactifiables possédant la propriété de maximalité énoncée en 6.6 pour J^+. Il suffit de vérifier que I et $I':=(A', Z')$ sont globalement équivalentes. Par le choix de J et J', il existe une application de domination $F: Z' \to Z$. Il en résulte (par relèvement à $S \times Z'$ de G_S), puisque F est génériquement finie, qu'il existe une unique donnée d'extension $J''=(A', Z', S'')$ compactifiable et quasi-ample telle que $F_*(S'')=S$. De plus, cette donnée d'extension possède par construction la propriété de prolongement biméromorphe énoncée en 6.4. De la propriété de maximalité de J, on déduit la biméromorphie de F, et donc 3.2.

7. Invariance de l'espace de paramètre S

On se propose ici d'établir la proposition 6.1.

Si $f: X \to Y$ et $g: T \to Y$ sont des applications analytiques, on notera $f_B: X_B \to B$ le morphisme déduit de f par le changement de base g, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur g.

7.1. Relèvements de cycles à l'espace des m-jets.

7.1.1. Notations. — Soit X et S des espaces analytiques réduits, et r, $m \geqq 0$ des entiers; on notera : $X^{(m)}$ le m-ième voisinage infinitésimal de la diagonale réduite $D(X)$ de $X^2 := (X \times X)$.

On notera : $p(r, m): G(X, r, m) := \operatorname{Grass}(r, \mathcal{O}_X(m)) \to X$ la projection naturelle, où $\operatorname{Grass}(r, \mathcal{O}_X(m))$ paramètre les faisceaux localement libres de rang r quotient du $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{O}_X(m)$. On notera $\operatorname{Grass}(r, \mathcal{O}_{X,A}(m))$ la restriction à A de $\operatorname{Grass}(r, \mathcal{O}_X(m))$.

On notera : p, q_1, q_2 respectivement les projections de $(S \times X \times X)$ sur ses premier, second, troisième facteurs.

Soit A et G respectivement des sous-ensembles analytiques fermés de X et $(S \times X \times X)$, soit B une composante irréductible de $(G \cap (p \times q_2)^{-1}(A))$. On définit alors le faisceau $J(m, B, G)$ quotient du faisceau structural de $(S \times X \times X)$ par le faisceau $I(m, B, G)$ défini par l'égalité :

$$I(m, B, G) := [(p \times q_1)^*(I_G) + (q_1 \times q_2)^*(I_{D(X)}^{m+1}) + (p \times q_2)^*(I_B)],$$

où I_G, I_B, $I_{D(X)}$ sont les idéeaux de G, B et D(X) respectivement.

On peut alors considérer $J(m, B, G)$ comme un quotient sur B de $(q_1 \times q_2)^*(\mathcal{O}_X(m))$. Soit $r(m)$ son rang générique sur B; il correspond à $J(m, B, G)$ une application méromorphe $R_m: B \to \operatorname{Grass}(r(m), \mathcal{O}_{X,A}(m))$ appelée m-relèvement du triplet (B, X, G), ou encore relèvement de G le long de B à l'espace des m-jets de X.

Dans [C1], p. 13-15, le résultat suivant est établi :

7.1.2. Proposition. — Soit S un sous-ensemble analytique compact et irréductible de C(X). Soit G le graphe de la famille analytique universelle de cycles de X paramétrée par S, supposés génériquement irréductibles et rencontrant tous A. Soit B une composante irréductible de $(G \cap q_S^{-1}(A))$ qui est S-surjective (on a identifié G à son image naturelle dans $(S \times X \times X)$).

Alors : il existe un entier m_0 tel que R_m est génériquement injective si $m \geqq m_0$.

7.2. Démonstration de 6.1. — Pour simplifier les notations, on identifie $S^0(U)$ à $S(U)$. La remarque 7.3 ci-dessous montre que ceci ne peut provoquer d'ambiguïté.

On utilise les notations de 7.1.2 ci-dessus, avec $Z = X$, et avec des notations analogues pour A', S' et Z'. On suppose B et B' tels que $(f_* \times f)(B \cap (S(U) \times U))$ et $(B' \cap (S'(U') \times U'))$ ont une composante irréductible commune.

Pour tout $m \geqq 0$, on a un m-relèvement $R_m: B \to \operatorname{Grass}(r(m), \mathcal{O}_{X, A}(m))$ du triplet (B, Z, G_S). On notera R'_m le relèvement du triplet $(B', Z', G_{S'})$. Remarquons que $r(m) = r'(m)$ pour tout m, puisque les deux rangs coïncident sur l'intersection de $(f_* \times f)(B \cap (S(U) \times U))$ et $(B' \cap (S'(U') \times U'))$.

L'isomorphisme f induit pour tout $m \geqq 0$ un isomorphisme

$$f_m: \operatorname{Grass}(r(m), \mathcal{O}_{X, A}(m)) \to \operatorname{Grass}(r(m), \mathcal{O}_{X', A'}(m)).$$

Soit alors $F_m: S \to C(\operatorname{Grass}(r(m), \mathcal{O}_{X, A}(m)))$ l'application méromorphe définie par : $F_m(s) := (R_m)_*(p_S^{-1}(s))$ pour s générique dans S. On définit F'_m de manière analogue sur S'. On a l'égalité : $(F'_m) \circ f_* = (f_m)_* \circ F_m$ sur S(U), par construction.

Pour m assez grand, ces deux applications sont génériquement injectives, puisque R_m et R'_m le sont. Soit alors $(F'_m)^{-1}$ l'application réciproque de F'_m, définie sur l'image de (F'_m).

L'application $F_*: S \to S'$ définie par : $(F'_m)^{-1} \circ (f_m)_* \circ (F_m)$ est alors biméromorphe et prolonge f_*.

7.3. Remarque. — On peut déduire de ce qui précède, par prolongement analytique appliqué à $(f_* \times f)(G_S \cap (S \times U))$ et $(G_{S'} \cap (S' \times U'))$, que f_* est un isomorphisme analytique de S(U) sur S'(U').

8. Invariance du graphe de la famille S

On se propose ici de démontrer la proposition 6.2.(i), dont on utilise les notations. On conserve aussi les notations du paragraphe 7.

8.1. Notations. — Soit $(Y_s)_{s \in S}$ (resp. $(Y'_{s'})_{s' \in S'}$) la famille de cycles de Z (resp. S') paramétrée par S (resp. S').

Soit S^* le graphe dans $S \times S'$ de l'application F_* définie en 6.1. On identifiera $S^0(U)$ à un ouvert de S^*.

On note G le produit fibré de G_S et $G_{S'}$ sur S^* pour les applications méromorphes naturelles, c. à. d. : la composante S-surjective de l'ensemble des $((s, z), (s', z'))$ de $G_S \times G_{S'}$ tels que $s' = F_*(s)$. On note : $P: G \to S^*$ et $Q: G \to Z \times Z'$ les projections naturelles, et $G(U) := Q^{-1}(U \times U')$.

Soit $C(G/S^*)$ l'espace des cycles relatifs de G sur S^*, c. à. d. : le sous-ensemble analytique fermé de C(G) constitué des cycles dont le support est contenu dans une fibre de P, et $P_*: C(G/S^*) \to S^*$ l'application analytique d'image directe par P, qui associe dans ce cas à un tel cycle C le point de S^* défini par : $P_*(C) := P(|C|)$.

8.2. Rappels. — Pour plus de détails sur la notion d'isomorphisme relatif, *voir* [C3].

Soit B^* le graphe dans G de la restriction à B de l'application $(f_* \times f): B \to B'$, où B et B' ont été définis en 7.1.2 et 7.2. Remarquer que B et B' sont analytiques fermés dans G(U).

Soit $J^* := \operatorname{Isom}(G_S, G_{S'}; B, B'/S^*)$, c. à. d. : la réunion des composantes irréductibles de $C(G/S^*)_{B^*}$ dont la projection sur S^* n'est pas d'intérieur vide, et dont le point générique est un cycle irréductible et réduit qui est le graphe d'un isomorphisme analytique $j: Y_s \rightarrow Y_{s'}$ avec (s, s') dans S^*.

8.3. REMARQUE. — Puisque Z et Z', et donc aussi S et S' par [C1] sont dans C, G est dans C, les composantes irréductibles de J^* sont compactes, donc S^*-propres. On va montrer que J^* est non vide.

8.4. DÉFINITION DE H AU-DESSUS DE S(U). — On note k la section analytique $k: S^0(U) \rightarrow J^*$ à P_* obtenue en définissant $k(s)$ comme le cycle le réduit dont le support est le graphe de l'isomorphisme de Y_s sur $Y_{s'}$ obtenu par restriction de f, avec: $s' = f_*(s)$.

On va montrer que K admet un prolongement méromorphe unique $K: S \rightarrow J^*$.

Ceci établira la proposition 6.2, d'après [C3], puisqu'il existe une application naturelle méromorphe M d'évaluation au-dessus de S^*, avec $M: J^* \times G_S \rightarrow G_{S'}$ qui est analytique sur $k(S^0(U))$, où elle induit sur les fibres de p_S la restriction de f. On obtiendra l'application biméromorphe H par restriction au-dessus de S^* de M à $K(S^*) \times G_S$.

On a donc établi que J^* est non vide, puisque la composante irréductible de $C(G/S^*)_{B^*}$ contenant $k(S^0(U))$ est une composante compacte, donc S^*-surjective de J^*.

8.5. NOTATION. — Soit G_J le graphe de la famille J; on note encore P_* la restriction à J de l'application d'image directe par P. On regarde G_J comme naturellement plongé dans $J \times X$, avec $X := (Z \times Z')$. On note enfin $g: G_J \rightarrow G$, $p_J: G_J \rightarrow J$, $h: G_J \rightarrow X$ les projections naturelles.

Soit B^0 une composante irréductible J-surjective, qui existe par construction, de $g^{-1}(B^*)$. Alors B^0 est analytique fermé dans $G_J(U) := h^{-1}(X(U))$, avec $X(U) := (U \times U')$.

8.6. LES m-JETS D'ISOMORPHISMES DE CYCLES DE LA FAMILLE S LE LONG DE A. — Soit A^* le graphe dans $(A^0 \times A'^0)$ de la restriction de g à A^0.

Soit $R_m: B^0 \rightarrow \mathrm{Grass}(r(m), \mathcal{O}_{X, A^*}(m))$ le m-relèvement du triplet $(B^0, X := (Z \times Z'), G_J)$.

Soit:

$$R_{m, U}: B^* \rightarrow \mathrm{Grass}(r(m, U), \mathcal{O}_{X, A^*}(m))$$

le m-relèvement du triplet $(B^*, X(U) := (U \times U'), G(U))$, où $G(U)$ est considéré comme sous-ensemble analytique fermé de $S^* \times X(U)$.

On a : $r(m, U) = r(m)$, puisque Z et Y_s sont lisses au point générique de $(A^0 \cap Y_s)$ pour s générique dans S, de sorte que $r(m)$ ne dépend que de m et des dimensions de Z zt Y_s.

8.7. LES m-JETS D'ISOMORPHISMES COMPATIBLES AVEC L'ÉQUIVALENCE LOCALE f. — Pour tout entier $m \geqq 0$, soit B_m^0 l'ensemble des b de B^0 tels que : $R_m(b) = R_{m, U}(g(b))$, et B_m la réunion des composantes S^*-surjectives de B_m^0. Soit enfin $J_m := p_J(B_m)$, qui est aussi S^*-surjectif et non vide, pour tout n, puisqu'il contient $J(U) := K(S^0(U))$.

8.8. CONCLUSION. — La suite $(J_m)_{m \geqq 0}$ est décroissante pour l'inclusion, donc stationnaire, par compacité. Soit K^* l'intersection des J_m. Alors K^* est le graphe d'une section méromorphe $K: S^* \rightarrow J$ de P_*, qui prolonge donc k. En effet, pour s générique dans

$S^0(U)$, il existe $m(s)$ tel que la fibre de J_m au-dessus de s soit réduite à $k(s)$ pour tout $m \geqq m(s)$, ceci d'après la proposition 7.1.2. Un argument de dimension montre alors que l'on peut prendre m satisfaisant cette propriété simultanément pour tous les s d'un ouvert dense de $S^0(U)$.

9. Démonstrations de 6.4 et 6.2 (ii)

9.1. DÉMONSTRATION DE 6.4. — On conserve les notations de 6.3 et 6.4. La fibre générique de (q_{S^*}) est irréductible, puisque G_{S^0} est normal ([C3], appendice p. 220).

Soit $F: Z^* \to C(G_S)$ l'application « fibre » de (q_{S^*}), associant à z générique dans Z^* le cycle réduit dont le support est la fibre de q_{S^*} au-dessus de z. Elle est génériquement injective. Soit D son image.

Soit $E: Z^* \to C(S)$ la composée : $((p_S)_*) \circ F$.

L'application produit $R := (r_S \times E): Z^* \to Z^* \times D_1$ est donc également génériquement injective.

Soit U^* la réunion des composantes irréductibles de $r_S - 1(U)$ qui sont contenues dans l'image de $G_{S^0(U)}$ par (q_{S^*}).

On définit F', R', E', (Z'), U'' de manière analogue.

Soit $f: U^* \to U''$ l'application définie par : $f^* := (R')^{-1} \circ [(f \circ r_S) \times (f_* \circ E)]$, où $(R')^{-1}$ est l'inverse de R', définie sur son image.

Sur $G_{S^0(U)}$, on a l'égalité : $(q_{S'^*}) \circ (f_* \times f) = f^* \circ (q_{S^*})$.

Puisque $H: G_S \to G_{S'}$ prolonge $(f_* \times f)$, on en déduit par prolongement analytique que : $F' \circ f^* = H_* \circ F$, et donc que : $F'(Z') = H_* F(Z^*)$.

D'où l'égalité : $H_* \circ F = F'$ sur Z^*. Donc : $B := H_*$ satisfait la condition énoncée en 6.4.

9.2. DÉMONSTRATION DE 6.2 (ii). — On utilise les notations introduites en 9.1.

La condition de quasi-amplitude signifie que q_{S^*} a une section analytique $t: U \to U^*$ au-dessus de U, et que la composée $(E \circ t): U \to C(S)$ est génériquement injective. En fait :

9.2.1. LEMME. — L'application $E: Z^* \to C(S)$ est génériquement injective si J est quasi-ample et compactifiable.

Démonstration. — Si (z, z') est générique dans $(Z^*)^2$, avec : z dans $U_1^* := t(U_1)$ et $z' \notin U_2^*$, où U_1 et U_2 sont comme en 1.14 (i), deux cas se présentent :

(i) $r_S(z') \notin U_2$: il existe donc s dans $S(U_2)$ tel que $r_S(z) \in Y_s$ mais $r_S(z') \notin Y_s$.

(ii) $r_S(z') \in U_2$: alors $E(z')$ est un cyle T de S dont l'intersection avec $S(U_2)$ est d'intérieur vide dans T, et T ne contient donc pas $E(z)$.

Dans les deux cas, $E(z) \neq E(z')$. Ceci entraîne le lemme, puisque $E^{-1}(E(U_1))$ est alors contenu dans U_2^* sur lequel E est génériquement injective.

On a donc l'égalité : $f_* \circ E = E' \circ f^*$ sur U^*, où f^* est définie en 9.1. On en déduit que l'application $B: Z^* \to Z''$ définie par : $B := [(E')^{-1} \circ (F_*)_* \circ E]$ est biméromorphe. On en déduit alors l'application H de 6.2 ii) en passant aux graphes, naturellement biméromorphes, des familles S, E(Z*), S' et E'(Z').

BIBLIOGRAPHIE

[A-H-S] M. ATIYAH, N. HITCHIN, I. SINGER, *Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry*. Proc. R. Soc., London, A 362, 1978, p. 425-461.

[B] D. BARLET, *Familles analytiques de cycles paramétrées par un espace analytique réduit*, LN 482, Springer-Verlag, 1975, 1-158.

[P.d.B-L.M – A.N] P. DE BARTOLOMEIS-L. MIGLIORINI-A. NANNICCINI, *Espaces de twisteurs Kähleriens*, C.R. Acad. Sci. Paris, 307, 1988, p. 259-261.

[B.B-O] L. BÉRARD-BERGERY, T. OCHIAI, *On some generalizations of the construction of twistor spaces. Global Riemannian geometry*, Ed. T. J. WILLMORE and N. J. HITCHIN. Ellis Horwood limited, 1984.

[Bes] A. L. BESSE, *Einstein manifolds*. Ergebnisse der Math. 3, Band 10, Springer, 1987.

[Bi] E. BISHOP, *Conditions for the analyticity of certain sets*, Michigan, Math. J., 11, 1964.

[Bo] J. P. BOURGUIGNON, *Les variétés de dimension* 4 *à signature non nulle et à courbure harmonique sont d'Einstein. Invent. Math.*, 63, 1981, p. 263-286.

[C1] F. CAMPANA, *Algébricité et compacité dans l'espace des cycles*. Math. Ann. 251, 1980, p. 7-18.

[C2] F. CAMPANA, *Coréduction algébrique d'un espace analytique faiblement Kählerien*. Invent. Math., 63, 1981, p. 187-223.

[C3] F. CAMPANA, *Réduction d'Albanese d'un morphisme propre et faiblement kählerien I et II*. Comp. Math., 54, 1985, p. 373-416.

[C4] F. CAMPANA, *Réduction algébrique d'un morphisme faiblement kählerien propre et applications*, Math. Ann., 256, 1981, p. 157-189.

[C5] F. CAMPANA, *Un critère analytique de simple connexité*, Preprint.

[C-F] F. CAMPANA-H. FLENNER, *A characterization of ample vector bundles on a complex projective curve*, Preprint.

[C-G] H. CLEMENS-P. GRIFFITHS, *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, Ann. Math., 95, 1972, p. 281-356.

[D] S. DONALDSON, *An application of gauge theory to the topology of* 4-*manifolds*. J. Diff. Geom., 18, 1983, p. 269-316.

[D-V] M. DUBOIS-VIOLETTE, *Structures complexes au-dessus des variétés, applications*, Séminaire de l'E.N.S., 1981.

[Fr] M. FREEDMAN, *Topology of* 4-*dimensional manifolds*. J. Diff. Geom., 17, 1982, p. 357-454.

[F-K] T. FRIEDRICH-F. KURKE, *Compact Four-dimensional Self-dual Einstein Manifolds with positive scalar curvature*. Math. Nachr., 106, 1982, p. 271-299.

[F] A. FUJIKI, *On automorphism groups of compact Kähler manifolds*, Invent. Math., 44, 1978, p. 225-258.

[Ha] R. HARTSHORNE, *Cohomological dimension of algebraic varieties*, Ann. Math., 88, 1968, p. 405-450.

[H1] N. HITCHIN, *Kählerian twistor spaces*. Proc., London, Math. Soc., 43, 1981, p. 133-150.

[H2] N. HITCHIN, *Linear field equations on self-dual spaces*, Proc. R. Soc., London, A 370, 1980, p. 173-191.

[Hi] H. HIRONAKA, *On some formal embeddings*. III, J. Math., 12, 1968, p. 587-602.

[H-M] H. HIRONAKA-H. MATSUMURA, *Formal functions and formal embeddings*, J. Math. Soc. Jpn, 20, 1968, p. 52-82.

[Hz] A. HIRSCHOWITZ, *On the convergence of formal equivalence between embeddings*, Ann. Math., 113, 1981, p. 501-514.

[Kh] M. KHALOUI, *Espaces de Twisteurs et complexification d'une variété conformément plate.* Thèse de 3e cycle, Université de Nancy, 1987.

[Ko] K. KODAIRA, *A theorem of completeness of characteristic systems for analytic famillies of compact submanifolds of a complex manifold*, Ann. Math., 75, 1962, p. 146-162.

[Ku] N. KUIPER, *On conformally flat spaces in the large*, Ann. Math., 50, 1949, p. 916-924.

[Li] D. LIEBERMAN, *Compactness of the Chow scheme*, Lect. Notes 670, Springer Verlag, 1978, p. 140-185.

[Pe] R. PENROSE, *Nonlinear gravitons and curved twistor theory. General Relativity and Gravitation*, 7, 1976, p. 31-52.

[P] Y. S. POON, *Compact self-dual manifolds with positive scalar curvature*, J. Diff. Geom., 24, 1986, p. 97-132.

[Sa] S. SALAMON, *Quaternionic Kähler manifolds*, Invent. Math., 67, 1982, p. 143-171.

[Se] J. P. SERRE, *On the fundamental group of a unirational variety*, J. of London Math. Soc., 34, 1959, p. 481-484.

[S] M. SLUPINSKI, *Espaces de twisteurs kähleriens en dimension* $4k$, $k>1$. Thèse École Polytechnique, 1984.

[Sp] E. H. SPANIER, *Algebraic topology. McGraw Hill series in higher mathematics*, New York, 1966.

[St] STEINBISS, *Das formale Prinzip für reduzierte komplexe Raüme mit einer schwachen Positivitätseigenschaft*. Math. Ann., 274, 1986, p. 485-502.

(Manuscrit reçu le 22 décembre 1988,
révisé le 24 novembre 1989).

F. CAMPANA,
Université Nancy-I,
Département de Mathématiques,
B. P. 239,
F. 54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex, France.