ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

YVES BENOIST

Modules simples sur une algèbre de Lie nilpotente contenant un vecteur propre pour une sous-algèbre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 23, nº 3 (1990), p. 495-517
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1990_4_23_3_495_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4[e] série, t. 23, 1990, p. 495 à 517.

MODULES SIMPLES SUR UNE ALGÈBRE DE LIE NILPOTENTE CONTENANT UN VECTEUR PROPRE POUR UNE SOUS-ALGÈBRE

PAR YVES BENOIST

Plan

0. Introduction.
1. $\mathscr{D}$-modules avec action d'un groupe algébrique.
   1.1. F. o. d. t. avec action de H.
   1.2. $\mathscr{D}$-modules avec action de H.
   1.3. Foncteurs pour les $\mathscr{D}$-modules avec action de H.
2. $\mathscr{D}$-modules (H, μ)-équivariants.
3. Foncteurs d'entrelacement.
   3.1. Localisation.
   3.2. Foncteurs d'entrelacement.
4. Géométrie des orbites.
   4.1. Lemmes.
   4.2. Exemples.
5. Modules simples associés à une composante lagrangienne.
   5.1. Construction du module simple M_ω.
   5.2. Polarisations adjacentes.
   5.3. Indépendance de la polarisation.
   5.4. Construction par récurrence de M_ω.
6. $U/(I+U\mathfrak{k}^f)$.
   6.1. $U/(I+U\mathfrak{k}^f)$.
   6.2. Exemple de multiplicité.
   6.3. Questions.

Références.

Introduction

0.1 Notations. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente sur un corps F algébriquement clos de caractéristique 0, $U = U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante, I un idéal primitif de U et Ω l'orbite dans $\mathfrak{g}^*$ correspondante; c'est une variété symplectique.

Soient $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ telle que $f([\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]) = 0$ et $\mathfrak{k}^f := \{ T - f(T) \mid T \in \mathfrak{k} \} \subset U$. On note par une lettre latine G, K... les groupes unipotents correspondants. Pour tout $\mathfrak{g}$-module N on note $N^{\mathfrak{k}, f} := \{ n \in N \mid \mathfrak{k}^f . n = 0 \}$.

0.2. Résultats. — Pour chaque composante irréductible lagrangienne Λ de la variété coïsotrope $Z := \Omega \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$, on construit un $\mathfrak{g}$-module simple M_Λ d'annulateur I tel que $m_\Lambda := \dim M_\Lambda^{\mathfrak{k}, f} \neq 0$ (5).

On montre que le $\mathfrak{g}$-module $M := U/(I + U\mathfrak{k}^f)$ est de longueur finie si et seulement si Z est lagrangienne. Et dans ce cas :

(i) M est isomorphe à $\displaystyle\bigoplus_{\Lambda \text{ comp. irr. de } Z} (M_\Lambda)^{m_\Lambda}$.

(ii) Tout $\mathfrak{g}$-module simple N annulé par I tel que $N^{\mathfrak{k}, f} \neq 0$ est isomorphe à M_Λ pour une unique composante Λ (6).

En particulier :

$$M = 0 \Leftrightarrow Z = \varnothing.$$

Les multiplicités m_Λ ne sont pas toujours égales à 1 (6), même lorsque Z est une K-orbite, contrairement au cas des modules sphériques [Be].

0.3. Méthodes. — Donnons quelques détails de la méthode suivie : Soit Λ une composante irréductible de Z. Supposons que $f \in \Lambda$. Soient $\mathfrak{b}$ une polarisation en f et $p : G.f \to G/B$ la projection : U/I s'identifie à un anneau d'opérateurs différentiels tordus $D_{f, X}$ sur G/B. On montre que Λ est lagrangienne si et seulement si $p(\Lambda)$ est une K-orbite (4) et que, dans ce cas, le $D_{f, X}$-module M_Λ : « image directe des fonctions sur $p(\Lambda)$ » ne dépend pas du choix de $\mathfrak{b}$ (5). La démonstration utilise les « foncteurs d'entrelacements » étudiés en (3). Les $D_{f, X}$-modules M_Λ et M sont (K, f)-équivariants (*c.f.* ci-dessous) et leur étude peut être menée dans un cadre plus général.

Soit X une variété algébrique lisse sur F sur laquelle un groupe algébrique H agit et $\mathscr{D}$ un faisceau d'opérateurs différentiels tordus avec action de H ([Ka], [BB1]). Soit $\mu \in (\mathfrak{h}/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])^*$. Soit $\mathscr{C}$ la catégorie des $\mathscr{D}$-modules cohérents (H, μ)-équivariants (*i. e.* des $\mathscr{D}$-modules avec action de H tels que la différence de l'action de $\mathfrak{h}$ à travers $\mathscr{D}$ et de la différentielle de l'action de H est égale à μ). On définit un ensemble A d'orbites admissibles (2) et on montre que A est fini si et seulement si l'ensemble des objets simples de $\mathscr{C}$ l'est. Dans ce cas ces deux ensembles sont naturellement reliés. Si en outre les orbites admissibles sont fermées alors $\mathscr{C}$ est une catégorie semi-simple (*i. e.* sans extension) (2).

On appliquera ceci à $H = K$ et $X = G/B : p(Z)$ est alors la réunion des orbites admissibles (4).

0.4. MOTIVATIONS. — Supposons un instant que $F=\mathbb{C}$, que $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{k}$) est la complexifiée d'une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_0$ (resp. $\mathfrak{k}_0$), que $f \in i\mathfrak{g}_0^*$ ($i=\sqrt{-1}$) et que $\Omega = G.\Omega_0$ où Ω_0 est une G_0-orbite dans $i\mathfrak{g}_0^*$. Soient π_0 la représentation unitaire irréductible associée à Ω_0 [Ki 1] et $\mathscr{H}_{\pi_0}^{-\infty}$ le $\mathfrak{g}$-module des vecteurs distributions de cette représentation. L'espace $M_0 := (\mathscr{H}_{\pi_0}^{-\infty})^{\mathfrak{k}, f}$(au moins sa valeur pour « presque tout π_0 ») joue, via la dualité de Frobenius, un rôle dans la désintégration de la représentation $\mathrm{Ind}_{K_0}^{G_0}(\chi_f)$ induite à partir du caractère χ_f de K_0 dont la différentielle est $f|_{\mathfrak{k}_0}$ [Pe].

Une de mes motivations est l'étude de cet espace « pour tout π_0 » et du lien entre celui-ci et $Z_0 := \Omega_0 \cap (f+\mathfrak{k}^\perp)$. Malheureusement, ce lien n'est pas aussi précis que celui entre M et Z : j'ai construit un exemple où Z_0 est lagrangienne mais où $\dim M_0 = \infty$ (non publié).

Une approche pour ce problème est de remarquer que, pour tout a dans M_0, le $\mathfrak{g}$-module engendré par a est un quotient de M. Ainsi ces résultats permettent facilement de montrer les implications :

$$Z=\varnothing \quad \Rightarrow \quad M_0=0 \quad \Rightarrow \quad Z_0=\varnothing$$

et

$$Z \text{ est lagrangienne} \quad \Rightarrow \quad \dim M_0 < \infty \quad \Rightarrow \quad Z_0 \text{ est lagrangienne.}$$

Je remercie M. Duflo qui est à l'origine de ce travail.

1. $\mathscr{D}$-modules avec action d'un groupe algébrique.

Les idées de cette partie viennent de [B-B] et [Ka].

1.1. F. o. d. t. AVEC ACTION DE H. — Soient X une variété algébrique lisse sur un corps F algébriquement clos de caractéristique 0 et $i_X : \mathscr{O}_X \hookrightarrow \mathscr{D}_X$ l'injection du faisceau structural dans celui des opérateurs différentiels.

DÉFINITION. — *Un faisceau $\mathscr{D}$ d'algèbres sur $\mathscr{O}_X$ est un f. o. d. t. (faisceau d'opérateurs différentiels tordus) si localement (en topologie de Zariski) le morphisme $i : \mathscr{O}_X \to \mathscr{D}$ est isomorphe à i_X.*

Soient H un groupe algébrique qui agit sur X et $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$.

DÉFINITION. — *Un « f. o. d. t. avec action de* H *» est la donnée d'un f. o. d. t. $\mathscr{D}$ qui est un $\mathscr{O}_X$-module équivariant et d'un morphisme de* H*-modules $\alpha : \mathfrak{h} \to \Gamma(X, \mathscr{D})$ tels que :*

(i) *l'injection $i : \mathscr{O}_X \to \mathscr{D}$ est équivariante ;*

(ii) *la multiplication dans $\mathscr{D}$ est équivariante ;*

(iii) *la différentielle de l'action de* H *sur $\Gamma(X, \mathscr{D})$ est donnée par*

$$\mathfrak{h} \ni \xi \mapsto (D \mapsto [\alpha(\xi), D]).$$

Si X est un espace homogène, *i. e.* $X = H/I$ où I est un sous groupe algébrique de H, on dit que $\mathscr{D}$ est un f. h. o. d. t. Rappelons la construction des f. h. o. d. t. : Soit $\mathfrak{i} = \mathrm{Lie}(I)$, $\mathfrak{i}^*$ le dual de $\mathfrak{i}$ et $(\mathfrak{i}^*)^I$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathfrak{i}$ invariantes par I. Soit $\lambda \in (\mathfrak{i}^*)^I$.

Le faisceau $\mathcal{O}_X \otimes U(\mathfrak{h})$ a une structure d'algèbre donnée par la relation de commutation :

$$[1 \otimes X, \varphi \otimes 1] = L_X \varphi \otimes 1, \qquad \forall X \in \mathfrak{h}, \quad \varphi \in \mathcal{O}_X(V)$$

où $(L_X \varphi)(x) = d/dt\, \varphi(\exp(-tX)x)|_{t=0}$. Soient $\mathscr{I} \subset \mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{h}$ le faisceau d'isotropie :

$$\mathscr{I} := \{ \textstyle\sum \varphi_i \otimes X_i \in \mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{h} \mid \forall h \in H\ (\mathrm{Ad} h^{-1})(\sum \varphi_i(hI) X_i) \in \mathfrak{i} \},$$

$l : \mathscr{I} \to \mathcal{O}_X$ le morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules donné par

$$(l(\textstyle\sum \varphi_i \otimes X_i))(hI) = \lambda((\mathrm{Ad} h^{-1})(\sum \varphi_i(hI) X_i))$$

et

$$\mathscr{I}^l := \{ \xi - l(\xi) \mid \xi \in \mathscr{I} \}$$

le faisceau d'isotropie tordu $(\mathcal{O}_X \otimes U(\mathfrak{h}))\mathscr{I}^l$ est un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X \otimes U(\mathfrak{h})$. On pose

$$\mathscr{D}_{\lambda, X} = (\mathcal{O}_X \otimes U(\mathfrak{h}))/(\mathcal{O}_X \otimes U(\mathfrak{h}))\mathscr{I}^l$$

[noté $\mathscr{A}_X(\lambda)$ dans [Ka]].

PROPOSITION 1.1 ([B-B]). — *Soit* $X = H/I$. *L'application* $\lambda \to \mathscr{D}_{\lambda, X}$ *est une bijection de* $(\mathfrak{i}^*)^I$ *sur l'ensemble des f. h. o. d. t,*

1.2. $\mathscr{D}$-MODULES AVEC ACTION DE H.

DÉFINITION. — *Soit* $\mathscr{D}$ *un f. o. d. t. avec action de* H, *on dit que* $\mathscr{M}$ *est un* $\mathscr{D}$*-module avec action de* H *si* $\mathscr{M}$ *est un* $\mathscr{D}$*-module* (*quasi-cohérent et à gauche*) *et un* $\mathcal{O}_X$*-module* H*-équivariant tel que l'action de* $\mathscr{D}$ *sur* M *est* H*-équivariante.*

$\mathscr{M}$ a alors deux structures de $\mathfrak{h}$-modules. La première via $\mathfrak{h} \to \Gamma(X, \mathscr{D})$, est notée α, la deuxième, différentielle de l'action de H, est notée β. La différence $\gamma = \beta - \alpha$ est une action de $\mathfrak{h}$ qui est $\mathcal{O}_X$ linéaire.

DÉFINITION. — *Un* $(\mathfrak{h}, I)$*-module* λ*-tordu* M *est la donnée de structures de* $\mathfrak{h}$*-module* $\rho : \mathfrak{h} \to \mathrm{End}(M)$ *et de* I*-module* $\pi : I \to GL(M)$ (*on suppose que* M *est réunion de sous-*I*-modules algébriques de dimension finie*) *telle que* ρ *est* I*-équivariante et*, $\forall T \in \mathfrak{i}$, $d\pi(T) = \rho(T) + \lambda(T)\,\mathrm{Id}$.

PROPOSITION 1.2. — *Soit* $X = H/I$. *La catégorie des* $\mathscr{D}_{\lambda, X}$*-modules avec action de* H *est équivalente à la catégorie des* $(\mathfrak{h}, I)$*-modules* λ*-tordus. L'équivalence est donnée par la fibre géométrique* $\mathscr{M} \to i^*(\mathscr{M})$ *où* $i : \{I\} \to X$ *est l'injection du point de base.*

Démonstration cf. [Ka], th. 4.10.2. — La structure de I-module sur $i^*(\mathscr{M})$ est claire. Celle de $\mathfrak{h}$-module est donnée par γ.

DÉFINITION. — *Soient* μ *un caractère de* $\mathfrak{h}$ (i. e. $\mu \in (\mathfrak{h}/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])^*$) *et* $\mathscr{D}$ *un f. o. d. t. avec action de* H. *Un* $\mathscr{D}$*-module* (H, μ)*-équivariant est un* $\mathscr{D}$*-module avec action* H *tel que* $\gamma = -\mu \,\mathrm{Id}$.

Lorsque H est connexe, la catégorie des $\mathscr{D}$-modules (H, μ)-équivariants est une sous-catégorie pleine de la catégorie des $\mathscr{D}$-modules.

Exemple. — Soient F_μ le $\mathfrak{h}$-module de dimension 1 donné par μ et V un H-module, alors

$$\mathscr{M}^\mu := \mathscr{D} \otimes_{U(\mathfrak{h})} (F_\mu \otimes V)$$

est un $\mathscr{D}$-module (H, μ)-équivariant [l'action de $\mathscr{D}$ est donnée par $d'.(d \otimes 1 \otimes v) = d'd \otimes 1 \otimes v$ et celle de H par $h(d \otimes 1 \otimes v) = (h.d) \otimes 1 \otimes (h.v)$].

COROLLAIRE. — *Soit* $X = H/I$. *La catégorie des* $\mathscr{D}_{\lambda, X}$*-modules* (H, μ)*-équivariants est équivalente à la catégorie des I-modules* (M, π) *tels que* $\forall X \in \mathfrak{i}$, $d\pi(X) = (\lambda(X) - \mu(X))\,\mathrm{Id}$. *L'équivalence est donnée par* $\mathscr{M} \to i^*(\mathscr{M})$.

En particulier cette catégorie est semi-simple et n'a qu'un nombre fini d'objets simples (*cf.* [Ki 2], 14.2).

Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}$-module cohérent, on note $\mathrm{Supp}(\mathscr{M}) \subset X$ son support et $\mathrm{Ch}(\mathscr{M}) \subset T^*X$ sa variété caractéristique. $\mathscr{M}$ est dit holonome si $\dim \mathrm{Ch}(\mathscr{M}) = \dim X$.

1.3. FONCTEURS POUR LES $\mathscr{D}$-MODULES AVEC ACTION DE H. — Soit $\mathscr{D}$ un f. o. d. t. avec action de H sur X.

Soit $\mathscr{L}$ un fibré inversible H-équivariant alors $\mathscr{D}^{\mathscr{L}} := \mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}^{\otimes -1}$ est naturellement un f. o. d. t. avec action de H ([Ka], 2.6.5). En outre le foncteur $\mathscr{M} \to \mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M}$ est une équivalence de la catégorie des $\mathscr{D}$-modules avec action de H [resp. (H, μ)-équivariants] dans celle des $\mathscr{D}^{\mathscr{L}}$-modules avec action de H [resp. (H, μ)-équivariants].

Soit ν un caractère de H : c'est une représentation de H dans un espace vectoriel de dimension 1 : F_ν. Le foncteur $\mathscr{M} \to \mathscr{M}_\nu := \mathscr{M} \otimes_F F_\nu$ est une équivalence de catégorie entre $\mathscr{D}$-modules (H, μ)-équivariants et $\mathscr{D}$-modules (H, $\mu - d\nu$)-équivariants (l'action de $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{M}_\nu$ se fait sur $\mathscr{M}$, celle de H se fait sur les deux facteurs $\mathscr{M}$ et F_ν).

Le faisceau d'anneaux opposés $\mathscr{D}^{\mathrm{opp}}$ est aussi un f. o. d. t. avec action de H (par exemple $(\mathscr{D}_X)^{\mathrm{opp}} = (\mathscr{D}_X)^{\Omega_X^{\max}}$ où $\Omega_X^{\max}$ est le faisceau des formes différentielles de degré maximal). Un $\mathscr{D}$-module à droite avec action de H est (par définition) un $\mathscr{D}^{\mathrm{opp}}$-module avec action de H.

Soient $\varphi : Y \to X$ un morphisme de H-variétés lisses, $\varphi^{\cdot}$ et $\varphi_{\cdot}$ les images inverse et directe en théorie des faisceaux, $\mathscr{D}_{\to} = \varphi^*(\mathscr{D}) := \mathscr{O}_Y \otimes_{\varphi^{\cdot}(\mathscr{O}_X)} \varphi^{\cdot}(\mathscr{D})$ et $\mathscr{D}^\varphi$ le f. o. d. t. avec action de H sur Y, image inverse de $\mathscr{D}$ ([B-B 2]) : $\mathscr{D}^\varphi$ est le faisceau des endomorphismes différentiels du $\mathscr{O}_Y$-module $\varphi^*(\mathscr{D})$ qui commutent à l'action à droite de $\varphi^{\cdot}(\mathscr{D})$. Par construction, $\mathscr{D}_{\to}$ est un $\mathscr{D}^\varphi$-module avec action de H et un $\varphi^{\cdot}(\mathscr{D})$-module à droite. Exemple : $\mathscr{D}_X^\varphi = \mathscr{D}_Y$. Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}$-module avec action de H [resp. (H, μ)-équivariant]. On note $\varphi^*(\mathscr{M}) := \mathscr{D}_{\to} \otimes_{\varphi^{\cdot}(\mathscr{D})} \varphi^{\cdot}(\mathscr{M})$ le $\mathscr{D}^\varphi$-module avec action de H [resp. (H, μ)-équivariant] image inverse de $\mathscr{M}$.

On a l'égalité de f. o. d. t. avec action de H : $(\mathscr{D}^{\mathrm{opp}})^{\varphi}=((\mathscr{D}^{\varphi})^{\Omega^{\max}_{Y|X}})^{\mathrm{opp}}$ où $\Omega^{\max}_{Y|X}=\Omega^{\max}_{Y}\otimes_{\mathscr{O}_Y}\varphi^*(\Omega^{\max}_{X})^{\otimes -1}$ ([Ka], 2.11). Soit $\mathscr{D}_{\leftarrow}:=\Omega^{\max}_{Y|X}\otimes_{\mathscr{O}_Y}\varphi^*(\mathscr{D}^{\mathrm{opp}})$, c'est un $(\varphi^{\bullet}(\mathscr{D}), \mathscr{D}^{\varphi})$-bimodule. Donc si $\mathscr{M}'$ est un $\mathscr{D}$-module à droite avec action de H, $\varphi^{\bullet}(\mathscr{M}')\otimes_{\varphi^{\bullet}(\mathscr{D})}\mathscr{D}_{\leftarrow}=\Omega^{\max}_{Y|X}\otimes_{\varphi^{\bullet}(\mathscr{O}_X)}\varphi^{\bullet}(\mathscr{M}')$ est un $\mathscr{D}^{\varphi}$-module à droite avec action de H. D'autre part, on note $\varphi^{+}(\mathscr{M})=\mathscr{H}om_{\varphi^{\bullet}(\mathscr{D})}(\mathscr{D}_{\leftarrow}, \varphi^{\bullet}(\mathscr{M}))$: c'est un $\mathscr{D}^{\varphi}$-module avec action de H.

Soit $\mathscr{N}'$ (resp. $\mathscr{N}$) un $\mathscr{D}^{\varphi}$-module à droite (resp. à gauche) avec action de H, on note : $\varphi_{+}(\mathscr{N}'):=\varphi_{\bullet}(\mathscr{N}'\otimes_{\mathscr{D}^{\varphi}}\mathscr{D}_{\rightarrow})$ [resp. $\varphi_{+}(\mathscr{N}):=\varphi_{\bullet}(\mathscr{D}_{\leftarrow}\otimes_{\mathscr{D}^{\varphi}}\mathscr{N})$] le $\mathscr{D}$-module à droite (resp. à gauche) avec action de H image directe de $\mathscr{N}'$ (resp. $\mathscr{N}$).

PROPOSITION 1.3 (Kashiwara). — *Soit* $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ *une sous variété fermée, lisse et stable par* H, *alors les foncteurs*

$\mathscr{D}^i$-modules cohérents avec action de H *[resp.* (H, μ)*-équivariants]*	$\longleftrightarrow$	*$\mathscr{D}$-modules cohérents avec action de* H *[resp.* (H, μ)*-équivariants] dont le support est inclus dans* Y
$\mathscr{N}$	$\longrightarrow$	$i_{+}(\mathscr{N})$
$i^{+}(\mathscr{M})$	$\longleftarrow$	$\mathscr{M}$

sont des équivalences de catégories inverses.

Prenons les notations de 1.1 : soit $\psi: K\to H$ un morphisme de groupes, J un sous groupe de K tel que $\psi(J)\subset I$ et $\varphi: Y=K/J\to X=H/I$ le morphisme de variétés que l'on déduit de ψ, alors $\forall \lambda\in(\mathfrak{i}^*)^{I}$, on a l'égalité de f. o. d. t. avec action de K sur $Y:(\mathscr{D}_{\lambda, X})^{\varphi}=\mathscr{D}_{\lambda\circ\psi, Y}$ ([Ka], 4.14). Dans cette situation, on note $\mathscr{D}_{\lambda, Y\rightarrow X}:=\mathscr{D}_{\rightarrow}$ et $\mathscr{D}_{\lambda, X\leftarrow Y}:=\mathscr{D}_{\leftarrow}$.

On a $(\mathscr{D}_{\lambda, X})^{\mathrm{opp}}=\mathscr{D}_{-\lambda+2\rho, X}$ où $\rho(.)=1/2\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\mathrm{ad}.)$ ([Ka]).

2. $\mathscr{D}$-modules (H, μ)-équivariants.

Dans cette partie, nous donnons des conditions suffisantes pour qu'un $\mathscr{D}$-module (H, μ)-équivariant soit holonome. Sous ces conditions, on peut décrire ceux qui sont simples.

Soient H un groupe algébrique, $\mu\in(\mathfrak{h}/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}])^*$, X une H-variété lisse et $\mathscr{D}$ un f. o. d. t. avec action de H.

Soient $x\in X$, $\omega=H.x$ l'orbite contenant x, $i_{\omega}:\omega\hookrightarrow X$ l'injection, $I_x:=\{h\in H \mid h.x=x\}$ le groupe d'isotropie en x et $\mathfrak{i}_x$ son algèbre de Lie. Le f. h. o. d. t. $\mathscr{D}^{i_{\omega}}$ correspond, d'après 1.1, à un élément $\lambda_{\omega}\in(\mathfrak{i}_x^*)^{I_x}$. On pose $\hat{\omega}=\{\pi$, représentation (algébrique de dimension finie) irréductible de I_x telle que $d\pi=(\lambda_{\omega}-\mu|_{\mathfrak{i}_x})\,\mathrm{Id}\}$. C'est un ensemble fini ; pour π dans $\hat{\omega}$, on note $\mathscr{O}_{\pi}$ le $\mathscr{D}^{i_{\omega}}$-module simple correspondant (1.2).

DÉFINITION. — *Une orbite est dite admissible si* $\hat{\omega}\neq\varnothing$. *On note* A *l'ensemble des orbites admissibles et* $\hat{A}=\{(\omega, \pi)/\omega\in A$ *et* $\pi\in\hat{\omega}\}$.

PROPOSITION 2.1. — *Avec ces notations, soit* $\mathcal{M}$ *un* $\mathcal{D}$*-module cohérent* (H, μ)*-équivariant.*

(*a*) *Si* $A=\varnothing$ *alors* $\mathcal{M}=0$.

(*b*) *Si* A *est fini alors* $\mathcal{M}$ *est un* $\mathcal{D}$*-module holonome.*

(*c*) *Dans ce cas, on a une bijection naturelle*

$$\hat{A} \tilde{\to} \{\ \mathcal{D}\text{-}modules\ (H,\ \mu)\text{-}\acute{e}quivariants\ simples\ \}$$

donnée par $(\omega, \pi) \to$ *l'unique sous module* (H, μ)*-équivariant simple de* $i_{\omega+}(\mathcal{O}_\pi)$.

(*d*) *Si, en outre, toutes les orbites admissibles sont fermées alors la catégorie des* $\mathcal{D}$*-modules cohérents* (H, μ)*-équivariants est une catégorie semi-simple* (i. e. *tout objet est somme directe finie d'objets simples*).

Cette proposition généralise la description des $\mathcal{D}_X$-modules H-équivariants pour une variété avec un nombre fini d'orbites ([Bo], VII, th. 12.11). Elle en diffère de deux façons :

(1) $\mathcal{M}$ *n'est pas en général un* $\mathcal{D}$*-module holonome régulier* (cf. [Bo], VII, 11 ou [Ka], 3.5).

Exemple. – H = F = le sous groupe unipotent de SL(2, F) qui agit sur $X=P_1F=F\cup\{\infty\}$ par $\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}.z=z+h$, $\forall h\in F$, $\forall z\in X$ (X a deux orbites), $\mathfrak{h}=FE=$ son algèbre de Lie $\left(E=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$, $\mu\in\mathfrak{h}^*$ l'élément donné par $\mu(E)=1$ et $\mathcal{D}=\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels. Le $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}=\mathcal{D}_X\otimes_{\mathfrak{h}}F_\mu=\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X(E-1)$ est (H, μ)-équivariant mais il n'est pas holonome régulier ; en effet, au voisinage de l'infini on a $E-1=y^2\partial_y-1$.

(2) *Le support de* $\mathcal{M}$ *peut contenir une infinité d'orbites.*

Exemple. – $H=\{(a, b)\in F^*\times F\}=$ le groupe affine de la droite, $\mathfrak{h}=FA\oplus FB$ son algèbre de Lie avec $[A, B]=B$, $X=\mathfrak{h}^*=\{(x, y)=xA^*+yB^*\}$ l'espace de la représentation coadjointe [l'action est donnée par : $(a, b)^{-1}.(x, y)=(x-by, ay)$, $\forall (a, b)\in H$, $(x, y)\in X$], $\mathcal{D}=\mathcal{D}_X$ et μ tel que $\mu(A)=\gamma\in F\setminus\mathbb{Z}$ et $\mu(B)=0$. Il y a une seule orbite admissible l'orbite ouverte Ω (car μ ne s'intègre pas en un caractère de H). Le $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}=\mathcal{D}_X\otimes_{\mathfrak{h}}F_\mu=\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X(y\partial_y-\gamma,\ y\partial_x)$ est (H, μ)-équivariant. On vérifie que $\mathcal{M}$ est holonome (car $\gamma\neq-1$) et pourtant $\text{Supp}(\mathcal{M})=X$ contient une infinité d'orbites.

Démonstration. – Pour toute partie P de X on note $i_P : P \hookrightarrow X$ l'injection naturelle.

(*a*) Notons $A_{\mathcal{M}}=\{\omega\in A \mid \omega\subset \text{Supp}(\mathcal{M})\}$ et montrons que

$$\text{Supp}(\mathcal{M})=\overline{\bigcup_{\omega\in A_{\mathcal{M}}}\omega}$$

[Si $A=\varnothing$, on aura alors $\mathcal{M}=0$]. Quitte à ôter à X la partie singulière de $\text{Supp}(\mathcal{M})$, on peut supposer que $S=\text{Supp}(\mathcal{M})$ est une variété lisse. On peut alors écrire, grâce à 1.3,

$\mathscr{M}=i_{S+}(\mathscr{N})$ où $\mathscr{N}$ est un $\mathscr{D}^{i_S}$-module (H, μ)-équivariant. On se ramène ainsi au cas où $\mathrm{Supp}(\mathscr{M})=\mathrm{X}$.

Dans ce cas, il existe un ouvert dense U de X sur lequel $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{O}_X$-module localement libre [Mi]. En particulier, si $x\in \mathrm{U}$, on a $i_x^*(\mathscr{M})\neq 0$. Soient $\omega=\mathrm{H}.x$ et $j_x:\{x\}\hookrightarrow \omega$ l'injection naturelle, on a $i_x^*(\mathscr{M})=j_x^*(i_\omega^*(\mathscr{M}))$. Donc $i_\omega^*(\mathscr{M})$ est un $\mathscr{D}^{i_\omega}$-module (H, μ)-équivariant non nul. On en déduit que ω est admissible (1.2). Donc

$$\mathrm{X}=\overline{\bigcup_{\omega\in \mathrm{A}}\omega}.$$

(*b*) Soit U le plus grand ouvert sur lequel $\mathscr{M}$ est holonome et $\mathrm{F}=\mathrm{X}\setminus\mathrm{U}$. On a bien sûr $\mathrm{F}\subset \mathrm{Supp}(\mathscr{M})$. On veut montrer que $\mathrm{F}=\varnothing$. Quitte à ôter à X la partie singulière de F, on peut supposer que F est lisse.

On a alors une suite exacte de $\mathscr{D}$-modules (H, μ)-équivariants [Bo], VI, prop. 8.2) :

$$\mathrm{O}\to \underline{\Gamma}_{\mathrm{F}}(\mathscr{M})\to \mathscr{M}\to i_{\mathrm{U}+}(\mathscr{M}|_{\mathrm{U}})$$

où $\underline{\Gamma}_{\mathrm{F}}(\mathscr{M})$ est le faisceau des sections de $\mathscr{M}$ à support dans F. Par hypothèse $\mathscr{M}|_{\mathrm{U}}$ est holonome, donc $i_{\mathrm{U}+}(\mathscr{M}|_{\mathrm{U}})$ aussi ([Bo], VII, th. 10.1). Pour montrer que $\mathscr{M}$ est holonome, il suffit de montrer que $\underline{\Gamma}_{\mathrm{F}}(\mathscr{M}$' l'est. On peut écrire, grâce à 1.3, $\mathscr{M}=i_{\mathrm{F}+}(\mathscr{N})$ où $\mathscr{N}$ est un $\mathscr{D}^{i_{\mathrm{F}}}$-module (H, μ)-équivariant qui n'est holonome sur aucun ouvert de F ([Bo], VI, lemme 7.8). On se ramène ainsi au cas où $\mathrm{F}=\mathrm{X}$.

Dans ce cas, $\mathrm{Supp}(\mathscr{M})=\mathrm{X}$. On a alors $\overline{\bigcup_{\omega\in\mathrm{A}}\omega}=\mathrm{X}$, d'après (*a*). Comme A est fini, il existe une orbite admissible ω ouverte dans X. La proposition 1.2 prouve alors que le $\mathscr{D}^{i_\omega}$-module cohérent (H, μ)-équivariant $\mathscr{N}=\mathscr{M}|_\omega$ est déjà cohérent comme $\mathscr{O}_X$-module ([Ka], th., 4.10.2). Il est holonome, ce que contredit l'égalité $\mathrm{F}=\mathrm{X}$.

(*c*) Soit $(\omega, \pi)\in\hat{\mathrm{A}}$. Soit $\mathscr{M}_\pi=i_{\omega+}(\mathscr{O}_\pi)$: c'est un $\mathscr{D}$-module holonome (H, μ)-équivariant; en particulier il est de longueur finie. Montrons que $\mathscr{M}$ a un unique sous $\mathscr{D}$-module (H, μ)-équivariant (on dira « sous-module » si cela ne prête pas à confusion) simple. Comme ω est une orbite d'un groupe algébrique, elle est localement fermée : soit $\mathrm{U}=\mathrm{X}\setminus(\bar{\omega}\setminus\omega)$, ω est fermée dans U et U est ouvert dans X. Notons $j:\omega\hookrightarrow \mathrm{U}$ l'injection. Soit $\mathscr{N}=j_+(\mathscr{O}_\pi)$: c'est un $\mathscr{D}^{i_\omega}$-module (H, μ)-équivariant simple (1.3). On a $\mathscr{M}_\pi=i_{\mathrm{U}+}(\mathscr{N})$, donc $\mathscr{M}_\pi|_{\mathrm{U}}=\mathscr{N}$ et $\mathscr{M}_\pi$ a un unique sous-quotient simple $\mathscr{M}'$ tel que $\mathscr{M}'|_{\mathrm{U}}=\mathscr{N}$. Soient $\mathscr{M}_k\,(k=1,2)$ deux sous modules simples de $\mathscr{M}_\pi$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_X(\mathscr{M}_k,\mathscr{M}_\pi)&=\mathrm{Hom}_X(\mathscr{M}_k, i_{\mathrm{U}.}(\mathscr{N}))\\&=\mathrm{Hom}_X(\mathscr{M}_k|_{\mathrm{U}},\mathscr{N})\end{aligned}$$

où Hom_X (resp. Hom_U) désigne l'ensemble des morphismes dans la catégorie des $\mathscr{D}$-modules (resp. $\mathscr{D}^{i_U}$-modules) (H, μ)-équivariants. On en déduit $\mathscr{M}_k|_{\mathrm{U}}\neq 0$ d'où $\mathscr{M}_k|_{\mathrm{U}}=\mathscr{N}$ puis $\mathscr{M}_1\cap\mathscr{M}_2\neq 0$ et enfin $\mathscr{M}_1=\mathscr{M}_2\,(\simeq\mathscr{M}')$. Donc $\mathscr{M}_\pi$ a un unique sous module simple. Notons le $\mathscr{L}(\omega, \pi)$.

Soient (ω, π) et $(\omega', \pi')\in\hat{\mathrm{A}}$. Supposons que $\mathscr{L}(\omega, \pi)$ et $\mathscr{L}(\omega', \pi')$ sont isomorphes. Comme $\bar{\omega}=\mathrm{Supp}(\mathscr{L}(\omega, \pi))$, on a $\bar{\omega}=\bar{\omega}'$ d'où $\omega=\omega'$. En outre, comme $\mathscr{O}_\pi=i_\omega^+(\mathscr{L}(\omega, \pi))$, on a $\pi=\pi'$.

Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}$-module (H, μ)-équivariant simple, montrons qu'il existe $(\omega, \pi) \in \hat{A}$ tel que $\mathscr{M} \approx \mathscr{L}(\omega, \pi)$. Par hypothèse l'ensemble $A_{\mathscr{M}} = \{ \omega \in A \mid \omega \subset \operatorname{Supp}(\mathscr{M}) \}$ est fini, et le (*a*) prouve que

$$\operatorname{Supp}(\mathscr{M}) = \overline{\bigcup_{\omega \in A_{\mathscr{M}}} \omega},$$

donc il existe une orbite admissible ω qui est ouverte dans $S = \operatorname{Supp}(\mathscr{M})$. Soit $U = X \setminus (S \setminus \omega)$: ω est fermé dans U et U est ouvert dans X. Notons $j : \omega \subsetneq U$ l'injection. Le $\mathscr{D}^{i_U}$-module (H, μ)-équivariant $\mathscr{N} = \mathscr{M}|_U$ a pour support ω, il existe donc un $\mathscr{D}^{i_\omega}$-module (H, μ)-équivariant $\mathscr{V}$ tel que $\mathscr{N} = j_+(\mathscr{V})$ (1.3). Il existe π dans $\hat{\omega}$ tel que $\operatorname{Hom}_\omega(\mathscr{V}, \mathscr{O}_\pi) \neq 0$ (1.2). On a alors les identifications canoniques :

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_X(\mathscr{M}, \mathscr{M}_\pi) &= \operatorname{Hom}_X(\mathscr{M}, i_U.(j_+(\mathscr{O}_\pi))) \\ &= \operatorname{Hom}_U(\mathscr{M}|_U, j_+(\mathscr{O}_\pi)) \\ &= \operatorname{Hom}_\omega(\mathscr{V}, \mathscr{O}_\pi).\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{M}$ est l'unique sous module simple $\mathscr{L}(\omega, \pi)$ de $\mathscr{M}_\pi$.

(*d*) Soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}$-module cohérent (H, μ)-équivariant, montrons que $\mathscr{M}$ est semi-simple. Pour $\omega \in A$, notons $\underline{\Gamma}_\omega(\mathscr{M})$ le faisceau des sections de $\mathscr{M}$ à support dans ω. Comme les orbites admissibles sont fermées et en nombre fini, on a, d'après (*a*),

$$\operatorname{Supp}(\mathscr{M}) \subset \bigcup_{\omega \in A} \omega$$

puis

$$\mathscr{M} = \bigoplus_{\omega \in A} \underline{\Gamma}_\omega(\mathscr{M}).$$

On peut donc supposer que $\operatorname{Supp}(\mathscr{M}) = \omega$ est une orbite admissible. Dans ce cas on peut écrire $\mathscr{M} = i_{\omega +}(\mathscr{V})$ où $\mathscr{V}$ est un $\mathscr{D}^{i_\omega}$-module cohérent (H, μ)-équivariant; $\mathscr{V}$ est semi-simple (1.2) donc $\mathscr{M}$ aussi (1.3).

3. Foncteurs d'entrelacement.

Le théorème de Serre permet de « localiser » les $\mathfrak{g}$-modules annulés par un idéal primitif. Ce procédé de « localisation » dépend du choix d'une polarisation. Nous montrons dans cette partie, que des « foncteurs d'entrelacements », analogues à ceux introduits par Beilinson et Bernstein [B-B 2] dans le cas semi-simple, relient les localisés associés à des polarisations différentes.

3.1. Localisation. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente sur F, $U = U(\mathfrak{g})$, $f_0 \in \mathfrak{g}^*$, B_{f_0} la forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}$: $B_{f_0}(X, Y) = f_0([X, Y])$, $\mathfrak{g}(f_0)$ le noyau de B_{f_0}, $\Omega := G.f_0$: c'est une variété symplectique pour la 2-forme G-invariante donnée par B_{f_0} sur $T_{f_0}(\Omega) = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f_0)$, $2d := \dim(\Omega)$, I l'idéal primitif de U associé à l'orbite Ω par la bijection de Dixmier ([Di], th. 6.2.4), $R=U/I$, $\mathfrak{b}$ une polarisation en f_0 (*i. e.* une sous algèbre de $\mathfrak{g}$ isotrope pour B_{f_0} telle que $2\dim\mathfrak{b}=\dim\mathfrak{g}+\dim\mathfrak{g}(f_0)$), $X:=G/B$: c'est une variété affine isomorphe à F^d, $\mathscr{D}_{f_0}:=\mathscr{D}_{f_0,X}$ le f.h.o.d.t. sur X de paramètre $f_0|_{\mathfrak{b}}\in(\mathfrak{b}^*)^B$ (1.1) et $D_{f_0}=D_{f_0,X}:=\Gamma(X,\mathscr{D}_{f_0})$.

PROPOSITION 3.1 (Kirillov). — *Le morphisme d'algèbres* $U\to D_{f_0}$ *qui prolonge* α (*cf.* 1.1) *induit un isomorphisme* $R\simeq D_{f_0}$.

Démonstration (cf. [Ki] ou [Be 2], appendice A). – Notons Γ_X le foncteur « sections globales » de la catégorie des $\mathscr{D}_{f_0}$-modules (quasi-cohérents) dans celle des R-modules : $\Gamma_X(\mathscr{M})=\Gamma(X,\mathscr{M})$ et Δ_X le foncteur « localisation » de la catégorie des R-modules dans celle des $\mathscr{D}_{f_0}$-modules : $\Delta_X(M)=\mathscr{D}_{f_0}\otimes_R M$.

Le théorème de Serre donne alors :

LEMME. — *Les foncteurs* Γ_X *et* Δ_X *sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre.*

3.2. FONCTEURS D'ENTRELACEMENT. – Soient $\mathfrak{b}'$ une (autre) polarisation en f_0, $X'=G/B'$, $\mathscr{D}_{f_0,X'}$, $D_{f_0,X'}$, $\Gamma_{X'}$, $\Delta_{X'}$ comme ci-dessus, $Y=G/B\cap B'$, $\pi:Y\to X$ et $\pi':Y\to X'$ les projections naturelles, $\mathscr{D}_{f_0,Y}$, $\mathscr{D}_{f_0,Y\to X}$ et $\mathscr{D}_{f_0,X'\leftarrow Y}$ comme en 1.3. Lorsqu'un faisceau est désigné par une lettre ronde, on note par la lettre droite correspondante les sections globales de ce faisceau (ainsi $D_{f_0,Y\to X}=\Gamma(Y,\mathscr{D}_{f_0,Y\to X})$ est un $(D_{f_0,Y},D_{f_0,X})$-bimodule). Le foncteur image inverse π^* est un foncteur exact sur les $\mathscr{D}_{f_0,X}$-modules car π est une application lisse. Le foncteur image directe π'_+ est un foncteur exact à droite sur les $\mathscr{D}_{f_0,Y}$-modules car π' est une application affine (de fibre $B'/B\cap B'\simeq F^\delta$); on note $L^{-k}\pi'_+$ son k-ième foncteur dérivé à gauche.

DÉFINITION. — *On appelle foncteur d'entrelacement le foncteur* $\mathscr{I}_{X',X}=\pi'_+\circ\pi^*$ *qui envoie* $\mathscr{D}_{f_0,X}$*-modules sur* $\mathscr{D}_{f_0,X'}$*-modules.*

PROPOSITION 3.2. — *Avec les notations ci-dessus :*

(*a*) *Les foncteurs* $\mathscr{I}_{X',X}$ et $\Delta_{X'}\circ\Gamma_X$ *sont isomorphes.*

(*b*) $\forall k\geqq 1$, $(L^{-k}\pi'_+)\circ\pi^*=0$.

Le (*b*) n'est pas utilisé dans la suite, il signifie que « en catégorie dérivée, le foncteur d'entrelacement est concentré en degré 0 ». Cette proposition est un analogue algébrique de [Li].

COROLLAIRE 3.3. — *Avec les notations ci-dessus, soit* $\mathfrak{b}''$ *une* (*troisième*) *polarisation en* f_0, $X''=G/B''$, ...

Alors les foncteurs $\mathscr{I}_{X'',X}$ *et* $\mathscr{I}_{X'',X'}\circ\mathscr{I}_{X',X}$ *sont isomorphes.*

Démonstration :

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_{X'',X'}\circ\mathscr{I}_{X',X}&=\Delta_{X''}\circ(\Gamma_{X'}\circ\Delta_{X'})\circ\Gamma_X\\&=\Delta_{X''}\circ\Gamma_X\\&=\mathscr{I}_{X'',X}.\end{aligned}$$

Démonstration de la proposition. – On utilise les idées de la démonstration du résultat analogue pour les groupes de Lie semi-simples ([Mi], théorème 3.16). La différence essentielle est qu'on ne peut pas se ramener au cas où $\dim(B'/B \cap B') = 1$ (*cf.* remarque 5.3). On utilise à la place le fait que $(B'/B \cap B')$ est une sous variété fermée de X (*cf.* lemme 3.4).

(*a*) Soit $I_{X', X} = \Gamma_{X'} \circ \mathscr{I}_{X', X} \circ \Delta_X$: c'est un foncteur de la catégorie des R-modules dans elle-même. On veut construire un isomorphisme de foncteurs

$$\mathrm{Id} \xrightarrow{\sim} I_{X', X}.$$

Soit M un R-module, on a

$$I_{X', X}(M) = D_{f_0, X' \leftarrow Y} \underset{D_{f_0, Y}}{\otimes} D_{f_0, Y \rightarrow X} \underset{D_{f_0, X}}{\otimes} M.$$

(On a utilisé l'identification $D_{f_0, X} \simeq R \simeq D_{f_0, X'}$.) Remarquons que

$$D_{f_0, Y \rightarrow X} = O_Y \otimes_{O_X} D_{f_0, X}$$

contient l'élément canonique $1 \otimes 1$ et que $D_{f_0, X' \leftarrow Y} = \Gamma(Y, \Omega^{\max}_{Y \mid X}) \otimes_{O_X} D_{f_0, X'}$ contient l'élément $\omega \otimes 1$ où ω est une section non nulle G invariante de $\Omega^{\max}_{Y \mid X}$: ω est unique à une constante près. Notons F_M le morphisme de M dans $I_{X', X}(M)$ donné par $\forall\, m \in M$

$$F_M(m) = (\omega \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) \otimes m.$$

On vérifie que, $\forall\, u \in U$, $F_M(um) = u \,.\, F_M(m)$: en effet, si on regarde $D_{f_0, X' \leftarrow Y}$ comme un $(D_{f_0, X'}, D_{f_0, Y})$-bimodule et donc comme un (U, U)-bimodule via les applications α, on a l'égalité $u\,.(\omega \otimes 1) = (\omega \otimes 1)\,.\,u$; on a une égalité analogue avec l'élément $1 \otimes 1 \in D_{f_0, Y \rightarrow X}$. Donc F_M est un morphisme de R-modules. Cela définit un morphisme de foncteurs $\mathrm{Id} \rightarrow I_{X', X}$.

Montrons que, pour tout R-module M, F_M est un isomorphisme. Comme les foncteurs Id et $I_{X', X}$ sont exacts à droite et commutent à la somme directe, il suffit de le montrer pour $M = R$, le R-module libre de rang 1. En effet une résolution libre $L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ donnera un diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} L_1 & \rightarrow & L_0 & \rightarrow & M & \rightarrow 0 \\ \downarrow{\scriptstyle F_{L_1}} & & \downarrow{\scriptstyle F_{L_0}} & & \downarrow{\scriptstyle F_M} & \\ I_{X', X}(L_1) & \rightarrow & I_{X', X}(L_0) & \rightarrow & I_{X', X}(M) & \rightarrow 0 \end{array}$$

où F_{L_1} et F_{L_0} seront des isomorphismes et F_M sera un isomorphisme.

Supposons donc $M = R$. Dans ce cas, les localisés $\Delta_{X'}(M) = \mathscr{D}_{f_0, X'}$ et $\Delta_{X'}(I_{X', X}(M)) = \mathscr{I}_{X', X}(\mathscr{D}_{f_0, X})$ sont des $\mathscr{D}_{f_0, X'}$-modules avec action de G et le localisé $\mathscr{F}_R$ du morphisme F_R est un morphisme de $\mathscr{D}_{f_0, X'}$-modules avec action de G (*i. e.* c'est un morphisme de $\mathscr{D}_{f_0, X'}$-modules et de $\mathscr{O}_{X'}$-modules G-équivariants). Il suffit donc de montrer que l'application induite sur les fibres géométriques en $x_0 = B'/B'$ est un isomorphisme.

Soient $Z=B'/B\cap B'$, $i: x_0 \hookrightarrow X'$, $j: Z \hookrightarrow Y$, $i_Z: Z \hookrightarrow X$ les injections naturelles et $p: Z \to x_0$ la projection. On a $i_Z=\pi\circ j$ et on a le diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{j} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ x_0 & \xrightarrow{i} & X' \end{array}$$

D'une part,

$$i^*(\mathscr{D}_{f_0, X'})=O_{x_0}\otimes_{O_{X'}} D_{f_0, X'}$$

où $O_{x_0}\approx F$ est l'anneau des fonctions sur $\{x_0\}$. D'autre part :

$$\begin{aligned} i^*(\mathscr{I}_{X', X}(\mathscr{D}_{f_0, X})) &= i^*(\pi'_+(\pi^*(\mathscr{D}_{f_0, X}))) \\ &= p_+(j^*(\pi^*(\mathscr{D}_{f_0, X}))) \\ &= p_+(i_Z^*(\mathscr{D}_{f_0, X})) \\ &= p_+(\mathscr{D}_{f_0, Z\to X}) \\ &= D_{f_0, x_0\leftarrow Z}\otimes_{D_{f_0, Z}} D_{f_0, Z\to X}. \end{aligned}$$

On a utilisé l'égalité $i^*\circ\pi'_+=p_+\circ j^*$: c'est une conséquence du « changement de base » ([Bo], VI, théorème 8.4; ici on peut éviter de travailler en catégorie dérivée car les quatre foncteurs sont exacts à droite). Conformément à 1.3, $\mathscr{D}_{f_0, x_0}$ est le f. o. d. t. avec action de B' sur la variété réduite à un point $x_0=B'/B'$ de paramètre $f_0|_{\mathfrak{b}'}\in(\mathfrak{b}'^*)^{B'}$ et $\mathscr{D}_{f_0, x_0\leftarrow Z}=\Omega_Z^{\max}\otimes_{\mathscr{O}_{x_0}}\mathscr{D}_{-f_0, x_0}(\simeq\Omega_Z^{\max})$ est un $\mathscr{D}_{f_0, Z}$-module à droite simple.

On remarque alors sur ces formules que les fibres géométriques sont des R-modules à droite [la proposition 1.2 prouve seulement que ce sont des $(\mathfrak{g}, B')$-modules f_0-tordus] et qu'on a les identifications de R-modules à droite :

$$i^*(\mathscr{D}_{f_0, X'})\simeq\Gamma(X', i_+(\mathscr{O}_{x_0}))$$

$$i^*(\mathscr{I}_{X', X}(\mathscr{D}_{f_0, X}))\simeq\Gamma(X, i_{Z+}(\mathscr{D}_{f_0, x_0\leftarrow Z})).$$

Comme i et i_Z sont des immersions fermées (*cf.* lemme 3.4 ci-dessous), ces R-modules sont simples et non nuls d'après 1.3. Le morphisme de R-modules à droite $i^*(\mathscr{F}_R)$ est donné, avec ces identifications, par $\forall r\in R\,(\simeq D_{f_0, X'}\simeq D_{f_0, X})$

$$i^*(F_R)(1\otimes r)=(\omega|_Z\otimes 1)\otimes(1\otimes r)$$

où $\omega|_Z\in\Gamma(Z, \Omega_Z^{\max})$ est la restriction à Z de ω. Il est non nul, c'est donc un isomorphisme.

(*b*) Supposons par l'absurde qu'il existe $k\geqq 1$ et $\mathscr{M}_0$ un $\mathscr{D}_{f_0, X}$-module tel que $(L^{-k}\pi_+)(\pi^*\mathscr{M}_0)\neq 0$. Soit $k_0\geqq 1$, le plus petit entier pour lequel un tel module $\mathscr{M}_0$ existe. Si $k_0\neq 1$ alors le foncteur $\mathscr{M}\to(L^{-k_0+1}\pi_+)(\pi^*\mathscr{M})$ est nul; si $k_0=1$ alors ce foncteur est exact d'après (*a*); dans les deux cas, on en déduit que le foncteur $\mathscr{M}\to(L^{-k_0}\pi_+)(\pi^*\mathscr{M})$ est exact à droite. Soit $\mathscr{L}$ un $\mathscr{D}_{f_0, X}$-module libre tel que $\mathscr{L}\to\mathscr{M}_0\to 0$, alors $(L^{-k_0}\pi_+)(\pi^*\mathscr{L})\neq 0$. On peut donc supposer $\mathscr{M}_0=\mathscr{D}_{f_0, X}$.

Soient $\Omega^{\bullet}_{Y|X'}$ le complexe (de de Rham) des faisceaux des formes différentielles relatives et $\Omega^{\bullet}_{Z}=j^*(\Omega^{\bullet}_{Y|X})$ celui des formes différentielles sur Z. On a l'égalité ([Bo], VI, 5.3)

$$\mathrm{L}^{-k}\pi_+(\pi^*(\mathscr{D}_{f_0,\mathrm{X}}))=h^{\delta-k}(\pi^{\cdot}_{\cdot}(\Omega^{\bullet}_{Y|X'}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\pi^*(\mathscr{D}_{f_0,\mathrm{X}})))$$

où h^i est la cohomologie du complexe en degré i. Ce complexe est un complexe de $\mathcal{O}_{X'}$-modules G-équivariants. Il suffit donc de démontrer que $i^*(\mathrm{L}^{-k}\pi_+(\pi^*(\mathscr{D}_{f_0,\mathrm{X}})))=0$, $\forall k\geqq 1$. Or, i^* est un foncteur exact dans la catégorie des $\mathcal{O}_{X'}$-modules G-équivariant, on a donc :

$$\begin{aligned} i^*(\mathrm{L}^{-k}\pi_+(\pi^*\mathscr{D}_{f_0,\mathrm{X}})) &= h^{\delta-k}(i^*(\pi^{\cdot}_{\cdot}(\Omega^{\bullet}_{Y|X'}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\pi^*(\mathscr{D}_{f_0,\mathrm{X}})))) \\ &= h^{\delta-k}(p\,.(j^*(\Omega^{\bullet}_{Y|X'}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\pi^*(\mathscr{D}_{f_0,\mathrm{X}})))) \\ &= h^{\delta-k}(p\,.\,(\Omega^{\bullet}_{Z}\otimes_{\mathcal{O}_Z}j^*(\pi^*(\mathscr{D}_{f_0,\mathrm{X}})))) \\ &= h^{\delta-k}(p\,.(\Omega^{\bullet}_{Z}\otimes_{\mathcal{O}_Z}\mathscr{D}_{f_0,\mathrm{X}})) \\ &= (\mathrm{L}^{-k}p_+)(\mathscr{D}_{f_0,\mathrm{Z}\to\mathrm{X}}) \\ &= 0, \qquad \forall k\geqq 1 \end{aligned}$$

car $\mathscr{D}_{f_0,\mathrm{Z}\to\mathrm{X}}$ est un $\mathscr{D}_{f_0,\mathrm{Z}}$-module localement libre ([Bo], VI, 7.3).

LEMME 3.4. — *Soient* $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ *deux sous algèbres de Lie de* $\mathfrak{g}$, *alors l'immersion naturelle* $\mathrm{K}_1/\mathrm{K}_1\cap\mathrm{K}_2\hookrightarrow\mathrm{G}/\mathrm{K}_2$ *est fermée.*

Démonstration. — C'est classique : on peut trouver une base $(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)$ de $\mathfrak{g}$ et $i_1<\ldots<i_s\leqq l\leqq r$ tels que, $\forall i=1,\ldots,n$, $\mathfrak{g}_i:=\mathrm{FX}_{i+1}\oplus\ldots\oplus\mathrm{FX}_n$ est une sous algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}_2=\mathfrak{g}_l$ et $\mathfrak{k}_1=\mathrm{FX}_{i_1}\oplus\ldots\oplus\mathrm{FX}_{i_s}\oplus\mathfrak{g}_r$. Alors on a un isomorphisme $\Phi:\mathrm{F}^l\to\mathrm{G}/\mathrm{K}_2$ donné par $\Phi(t_1,\ldots,t_l)=\exp(t_1\mathrm{X}_1)\ldots\exp(t_l\mathrm{X}_l)\mathrm{K}_2$ et

$$\Phi^{-1}(\mathrm{K}_1/\mathrm{K}_1\cap\mathrm{K}_2)=\{(t_1,\ldots,t_l)\,|\,\forall k\neq i_1,\ldots,i_s,\text{ on a } t_k=0\}\approx\mathrm{F}^s.$$

4. Géométrie des orbites.

4.1. ON RASSEMBLE DANS CETTE PARTIE QUELQUES LEMMES GÉOMÉTRIQUES. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente sur F, $f_0\in\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{b}$ une polarisation en f_0, $\Omega=\mathrm{G}f_0$, $p:\Omega\to\mathrm{X}=\mathrm{G}/\mathrm{B}$ la projection canonique : $\forall g\in\mathrm{G}$ $p(g.f_0)=g\mathrm{B}$, $f\in\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre subordonnée à f (*i. e.* $f|_{[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]}=0$). On note

$$\forall\,\mathfrak{s}\subset\mathfrak{g},\quad \mathfrak{s}^{\perp}:=\{f'\in\mathfrak{g}^*\,|\,f'(\mathfrak{s})=0\},\qquad \mathfrak{s}^{\mathrm{B}f_0}:=\{\mathrm{X}\in\mathfrak{g}\,|\,f_0([\mathrm{X},\mathfrak{s}])=0\},$$

Ad et Ad* les actions adjointes et coadjointes de G dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ et, $\forall g\in\mathrm{G}$, $\mathfrak{b}_g:=\mathrm{Ad}g\,(\mathfrak{b})$: c'est une polarisation en $g.f_0:=\mathrm{Ad}^*(g).f_0$.

On pose $\mathrm{Z}=\Omega\cap(f+\mathfrak{k}^{\perp})$: c'est une sous variété algébrique stable par K.

LEMME 4.1. — *Avec ces notations :*

(*a*) $p(\mathrm{Z})=\{g\mathrm{B}\in\mathrm{X}\,|\,(gf_0-f)|_{\mathfrak{k}\cap\mathfrak{b}_g}=0\}$.

(*b*) *Soit* $f_1=g.f_0\in\mathrm{Z}$. *Alors :*

(α) $\{f'\in\mathrm{Z}\,|\,p(f')=p(f_1)\}=f_1+(\mathfrak{k}+\mathfrak{b}_g)^\perp$.

(β) $\Lambda:=\mathrm{K}.(f_1+(\mathfrak{k}+\mathfrak{b}_g)^\perp)$ *est une sous variété lagrangienne, irréductible, lisse et fermée incluse dans* Z. *Son espace tangent est* $\mathrm{T}_{f_1}(\Lambda)=(\mathfrak{k}^{\mathrm{B}f_1}\cap(\mathfrak{k}+\mathfrak{b}_g))^\perp$.

Démonstration. — (*a*) Soient $\mathrm{E}=\{g\in\mathrm{G}\,|\,g.f_0-f\in\mathfrak{k}^\perp\}$ et $\mathrm{F}=\{g\in\mathrm{G}\,|\,gf_0-f\in(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{b}_g)^\perp\}$. On veut montrer $\mathrm{F}=\mathrm{E.B}$.

Soit $g\in\mathrm{F}$, l'égalité $(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{b}_g)^\perp=\mathfrak{k}^\perp+\mathfrak{b}_g^\perp$ prouve qu'il existe $f'\in\mathfrak{b}_g^\perp$, $f''\in\mathfrak{k}^\perp$ tel que $gf_0-f=f'+f''$. Comme $\mathrm{B}f_0=f_0+\mathfrak{b}^\perp$ ([B-C-D...], prop. 3.1.7), il existe $b\in\mathrm{B}$ tel que $g(bf_0-f_0)=-f'$ d'où $gbf_0-f=f''\in\mathfrak{k}^\perp$ et $gb\in\mathrm{E}$.

Réciproquement, soient $g\in\mathrm{E}$ et $b\in\mathrm{B}$, alors $gbf_0-f=g(bf_0-f_0)+gf_0-f\in\mathfrak{b}_g^\perp+\mathfrak{k}^\perp$ donc $gb\in\mathrm{F}$.

(*b*) On peut supposer $f_1=f_0\in\mathrm{Z}$.

(α) $\{f'\in\mathrm{Z}\,|\,p(f')=p(f_0)\}=\mathrm{Z}\cap\mathrm{B}f_0=(f_0+\mathfrak{k}^\perp)\cap\mathrm{B}f_0=f_0+(\mathfrak{k}+\mathfrak{b})^\perp$.

(β) Remarquons que $f_0+(\mathfrak{k}+\mathfrak{b})^\perp$ est stable sous $\mathrm{K}\cap\mathrm{B}$. L'application

$$j:\quad \mathrm{K}\times_{\mathrm{K}\cap\mathrm{B}}(f_0+(\mathfrak{k}+\mathfrak{b})^\perp)\to\mathrm{G}.f$$

donnée par $j(k,f')=k.f'$ est une immersion fermée : elle est la composée :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{K}\times_{\mathrm{K}\cap\mathrm{B}}(f_0+(\mathfrak{k}+\mathfrak{b})^\perp) & \xrightarrow{j_1} & \mathrm{K}\times_{\mathrm{K}\cap\mathrm{B}}(f_0+\mathfrak{b}^\perp) & \xrightarrow{j_2} & \mathrm{G}\times_{\mathrm{B}}(f_0+\mathfrak{b}^\perp) & \xrightarrow{j_3} & \mathrm{G}.f_0\\
(k,f') & \to & (k,f') & \to & (k,f') & \to & k.f'
\end{array}$$

où j_1 est fermée car $f_0+(\mathfrak{k}+\mathfrak{b})^\perp$ est fermée dans $f_0+\mathfrak{b}^\perp$, j_2 est fermée d'après le lemme 3.4 et j_3 est un isomorphisme. En particulier, son image Λ est une sous variété fermée lisse irréductible de Ω et on a l'égalité de sous espace de $\mathfrak{g}^*$:

$$\mathrm{T}_{f_0}(\Lambda)=\mathfrak{k}.f_0+(\mathfrak{k}+\mathfrak{b})^\perp=(\mathfrak{k}^{\mathrm{B}f_0}\cap(\mathfrak{k}+\mathfrak{b}))^\perp=(\mathrm{W}^{\mathrm{B}f_0})^\perp$$

avec

$$\mathrm{W}:=\mathfrak{k}+(\mathfrak{k}^{\mathrm{B}f_0}\cap\mathfrak{b})=\mathfrak{k}^{\mathrm{B}f_0}\cap(\mathfrak{k}+\mathfrak{b})=\mathrm{W}^{\mathrm{B}f_0}$$

car $\mathfrak{k}\subset\mathfrak{k}^{\mathrm{B}f_0}$ et $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}^{\mathrm{B}f_0}$.

Le sous espace W est lagrangien pour B_{f_0}, donc $\mathrm{T}_{f_0}(\Lambda)$ est un sous-espace lagrangien de $\mathrm{T}_{f_0}(\Omega)$: Λ est lagrangienne.

Les inclusions $\mathrm{K}f_1\subset\Lambda\subset\mathrm{Z}$ prouvent que Z est une variété coïsotrope ([Gi]) et que les K-orbites de Z sont des sous variétés isotropes. Les lemmes suivants étudient les cas d'égalités :

LEMME 4.2. — *Avec ces notations. Soient* C *une composante irréductible de* Z *et* $f_1 = gf_0 \in \mathrm{C}$. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) $\dim \mathrm{C} = \frac{1}{2} \dim \Omega$.

(ii) $p(\mathrm{C}) = \mathrm{K} . p(f_1)$.

(iii) $\mathrm{C} = \mathrm{K}(f_1 + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}_g)^{\perp})$.

(iv) $\mathrm{C} = p^{-1}(\mathrm{K} . p(f_1)) \cap \mathrm{Z}$.

Dans ce cas C *est une variété lagrangienne lisse et* $p(\mathrm{C})$ *est fermée.*

Démonstration. – (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soient $f' = g' f_0$ un point lisse de Z tel que $f' \in \mathrm{C}$ et $\Lambda = \mathrm{K} . (f' + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}_{g'})^{\perp})$. Λ est une sous variété fermée et irréductible de Z donc $\Lambda \subset \mathrm{C}$ puis $\Lambda = \mathrm{C}$ car Λ et C ont même dimension. En particulier $p(\mathrm{C}) = p(\Lambda)$ est une K-orbite (et est donc fermée : lemme 3.4).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : On a $\mathrm{C} \subset p^{-1}(\mathrm{K} p(f_1)) \cap \mathrm{Z} = \mathrm{K}(p^{-1}(p(f_1)) \cap \mathrm{Z}) = \mathrm{K} . (f_1 + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}_g)^{\perp}) = \Lambda$. Comme C est coïsotrope et que Λ est lagrangienne et irréductible, on a $\mathrm{C} = \Lambda$. En particulier C est lisse.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) : résulte de 4.1.$b\,\alpha$).

(iii) $\Rightarrow$ (i) : résulte de 4.1.$b\,\beta$).

COROLLAIRE 4.3. — *Avec ces notations. On a l'équivalence :*

(i) Z *est lagrangienne.*

(ii) $p(\mathrm{Z})$ *est une réunion finie de* K-*orbites.*

La projection p met alors en bijection les composantes irréductibles de Z *et les* K-*orbites de* $p(\mathrm{Z})$.

Démonstration :

(i) $\Rightarrow$ (ii) : clair,

(ii) $\Rightarrow$ (i) : écrivons

$$p(\mathrm{Z}) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{K} p(f_i) \qquad \text{avec} \quad f_i = g_i f_0 \in \mathrm{Z}.$$

Alors

$$\mathrm{Z} = \bigcup_{i=1}^{n} p^{-1}(\mathrm{K} p(f_i)) \cap \mathrm{Z} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{K} . (f_i + (\mathfrak{k} + \mathfrak{b}_{g_i})^{\perp})$$

est lagrangienne.

COROLLAIRE 4.4. — *Avec ces notations. Supposons que* f_0 *appartient à une composante irréductible* Λ *de* Z *qui est lagrangienne. Soit* $\mathfrak{b}'$ *une (autre) polarisation en* f_0 *telle que*

$\dim(\mathfrak{b}/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}')=1$, *alors*

$$\dim((\mathfrak{k}\cap(\mathfrak{b}+\mathfrak{b}'))/(\mathfrak{k}\cap(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}')))=1.$$

Démonstration. — On a $(\mathfrak{b}+\mathfrak{b}')^{B_{f_0}}=\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}'$ donc B_{f_0} induit sur l'espace vectoriel de dimension 2 : $(\mathfrak{b}+\mathfrak{b}')/(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}')$ une forme bilinéaire non dégénérée; l'image $\mathfrak{i}$ de $\mathfrak{k}\cap(\mathfrak{b}+\mathfrak{b}')$ dans cet espace est isotrope donc $\dim\mathfrak{i}\leqq 1$.

Supposons que cette inégalité est stricte. On a alors

$$(*)\qquad \mathfrak{k}\cap(\mathfrak{b}+\mathfrak{b}')\subset\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}'$$

d'où $\mathfrak{b}+\mathfrak{b}'\subset\mathfrak{k}^{B_{f_0}}+(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}')$. On peut donc trouver $X\in\mathfrak{b}\cap\mathfrak{k}^{B_{f_0}}$ tel que $X\notin\mathfrak{b}'$. Puisque Λ est lagrangienne, on a les égalités

$$\Lambda=K(f_0+(\mathfrak{k}+\mathfrak{b})^\perp)=K(f_0+(\mathfrak{k}+\mathfrak{b}')^\perp)$$

[lemme 4.2 (iii)] puis

$$T_{f_0}(\Lambda)=(\mathfrak{k}^{B_{f_0}}\cap(\mathfrak{k}+\mathfrak{b}))^\perp=(\mathfrak{k}^{B_{f_0}}\cap(\mathfrak{k}+\mathfrak{b}'))^\perp$$

(lemme 4.1.*b*), d'où

$$\mathfrak{k}^{B_{f_0}}\cap(\mathfrak{k}+\mathfrak{b})=\mathfrak{k}^{B_{f_0}}\cap(\mathfrak{k}+\mathfrak{b}').$$

On en déduit $X\in\mathfrak{b}\cap(\mathfrak{k}+\mathfrak{b}')\subset\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}'$ d'après $(*)$. Contradiction. Donc $\dim\mathfrak{i}=1$.

LEMME 4.5. — *Reprenons les notations du lemme* 4.2 : *Soient* C *une composante irréductible de* Z *et* $f_1=g\,f_0\in C$. *Les affirmations suivantes sont équivalentes.*

(i) $\dim C=1/2\dim\Omega$ *et l'intersection* $\Omega\cap(f+\mathfrak{k}^\perp)$ *est tranverse en* f_1;

(ii) $C=Kf_1$;

(iii) $\dim Kf_1=1/2\dim\Omega$;

(iv) $2\dim(\mathfrak{g}(f_1)+\mathfrak{k})=\dim\mathfrak{g}+\dim\mathfrak{g}(f_1)$.

Démonstration (*cf.* [Fu]). — On peut supposer $f_1=f_0$.

(i) $\Rightarrow$ (iv) : Par hypothèse on a, $T_{f_0}(C)=T_{f_0}(\Omega)\cap T_{f_0}(f_0+\mathfrak{k}^\perp)=(\mathfrak{g}(f_0)+\mathfrak{k})^\perp$ et $\dim T_{f_0}(C)=1/2\dim\Omega$. On en déduit $\dim\mathfrak{g}-\dim(\mathfrak{g}(f_0)+\mathfrak{k})=1/2(\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{g}(f_0))$ c'est l'égalité cherchée;

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : c'est clair;

(iv) $\Rightarrow$ (i) et (ii) : Par hypothèse $\mathfrak{g}(f_0)+\mathfrak{k}$ est lagrangienne pour B_{f_0} on a donc

$$\begin{aligned}(\mathfrak{g}(f_0)+\mathfrak{k})^\perp=(\mathfrak{k}^{B_{f_0}})^\perp=T_{f_0}(Kf_0)&\subset T_{f_0}(\Omega\cap(f+\mathfrak{k}^\perp))\\&\subset T_{f_0}(\Omega)\cap T_{f_0}(f+\mathfrak{k}^\perp)=\mathfrak{g}(f_0)^\perp\cap\mathfrak{k}^\perp=(\mathfrak{g}(f_0)+\mathfrak{k})^\perp.\end{aligned}$$

Donc ces inclusions sont des égalités. On en déduit, d'une part que $\dim Kf_0=\dim C$ puis $Kf_0=C$ et $\dim C=1/2\dim\Omega$ et d'autre part que l'intersection $\Omega\cap(f+\mathfrak{k}^\perp)$ est transverse en f_0.

(ii) $\rightarrow$ (iii) : La variété $\mathrm{K}f_1=\mathrm{C}$ est à la fois isotrope et coïsotrope, elle est donc lagrangienne.

4.2. EXEMPLES. — Donnons divers exemples qui éclairent la géométrie de Z. Dans ces exemples $\mathfrak{g}$ a pour base $(e_i)_{i=1,\ldots,\mathrm{N}}$. On note $e_i e_j$ pour $[e_i, e_j]$ et on ne donne que les crochets $e_i e_j$ non nuls avec $i<j$.

(*a*) Z *peut être lagrangienne et contenir une infinité de* K-*orbites*.

$\mathrm{N}=4$; avec $e_1 e_2=e_3$, $e_1 e_3=e_4$; $f=f_0=e_4^*$ et $\mathfrak{k}=\mathrm{F}\, e_2$.

On a $\Omega=\{(x_1, x_3) : =x_3 e_1^*+(1/2)x_1^2 e_2^*-x_1 e_3^*+e_4^*\}\simeq \mathrm{F}^2$, $\mathrm{Z}=\{(0, x_3)\}\simeq \mathrm{F}$ et l'action de K sur Z est triviale.

(*b*) $p(\mathrm{Z})$ *n'est pas forcément localement fermé*.

$\mathrm{N}=5$; avec $e_1 e_2=e_4$, $e_1 e_4=e_5$, $e_2 e_3=e_5$; $f=f_0=e_5^*$, $\mathfrak{b}=\mathrm{F}\, e_1\oplus \mathrm{F}\, e_3\oplus \mathrm{F}\, e_5$ et $\mathfrak{k}=\mathrm{F}\, e_1$.

On a

$$\Omega=\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : =x_4 e_1^*+(x_3+(1/2)x_1^2)e_2^*-x_2 e_3^*-x_1 e_4^*+e_5^*\}\simeq \mathrm{F}^4,$$
$$\mathrm{Z}=\{(x_1, x_2, x_3, 0)\}\simeq \mathrm{F}^3,\ \mathrm{G/B}\simeq\{(t_2, t_4) : =\exp(t_2 e_2)\exp(t_4 e_4)\mathrm{B}\}\simeq \mathrm{F}^2$$

et $p(x_1, x_2, x_3, x_4)=(x_2, x_4+x_1 x_2)$. Donc $p(\mathrm{Z})=\{(t_2, t_4)\mid t_2\neq 0\}\cup\{(0, 0)\}$.

(*c*) Z *n'est pas forcément lisse* [Fu].

$\mathrm{N}=6$; avec $e_1 e_3=e_4$, $e_1 e_5=e_6$, $e_2 e_3=e_5$, $e_2 e_4=e_6$; $f=f_0=e_6^*$ et $\mathfrak{k}=\mathrm{F}e_3$.

On a

$$\Omega=\{(x_1, x_2, x_4, x_5) : =x_5 e_1^*+x_4 e_2^*+x_1 x_2 e_3^*-x_2 e_4^*-x_1 e_5^*+e_6^*\}\simeq \mathrm{F}^4$$

et $\mathrm{Z}=\{(x_1, x_2, x_4, x_5)\mid x_1 x_2=0\}$.

(*d*) *On peut avoir* $\mathrm{Z}=\mathrm{Z}_1\cup \mathrm{Z}_2$ *avec* Z_1 *lagrangienne et* Z_2 *pas*.

$\mathrm{N}=7$; avec $e_1 e_3=e_4$, $e_1 e_5=2e_6$, $e_1 e_6=e_7$, $e_2 e_3=e_6$, $e_2 e_4=e_7$; $f_0=f=e_7^*$ et $\mathfrak{k}=\mathrm{F}(e_3+e_4)\oplus \mathrm{F}(e_5+e_6)$.

On a $\Omega=\{(x_1, x_2, x_4, x_6) : =x_6 e_1^*+x_4 e_2^*+x_1 x_2 e_3^*-x_2 e_4^*+x_1^2 e_5^*-x_1 e_6^*+e_7^*\}\simeq \mathrm{F}^4$ et $\mathrm{Z}=\mathrm{Z}_1\cup \mathrm{Z}_2$ où $\mathrm{Z}_1=\{(0, 0, x_4, x_6)\}\simeq \mathrm{F}^2$ est une K-orbite et $\mathrm{Z}_2=\{(1, x_2, x_4, x_6)\}\simeq \mathrm{F}^3$ n'est pas lagrangienne.

5. Modules simples associés à une composante lagrangienne

Le but de cette partie est d'associer à chaque composante lagrangienne Λ de Z un $\mathfrak{g}$-module simple M_Λ. On relie en 5.4 ces modules avec ceux introduits dans [Be].

5.1. CONSTRUCTION DU MODULE SIMPLE M_ω. — Gardons les notations de 3 et 4 et celles de 2 avec $\mathrm{X}=\mathrm{G/B}$, $\mathscr{D}=\mathscr{D}_{f_0,\mathrm{X}}$, $\mathrm{H}=\mathrm{K}$ et $\mu=f$ (plus précisément $\mu=f|_{\mathfrak{k}}$).

LEMME 5.1. — $p(\mathrm{Z})$ *est la réunion des* K-*orbites admissibles de* X.

Démonstration. — C'est une reformulation du lemme 4.2. (*a*).

Pour chaque K-orbite ω de $p(Z)$, on note $i_\omega : \omega \to X$ l'injection, $\mathscr{M}_\omega = i_{\omega +}(\mathscr{O}_\omega)$: l'unique $\mathscr{D}_{f_0, X}$-module (K, f)-équivariant simple de support ω et $M_\omega = \Gamma_X(\mathscr{M}_\omega)$.

PROPOSITION 5.2. — *Avec ces notations, soient* Λ *une composante irréductible de* Z *que l'on suppose lagrangienne et* ω *la* K-*orbite* $p(\Lambda)$ *alors le* $\mathfrak{g}$-*module* M_ω *ne dépend pas du choix de la polarisation* $\mathfrak{b}$.

On note M_Λ *ce module.*

Montrons tout d'abord quelques lemmes.

5.2. POLARISATIONS ADJACENTES.

DÉFINITION. — *Deux polarisations* $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$ *en* f_0 *sont dites adjacentes si* $\dim(\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}') = 1$.

LEMME 5.3. — *Soient* $f_0 \in \mathfrak{g}^*$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$ *deux polarisations en* f_0, *alors il existe une suite* $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_r = \mathfrak{b}'$ *de polarisations en* f_0 *telles que* $\forall i = 1, \ldots, r$, $(\mathfrak{b}_{i-1}, \mathfrak{b}_i)$ *sont adjacentes.*

Remarque. — On a $r \geqq \dim(\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}')$. Mais il n'existe pas toujours de suite pour laquelle on ait l'égalité : prendre pour $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ les deux polarisations $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{b}_2$ dans l'exemple de ([Be], Appendice A).

Démonstration. — On procède par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$. Soient $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{z} \cap \operatorname{Ker} f_0$.

Si $\mathfrak{z}_0 \neq 0$, on applique le résultat à $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_0$.

Si $\mathfrak{z}_0 = 0$, on a $\mathfrak{z} = FZ$ avec $f_0(Z) = 1$. Soit $Y \in C_2(\mathfrak{g}) \setminus \mathfrak{z}$ où $C_i(\mathfrak{g})$ est le i-ième terme de la suite centrale ascendante, et $\mathfrak{g}' = \{T \in \mathfrak{g} \mid [T, Y] = 0\}$: c'est un idéal de codimension un de $\mathfrak{g}$. Si $Y \notin \mathfrak{b}$, alors $\mathfrak{b}_1 = FY \oplus (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}')$ est une polarisation en f_0 et $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1)$ sont adjacentes. On peut donc supposer $Y \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$. On a alors $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{b}' \subset \mathfrak{g}'$. Soient $f'_0 = f_0|_{\mathfrak{g}'}$ on a $\mathfrak{g}'(f'_0) = \mathfrak{g}(f_0) \oplus FY$, donc $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ sont des polarisations en f'_0.

On applique alors le résultat à $\mathfrak{g}'$ pour conclure.

LEMME 5.4. — (*a*) *Soient* $f_0 \in \mathfrak{g}^*$ *et* $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}')$ *deux polarisations en* f_0 *adjacentes, alors* $\mathfrak{d} = \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$ *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$ *et* $[\mathfrak{d}, \mathfrak{d}] \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$.

(*b*) *Soient* $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{k}$ *une sous-algèbre subordonnée à* f *telle que* f_0 *appartiennent à une composante irréductible lagrangienne* Λ *de* $Z = G.f_0 \cap (f + \mathfrak{k}^\perp)$, *alors on est dans une et une seule des trois situations suivantes :*

(i) $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{k} \not\subset \mathfrak{b}'$.

(ii) $\mathfrak{b}' \cap \mathfrak{k} \not\subset \mathfrak{b}$.

(iii) $\exists\, \mathfrak{b}''$ *polarisation en* f_0 *telle que* $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'')$ *et* $(\mathfrak{b}'', \mathfrak{b}')$ *sont adjacentes,* $\mathfrak{b}'' \cap \mathfrak{k} \not\subset \mathfrak{b}$ *et* $\mathfrak{b}'' \cap \mathfrak{k} \not\subset \mathfrak{b}'$.

Démonstration. — (*a*) Écrivons $\mathfrak{b} = FX \oplus \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{b}' = FY \oplus \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$. Montrons tout d'abord que $[X, Y] \in \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$. Comme $\mathfrak{b} + \mathfrak{b}' = (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}')^{B_{f_0}}$, il suffit de voir que, $\forall Z \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$, on a $f_0([[X, Y], Z]) = 0$. Or $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ est un idéal de $\mathfrak{b}$, donc $[X, Z] \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$, d'où $f_0([[X, Z], Y]) \in f_0([\mathfrak{b}', \mathfrak{b}']) = 0$. De même $f_0([X, [Y, Z]]) = 0$. On en déduit l'égalité cherchée grâce à l'identité de Jacobi.

Donc $\mathfrak{d}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ sont des sous-algèbres de codimension un de $\mathfrak{d}$, on a $[\mathfrak{d}, \mathfrak{d}] \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$.

(*b*) Écrivons $\dim(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{k})=\dim(\mathfrak{b}'\cap\mathfrak{k})+\delta$ avec $\delta\in\{-1, 0, 1\}$. Dans le cas (i), on peut écrire $\mathfrak{b}=FX\oplus\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}'$ avec $X\in\mathfrak{k}$; donc $\mathfrak{k}\cap\mathfrak{b}'\subset(FX)^{B_{f_0}}\cap\mathfrak{b}'=(FX+\mathfrak{b}')^{B_{f_0}}\subset\mathfrak{b}^{B_{f_0}}=\mathfrak{b}$ et $\delta=1$. Dans le cas (ii), on a $\delta=-1$ et dans le cas (iii) on a $\delta=0$. Donc ces trois cas s'excluent mutuellement.

Supposons qu'on n'est ni dans le cas (i) ni dans le cas (ii) : on a $\mathfrak{k}\cap\mathfrak{b}=\mathfrak{k}\cap\mathfrak{b}'\subset\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}'$. Soit $\mathfrak{b}''=(\mathfrak{k}\cap(\mathfrak{b}+\mathfrak{b}'))+(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}')$, on a $f_0([\mathfrak{b}'', \mathfrak{b}''])=0$ et $\dim\mathfrak{b}''=\dim(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}')+1$ (corollaire 4.4) donc $\mathfrak{b}''$ est une polarisation en f_0. On a $\mathfrak{k}\cap\mathfrak{b}''\not\subset\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}'$ donc $\mathfrak{k}\cap\mathfrak{b}''\not\subset\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{k}\cap\mathfrak{b}''\not\subset\mathfrak{b}'$.

5.3. Indépendance de la polarisation.

Démonstration de la proposition 5.2. — On peut supposer $f_0\in\Lambda$. Soient $\mathfrak{b}'$ une (autre) polarisation en f_0, $X'=G/B'$, $\mathscr{D}_{f_0, X'}$, $\mathscr{I}_{X', X}$ comme en 3.2, $p'=\Omega\to G/B'$, $\omega'=p'(\Lambda)$, $i_{\omega'}$, $\mathscr{O}_{\omega'}$, $\mathscr{M}_{\omega'}$, $M_{\omega'}$ comme ci-dessus. Il suffit de montrer d'après la proposition 3.2 l'égalité $\mathscr{I}_{X', X}(\mathscr{M}_\omega)=\mathscr{M}_{\omega'}$.

Les deux lemmes ci-dessus permettent de supposer que $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ sont adjacentes et que $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{k}\not\subset\mathfrak{b}'$. Dans ce cas : soient $\pi: Y=G/B\cap B'\to X=G/B$ et $\pi': Y\to X'$ les projections naturelles et $\bar\omega=\pi^{-1}(\omega)\simeq K/K\cap B\cap B'\simeq K/K\cap B'$ [en effet, les lemmes 5.4 et 3.5 prouvent que $K/K\cap B\cap B'$ est ouvert et fermé dans $\pi^{-1}(\omega)$]. La restriction de π' à $\bar\omega$ induit un isomorphisme noté σ' de $\bar\omega$ sur ω' et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \bar\omega & \overset{j}{\hookrightarrow} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \omega & \overset{i_\omega}{\hookrightarrow} & X \end{array}$$

est cartésien et la formule du changement de base donne alors :

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_{X' X}(\mathscr{M}_\omega) &= \pi'_+\circ\pi^*(i_{\omega+}(\mathscr{O}_\omega)) \\ &= (\pi'_+\circ j_+)(\sigma^*(\mathscr{O}_\omega)) \\ &= i_{\omega'+}\circ\sigma'_+(\mathscr{O}_{\bar\omega}) \\ &= i_{\omega'+}(\mathscr{O}_{\omega'}) \\ &= \mathscr{M}_{\omega'}. \end{aligned}$$

5.4. Construction par récurrence de M_ω. — Soit ω une K-orbite admissible de G/B. Le seul but de ce paragraphe est de démontrer que les modules M_ω coïncident avec ceux introduits dans [Be], § 3 (notre « paramètre ω » est la projection dans G/B du « paramètre ω de [Be] » qui lui est une K-orbite dans Z) et donc que ceux-ci ne dépendent pas de la polarisation choisie pour leur construction lorsque ω est la projection $p(\Lambda)$ d'une composante irréductible lagrangienne de Z. (On peut donner de cette dernière affirmation une démonstration directe basée sur les lemmes 5.3 et 5.4.)

Soient $\mathfrak{g}_1$ un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{b}$, $U_1=U(\mathfrak{g}_1)$, $f_1=f_0|_{\mathfrak{g}_1}$, I_1 l'idéal primitif associé à $G_1 f_1$, $i_1: X_1=G_1/B\hookrightarrow X=G/B$ l'injection canonique.

LEMME 5.5. — *Avec ces notations. Soient* $\mathscr{M}$ *un* $\mathscr{D}_{f,\mathrm{X}}$*-module,* $\mathscr{M}_1$ *un* $\mathscr{D}_{f_1,\mathrm{X}_1}$*-module,* $\mathrm{M}:=\Gamma_{\mathrm{X}}(\mathscr{M})$ *et* $\mathrm{M}_1:=\Gamma_{\mathrm{X}_1}(\mathscr{M})$. Alors :

(*a*) $\Gamma_{\mathrm{X}}(i_{1+}(\mathscr{M}_1))=\mathrm{U}\otimes_{\mathrm{U}_1}\mathrm{M}_1$.

(*b*) $\Gamma_{\mathrm{X}}(i_1^*(\mathscr{M}))=\mathrm{M}/\mathrm{I}_1\mathrm{M}$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\mathrm{D}_{f,\mathrm{X}_1\to\mathrm{X}}\simeq\mathrm{U}/\mathrm{I}_1\mathrm{U}$ comme $(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g})$-bimodules.

Pour celà, écrivons $\mathfrak{g}=\mathrm{FT}\oplus\mathfrak{g}_1$ d'où un isomorphisme :

$$\mathrm{F}\times\mathrm{X}_1\xrightarrow{\sim}\mathrm{X}$$
$$(t,x_1)\to(\exp t\mathrm{T}).i_1(x_1).$$

Ceci permet d'identifier les algèbres (lemme A3 de [Be]) :

$$\begin{array}{ccll}\mathrm{U}/\mathrm{I}\simeq\mathrm{D}_{f_0,\mathrm{X}} & \simeq & \mathrm{A}_1\otimes\mathrm{D}_{f_1,\mathrm{X}_1} & \text{où}\quad \mathrm{A}_1=\mathrm{F}\langle t,\partial_t\rangle\\ \mathrm{T} & \to & -\partial_t\otimes 1 & \\ u_1 & \to & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^n\otimes(\operatorname{ad}\mathrm{T})^n(u_1), & \forall u_1\in\mathrm{U}_1.\end{array}$$

Il suffit de montrer que, avec cette identification, on a l'égalité $\mathrm{I}_1\mathrm{U}/\mathrm{I}\simeq t\mathrm{A}_1\otimes\mathrm{D}_{f_1,\mathrm{X}_1}$. L'inclusion $\subset$ est claire car tout élément u_1 de I_1 est nul dans $\mathrm{D}_{f_1,\mathrm{X}_1}$. L'inclusion $\supset$ résulte de l'existence d'un élément u_0 de I_1 dont l'image dans $\mathrm{D}_{f_0,\mathrm{X}}$ est $t\otimes 1$ (corol. A3 de [Be]).

Si N est un $\mathfrak{g}$-module, on note $\Gamma_f^0(\mathfrak{k},\mathrm{N})=\{n\in\mathrm{N}\mid\exists p\geqq 1 \text{ tel que } (\mathfrak{k}^f)^p.n=0\}$, c'est un sous-$\mathfrak{g}$-module de N.

COROLLAIRE 5.6. — *Avec ces notations; soient* ω *une* K*-orbite admissible de* X, $\omega_1:=i_1^{-1}(\omega)$: c'est une $\mathrm{K}_1(=\mathrm{K}\cap\mathrm{G}_1)$*-orbite admissible de* X_1, $\mathrm{M}_\omega:=\Gamma_{\mathrm{X}}(i_{\omega+}(\mathscr{O}_\omega))$ *et* $\mathrm{M}_{\omega_1}:=\Gamma_{\mathrm{X}_1}(i_{\omega_1+}(\mathscr{O}_{\omega_1}))$.

(*a*) *Si* $\mathfrak{g}_1\supset\mathfrak{k}$ *alors* $\mathrm{M}_\omega=\mathrm{U}\otimes_{\mathrm{U}_1}\mathrm{M}_{\omega_1}$.

(*b*) *Si* $\mathfrak{g}_1\not\supset\mathfrak{k}$ *alors* $\mathrm{M}_\omega=\Gamma_f^0(\mathfrak{k},\operatorname{Hom}_{\mathrm{U}_1}(\mathrm{U},\mathrm{M}_{\omega_1}))$.

Ceci permet de construire le module M_ω par récurrence sur $\dim\mathrm{X}$.

Démonstration. — (*a*) Dans ce cas $\mathscr{M}_\omega=i_{1+}(\mathscr{M}_{\omega_1})$.

(*b*) Dans ce cas $\mathscr{M}_{\omega_1}=i_1^*(\mathscr{M}_\omega)$ et le foncteur $\mathscr{N}\to i_1^*(\mathscr{N})$ est une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{D}_{f_0,\mathrm{X}}$-modules (K,f_0)-équivariants et celle des $\mathscr{D}_{f_1,\mathrm{X}_1}$-modules (K_1,f_1)-équivariants ([B-B-3], 1.3). Soit $\mathrm{M}'=\Gamma_f^0(\mathfrak{k},\operatorname{Hom}_{\mathrm{U}_1}(\mathrm{U},\mathrm{M}_{\omega_1}))$; il suffit donc de montrer que les $\mathfrak{g}_1$-modules M_{ω_1} et $\mathrm{M}'/\mathrm{I}_1\mathrm{M}'$ sont isomorphes. Écrivons $\mathfrak{g}=\mathrm{FT}\oplus\mathfrak{g}_1$ et soit $a=f_0(\mathrm{T})$; comme $(\mathrm{D}_{f_0,\mathrm{X}}\simeq\mathrm{A}_1\otimes\mathrm{D}_{f_1,\mathrm{X}_1})$-module, M′ est isomorphe à $\mathbb{C}[t]e^{at}\otimes\mathrm{M}_{\omega_1}$ pour l'action produit tensorielle ([Be], § 3). Donc $\mathrm{M}'/\mathrm{I}_1\mathrm{M}'\simeq\mathrm{M}'/(t\otimes 1)\mathrm{M}'\simeq\mathrm{M}_{\omega_1}$.

6. $\mathrm{U}/(\mathrm{I}+\mathrm{U}\,\mathfrak{k}^f)$.

6.1. C'est la partie centrale de cet article : on étudie les $\mathfrak{g}$-modules simples contenant des vecteurs propres sous la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de valeur propre f : ils sont annulés par un idéal primitif I. On fixe un tel idéal et on étudie (avec les notations de 0.1) le $\mathfrak{g}$-module $U/(I+U\mathfrak{k}^f)$ qui est « universel » parmi les modules annulés par I et engendrés par un vecteur propre sous $\mathfrak{k}$ de valeur propre f.

THÉORÈME. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie nilpotente sur* F, $U:=U(\mathfrak{g})$, Ω *une orbite de* G *dans* $\mathfrak{g}^*$, I *l'idéal primitif de* U *associé à* Ω, $f\in\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{k}$ *une sous-algèbre telle que* $f([\mathfrak{k},\mathfrak{k}])=0$, $Z:=\Omega\cap(f+\mathfrak{k}^{\perp})$, M *le* $\mathfrak{g}$-*module* $U/(I+U\,\mathfrak{k}^f)$ *où* $\mathfrak{k}^f=\{T-f(T)\,|\,T\in\mathfrak{k}\}$ *et* S *l'ensemble des* $\mathfrak{g}$-*modules simples* N *d'annulateur* I *tels que* $N^{\mathfrak{k},f}\neq 0$ *où* $N^{\mathfrak{k},f}:=\{n\in N\,|\,\mathfrak{k}^f.n=0\}$.

(*a*) *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) Z *est lagrangienne.*

(ii) M *est de longueur finie.*

(iii) S *est un ensemble fini.*

(*b*) *Dans ce cas :*

(α) Z *est une variété lisse.*

(β) *L'application* $\Lambda\to M_\Lambda$ *construite en* 5 *est une bijection entre l'ensemble des composantes irréductibles de* Z *et l'ensemble* S.

(γ) *On pose* $m_\Lambda:=\dim(M_\Lambda)^{\mathfrak{k},f}$. *On a alors un isomorphisme de* $\mathfrak{g}$-*modules :* $M\simeq\oplus_\Lambda(M_\Lambda)^{m_\Lambda}$. *En particulier* $m_\Lambda<\infty$ *et* M *est semi-simple.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{b}$ une polarisation en f_0 et prenons les notations de 3. Les foncteurs $N\to\Delta_X(N)$ et $\mathcal{N}\to\Gamma_X(\mathcal{N})$ induisent des équivalences inverses entre la catégorie des $\mathfrak{g}$-modules annulés par I et $\mathfrak{k}^f$-localement nilpotents et celle des $\mathcal{D}_{f_0,X}$-modules (K,f)-équivariants.

En effet, un $\mathfrak{g}$-module N (d'action ρ) est $\mathfrak{k}^f$-localement nilpotent si et seulement si $(\rho-f)|_{\mathfrak{k}}$ est la différentielle d'une action (algébrique) π de K sur N. On munit alors $\Delta_X(N)=\mathcal{D}_{f_0,X}\otimes_R N$ de la structure de $\mathcal{O}_X$-module K-équivariant donnée par $k.(d\otimes n)=(k.d)\otimes\pi(k)n$, $\forall\,k\in K$, $d\in\Gamma(U,\mathcal{D}_{f_0,X})$, $n\in N$ (où $k.d\in\Gamma(k.U,\mathcal{D}_{f_0,X})$ est donné par l'action naturelle de K sur $\mathcal{D}_{f_0,X}$) ce qui en fait un $\mathcal{D}_{f_0,X}$-module (K,f)-équivariant. Réciproquement, si $\mathcal{N}$ est $\mathcal{D}_{f_0,X}$-module (K,f)-équivariant alors $N=\Gamma_X(\mathcal{N})$ est un K-module dont la différentielle est $(\rho-f)|_{\mathfrak{k}}$.

(*a*) (i) $\Rightarrow$ (ii) Si Z est lagrangienne, il existe un nombre fini d'orbites admissibles (corollaire 4.3 et lemme 5.1) et M est un $\mathcal{D}_{f_0,X}$-module holonome (proposition 2.1) il est donc de longueur finie.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si M est de longueur finie, M n'a qu'un nombre fini de quotients simples (à équivalence près) donc S est fini.

(iii) $\Rightarrow$ (i) A chaque orbite admissible ω, on a associé un $\mathfrak{g}$-module simple $M_\omega=\Gamma_X(\mathcal{M}_\omega)$ de S avec $\operatorname{supp}(\mathcal{M}_\omega)=\omega$. Donc, si S est fini il n'y a qu'un nombre fini d'orbites admissibles et Z est lagrangienne.

(*b*) (α) C'est le lemme 4.2.

(β) On a les bijections successives (corollaire 4.3 et proposition 2.1) :

$$\begin{array}{ccccccc}
\textit{composantes} & & \textit{orbites} & & \mathcal{D}_{f_0,\mathrm{X}}\textit{-module} & & \\
\textit{irréductibles} & \longleftrightarrow & \textit{admissibles} & \longleftrightarrow & \textit{simples } (\mathrm{K}, f)\text{-} & \longleftrightarrow & \mathrm{S} \\
\textit{de } \mathrm{Z} & & \textit{de } \mathrm{X} & & \textit{équivariants} & & \\
\Lambda & \longleftrightarrow & p(\Lambda); & \omega \longrightarrow & \mathcal{M}_\omega; & \mathcal{M} \longrightarrow & \Gamma_{\mathrm{X}}(\mathcal{M})
\end{array}$$

dont la composée est l'application $\Lambda \to \mathrm{M}_\Lambda$ qui ne dépend pas du choix de la polarisation (lemme 5.2).

(γ) La proposition 2.1 (*d*). prouve que M est une somme directe de modules simples : il existe un entier m'_Λ tel que $\mathrm{M} = \bigoplus_\Lambda (\mathrm{M}_\Lambda)^{m'_\Lambda}$. On a alors

$$m'_\Lambda = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{M}, \mathrm{M}_\Lambda)) = \dim(\mathrm{M}_\Lambda^{\mathfrak{k}, f}) = m_\Lambda.$$

COROLLAIRE. — *Avec ces notations.*

(1) *On a les équivalences :*

$$\mathrm{Z} = \varnothing \iff \mathrm{M} = 0 \iff \mathrm{S} = \varnothing.$$

(2) *Si* Z *est une* K-*orbite alors* M *est multiple d'un module simple :* $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_\mathrm{Z})^{m_\mathrm{Z}}$.

Démonstration. — (1) Clair.

(2) Z est lagrangienne et irréductible (lemme 4.5).

6.2. EXEMPLE DE MULTIPLICITÉ. — *Si* Z *est une* K-*orbite, le module* $\mathrm{M} = \mathrm{U}/(\mathrm{I} + \mathrm{U}\,\mathfrak{k}^f)$ *n'est pas toujours simple* (i. e. *on peut avoir* $m_\mathrm{Z} \geqq 2$) :

Soient $\mathfrak{g}$ la sous-algèbre de Lie de dimension 9 de l'algèbre de Weyl $\mathrm{A}_2 = \mathrm{F}\langle x, y, \partial_x, \partial_y \rangle : \mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$ où $\mathfrak{h}$ est (l'algèbre de Heinsenberg) engendrée par x, y, ∂_x, ∂_y, 1 et $\mathfrak{n}$ est [le radical unipotent d'un Borel de sp (2, F)] engendrée par $x\,\partial_y$, ∂_x^2, $\partial_x\,\partial_y$, ∂_y^2; $f_0 = 1^*$, $\Omega = \mathrm{G}\,.f_0$, $\mathfrak{k}$ est la sous-algèbre de dimension 4 engendrée par

$$\partial_x + x\,\partial_y,\ \partial_y + \partial_x^2,\ \partial_x\,\partial_y,\ \partial_y^2$$

et $f = 0$.

On vérifie par un petit calcul que $\mathrm{Z} = \mathrm{K}\,.f_0$. (On sait *a priori* grâce au lemme 4.5 que $\mathrm{K}\,.f_0$ est une composante irréductible de Z car $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{g}(f_0)$ est lagrangienne pour B_{f_0}.) L'unique $\mathfrak{g}$-module simple de S est alors $\mathrm{M}_\mathrm{Z} = \mathrm{F}[x, y]$ (via l'action naturelle de A_2) et on a $(\mathrm{M}_\mathrm{Z})^{\mathfrak{k}, f} = \mathrm{F}\,.\,1 \oplus \mathrm{F}\,.\,(x^2 - 2y)$ donc $m_\mathrm{Z} = 2$.

Remarque. — Supposons un nouvel instant que $\mathrm{F} = \mathbb{C}$. Soient $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{k}_0$ les algèbres de Lie définies comme $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ mais sur le corps de base $\mathbb{R}$ de sorte que $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ sont leur complexifiée; soient π_0 la représentation unitaire irréductible de G_0 associée à $\Omega_0 := i\,\mathrm{G}\,.f_0$ et $\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty}$ le $\mathfrak{g}$-module des vecteurs distributions de cette représentation. Le même calcul prouve que $\mathrm{Z}_0 := \Omega_0 \cap \mathfrak{k}^\perp$ est une K_0-orbite mais que $\mathrm{M}_0 := (\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty})^{\mathfrak{t}, 0}$ est de dimension 2.

6.3. VOICI TROIS QUESTIONS OUVERTES. — (1) *A-t-on l'implication :* Λ *est lagrangienne* $\Rightarrow m_\Lambda < \infty$ *?*. — Notre démonstration utilise l'hypothèse plus forte : « Z est lagrangienne » et peut se généraliser si on suppose que « Λ est lagrangienne et $p(\Lambda)$ est ouvert dans $p(Z)$ ».

(2) *Existe-t-il une caractérisation géométrique de la propriété de multiplicité* $1 : m_\Lambda = 1$? *Il est probable que* $m_\Lambda = 1 \Rightarrow \Lambda$ *est une* K*-orbite.* — Lorsque $\mathfrak{k}$ est l'ensemble des points fixes d'une involution de $\mathfrak{g}$ et $f \in \mathfrak{k}^\perp$, la variété Z est une K-orbite et $m_Z = 1$ [Be].

(3) *Soit* $Z^0 \subset T^*X$ *la variété caractéristique du* $\mathscr{D}_{f_0, X}$*-module* $\Delta_X(M)$ *localisé de* $M := U/(I + U\mathfrak{k}^f)$. *Quel lien existe-t-il entre* Z *et* Z^0? *En particulier, a-t-on l'égalité* $\dim Z = \dim Z^0$?

On a seulement prouvé l'équivalence : $\dim Z = \dim X \Leftrightarrow \dim Z^0 = \dim X$. Remarquons que ces variétés ne sont pas en général isomorphes : dans l'exemple 4.2. (*b*), Z est irréductible mais pas Z^0.

BIBLIOGRAPHIE

[B-B 1] A. Beilinson et J. Bernstein, *Localisation de* $\mathfrak{g}$*-modules* (*C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 292, 1981, p. 15-18).

[B-B 2] A. Beilinson et J. Bernstein, *A generalisation of Casselman's Submodule Theorem* (*Progress in Math.*, 40, Birkaüser, 1983, p. 35-52).

[B-B 3] A. Beilinson et J. Bernstein, *A Proof of Jantzen Conjectures* (preprint).

[Be] Y. Benoist, *Les modules simples sphériques d'une algèbre de Lie nilpotente* (*Compos. Math.*, vol. 73, 1990, p. 295-327).

[B-C-D...] P. Bernat, N. Conze, M. Duflo, M. Levy-Nahmas, M. Rais, P. Renouard et M. Vergne, *Représentations des groupes de Lie résolubles* (*Mon. Soc. Math. Fr.*, Dunod, Paris, 1972).

[Bo] A. Borel *et al.*, *Algebraic D-modules*, Acad. Press, 1987.

[Di] J. Dixmier, *Algèbre enveloppante*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[Fu] H. Fujiwara, *Représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents* (*Pacific Journ. Math.*, vol. 127, 1986, p. 329-352).

[Gi] V. Ginzburg, *Sympletic Geometry and Representations* (*Funct. An. and Appl.*, vol. 17, 1983, p. 225-227).

[Ka] M. Kashiwara, *Representation Theory and D-modules on Flag Varieties* (*Astérisque*, vol. 173-174, 1989, p. 55-109).

[Ki 1] A. Kirillov, *Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents* (*Uspek. Math. Nauk.*, vol. 17, 1962, p. 57-110).

[Ki 2] A. Kirillov, *Éléments de la théorie des représentations*, Ed. M.I.R., 1974.

[Li] G. Lion, *Intégrales d'entrelacement sur des groupes de Lie nilpotents et indice de Maslov*, LN 587, Springer, 1977, p. 160-176.

[Mi] D. Milicic, D-*modules and representation theory*, Livre en préparation.

[Pe] R. Penney, *Abstract Plancherel Theorems and a Frobenius Reciprocity Theorem* (*Journ. Funct. Anal.*, vol. 18, 1975, p. 177-190).

(Manuscrit reçu le 1er juin 1989
révisé le 18 octobre 1989).

Yves Benoist,
Université Paris-VII,
U.A. n° 748 du C.N.R.S.,
U.F.R. de Mathématiques,
2, place Jussieu,
75231 Paris Cedex 05.