ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PH. DELANOË

Réalisations globalement régulières de disques strictement convexes dans les espaces d'Euclide et de Minkowski par la méthode de Weingarten

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 21, nº 4 (1988), p. 637-652

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1988_4_21_4_637_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 21, 1988, p. 637 à 652.

RÉALISATIONS GLOBALEMENT RÉGULIÈRES DE DISQUES STRICTEMENT CONVEXES DANS LES ESPACES D'EUCLIDE ET DE MINKOWSKI PAR LA MÉTHODE DE WEINGARTEN

PAR PH. DELANOË

RÉSUMÉ. — Un disque de classe $C^{k,\alpha}$, $k>2$, strictement convexe pour une métrique riemannienne plate $C^{k-1,\alpha}$ est $C^{k,\alpha}$-isométrique à un domaine strictement convexe du plan euclidien (théorème 1). Grâce à ce résultat, la méthode de Weingarten peut devenir globale. Elle fournit une condition géométrique intrinsèque nécessaire et suffisante, l'ajustement, pour l'existence de plongements isométriques (ou « réalisations ») globalement réguliers de classe $C^{k,\alpha}$, $k>3$, de disques $C^{k+1,\alpha}$ strictement convexes pour des métriques $C^{k,\alpha}$ de courbure, positive si l'on plonge dans l'espace Euclidien de dimension 3 (théorème 2), négative si l'on plonge dans l'espace de Minkowski de dimension 3 (théorème 4).

ABSTRACT. — A disk of class $C^{k,\alpha}$, $k>2$, strictly convex for a flat Riemannian $C^{k-1,\alpha}$ metric is $C^{k,\alpha}$-isometric to a strictly convex domain of the euclidian plane (Theorem 1). Thanks to this result, the Weingarten's method becomes global. It yields an intrinsic geometrical necessary and sufficient condition, the adjustment, for the existence of globally smooth of class $C^{k,\alpha}$, $k>3$, isometric embeddings (or "realizations") of $C^{k+1,\alpha}$ disks strictly convex for $C^{k,\alpha}$ metrics with curvature, either positive when the target 3-space is Euclidean (Theorem 2), or negative when it is Minkowskian (Theorem 4).

Key-Words: Plongement isométrique global, disque strictement convexe, méthode de Weingarten globale, courbure positive ou négative, méthode de continuité.

1980 *A.M.S. Classification:* 53C45, 58G20, 35B65.

PREMIÈRE PARTIE
PLONGEMENT DANS L'ESPACE EUCLIDIEN

I. Introduction

LE PROBLÈME. — Un problème naturel de la théorie des surfaces convexes de l'espace euclidien (lequel sera toujours sous-entendu ici de dimension *trois*) est le suivant : soit (D, g) une variété riemannienne compacte à bord de dimension 2, D (dont on notera Ω l'intérieur, Γ le bord) simplement connexe de classe $C^{k+1,\alpha}$, k entier au moins égal à 4, $\alpha\in]0, 1[$, g de classe $C^{k,\alpha}(D)$ et de courbure *positive*. On suppose en outre (D, g) *strictement convexe* au sens où il existe $\varphi\in C^{k,\alpha}(D)$ strictement convexe pour g et telle que $\Gamma\equiv\{\varphi=0\}$. Une telle fonction φ peut être appelée « définissante » pour (D, g). Problème : réaliser (D, g) comme *calotte convexe globalement régulière* de classe $C^{k,\alpha}$ de l'espace euclidien *i.e.* trouver un plongement isométrique de classe $C^{k,\alpha}(D)$ de (D, g) dans l'espace euclidien qui envoie Γ *dans un plan* et tel que la projection orthogonale de l'image de D sur ce plan soit bijective.

L'existence d'une fonction définissante pour (D, g) est évidemment une *condition nécessaire* du problème. La condition « d'ancrage » du bord à un plan est naturelle, car elle rend la réalisation cherchée à la fois rigide [Coh], [Pog] (p. 78 et 178) et infinitésimalement rigide [Pog] (p. 260-261). En outre, elle est automatiquement vérifiée lorsqu'on construit la réalisation (nonobstant la régularité) au moyen du théorème de recollement d'Aleksandrov applicable en vertu de la non-négativité de la courbure géodésique de Γ (*voir* [Pog], p. 33-34).

Ce problème est ouvert; seules des *obstructions* ont été mises en évidence à son sujet (*voir* [G-R], appendices 2 et 3, et le livre [Gr2], section 3.2.3 et ses références notamment [B-Z]).

RÉALISATION DE CALOTTES *INTÉRIEUREMENT* RÉGULIÈRES PAR LA MÉTHODE D'ALEKSANDROV. — Une version affaiblie du problème précédent, où l'on n'impose au plongement isométrique cherché qu'une régularité *locale* dans Ω, est résolue dans [Pog] (théorème 4, p. 104). L'absence de régularité *globale*, notamment l'absence d'un contrôle uniforme de la courbure normale (*voir* [Pog] section II-8), lève toute obstruction géométrique; ainsi, par exemple, les métriques C^2-stablement non réalisables de l'appendice 3 de [G-R] vérifient-elles les hypothèses du théorème 4, p. 104 de [Pog].

La méthode s'articule en deux étapes, l'une géométrique extrinsèque, l'autre mi-analytique mi-géométrique. La première consiste à traiter *l'existence* d'une calotte convexe réalisant la métrique prescrite, au moyen du théorème de recollement précité et de celui sur la réalisabilité des surfaces convexes fermées [A12].

La seconde étape consiste à traiter la régularité *intérieure* $C^{k-1,\alpha}$ de cette calotte, comme conséquence de celle de la métrique qu'elle supporte supposée de classe C^k, $k \geqq 2$. Dans [Pog], cette dernière étape est laborieuse; en effet, elle est basée sur la régularité C^1 des surfaces convexes à courbure spécifique positive bornée [A11] [A12], [Pog] (p. 57-61), sur la rigidité des calottes convexes ([Pog], p. 78-82) et sur un argument d'approximation nécessitant, la résolution du problème dans le cas analytique ([Pog], p. 95-101 et [Ber]), des estimations *a priori* sur la solution [He1] (si $k \geqq 3$) [He2] (si $k=2$) et la théorie elliptique standard en dimension deux [Nir].

Des raffinements récents portant sur la régularité intérieure de la calotte ont été apportés dans [Sab] (une métrique $C^{k,\alpha}$, $k \geqq 2$, donne une calotte $C^{k,\alpha}$) et [N-S] (une métrique à courbure spécifique pincée entre deux constantes positives donne une calotte $C^{1,\beta}$ pour un $\beta \in]0, 1[$ dépendant du rapport de ces constantes); leurs arguments sont mi-analytiques mi-géométriques. De façon purement analytique, et concise, les résultats de [He2] ont été aussi récemment améliorés par F. Schulz [Sch] qui obtient un théorème (staz 1) équivalent à celui de I. Sabitov [Sab] (Teopema B), puis l'applique à la régularité du problème de Weyl (décrit ci-après) suivant en cela une démarche, de l'analyse vers la géométrie, *inverse* de celle de Sabitov. Voir aussi tout récemment [Saf] et [S.L].

RÉALISATIONS DE MÉTRIQUES COMPLÈTES. — Le problème de Weyl, obtenu en remplaçant le disque D par la sphère S^2, sa généralisation à des réalisations dans des variétés

Riemanniennes-but de dimension trois à courbure sectionnelle *inférieure à celle de la source* (cas « elliptique », *voir* [Gr2] chapitre 3.2), la rigidité infinitésimale correspondante, sont aussi traités dans [Pog] (sections VI-4, VI-10).

Ces questions ont été récemment réabordées, dans la catégorie C^∞, par François Labourie [Lab] qui étudie *d'abord la compacité et (son alternative) la dégénérescence* des suites d'immersions isométriques uniformément elliptiques d'une surface dans une variété riemannienne de dimension trois, en interprétant le 1-jet d'une telle immersion *comme courbe pseudo-holomorphe*, en introduisant la notion afférente de *surface de pli* et en utilisant un *lemme de Schwarz* extrait du théorème de compacité dans la catégorie des « courbes-cusps » de M. Gromov [Gr1]. Grâce à cette approche, toute conceptuelle, seule une estimation uniforme de l'intégrale de la courbure moyenne est nécessaire pour contrôler la non-dégénérescence par passage à la limite d'une suite d'immersions isométriques uniformément elliptiques. Grâce à elle encore, les résultats de rigidité de Pogorelov découlent d'un argument *d'indice d'intersection* de deux courbes pseudo-holomorphes (dû à Lefschetz). Grâce à elle enfin, la *compacité* nécessaire pour obtenir les résultats d'existence de Pogorelov est acquise *par contradiction*, comme seule alternative possible à la dégénérescence celle-ci ne pouvant se produire.

RÉALISATIONS *GLOBALEMENT RÉGULIÈRES* DE MÉTRIQUES NON COMPLÈTES *AJUSTÉES*. — La première partie du présent article, chapitre d'un mini-cours d'initiation à l'analyse sur les variétés riemanniennes tenu à l'I.M.S.P. de Nice de janvier à mars 1987, a pour objet de traiter le problème de la réalisation des métriques *incomplètes* initialement décrit *sans recourir à la méthode d'Aleksandrov.* En regard des travaux juste mentionnés, il procède par une analyse intrinsèque élémentaire, *via* la méthode de Weingarten [Wei] rendue ici *globale.* Cette méthode permet de mettre en évidence une *condition nécessaire et suffisante* intrinsèque et invariante d'échelle sur (D, g), son *ajustement* (cf. *infra*), garantissant directement l'existence d'un plongement isométrique ayant la régularité souhaitée *jusqu'au bord du disque.* La part des estimations *a priori*, est extrèmement réduite puisqu'elle concerne seulement le contrôle des dérivées secondes de la solution de l'équation de Darboux (cf. *infra*).

II. Résolution du problème par la méthode de Weingarten

II.1. PRÉLIMINAIRE : UNE VERSION GLOBALE DU LEMME DE RIEMANN.

HYPOTHÈSES. — Soit (D, G) une variété riemannienne *plate* compacte à bord de dimension n; D (dont on note Ω l'intérieur, Γ le bord) est simplement connexe de classe C^r, $r \in \mathbb{R}$, $r \geqq 3$, G est de classe $C^{r-1}(D)$. On suppose en outre (D, G) *convexe* au sens où il existe une fonction $z \in C^r(D)$ *convexe pour* G *et nulle sur* Γ. Le théorème suivant précise sur (D, G) le lemme de Riemann.

THÉORÈME 1. — *L'application exponentielle associée à* G *au point* P *de* Ω *où* z *atteint son minimum, est une isométrie globalement régulière de classe* C^r *d'un convexe fermé de l'espace tangent* $T_P D$ *muni de la métrique euclidienne* $G(P)$, *sur* (D, G).

Preuve. — G étant plate, elle n'admet pas de points conjugués; l'application $\exp_P$ du lemme est donc un difféomorphisme local (voir e. g. [Au2], p. 17) et une injection. En outre, c'est une application *affine* ($T_P D$ étant muni de sa structure plate vectorielle canonique) comme le montre la première partie du lemme 3 de [Kos]. Ainsi, lorsqu'elle est définie, l'image réciproque d'un ensemble de niveau de z par $\exp_P$ est-elle *convexe pour la structure plate canonique de* $T_P D$.

Établissons maintenant la *surjectivité* de $\exp_P$ par un argument de *connexité* appliqué à l'ensemble évidemment non vide E des réels $c \leqq 0$ tels que $\{z \leqq c\}$ soit inclus dans l'image de $\exp_P$. Grâce à la *convexité* de $\exp_p^{-1}(\{z \leqq c\})$ pour $c \in E$, on montre que E est *fermé* en raisonnant comme dans la preuve du lemme 3 de [Kos] (p. 289). Puis on montre que E est *ouvert* en $c \in E$ grâce au théorème d'existence et d'unicité locales de Cauchy appliqué à l'équation des géodésiques de G (paramétrées par leur abscisse curviligne) issues de $\{z = c\}$ avec une vitesse unitaire de départ égale à celle de l'arrivée sur la géodésique en provenance de P, celle-ci étant toujours *sortante de* $\{z \leqq c\}$ *puisque* z *est convexe pour* G. Par conséquent $0 \in E$ et $\exp_P$ est bien un difféomorphisme *global*. D'après la régularité de $G \in C^{r-1}(D)$, la régularité globale C^{r-2} de $\exp_P$ découle de l'alinéa sur la dépendence par rapport aux conditions initiales du théorème de Cauchy.

$\exp_P$ commutant avec les transports parallèles et admettant *l'identité* comme application tangente en $0 \in T_P D$, l'image réciproque de G par $\exp_P$ n'est autre que G(P) (en utilisant l'identification canonique de l'espace tangent à $T_P D$ en un point du domaine de définition de $\exp_P$, avec $T_P D$ lui-même). Incidemment, nous voyons alors que $\exp_p^{-1}$ est une application *harmonique* et que sa régularité *locale* C^r, pour r non entier, découle de la théorie elliptique standard [D-N].

Il reste à établir la régularité *globale* C^r de $\exp_P$. Pour cela nous utilisons la remarque suivante : G étant plate de classe $C^{r-1}(D)$, tout vecteur tangent à D détermine un champ de vecteurs *parallèle* de classe $C^{r-1}(D)$ sur D. Soit $(e_1, \ldots, e_n)(P)$ un repère orthonormé de $T_P D$; il détermine donc un champ de repères parallèle de classe $C^{r-1}(D)$ sur D. Introduisons les coordonnées géodésiques normales associées au repère $(e_1, \ldots, e_n)(P)$ *i. e.* l'application,

$$x = (x', \ldots, x^n) : D \to R^n$$

définie par, pour tout $Q \in D$,

$$\exp_p^{-1}(Q) = \sum x^i(Q)\, e_i(P)$$

$\sum$ indiquant la sommation sur $i = 1$ à n. Par construction, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, x^i est la fonction *affine* sur D qui vérifie,

$$x^i(P) = 0, \qquad \natural_G(dx^i) = e_i$$

($\natural_G$ désignant l'isomorphisme de $T^* D$ sur TD canoniquement associé à G). x^i est donc *globalement régulière* de classe $C^r(D)$ ce qui équivaut à la régularité globale C^r de l'application $\exp_P$. ■

Dans la suite de cet article, nous utiliserons le théorème 1 avec $n = 2$ et avec $r = k + \alpha$.

II.2. La méthode de Weingarten *globale*. — Soit A l'ensemble des couples (g, z) composés d'une métrique Riemannienne g sur un disque fermé D vérifiant les conditions de *l'introduction* (cf. *supra*), et d'une fonction z « admissible pour g » *i.e.* d'une fonction $z \in C^{k,\alpha}(D)$, définissante de (D, g) et telle que,

$$G(g, z) := g - dz \otimes dz$$

soit encore une métrique riemannienne (*i.e.* soit *définie positive* sur D). Cette dernière condition équivaut manifestement à,

$$|dz|_g < 1,$$

(en un point générique de D, prendre un repère tangent orthonormé pour g dont un vecteur est parallèle à $\natural_g dz$, $\natural_g$ désignant l'isomorphisme de T^*D sur TD canoniquement associé à g). Un calcul de routine montre alors que,

$$\mathrm{Hess}_G(z) = [1 - |dz|_g^2]^{-1} \mathrm{Hess}_g(z)$$

en désignant par $\mathrm{Hess}_G(z)$ la matrice hessienne de z dans la connexion de Levi-Civita de G (*idem* pour celle de g). Donc z, strictement convexe pour g, *l'est aussi pour* G.

Nous cherchons un plongement de classe $C^{k,\alpha}(D)$ de D dans l'espace euclidien, qui induise sur D la métrique g et envoie Γ dans un plan sur lequel la projection orthogonale de l'image de D soit bijective. Suivant l'idée de [Wei], la méthode de Weingarten *globale* consiste à ramener la recherche d'un tel plongement à celle d'une fonction *z admissible pour g et telle que* $G(g, z)$ *soit « plate »*. Soit en effet z pareille fonction, soit ρ un repère de $T_P D$ orthonormé pour $G = G(g, z)$ *i.e.* une isométrie de $[T_P D, G(P)]$ sur (R^2, e) et soit,

$$(x, y) : [D, G(g, z)] \to (R^2, e)$$

l'isométrie de classe $C^{k,\alpha}(D)$ construite, grâce au théorème 1, en composant ρ avec $\exp_{p^{-1}}$. Le plongement cherché n'est autre que,

$$(x, y, z) : D \to R^3.$$

(D, g) est alors réalisé comme *graphe* de l'expression de z dans la carte (x, y).

Cette méthode est purement *intrinsèque*. Analytiquement, elle permet de ramener la résolution d'un système différentiel non linéaire 3-3 du premier ordre, à celle *d'une seule* équation différentielle scalaire non linéaire du second ordre satisfaite par z, *l'équation de Darboux*, obtenue en exprimant la nullité de la courbure de la métrique $G(g, z)$. Ce dernier calcul est par exemple mené dans [Au1] (p. 386-387), où la métrique g' d'Aubin est notre métrique g, sa métrique g est notre métrique $G(g, z)$, et $n=2$ ce qui permet de recueillir le résultat dès la quatrième ligne de la page 387. L'équation de Darboux et sa condition de Dirichlet s'écrivent,

(1) $$W(g, z) = K(g) \quad \textit{dans } \Omega,\ z = 0 \textit{ sur } \Gamma$$

K(g) désignant la courbure de Gauss de g et W l'opérateur,

$$W(g, z) := [1 - |dz|_g^2]^{-1}\, dét\,(z_i^j)$$

en notant simplement en indices les dérivations covariantes successives (dans *l'ordre* où elles sont appliquées, *e.g.* z_{ijk} signifie i d'abord, j ensuite, k en dernier) d'une fonction ou d'un tenseur, dans la métrique g, et en modifiant la variance des tenseurs grâce à l'isomorphisme constitué par g entre les fibrés tangent et cotangent à D.

II.3. UNE CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE D'EXISTENCE PAR LA MÉTHODE DE WEINGARTEN GLOBALE. — L'opérateur W, défini sur A, est (comme la courbure) *naturel* c'est-à-dire qu'il commute avec l'image réciproque par tout $C^{k+1,\alpha}$-difféomorphisme F: $\Delta \to D$,

$$F^*[W(g, z)] - W(F^* g, F^* g, F^* z) \equiv 0.$$

L'opérateur W/K possède en outre *l'invariance d'échelle* suivante: pour tout $\lambda > 0$ et tout $(g, z) \in A$,

$$W(\lambda^2 g, \lambda z)[K(\lambda^2 g)]^{-1} = W(g, z)[K(g)]^{-1}.$$

Cette invariance d'échelle, aisément vérifiée, est naturelle dans le cadre de la méthode de Weingarten car d'après l'identité,

$$G(\lambda^2 g, \lambda z) = \lambda^2 G(g, z),$$

l'isométrie globale du théorème 1 pour $G(\lambda^2 g, \lambda z)$ se déduit trivialement de celle pour $G(g, z)$. Notons $Q(g, z)$ le quotient adimensionnel invariant d'échelle $W(g, z)/K(g)$, et soit,

$$\varepsilon(g, z) := \inf_D Q(g, z).$$

$\varepsilon(g, z)$ n'est pas seulement invariant d'échelle, il est aussi *naturel.* Il en est donc de même de la définition suivante,

DÉFINITION. — (D, g) *strictement convexe de courbure positive est dite « ajustée » s'il existe z telle que :* $(g, z) \in A$ *et* $\varepsilon(g, z) \geqq 1$.

Géométriquement, la condition $\varepsilon(g, z) \geqq 1$ signifie que la métrique $G(g, z)$ est à *courbure non-positive.* Cette définition nous permet d'énoncer le résultat principal de ce chapitre.

THÉORÈME 2. — *Soit* (D, g) *vérifiant les hypothèses de l'introduction. Alors,* (D, g) *est réalisable comme calotte convexe globalement régulière de classe* $C^{k,\alpha}$ *de l'espace euclidien si et seulement si* (D, g) *est ajustée.*

Remarque. — L'exemple C^2-stable non C^2-réalisable donné dans [G-R] (appendice 3) à partir d'une inégalité géométrique de Iouri Burago (appendice 2), vérifie les hypothèses du théorème 2; il est donc *non ajusté.* La condition d'ajustement sur (D, g) est C^2*-fermée, donc* C^2*-instable* pour les (D, g) « extrémaux ».

Preuve de la nécessité pour (D, g) *d'être ajustée.* — Supposons (D, g) réalisée par une calotte C et prenons sur l'espace euclidien des coordonnées orthonormées (x, y, z) telles que Γ soit dans le plan $\{z=0\}$, C étant représentée par le graphe d'une fonction $Z \in C^{k,\alpha}(\Delta)$ en notant ici Δ le domaine fermé strictement convexe du plan $\{z=0\}$ délimité par Γ. Notons $F: \Delta \to \mathbb{R}^3$ le plongement de classe $C^{k,\alpha}(\Delta)$ donné par le graphe de Z. g étant réalisée, $F^* e = g$ soit encore,

$$g - dZ \otimes dZ = e$$

e désignant tour à tour la métrique euclidienne standard de $\mathbb{R}^3$ et celle induite sur Δ. $G(g, Z)$ est donc une métrique riemannienne plate sur Δ; Z vérifie donc (1). D'après le lemme 1 ci-après, Z (ou $-Z$) est nécessairement admissible pour g. (D, g) est donc ajustée puisque $\varepsilon(g, Z) \equiv 1$. ■

LEMME 1 (admissibilité *a priori*). — *Soit* $z \in C^{k,\alpha}(D)$ *solution de* (1). *Alors* (g, z) *ou* (g, $-z$) *est dans* A.

Preuve. — $K(g)$ étant positive, z doit atteindre un extremum non nul dans Ω. En ce point, $dz=0$ donc $\mathrm{Hess}_g(z)$ est, en tant que forme quadratique sur l'espace tangent, de signature $(+, +)$ ou $(-, -)$. En outre, au point considéré, $G(g, z)$ est de signature $(+, +)$. Dès lors, d'après l'équation de Darboux, ces signatures doivent se propager à D tout entier par continuité puisque $z \in C^{k,\alpha}(D)$ (C^2 suffit). ■

II.4. PREUVE DE LA *SUFFISANCE* POUR (D, g) D'ÊTRE AJUSTÉE. — La démonstration du théorème 2 est réduite par la méthode de Weingarten globale à celle du,

THÉORÈME 3. — *Soit* (D, g) *ajustée. Le problème* (1) *admet une* (*unique*) *solution* $z \in C^{k,\alpha}(D)$ *strictement convexe pour* g.

Preuve de l'unicité. — Soit z solution strictement convexe pour g du problème (1). D'après l'expression de la différentielle partielle de W par rapport à z [cf. *infra*, expression de $dN(z)$], qui est elliptique, l'unicité découle du *Principe du Maximum* (voir *e.g.* [Au2], p. 97). ■

De par sa construction *via* le théorème 1, la calotte convexe qui réalise (D, g) dans l'espace euclidien est donc bien *rigidement liée au plan d'ancrage de son bord* i.e. unique à un déplacement euclidien et à une réflexion près.

Preuve de l'existence, par la méthode de continuité. — Commençons par préciser à l'aide de quelques notations le cadre fonctionnel propre à la résolution du problème de Dirichlet (1). Posons,

$$A^{k,\alpha} := \{z \in C^{k,\alpha}(D);\ (g, z) \in A\}.$$

$A^{k,\alpha}$ est un *ouvert non vide* (car (D, g) est strictement convexe) de l'espace de Banach $C_0^{k,\alpha}(D)$ des fonctions numériques de classe $C^{k,\alpha}(D)$ s'annulant sur Γ.

La métrique g étant *fixée*, nous considérerons $N := \mathrm{Log}\, W$ comme application différentiable de $A^{k,\alpha}$ sur le Banach $C^{k-2,\alpha}(D)$. N est *elliptique* et, nous l'avons vu, injectif, d'après l'expression locale de sa différentielle en $z \in A^{k,\alpha}$ qui est la suivante,

$$dN(z)(\delta z) = \{z^{ij}(\delta z)_{ij} + 2[1 - |dz|_g^2]^{-1} z^i (\delta z)_i\},$$

pour tout $(\delta z)\in C_0^{k,\alpha}(D)$, (z^{ij}) désignant la matrice *inverse* de (z_{ij}). Classiquement, $dN(z)$ est un *isomorphisme* de $C_0^{k,\alpha}(D)$ dans $C^{k-2,\alpha}(D)$. D'après le théorème d'inversion locale Banachique et l'injectivité, N est donc un C^1-*difféomorphisme de* $A^{k,\alpha}$ *sur son image.* Le théorème 3 stipule que $\operatorname{Log}[K(g)]\in C^{k-2,\alpha}(D)$ *est dans l'image de* N. Établissons-le par la méthode de continuité : (D, g) étant ajustée, il existe $\varphi\in A^{k,\alpha}$ telle que $\varepsilon(g, \varphi)\geqq 1$. *Fixons désormais pareille* φ et considérons pour $t\in[0, 1]$ la famille de problèmes de Dirichlet,

$$N(z)=\operatorname{Log}[t\,K(g)+(1-t)\,W(g, \varphi)]. \tag{1.t}$$

Pour résoudre (1), il suffit manifestement d'établir la connexité de l'ensemble,

$$T:=\{t\in[0, 1];\ \textit{il existe}\ z\in A^{k,\alpha}\ \textit{solution de}\ (1.t)\}.$$

non vide puisqu'il contient φ, et *relativement ouvert dans* [0, 1] d'après l'inversibilité locale de N. La preuve du théorème 3 est donc réduite à montrer que T est *fermé.* A cet effet, nous n'aurons qu'à construire certaines estimations *a priori uniformes* (*i. e.* indépendantes de $t\in[0, 1]$) précisées par le,

LEMME 2. — T *est fermé s'il existe* $\beta\in]0, 1[$ *tel que, pour tout* $t\in[0, 1]$, *si* $z\in A^{k,\alpha}$ *vérifie* (1.*t*), *alors* $|dz|<\beta$ *et* $|\operatorname{Hess}(z)|<1/\beta$ (*les normes étant désormais sous-entendue dans la métrique* g).

Preuve. — Si $z\in A^{k,\alpha}$ vérifie les deux estimations du lemme, non seulement z est dans un *borné* de $C^2(D)$ mais encore on déduit facilement de (1.*t*) que [Hess(z)] constitue sur D une métrique riemannienne *équivalente à g.* Classiquement en dimension *deux* ([G-T] théorème 17.12, puis régularité elliptique standard en raisonnant comme *e.g.* dans la proposition 3.59 de [Au2]), les estimations du lemme fournissent un contrôle uniforme de z dans $C^{k,\alpha}(D)$.

Soit s une suite de T, $t\in[0, 1]$ sa limite, S la suite lui correspondant dans $A^{k,\alpha}$. D'après le théorème d'Ascoli, pour tout $\delta\in]0, \alpha[$, nous pouvons extraire de S une sous-suite S' convergente dans $A^{k,\delta}$ vers une fonction z, elle-même bornée dans $C^{k,\alpha}(D)$. Par continuité z vérifie (1.*t*) et se trouve donc, d'après le lemme 1, dans $A^{k,\alpha}$. Donc $t\in T$. ■

La fin de cette première partie est consacrée à établir les estimations *a priori* du lemme 2.

III. Estimations *a priori*

III.1. L'ESTIMATION $C^1(D)$. — Il suffit ici de noter que, de par sa définition-même, $A^{k,\alpha}$ est borné dans $C^1(D)$. Une estimation précise du gradient sera établie au paragraphe III.4.

III.2. RÉDUCTION DE L'ESTIMATION DES DÉRIVÉES SECONDES A UNE ESTIMATION SUR Γ. — z, donc t, étant fixés, posons pour abréger $F:=\operatorname{Log}[t\,K(g)+(1-t)\,W(g, \varphi)]$ et enregistrons deux formules auxiliaires utiles, obtenues en dérivant l'équation (1, t) une fois puis deux (ce qui est possible vue la régularité $C^{k,\alpha}$ de g et de φ, $k>3$), et en utilisant aussi la courbure de g pour la commutation des dérivées covariantes (il est pratique de mener les calculs jusqu'à un certain point comme si nous étions en dimension quelconque),

$$z^{ij} z_{hji} = F_h - 2[1-|dz|^2]^{-1} z^i z_{hi} + z^{ij} R^k_{ihj} z_k \tag{2}$$

$$\begin{aligned} dN(z)(-\Delta z) = & -\Delta F - 3R + 3 z^{ij} z^h_k R^k_{ihj} \\ & + z^{ia} z^{jb} g^{kh} z_{bak} z_{jih} \\ & - 2[1-|dz|^2]^{-1} \{z^i z^j R_{ij} + z^j_i z^i_j \\ & + 2[1-|dz|^2]^{-1} z^i z^j z^k_i z_{jk}\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Considérons la fonctionnelle, analogue à celle de [Del] (p. 694),

$$B(z) := \mathrm{Log}(-\Delta z) + (C/2)|dz|^2$$

C désignant une constante positive uniforme à préciser.

LEMME 3. — *L'estimation uniforme de* $|\mathrm{Hess}(z)|$ *est acquise si* $B(z)$ atteint son maximum en un point intérieur à D.

Preuve. — Supposons que $B = B(z)$ atteigne son maximum en $P \in \Omega$. Grâce à (2), (3) et $dB(P) = 0$, nous pouvons écrire,

$$(-\Delta z) z^{ij} B_{ij}(P) \leqq 0$$

sous la forme,

$$\begin{aligned} 0 \geqq & [z^{ia} z^{jb} g^{kh} z_{abk} z_{ijh} - (-\Delta z)^{-1} z^{ij} (\Delta z)_i (\Delta z)_j] \\ & -\Delta F - 3R + 3 z^{ij} z^h_k R^k_{ihj} - 2[1-|dz|^2]^{-1} \{z^i z^j R_{ij} \\ & + z^j_i z^i_j + 2[1-|dz|^2]^{-1} z^i z^j z^k_i z_{jk}\} \\ & + C\{(\Delta z)^2 - z^i F_i \Delta z - z^{ij} z^k z^h R_{hikj} \Delta z\}. \end{aligned} \tag{4}$$

En développant le carré,

$$[z_{abk} + (-\Delta z)^{-1} z_{ak} (\Delta z)_b][z_{ijh} + (-\Delta z)^{-1} z_{ih} (\Delta z)_j] z^{ia} z^{jb} g^{kh}$$

nous trouvons que le terme entre crochets de la première ligne du membre de droite de l'inégalité (4) est minoré en P par,

$$-2C z^i z^j R_{ij}.$$

z étant convexe, notons aussi l'inégalité suivante sur D,

$$(\Delta z)^2 \geqq z^j_i z^i_j. \tag{5}$$

Enfin, la dimension deux et la non-négativité de la courbure de g sont cruciales à ce stade, puisqu'elles impliquent,

$$-C z^{ij} z^k z^h R_{hikj} \Delta z \geqq 0$$

et aussi (mais c'est moins important),

$$3\, z^{ij} z^h_k \mathrm{R}^k_{ihj} \geqq 0,$$

comme on s'en assure aisément dans une carte en P *normale* pour g et qui diagonalise [Hess (z) (P)]. Nous pouvons alors déduire de (4) l'existence d'une constante *uniforme* C′ telle qu'en P nous ayions,

$$(\Delta z)^2 (\mathrm{C}-\mathrm{C}') + \mathrm{C}'\, \mathrm{C}\, \Delta z - \mathrm{C}' \leqq 0.$$

En choisissant : $\mathrm{C}=\mathrm{C}'+1$, nous obtenons une majoration de $|\Delta z(\mathrm{P})|$ par une constante uniforme. Compte tenu de la définition de P et de l'estimation *a priori* uniforme de z dans $\mathrm{C}^1(\mathrm{D})$, nous en déduisons une majoration *uniforme* de $|\Delta z|$ dans D et le lemme 3 est démontré d'après (5). ■

Grâce au lemme 3, l'estimation de $|\mathrm{Hess}(z)|$ sur D est donc réduite à celle de la même quantité sur Γ, objet de la section suivante.

III.3. ESTIMATION DES DÉRIVÉES SECONDES SUR Γ. — Soit $\mathrm{O}\in\Gamma$ fixé. Prenons en O des coordonnées locales (x, y) normales pour g et telles que $\partial/\partial y(\mathrm{P})$ soit la normale unitaire *rentrante* en O. Le but de cette section est d'établir un contrôle uniforme des trois dérivées secondes en O : tangentielle $z_{xx}(\mathrm{O})$, mixte $z_{xy}(\mathrm{O})$ et normale $z_{yy}(\mathrm{O})$.

Dérivée tangentielle. — Nous la contrôlons déjà car, z s'annulant sur Γ, nécessairement,

$$z_{xx}(\mathrm{O}) = -k(\mathrm{O})\, z_y(\mathrm{O})$$

k désignant la courbure géodésique de Γ.

Remarque. — Il existe $\sigma\in]0, 1[$ tel que, pour tout $t\in[0, 1]$, $\sigma\varphi$ soit solution *supérieure* de $(1.t)$. Fixons un tel σ. D'après le Principe du Maximum [Au2] (p. 97), en tout point de Γ,

$$dz(n) \geqq \sigma\, d\varphi(n)$$

n désignant le champ de normales unitaires sortantes associé à g sur Γ. $\varphi\in\mathrm{C}^{k,\alpha}$ étant strictement convexe, il existe une constante $\theta > 0$ telle que,

$$\mathrm{Hess}(\varphi) \geqq \theta\, g$$

sur D, au sens des formes quadratiques. Nous obtenons donc aussi en O la minoration *uniforme* suivante,

$$z_{xx}(\mathrm{O}) \geqq \sigma\varphi_{xx}(\mathrm{O}) \geqq \sigma\theta. \tag{6}$$

Dérivée mixte. — Soit T un champ de vecteurs sur D de classe $\mathrm{C}^{k-1,\alpha}$ tangent à Γ et valant $\partial/\partial x$ en O. Nous pouvons par exemple choisir,

$$\mathrm{T} = -|d\varphi|^{-1} \,\#\, (*\, d\varphi)$$

hors d'un voisinage du point de Ω où φ atteint son minimum, et le prolonger à D à l'aide d'une fonction plateau ($*$ est l'opérateur de Hodge associé à g). Appliquant T à l'équation $(1.t)$ et intervertissant l'ordre des dérivations grâce à la courbure de g, nous trouvons que $\mathrm{T}z$ vérifie dans D l'équation linéaire elliptique suivante,

$$d\mathrm{N}(z)(\mathrm{T}z)=\mathrm{TF}+2\,\mathrm{T}_i^i+z^{ij}(\mathrm{T}_{ij}^k z_k-\mathrm{T}^k z_h \mathrm{R}_{ijk}^h)+2(1-|dz|^2)^{-1} z^i z_j \mathrm{T}_i^j.$$

Introduisons alors les deux fonctionnelles,

$$(v^{\pm}):=\mathrm{T}z-(\pm\lambda\varphi\pm\mu z)$$

λ et μ désignant des constantes positives uniformes à préciser. $(v^{\pm})$ s'annulent sur Γ et vérifient dans D,

$$\begin{aligned}-d\mathrm{N}(z)(v^{\pm})=z^{ij}[\pm\lambda\varphi_{ij}-\mathrm{T}_{ij}^k z_k+\mathrm{T}^k z_h \mathrm{R}_{ijk}^h]&\\ \pm 2\mu\pm 2\mu\,|dz|^2(1-|dz|^2)^{-1}-\mathrm{TF}-2\,\mathrm{T}_i^i&\\ -2(1-|dz|^2)^{-1}(\pm\lambda z^i\varphi_i-z^i z_j \mathrm{T}_i^j).&\end{aligned}$$

Choisissons *d'abord* λ *indépendant de* $t\in[0, 1]$ telle que la forme quadratique écrite entre crochets et contractée avec z^{ij} à la première ligne, telle que cette forme soit dans D, positive pour v^+, négative pour v^-, ce qui est manifestement possible d'après les estimations antérieures et la stricte convexité de φ. λ est désormais fixée.

Choisissons ensuite μ telle que l'ensemble des termes figurant aux deuxième et troisième lignes de l'équation précédente soit dans D, positif pour v^+, négatif pour v^-, ce qui est à nouveau possible grâce aux estimations antérieures. Nous obtenons alors,

$$d\mathrm{N}(z)(v^+)<0 \quad \text{dans D, } v^+=0 \text{ sur } \Gamma$$
$$d\mathrm{N}(z)(v^-)>0 \quad \text{dans D, } v^-=0 \text{ sur } \Gamma$$

et finalement, grâce au lemme de Hopf [G-T] (p. 34) appliqué en O à $(v^{\pm})$,

$$|z_{xy}(\mathrm{O})|\leqq(\lambda+\mu).$$

Dérivée normale. — D'après l'équation $(1.t)$ en O et les estimations précédentes, notamment (6),

$$z_{yy}=(z_{xx})^{-1}[(z_{xy})^2+(1-|dz|^2)\exp(\mathrm{F})]\leqq(\sigma\theta)^{-1}[(\lambda+\mu)^2+c],$$

c désignant un majorant uniforme de $\exp(\mathrm{F})$. Comme $z_{yy}(\mathrm{O})$ est positive puisque z est convexe, l'estimation *a priori* de $|\mathrm{Hess}(z)|$ sur Γ s'achève. ■

III.4. $|dz|$ EST UNIFORMÉMENT DISTANT DE 1. — Des hypothèses faites sur (D, g), *nous n'avons pas encore utiliser son ajustement*, mais seulement la régularité $\mathrm{C}^{k,\alpha}$ de g, $k>3$, la positivité de sa courbure et sa stricte convexité. Ce n'est qu'à présent, pour maintenir $|dz|$ à distance *uniforme* de 1, comme l'exige le lemme 2, et obtenir ainsi *l'ellipticité uniforme* du problème, que l'ajustement devient nécessaire.

En effet, d'après son choix rendu possible par l'ajustement de (D, g), φ *est solution inférieure* de $(1.t)$ pour tout $t\in[0, 1]$. Il suit donc du lemme de Hopf que sur Γ: $dz(n)\leqq d\varphi(n)$. En outre, z étant convexe sur D nulle sur Γ, $dz(n)\equiv|dz|$ sur Γ.

Enfin, z étant strictement convexe sur (D, g), $|dz|$ atteint nécessairement son maximum relativement à D *sur* Γ. Preuve : le gradient de $|dz|^2$ s'annule en un point si et seulement si celui de z en fait autant.

En combinant ces remarques nous obtenons le résultat désiré, à savoir,

$$|dz| \leqq \sup_\Gamma |d\varphi| < 1.$$

DEUXIÈME PARTIE
PLONGEMENT DANS L'ESPACE DE MINKOWSKI

Le problème traité ci-après, à notre connaissance, n'a encore jamais été abordé. Sa résolution est pourtant analogue à celle du plongement dans l'espace euclidien; en particulier, le problème est *elliptique*. C'est pourquoi, d'une part nous présentons les deux problèmes dans le même article, d'autre part nous serons bref dans cette partie, insistant surtout sur les aspects nouveaux.

La numérotation des paragraphes et des équations fait suite à celle de la première partie.

IV. Le théorème

LES HYPOTHÈSES. — Soit (D, g) vérifiant les hypothèses faites au début de la section I, à l'exception du *signe* de la courbure de g puisqu'on suppose maintenant,

$$K(g) < 0.$$

LE PLONGEMENT ISOMÉTRIQUE CHERCHÉ. — Nous cherchons une condition nécessaire et suffisante sur (D, g), garante de l'existence d'un plongement isométrique de classe $C^{k,\alpha}(D)$ allant de (D, g) dans M, l'espace-temps de Minkowski de dimension *trois* de signature $(+, +, -)$, tel qu'il existe un référentiel de Lorentz dans lequel l'image de Γ soit constituée d'événements *simultanés*.

LA MÉTHODE DE WEINGARTEN *GLOBALE*. — Soit t une fonction définissante pour (D, g) (au sens de la section I), posons,

$$G^*(g, t) := g + dt \otimes dt.$$

$G^*(g, t)$ est une métrique riemannienne sur D de classe $C^{k-1,\alpha}(D)$ pour laquelle t est encore *strictement convexe*, d'après la formule aisément établie,

$$\mathrm{Hess}_{G^*}(t) = [1 + |dt|_g^2]^{-1} \mathrm{Hess}_g(t).$$

Suivant l'idée de Weigarten [Wei], la recherche d'un plongement isométrique de (D, g) dans M se ramène donc, grâce au théorème 1, à celle d'une fonction t définissante pour (D, g) et telle que $G^*(g, t)$ soit *plate*. D'après le calcul de [Au1] (troisième équation de la p. 387), en y posant $f=t$, $g'=G^*(g, t)$ et $n=2$: $G^*(g, t)$ *est plate si et seulement si,*

$$W^*(g, t)=-K(g) \tag{7}$$

où,

$$W^*(g, t):=[1+|dt|_g^2]^{-1} \operatorname{dét}(t_i^j).$$

UNE CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE D'EXISTENCE DU PLONGEMENT CHERCHÉ. — (D, g) strictement convexe de courbure négative est dite « ajustée », s'il existe une fonction ψ *définissante* pour (D, g) et telle que,

$$\varepsilon^*(g, \psi):=\inf_D\{W^*(g, \psi)[-K(g)]^{-1}\} \geqq 1.$$

Cette définition est encore naturelle et invariante d'échelle. Géométriquement, $\varepsilon^*(g, \psi) \geqq 1$ signifie que $G^*(g, \psi)$ est à *courbure non-négative.*

THÉORÈME 4. — *Soit* (D, g) *vérifiant les hypothèses précédentes. Le plongement isométrique cherché existe si et seulement si* (D, g) *est ajustée. En outre, ce plongement est rigide.*

V. La preuve du théorème

NÉCESSITÉ DE L'AJUSTEMENT. — Supposons le plongement cherché, réalisé. Soit (x, y, t) les coordonnées d'espace-temps dans un référentiel de Lorentz de M pour lequel l'image de Γ est dans le plan $\{t=0\}$. g étant définie positive, l'image de D est une surface à bord dans M, de *genre « espace »*. Elle est donc globalement représentable *comme un graphe de la forme,*

$$t=T(x, y)$$

pour une fonction T de classe $C^{k,\alpha}$ définie sur un fermé strictement convexe de classe $C^{k,\alpha}$ de $\{t=0\}$, le module de dT (pour la métrique euclidienne induite sur $\{t=0\}$ par la pseudo-métrique de M) étant *nécessairement strictement inférieur à un.*

Dès lors, l'ajustement de (D, g) est bien nécessaire car T et $(-T)$ sont solutions de (7) et l'une d'elles est nécessairement *définissante* (analogue facile du lemme 1). ■

RIGIDITÉ DU PLONGEMENT. — D'après l'expression de la différentielle partielle de W^* par rapport à t [cf. *infra*, $dN^*(t)$], qui est elliptique, et d'après le *Principe du Maximum* [Au2] (p. 97), il existe *au plus une* solution définissante pour (D, g) de l'équation (7).

Ce résultat joint aux considérations de l'alinéa précédent montre que le plongement cherché, s'il existe, est entièrement déterminé par le choix du plan de genre *espace* dans M contenant l'image de Γ. ■

SUFFISANCE DE L'AJUSTEMENT. — Supposons (D, g) *ajustée.* Grâce à la méthode de Weingarten *globale* nous devons seulement montrer l'existence d'une solution de (7) définissante pour (D, g).

Notons $[D, g]^{k, \alpha}$ l'ouvert de l'espace de Banach $C_0^{k, \alpha}(D)$ (*cf.* II.4) constitué des fonctions *définissantes* pour (D, g). g étant fixée, notons,

$$N^*: \quad [D, g]^{k, \alpha} \to C^{k-2, \alpha}(D)$$

l'opérateur défini par,

$$N^* := \operatorname{Log} W^*(g, \,.\,).$$

L'expression locale de sa différentielle en t s'écrit,

$$dN^*(t)(\delta t) = \{t^{ij}(\delta t)_{ij} - 2[1 + |dt|^2]^{-1} t^i (\delta t)_i\}$$

(en conservant les notations de la 1° partie, les normes s'entendant désormais dans la métrique g). N^* est donc *elliptique sur* $[D, g]^{k, \alpha}$ et localement inversible. Nous devons prouver que son image contient $-K(g)$. A cet effet, nous emploierons encore la *méthode de continuité.*

(D, g) étant ajustée, il existe $\psi \in [D, g]^{k, \alpha}$ *sous-solution* de l'équation (7). Fixons pareille ψ et considérons, pour $s \in [0, 1]$, la famille de problèmes de Dirichlet,

$$N^*(t) = \operatorname{Log}[-s K(g) + (1-s) W^*(g, \psi)]. \tag{7.s}$$

Raisonnant comme dans la première partie, nous savons ramener la résolution de (7) dans $[D, g]^{k, \alpha}$ à l'estimation *a priori uniforme* de $|\operatorname{Hess}(t)|$ pour t solution de (7.s); cette estimation fait l'objet de la section VI.

Remarque. — $G^*(g, t)$ étant identiquement définie positive, nous n'avons plus à vérifier l'analogue de III.4; en revanche $[D, g]^{k, \alpha}$ n'est pas, comme $A^{k, \alpha}$ (*voir* III-1), dans un borné de $C^1(D)$. L'hypothèse d'ajustement sur (D, g) devra intervenir ici *dès l'estimation* a priori $C^1(D)$.

VI. Les estimations *a priori*

Fixons t (donc $s \in [0, 1]$) solution de (7.s) et notons, pour abréger, F^* le membre de droite de l'équation (7.s).

L'ESTIMATION $C^1(D)$. — D'une part, t étant strictement convexe sur (D, g), nous savons (*cf.* III-1) que $|dt|$ atteint son maximum absolu sur Γ. D'autre part, ψ est sous-solution de (7.s) pour tout $s \in [0, 1]$, et il existe $\beta \in]0, 1[$ tel que $(\beta\psi)$ soit sur-solution de (7.s) pour tout $s \in [0, 1]$. Enfin, d'après le lemme de Hopf [G-T] (p. 34), en notant n le champ de normales unitaires sortantes sur Γ associé à g,

$$\beta\, d\psi(n) \leqq dt(n) \leqq d\psi(n).$$

Comme sur Γ, $t=0$ et $dt(n) \equiv |dt|$, l'estimation *a priori* de t dans $C^1(D)$ est acquise. ■

L'ESTIMATION $C^2(D)$. — L'estimation *a priori* de $|\operatorname{Hess}(t)|$ sur Γ est tout à fait analogue à celle de la section III.3. Nous ne l'exposerons donc pas et nous nous concentrerons plutôt sur la *réduction* de l'estimation globale de $|\mathrm{Hess}(t)|$ à celle sur Γ, qui elle diffère de la réduction opérée section III.2 à cause du signe de la courbure de g.

Nous devons considérer la fonctionnelle,

$$B^*(t) := \mathrm{Log}(-\Delta t) + (C/2)\,|dt|^2 + CC'\,\psi$$

C et C′ désignant des constantes positives uniformes à préciser. Un calcul de routine utilisant l'équation (7.*s*) dérivée une fois montre que,

$$\begin{aligned}(-\Delta t)\,t^{ij}B^*_{ij} = t^{ij}(-\Delta t)_{ij} - (-\Delta t)^{-1}\,t^{ij}(\Delta t)_i(\Delta t)_j \\ + C(\Delta t)^2 + C(-\Delta t)\,t^i[F^*_i + 2(1+|dt|^2)^{-1}\,t^j t_{ij}] \\ + C(-\Delta t)\,t^{ij}(t^h t^k R_{hikj} + C'\,\psi_{ij})\end{aligned}$$

et malgré le signe négatif de $K(g)$, ψ étant strictement convexe sur D, nous pouvons choisir $C' > 0$ *uniforme* telle que la dernière ligne de cette équation soit une expression *non-négative* (c'est pour cela que nous avons dû modifier la fonctionelle B en B*). C′ *est désormais fixée.*

Supposons que $B^*(t)$ atteigne son maximum absolu en un point *intérieur* $P \in \Omega$ et écrivons,

$$(-\Delta t)\,t^{ij}B^*_{ij}(P) \leqq 0.$$

Calculons $t^{ij}(-\Delta t)_{ij}$, en appliquant le Laplacien à (7.*s*) et en utilisant la courbure de g pour permuter l'ordre des dérivations, et tenons compte en P de l'équation $dB^*(P)=0$, nous obtenons l'inégalité correspondant à (4). Elle commence par la *même* différence de carrés de dérivées troisièmes, à présent minorée en P par,

$$-2C\,t^i t^j R_{ij} - 2CC'\,t^{ij} t^k \psi_i R_{jk}.$$

Nous aboutissons à l'inégalité suivante, en P, écrite en regroupant les termes de même ordre,

$$\begin{aligned}0 \geqq C(\Delta t)^2 + [3\,t^{ij} t^k_h R^h_{ikj} + 2(1+|dt|^2)^{-1}\,t^j_i(t^i_j - 2\,t^i t^k t_{jk})] \\ + C(-\Delta t)\,t^i F^*_i - 2CC'[t^{ij} t^k \psi_i R_{jk} + (-\Delta t)(1+|dt|^2)^{-1}\,t^i \psi_i] \\ -\Delta F^* - 2C\,t^i t^j R_{ij}.\end{aligned}$$

Il existe donc une constante *uniforme* $C'' > 0$ telle qu'en P,

$$0 \geqq (\Delta t)^2(C - C'') + C(1+C')\,C''\,\Delta t - (1+C)\,C''.$$

En choisissant : $C = C'' + 1$, nous pouvons estimer uniformément $|\mathrm{Hess}(t)(P)|$ puis le maximum absolu de $|\mathrm{Hess}(t)|$ sur D en raisonnant comme en III.2.

BIBLIOGRAPHIE

[Al1] A. D. Aleksandrov, *Régularité d'une surface convexe de courbure gaussienne bornée* [*Dokl. Akad. Naouk. S.S.S.R.*, vol. 36, 1942, p. 195-199 (en russe)].

[Al2] A. D. Aleksandrov, *Géométrie intrinsèque des surfaces convexes*, Ogiz, Moscou, 1948 (en russe).

[Au1] Th. Aubin, *Métriques riemanniennes et courbure* (*J. Diff. Geom.*, 4 : 4, 1970, p. 383-424).

[Au2] Th. AUBIN, *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations*, Springer-Verlag, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 252, New York, 1982.

[Ber] S. N. BERNSTEIN, *Investigation et intégration d'équations aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique* (*Soobch. Kharkov. Mat. Obch.*, 11 : 2, 1910, p. 1-164 (en russe).

[B-Z] I. BURAGO et V. ZALGALLER, *Geometric inequalities*, Leningrad, 1980 (en russe); traduction anglaise à paraître chez Springer-Verlag.

[Coh] S. E. COHN-VOSSEN, *Flexion des surfaces globales* [*Ouspekhi Mat. Naouk.*, 1, 1936, p. 33-76 (en russe)].

[Del] Ph. DELANOË, *Équations de Monge-Ampère en dimension deux* (*C.R. Acad. Sci. Paris*, 294, série I, 1982, p. 693-696).

[D-N] A. DOUGLIS et L. NIRENBERG, *Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations* (*Comm. Pure Appl. Math.*, 8, 1955, p. 503-538).

[G-T] D. GILBARG et N. S. TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Second edition, Springer-Verlag, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 224, Berlin Heidelberg, 1977, 1983.

[Gr1] M. L. GROMOV, *Pseudo-Holomorphic Curves on Almost Complex Manifolds* (*Inventiones Math.*, Vol. 82, 1985, p. 307-347).

[Gr2] M. L. GROMOV, *Partial Differential Relations*, Springer-Verlag, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, 3, Folge, Band 9, Berlin Heidelberg, 1986.

[G-R] M. L. GROMOV et V. A. ROKHLIN, *Plongements et immersions en géométrie riemannienne* [*Ouspekhi Mat. Naouk.*, 25 : 5, 1970, p. 3-62 (en russe)].

[He1] E. HEINZ, *Neue* a-priori *Abschätzungen für den Ortsvektor einer Fläche positiver Gaußscher Krümmung durch ihr Linienelement* (*Math. Z.*, Vol. 74, 1960, p. 129-157).

[He2] E. HEINZ, *Über die Differentialungleichung* $0<\alpha \leqq rt-s^2 \leqq \beta < \infty$ (*Math. Z.*, vol. 72, 1959/1960, p. 107-126).

[Kos] J.-L. KOSZUL, *Variétés localement plates et convexité* (*Osaka J. Math.*, vol. 2, 1965, p. 285-290).

[Lab] F. LABOURIE, *Immersions isométriques elliptiques et courbes pseudo-holomorphes*, Preprint École Polytechnique, Paris, 1987.

[Nir] L. NIRENBERG, *On Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations and Hölder Continuity* (*Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 6, 1953, p. 103-156).

[N-S] I. G. NIKOLAIEV et C. Z. SHEFEL', *Surfaces convexes à courbure spécifique positive bornée et estimations* a priori *pour l'équation de Monge-Ampère*, [*Sibirsk. Mat. J.*, 26 : 4, 1985, p. 120-136 (en russe)].

[Pog] A. V. POGORELOV, *Géométrie extrinsèque des surfaces convexes*, Naouka, Moscou 1969 (en russe); traduction anglaise : A.M.S. Translations of mathematical monographs, vol. 35, A.M.S., 1973.

[Sab] I. Kh. SABITOV, *Régularité des surfaces convexes de métrique régulière dans des classes de Hölder* (*Sibirsk. Mat. J.*, 17 : 4, 1976, p. 907-915.

[Saf] M. V. SAFONOV, *On the classical solution of Bellman's elliptic equations*, (*Soviet Math. Dokl., vol.* 30, 1984, *p.* 482-485).

[Sch] F. SCHULZ, *Über die Differentialgleichung* $rt-s^2=f$ *und das Weylsche Einbettungsproblem* (*Math. Z.*, vol. 179, 1982, p. 1-10).

[S-L] F SCHULZ, L.Y. LIAO, *Regularity of solutions of solutions of two-dimensional Monge-Ampère equations*, (*Trans. A.M.S.*, 307 :1, 1988, p. 271-277).

[Wei] J. WEINGARTEN, *Über die Theorie der Aufeinander abwickelbaren Oberflächen*, Berlin (1984).

(Manuscrit reçu le 8 mars 1988).

Ph. DELANOË,
C.N.R.S. (U.A. n° 168),
Université de Nice,
I.M.S.P., Parc Valrose,
06034 Nice Cedex.