ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

SIEGMUND KOSAREW

Modulräume holomorpher Abbildungen auf konkaven komplexen Räumen

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 20, nº 3 (1987), p. 285-310

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1987_4_20_3_285_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 20, 1987, p. 285 à 310.

MODULRÄUME HOLOMORPHER ABBILDUNGEN AUF KONKAVEN KOMPLEXEN RÄUMEN

VON SIEGMUND KOSAREW

Einleitung

Sind X und Y komplexe Räume, so ist die Menge Hom(X, Y) aller holomorphen Abbildungen von X nach Y für kompaktes X in natürlicher Weise ein komplexer Raum. Ist X beliebig, so ist dies im allgemeinen falsch, wie einfache Beispiele zeigen. Für konkaves X trägt jedoch Hom (X, Y) wiederum eine komplexe Struktur. Dies soll in der vorliegenden Arbeit gezeigt werden und zwar gleich in einer relativen Situation, d. h. für eine konkave Abbildung $X \to S$ komplexer Räume. Die Lösung des Problems benutzt entscheidend die Technik der banachanalytischen Räume sowie Darstellbarkeitsaussagen für lokale Hom-Funktoren von Pourcin, [Pou], Théorème (5.12), und ferner eine genaue Untersuchung des Hom-Funktors in der Nähe von konkaven Randpunkten. Hierzu müssen bekannte Verschwindungsaussagen in Umgebung solcher Randpunkte auf den Fall mit zusätzlichem banachanalytischen Parameter verallgemeinert werden.

Man löst das Modulproblem zunächst für Raumkeime S und relativ kompakte q-konkave Teilmengen in der ausgezeichneten Faser. Die Globalisierung in S erfolgt dann mit Hilfe eines allgemeinen Darstellbarkeitskriteriums von Schuster/Vogt [S-V]. Auf Anwendungen der Hauptresultate, wie z. B. auf das formale Prinzip, soll in einer anderen Arbeit eingegangen werden.

Komplexe Räume werden im folgenden als separiert mit abzählbarer Topologie vorausgesetzt.

1. Funktoren holomorpher Abbildungen

Seien $f: X \to S$ und $g: Y \to S$ zwei holomorphe Abbildungen komplexer Räume und $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Wir definieren dann folgenden kontravarianten Funktor auf der Kategorie (An/S), der komplexen Räume über S. Für einen Raum T aus (An/S) sei

$$(1.1) \qquad H_{(X,\ A)/S,\ Y/S}(T) := \mathrm{Hom}_T((X_T, A_T), Y_T) = \varinjlim_{U \supset A_T} \mathrm{Hom}_T(U, Y_T)$$

wobei $X_T = T \times_S X$, $A_T = T \times_S A$ und der Limes über alle offenen Umgebungen U von A_T in X_T genommen wird. Im Falle $A = X$ ist obiger Funktor der übliche Hom-Funktor $\underline{\mathrm{Hom}_S}(X, Y)$. Ist $B \subset A$ eine abgeschlossene Teilmenge, so hat man eine natürliche Transformation $H_{(X, A)/S, Y/S} \to H_{(X, B)/S, Y/S}$, die durch die Einschränkung induziert ist. Man verifiziert leicht, daβ der Funktor $H_{(X, A)/S, Y/S}$ von lokaler Natur ist, d. h. für jeden Raum T über S und $T' \subset T$ offen ist die Zuordnung $T' \mapsto H_{(X, A)/S, Y/S}(T')$ eine Garbe auf T.

Sei $s \in S$ ein Punkt. Wir erhalten dann durch

$$T \mapsto \mathrm{Hom}_T((X_T, A_s), Y_T) \tag{1.2}$$

einen kontravarianten Funktor auf der Kategorie (Gan/(S, s)), der komplexen Raumkeime über (S, s), den wir mit $H_{(X, A_s)/(S, s), Y/(S, s)}$ bezeichnen. Ist (T, t) ein Raumkeim aus (Gan/(S, s)), so hat man eine kanonische Abbildung

$$\varinjlim_{\substack{U \subset T, \\ t \in U}} H_{(X, A)/S, Y/S}(U) \to H_{(X, A_s)/(S, s), Y/(S, s)}((T, t)), \tag{1.3}$$

wobei der Limes über alle offenen Umgebungen U von t in T genommen wird. Liegt A eigentlich über S, so ist (1.3) bijektiv.

2. Formulierung der Aussagen

Zu den verwendeten Bezeichnungsweisen siehe Abschnitt 4.

(2.1) THEOREM. — *Sei $f: X \to S$ eine flache q-konkave Abbildung komplexer Räume mit Ausschöpfungsfunktion φ und Ausnahmemge* K. *Sei c ein zulässiger Wert von φ und* $A := \bar{B}_c$. *Gilt dann* $q+1 < \min\{\mathrm{Tiefe}(\mathcal{O}_{X_s} | (A_s \setminus K)) : s \in S\}$, *so ist für jeden komplexen Raum* $Y \to S$ *über* S *der Funktor* $H_{(X, A)/S, Y/S}$ *auf* (An/S) *darstellbar.*

Es gilt ferner die folgende lokale Version.

(2.2) THEOREM. — *Sei* $S = (S, 0)$ *ein komplexer Raumkeim,* $f: X \to S$ *eine flache holomorphe Abbildung mit ausgezeichneter q-konkaver Faser* X_0 *und Ausschöpfungsfunktion* φ *mit Ausnahmemenge* K. *Sei c ein zulässiger Wert von* φ *und* $A := \bar{B}_c$ *oder* $A = X_0$. *Gilt dann* $q+1 < \mathrm{Tiefe}(\mathcal{O}_{X_0} | (A \setminus K))$, *so ist für jeden Raum* $Y \to S$ *über* S *und jedes h aus* $\mathrm{Hom}((X_0, A), Y_0)$ *der Funktor*

$$T \mapsto \mathrm{Hom}_T((X_T, A), Y_T)^0$$

auf der Kategorie (Gan/S) *darstellbar. Hierbei ist* $\mathrm{Hom}_T((X_T, A), Y_T)^0$ *definitionsgemäβ die Faser der kanonischen Abbildung*

$$\mathrm{Hom}_T((X_T, A), Y_T) \to \mathrm{Hom}((X_0, A), Y_0)$$

in h.

Wir werden zunächst die Aussage (2.2) beweisen und dann anhand eines allgemeinen Kriteriums von Schuster/Vogt [S-V] das Theorem (2.1) hieraus folgern [man vergleiche hierzu auch das Darstellbarkeitskriterium aus [Fl] (9.1)].

3. Der Tangentialraum des Hom-Funktors

Sei zunächst $F : (An/S) \to (\text{Mengen})$ ein kontravarianter Funktor, T ein Raum aus (An/S) und $T[\mathscr{M}]$ die triviale Erweiterung von T durch den kohärenten $\mathcal{O}_T$-Modul $\mathscr{M}$. Für ein Element a aus F(T) bezeichnen wir dann mit $D_a^F(\mathscr{M})$ die Menge aller a' aus $F(T[\mathscr{M}])$ mit Bild a unter der Abbildung $F(T[\mathscr{M}]) \to F(T)$.

(3.1) PROPOSITION. — *Seien $f : X \to S$ und $g : Y \to S$ holomorphe Abbildungen komplexer Räume und* $F : = H_{(X, A)/S, Y/S}$ *für eine abgeschlossene Teilmenge* A *von* X. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt dann*

$$D_a^F(\mathscr{M}) = \Gamma(A, \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{X_T}}(a^* \Omega_{Y_T/T}, (f_T)^* \mathscr{M}))$$

wobei a aus $F(T) = \mathrm{Hom}_T((X_T, A_T), Y_T)$ *sei.*

Beweis. — Wir dürfen ohne Einschränkung $T = S$ und $A = X$ annehmen. Dann ist $D_a^F(\mathscr{M})$ die Menge aller a' aus $\mathrm{Hom}_{S[\mathscr{M}]}(X[f^* \mathscr{M}], Y[g^* \mathscr{M}])$ mit Bild a in $\mathrm{Hom}_S(X, Y)$. Dies ist also gerade die Menge aller $\mathcal{O}_S[\mathscr{M}]$-Algebrahomomorphismen $\alpha : \mathcal{O}_Y[g^* \mathscr{M}] \to a_*(\mathcal{O}_X[f^* \mathscr{M}])$, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y[g^* \mathscr{M}] & \xrightarrow{\alpha} & a_*(\mathcal{O}_X[f^* \mathscr{M}]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_Y & \rightarrow & a_* \mathcal{O}_X \end{array}$$

kommutativ machen, wobei $\mathcal{O}_Y \to a_* \mathcal{O}_X$ der durch $a : X \to Y$ induzierte Pfeil ist. Offenbar identifiziert sich diese Menge mit

$$\mathrm{Der}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_Y, a_* f^* \mathscr{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(a^* \Omega_{Y/S}, f^* \mathscr{M}).$$

Dies zeigt die Behauptung.

(3.2) *Bemerkung.* — In der Situation von (3.1) sei $T = \{s\}$ ein Punkt in S und X_s sei q-konkav mit Ausschöpfungsfunktion φ und Ausnahmemenge K. Sei c ein zulässiger Wert von φ und $A = \bar{B}_c$ oder $A = X_s$. Es gelte $q < \mathrm{Tiefe}(\mathcal{O}_{X_s} | (A \setminus K))$. Ist dann $a : X_s \to Y_s$ eine holomorphe Abbildung und Y_s glatt, so ist

$$D_a^F(\mathbb{C}) = \Gamma(A, \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{X_s}}(a^* \Omega_{Y_s}, \mathcal{O}_{X_s}))$$

ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Der *Beweis* folgt sofort aus dem Endlichkeitssatz von Andreotti-Grauert [An-Gr] Théorème 14.

4. q-konkave Räume und Abbildungen

(4.0) Sei $f: X \to S$ eine holomorphe Abbildung komplexer Räume. Mit $\mathscr{E}_X$ bzw. $\mathscr{C}_X$ bezeichnen wir die Garbe der reellwertigen differenzierbaren bzw. stetigen Funktionen auf X (welche i. a. nicht reduziert sind). Ist φ ein Schnitt aus $\Gamma(X, \mathscr{E}_X)$, so läßt sich die Leviform $L_{X/S}(\varphi) = i\,\partial_{X/S}\bar{\partial}_{X/S}(\varphi)$ von φ als eine hermitesche Form auf dem relativen Tangentialraum $T(X/S) \to X$ von X über S auffassen. Wir nennen φ im Punkt $x \in X$ *q-konkav bzgl. f*, wenn $L_{X/S}(\varphi)$ auf $T(X/S)_x$ mindestens $\dim_{\mathbb{C}} T(X/S)_x - q + 1$ negative Eigenwerte besitzt. Einen Schnitt φ aus $\Gamma(X, \mathscr{C}_X)$ nennen wir eine *Ausschöpfungsfunktion von* X/S, wenn folgendes gilt: Es gibt eine eigentlich über S liegende abgeschlossene Teilmenge K in X und ein $c_* \in \mathbb{R}$, so daß für $B_c := \{x \in X : \varphi(x) < c\}$, $c \in \mathbb{R}$, die Inklusion $K \subset B_{c_*}$ erfüllt ist, und für c mit $c_* \leqq c < \sup\{\varphi(x) : x \in X\}$ die Menge $\bar{B}_c$ eigentlich über S liegt. Überdies gebe es ein Φ aus $\Gamma(X \diagdown K, \mathscr{E}_X)$ mit Bild φ in $\Gamma(X \diagdown K, \mathscr{C}_X)$. Wir nennen K *Ausnahmemenge* von φ und c_* *Ausnahmekonstante*. Jedes c mit $c_* \leqq c < \sup\{\varphi(x) : x \in X\}$ heiße *zulässig*.

(4.1) Sei $f: X \to S$ eine holomorphe Abbildung und q aus $\mathbb{N} \diagdown \{0\}$. Wir nennen f *q-konkav*, wenn es eine Ausschöpfungsfunktion φ von X/S gibt, so daß mit den eben eingeführten Bezeichnungen Φ in jedem Punkt aus $X \diagdown K$ q-konkav bzgl. f ist. Ferner besitze die Einschränkung Φ_s von Φ auf $X_s \diagdown K_s$ für jeden Punkt $s \in S$ keine lokalen Minima. In diesem Fall gilt dann $\bar{B}_c = \{x \in X : \varphi(x) \leqq c\}$ für jedes zulässige c.

Sei X ein komplexer Raum. Wir nennen dann X *q-konkav*, falls die Strukturabbildung $X \to \operatorname{Spec}(\mathbb{C})$ q-konkav ist.

(4.2) *Bemerkung.* — Sei $f: X \to S$ eine q-konkave Abbildung und $T \to S$ ein Raum über S. Dann ist auch der Basiswechsel $f_T : X_T \to T$ eine q-konkave Abbildung.

5. Relative Polyeder, kleine Morphismen

(5.1) Sei $f: X \to S$ eine holomorphe Abbildung komplexer Räume. Unter einem *relativen Polyeder für f* verstehen wir eine abgeschlossene S-Einbettung $i: U \to S' \times D$, wobei $U \subset X$ und $S' \subset S$ offene Teilmengen sind und D ein offener beschränkter Polyzylinder in einem $\mathbb{C}^n$ ist. Ferner gebe es eine holomorphe Abbildung $v: S' \times D \to \mathbb{C}^m$ für ein $m \geqq 0$ mit $i(U) = v^{-1}(0)$. Unter einem *relativ abgeschlossenen Polyeder* X′ in X *bzgl. f* und i verstehen wir eine abgeschlossene (nicht notwendig konzentrische) Schrumpfung K von D, so daß $X' = i^{-1}(S' \times K)$ ist.

(5.2) Sei $f: X \to Y$ ein S-Morphismus komplexer Räume und $(X_i)_{i \in I}$ eine Famille von Teilmengen von X. Wir nennen f *klein bzgl.* $(X_i)_{i \in I}$, falls jedes $f(X_i)$ in einem relativen Polyeder für $Y \to S$ enthalten ist.

Seien $f_1, \ldots, f_k : X \to Y$ endlich viele S-Morphismen und $X' \subset X$ eine relativkompakte Teilmenge. Dann gibt es beliebig feine endliche Familien $(X_i)_{i \in I}$ von offenen Teilmengen von X mit $X' \subset \bigcup_{i \in I} X_i$, so daß f_j klein bzgl. $(X_i)_{i \in I}$ ist für $1 \leqq j \leqq k$.

Der Begriff des relativen Polyeders und der Kleinheit läßt sich sofort auf den Fall *endlich präsentierbarer banachanalytischer* Räume $X \to S$ über S verallgemeinern (vgl. [Pou] Définition 5.1).

6. Panzerungen q-konkaver Räume und Abbildungen

(6.1) Sei Z ein q-konkaver Raum mit Ausschöpfungsfunktion φ und Ausnahmemenge K. Ferner sei c ein zulässiger Wert von φ und $A := \bar{B}_c$. Wir nehmen an, daß $q <$ Tiefe$(\mathcal{O}_Z | (A \setminus K))$ gilt. Unter einer *Panzerung* $\underline{Q}$ von A verstehen wir dann die Vorgabe der folgenden Daten.

(i) Gegeben ist eine endliche Familie $\varphi_i : U_i \to D_i$, $i \in I_Q$, von Polyedern in Z und kompakte konzentrische Schrumpfungen $K_i' \subset\subset K_i$ *von* D_i. Es sei

$$Z_i := \varphi_i^{-1}(K_i), \qquad \check{Z}_i := \varphi_i^{-1}(\mathring{K}_i)$$

und

$$Z_i' := \varphi_i^{-1}(K_i'), \qquad \check{Z}_i' := \varphi_i^{-1}(\mathring{K}_i')$$

sowie

$$\mathcal{N} := \{(i, j) \in I^2 : U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \varnothing\}.$$

(ii) Gegeben sind Polyeder $\varphi_{ij} : U_{ij} \to D_{ij}$ für $(i, j) \in \mathcal{N}$, mit $D_{ij} = D_i \times D_j$ und $\varphi_{ij} = \varphi_i \times \varphi_j$.

(iii) Für jedes (i, j) aus $\mathcal{N}$ ist eine endliche Familie $(K_{ij\alpha})_{\alpha \in A_{ij}}$ von (nicht notwendig konzentrischen) Schrumpfungen von D_{ij} gegeben, so daß für $Z_{ij\alpha} := \varphi_{ij}^{-1}(K_{ij\alpha})$, $\check{Z}_{ij\alpha} := \varphi_{ij}^{-1}(\mathring{K}_{ij\alpha})$ gilt

(*a*) $A \subset \bigcup_{i \in I_Q} \check{Z}_i'$.

(*b*) $A \cap Z_i' \cap Z_j' \subset \bigcup_{\alpha \in A_{ij}} \check{Z}_{ij\alpha} \subset \bigcup_{\alpha \in A_{ij}} Z_{ij\alpha} \subset \check{Z}_i \cap \check{Z}_j$

für alle $(i, j) \in \mathcal{N}$.

Desweiteren setzen wir $Q_i := A \cap Z_i$, $Q_i' := A \cap Z_i'$ und $Q_{ij\alpha} := A \cap Z_{ij\alpha}$.

(6.2) Sei $\underline{Q}$ eine Panzerung von A. Wir nennen $\underline{Q}$ *privilegiert*, falls alle K_i, K_i' und alle $K_{ij\alpha}$ privilegiert für $\mathcal{O}_Z$ im Sinne von Douady (vgl. [Dou$_1$] Déf. 1, p. 54) sind. Die Eigenschaft "privilegiert" bezieht sich dabei jeweils auf die Einbettungen φ_i bzw. φ_{ij}. Man beachte, daß es stets beliebig feine privilegierte Panzerungen von A gibt.

(6.3) Sei $\underline{Q}$ eine Panzerung von A. Wir nennen $\underline{Q}$ eine *gute* Panzerung, falls alle Beschränkungsabbildungen

$$\Gamma(Z_i, \mathcal{O}_Z) \to \Gamma(Q_i, \mathcal{O}_Z),$$
$$\Gamma(Z_{ij\alpha}, \mathcal{O}_Z) \to \Gamma(Q_{ij\alpha}, \mathcal{O}_Z)$$

bijektiv sind. Wegen der gemachten Tiefenbedingung gibt es nach [An-Gr], Beweis von Proposition 12, stets gute Panzerungen für A, die aber nicht notwendig gleichzeitig als privilegiert angenommen werden können.

(6.4) Sei $\underline{Q}$ eine Panzerung von A. Unter einer Schrumpfung $\underline{\tilde{Q}}$ von $\underline{Q}$ verstehen wir eine Panzerung $\underline{\tilde{Q}}=(\tilde{Q}_i, \tilde{Q}'_i, \tilde{Q}_{ij\alpha}, \tilde{K}_i, \tilde{K}'_i, \tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_{ij})$ von A mit den Eigenschaften

(*a*) $I_{\tilde{Q}}=I_Q$, $\tilde{\varphi}_i=\varphi_i$, $\tilde{\varphi}_{ij}=\varphi_{ij}$.

(*b*) $\tilde{K}_i$ bzw. $\tilde{K}'_i$ ist eine konzentrische Schrumpfung von K_i bzw. K'_i.

(*c*) Man hat eine Abbildung $\tau : \tilde{A}_{ij} \rightarrow A_{ij}$ mit

$$\tilde{K}_{ij\alpha} \subset \mathring{K}_{ij\tau(\alpha)} \qquad \text{für} \quad (i, j) \in \mathcal{N}.$$

Man zeigt nun leicht folgende Aussage

(6.5) Lemma. — *Seien* Z, A *und* q *wie oben und* Y *ein komplexer Raum sowie* $f_1, \ldots, f_k$ *aus* Hom((Z, A), Y). *Dann gibt es beliebig feine Panzerungen* $\underline{Q} \supset\supset \underline{\tilde{Q}} \supset\supset \underline{\tilde{\tilde{Q}}}$ *von* A *mit den Eigenschaften*

(1) $f_1, \ldots, f_k$ *sind* $(Q_i)_{i \in I}$*-klein (kurz* $\underline{Q}$*-klein),*

(2) $\underline{Q}$ *und* $\underline{\tilde{\tilde{Q}}}$ *sind gut,*

(3) $\underline{\tilde{Q}}$ *ist privilegiert.*

(6.6) Sei $S=(S, 0)$ ein banachanalytischer Raumkeim und $f: X \rightarrow S$ ein relativ endlichpräsentierbarer Morphismus banachanalytischer Räume mit ausgezeichneter q-konkaver Faser $Z=f^{-1}(0)$. Ferner seien A und q wie in (6.1). Unter einer *Panzerung* $\underline{Q}$ *von* (f, A) verstehen wir eine Panzerung $\underline{Q}$ von Z, deren Einbettungsabbildungen φ_i und φ_{ij} durch relative Polyeder Φ_i und Φ_{ij} von f induziert sind. Offenbar gibt es stets beliebig feine Panzerungen $\underline{Q}$ von (f, A). Ist S endlichdimensional, so läβt sich jede Panzerung von A nach eventuellem Schrumpfen als Panzerung von (f, A) auffassen.

Sei $\underline{Q}$ eine Panzerung von (f, A). Wir sagen, daβ $\underline{Q}$ *privilegiert* ist, falls f ein anaflacher Morphismus (vgl. [Dou_2] II.2) und $\underline{Q}$ eine privilegierte Panzerung von A ist. Ferner heiβe $\underline{Q}$ eine *gute* Panzerung für (f, A), falls [mit den Bezeichnungen von (6.1)] für jeden banachanalytischen Raumkeim $T \rightarrow S$ über S alle Beschränkungsabbildungen

$$\Gamma(Z_i, \mathcal{O}_{X_T}) \rightarrow \Gamma(Q_i, \mathcal{O}_{X_T}),$$

$$\Gamma(Z_{ij\alpha}, \mathcal{O}_{X_T}) \rightarrow \Gamma(Q_{ij\alpha}, \mathcal{O}_{X_T})$$

bijektiv sind.

Die Existenz privilegierter Panzerungen für (f, A) ist damit für anaflaches f klar. Aus Abschnitt 7 folgt auch für solche f die Existenz beliebig feiner guter Panzerungen, falls überdies $q+1<\text{Tiefe}\,(\mathcal{O}_Z \,|\, (A \setminus K))$ gilt.

Sei $f: X \to S$ eine q-konkave holomorphe Abbildung komplexer Räume, $A = \bar{B}_c$ für ein zulässiges c [vgl. (4.0)] und s ein Punkt von S. Ferner sei $\underline{Q}$ eine Panzerung von (f, A_s) mit zugehörigen relativen Polyedern $\Phi_i : U_i \to S' \times D_i$, $\Phi_{ij} : U_{ij} \to S' \times D_{ij}$, wobei S′ eine offene Umgebung von s in S ist. Wir setzen dann

$$Q_{iS'} : = A \cap \Phi_i^{-1}(S' \times K_i) \quad \text{und} \quad Q_{ij\alpha S'} : = A \cap \Phi_{ij}^{-1}(S' \times K_{ij\alpha}).$$

Für einen banachanalytischen Raum T über S′ sei

$$Q_{iT} : = T \times_{S'} Q_{iS'} \quad \text{und} \quad Q_{ij\alpha T} : = T \times_{S'} Q_{ij\alpha S'}.$$

Wir nennen $\underline{Q}$ auch eine Panzerung der globalen holomorphen Abbildung f.

7. Kohomologie in Umgebung konkaver Randpunkte

Die bekannten Verschwindungsaussagen für die Kohomologie in Umgebung von konkaven Randpunkten (siehe [An-Gr] Proposition 12, [Ra] Lemme 1.3.11) sollen hier auf den Fall mit banachanalytischem Parameter verallgemeinert werden. Dazu sind einige Vorbetrachtungen nötig.

(7.1) Sei $V \subset \subset \mathbb{C}^n$ eine relativ kompakte offene Menge. Dann bezeichnen wir mit $\Gamma_h(V)$ bzw. $B(\bar{V})$ die Menge der quadratintegrierbaren holomorphen Funktion auf V bzw. die Menge der stetigen Funktionen auf $\bar{V}$, die auf V holomorph sind.

Sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine endliche Familie offener bzw. abgeschlossener Polyzylinder im $\mathbb{C}^n$ und $\mathscr{L} = \mathcal{O}^k_{\mathbb{C}^n}$ eine freie Garbe. Dann sei $C^\cdot_h(\mathfrak{U}, \mathscr{L})$ bzw. $C^\cdot_b(\mathfrak{U}, \mathscr{L})$ der Čech-Komplex der quadratintegrierbaren bzw. beschränkten Koketten auf $\mathfrak{U}$, d. h.

$$C^r_h(\mathfrak{U}, \mathscr{L}) = \prod_{(i_0, \ldots, i_r) \in I^{r+1}} \Gamma_h(U_{i_0 \ldots i_r}, \mathscr{L}), \text{ bzw.}$$

$$C^r_b(\mathfrak{U}, \mathscr{L}) = \prod_{(i_0, \ldots, i_r) \in I^{r+1}} B(U_{i_0 \ldots i_r}, \mathscr{L}).$$

Wir setzen

$$Z^\cdot_h(\mathfrak{U}, \mathscr{L}) : = \mathrm{Kern}(\delta_{C^\cdot_h(\mathfrak{U}, \mathscr{L})}),$$

$$B^\cdot_h(\mathfrak{U}, \mathscr{L}) : = \mathrm{Bild}(\delta_{C^\cdot_h(\mathfrak{U}, \mathscr{L})}).$$

Entsprechend seien $Z^\cdot_b(\mathfrak{U}, \mathscr{L})$ und $B^\cdot_b(\mathfrak{U}, \mathscr{L})$ erklärt. Man beachte, daß $(C^\cdot_h(\mathfrak{U}, \mathscr{L}), \delta)$ bzw. $(C^\cdot_b(\mathfrak{U}, \mathscr{L}), \delta)$ ein Komplex von Hilbert-bzw. Banachräumen ist.

Seien $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ und $\mathfrak{V} = (V_j)_{j \in J}$ Familien von offenen (bzw. abgeschlossenen) Mengen im $\mathbb{C}^n$. Wir schreiben dann $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{U}$, falls $J = I$ und $\bar{V}_i \subset \mathring{U}_i$ gilt für alle $i \in I$. Ferner sei $|\mathfrak{U}| : = \bigcup_{i \in I} U_i$ und $\mathring{\mathfrak{U}} : = (\mathring{U}_i)_{i \in I}$. Ist $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{U}$ erfüllt, so hat man den Beschränkungshomomorphismus $\beta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} : (C^\cdot(\mathfrak{U}, \mathscr{L}), \delta) \to (C^\cdot(\mathfrak{V}, \mathscr{L}), \delta)$.

(7.2) LEMMA. — *Sei $G \subset \subset \mathbb{C}^n$ eine offene relativ kompakte Teilmenge und $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{U}$ zwei endliche Familien kompakter Polyzylinder mit $|\mathfrak{V}| \subset G \subset |\mathfrak{U}|$ sowie $\mathscr{L} = \mathcal{O}^k_{\mathbb{C}^n}$ eine freie Garbe. Dann gilt*

1. *Ist* $r \geqq 1$ *und* $\mathrm{H}^r(\mathrm{G}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ *separiert, so gibt es eine stetige* $\mathbb{C}$*-lineare Abbildung* $v: \mathrm{B}_b^r(\mathfrak{U}, \mathscr{L}) \to \mathrm{C}_b^{r-1}(\mathfrak{V}, \mathscr{L})$, *welche das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{B}_b^r(\mathfrak{U}, \mathscr{L}) \arrow[dl, "v"'] \arrow[d, "\beta_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}"] \\ \mathrm{C}_b^{r-1}(\mathfrak{V}, \mathscr{L}) \arrow[r, "\delta"'] & \mathrm{B}_b^r(\mathfrak{V}, \mathscr{L}) \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

2. *Ist* $r \geqq 1$ *und* $\mathrm{H}^r(\mathrm{G}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = 0$, *so gibt es eine stetige* $\mathbb{C}$*-lineare Abbildung* $w: \mathrm{Z}_b^r(\mathfrak{U}, \mathscr{L}) \to \mathrm{C}_b^{r-1}(\mathfrak{V}, \mathscr{L})$, *welche das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Z}_b^r(\mathfrak{U}, \mathscr{L}) \arrow[dl, "w"'] \arrow[d, "\beta_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}"] \\ \mathrm{C}_b^{r-1}(\mathfrak{V}, \mathscr{L}) \arrow[r, "\delta"'] & \mathrm{Z}_b^r(\mathfrak{V}, \mathscr{L}) \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

3. *Ist* $r \geqq 0$ *und* $\mathrm{H}^r(\mathrm{G}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ *separiert, so gibt es eine stetige* $\mathbb{C}$*-lineare Abbildung* $p: \mathrm{C}_b^r(\mathfrak{U}, \mathscr{L}) \to \mathrm{B}_b^r(\mathfrak{V}, \mathscr{L})$ *mit* $p \,|\, \mathrm{B}_b^r(\mathfrak{U}, \mathscr{L}) = \beta_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}$. *Hierbei ist* $\mathrm{B}_b^0(-,-) = \mathrm{Z}_b^0(-,-)$ *zu setzen.*

4. *Sei* $r \geqq 0$. *Dann gibt es eine stetige* $\mathbb{C}$*-lineare Abbildung*

$$q: \quad \mathrm{C}_b^r(\mathfrak{U}, \mathscr{L}) \to \mathrm{Z}_b^r(\mathfrak{V}, \mathscr{L})$$

mit $q \,|\, \mathrm{Z}_b^r(\mathfrak{U}, \mathscr{L}) = \beta_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}$.

(7.3) *Bemerkung*. — Die analoge Aussage des Lemmas ist auch im Kontext der quadratintegrierbaren Koketten gültig.

Beweis von (7.2). — Wir fixieren zunächst eine Verdickung $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{W} \ll \mathfrak{U}$ und $|\mathfrak{W}| \subset \mathrm{G}$. Es sei $\mathfrak{U}$ (und damit auch $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$) durch I indiziert. Wir füllen $\mathfrak{W}$ zu einer abzählbaren Familie $\tilde{\mathfrak{W}}$ von kompakten Polyzylindern im $\mathbb{C}^n$ auf mit Indexmenge $\mathrm{J} = \mathrm{I} \dot{\cup} \mathrm{I}'$ und $|\mathring{\tilde{\mathfrak{W}}}| = |\tilde{\mathfrak{W}}| = \mathrm{G}$. Sei $\tau: \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ eine Verfeinerungsabbildung mit $\tau \,|\, \mathrm{I} := \mathrm{id}_{\mathrm{I}}$ und $\tilde{\mathrm{W}}_j \subset \mathrm{U}_{\tau(j)}$ für alle j. Der Čech-Korandoperator $\delta: \mathrm{C}^{r-1}(\mathring{\tilde{\mathfrak{W}}}, \mathscr{L}) \to \mathrm{Z}^r(\mathring{\tilde{\mathfrak{W}}}, \mathscr{L})$ hat im Falle (1) abgeschlossenes Bild und ist im Falle (2) surjektiv, in beiden Situationen also eine offene Abbildung auf das Bild. Wir verifizieren hier die Aussage (1), wobei (2) genauso bewiesen wird.

Wir haben einen stetigen $\mathbb{C}$-linearen Komplexhomomorphismus

$$\rho: \quad C^{\cdot}(\mathring{\tilde{\mathfrak{W}}}, \mathscr{L}) \to C_b^{\cdot}(\mathfrak{V}, \mathscr{L})$$

mit $\rho(\eta)_{\alpha_0 \ldots \alpha_s} = \eta_{\alpha_0 \ldots \alpha_s} \mid V_{\alpha_0 \ldots \alpha_s}$. Sei B die offene Einheitskugel in $C_b^{r-1}(\mathfrak{V}, \mathscr{L})$. Dann ist $\rho^{-1}(B)$ offen in $C^{r-1}(\mathring{\tilde{\mathfrak{W}}}, \mathscr{L})$ und $\delta(\rho^{-1}(B))$ offen in $B^r(\mathring{\tilde{\mathfrak{W}}}, \mathscr{L})$. Für $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$A_\varepsilon := \{\xi \in B_b^r(\mathfrak{U}, \mathscr{L}) : \|\xi\|_{\mathfrak{U}} < \varepsilon\}.$$

Somit gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\beta^{\mathfrak{V}}_{\mathring{\tilde{\mathfrak{W}}}}(A_\varepsilon) \subset \delta(\rho^{-1}(B))$, wobei

$$\beta^{\mathfrak{U}}_{\mathring{\tilde{\mathfrak{W}}}}: \quad B_b^r(\mathfrak{U}, \mathscr{L}) \to B^r(\mathring{\tilde{\mathfrak{W}}}, \mathscr{L})$$

durch τ induziert ist.

Sei also ξ aus $B_b^r(\mathfrak{U}, \mathscr{L})$ und $t \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\|t\xi\|_{\mathfrak{U}} < \varepsilon$ für obiges ε. Es gibt dann ein $\tilde{\eta}$ aus $\rho^{-1}(B)$ mit $\beta^{\mathfrak{U}}_{\mathring{\tilde{\mathfrak{W}}}}(t\xi) = \delta(\tilde{\eta})$. Also ist

$$\beta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}(t\xi) = (\rho\beta^{\mathfrak{U}}_{\mathring{\tilde{\mathfrak{W}}}})(t\xi) = (\rho\delta)(\tilde{\eta})) = \delta(\rho(\tilde{\eta}))$$

mit $\|\rho(\tilde{\eta})\|_{\mathfrak{V}} < \varepsilon$. Hieraus folgt die folgende Aussage:

(★) *Es gibt eine Konstante* $C > 0$ *und zu jedem* ξ *aus* $B_b^r(\mathfrak{U}, \mathscr{L})$ *ein* η *aus* $C_b^{r-1}(\mathfrak{V}, \mathscr{L})$ *mit* $\beta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}(\xi) = \delta\eta$ *und* $\|\eta\|_{\mathfrak{V}} \leqq C\|\xi\|_{\mathfrak{U}}$.

Wir zeigen nun die Behauptung (1). Sei dazu eine Kette $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{W} \ll \mathfrak{U}$ gegeben mit $|\mathfrak{W}| \supset G$ und so daß für das Paar $(\mathfrak{W}, \mathfrak{V})$ die Aussage (★) gilt. Nun ist die Beschränkungsabbildung

$$\beta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{W}}: \quad B_b^r(\mathfrak{U}, \mathscr{L}) \to B_b^r(\mathfrak{W}, \mathscr{L})$$

nuklear. Dies folgt aus der Nuklearität der Beschränkung $B(K) \to B(K')$ für Polyzylinder $K' \subset \mathring{K}$ und [Pie] 3.2.7, 3.3.2. Wir können also schreiben

$$\beta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{W}}(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \lambda_m(x)\xi_m,$$

wobei die λ_m stetige Linearformen auf $B_b^r(\mathfrak{U}, \mathscr{L})$ und die ξ_m aus $B_b^r(\mathfrak{W}, \mathscr{L})$ sind und obige Summe absolut konvergiert. Wir wählen η_m aus $C_b^{r-1}(\mathfrak{V}, \mathscr{L})$ mit $\beta^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{V}}(\xi_m) = \delta\eta_m$ und $\|\eta_m\|_{\mathfrak{V}} \leqq C\|\xi_m\|_{\mathfrak{W}}$ für alle m. Setzen wir nun

$$v(x) := \sum_{m \in \mathbb{N}} \lambda_m(x)\eta_m,$$

so ist $v: B_b^r(\mathfrak{U}, \mathscr{L}) \to C_b^{r-1}(\mathfrak{V}, \mathscr{L})$ eine stetige $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit $\beta^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} = \delta v$. Dies zeigt die Behauptung (1).

Zu (3). Seien $\mathfrak{W}$ und $\tilde{\mathfrak{W}}$ wie zu Anfang des Beweises von (1) und

$$q: C_h^r(\mathring{\mathfrak{U}}, \mathscr{L}) \to \overline{B_h^r(\mathring{\mathfrak{U}}, \mathscr{L})}$$

die orthogonale Projektion. Da $B^r(\mathring{\mathfrak{W}}, \mathscr{L})$ abgeschlossen in $C^r(\mathring{\mathfrak{W}}, \mathscr{L})$ ist, gilt $\beta^{\mathring{\mathfrak{U}}}_{\mathring{\mathfrak{W}}}(\overline{B^r_h(\mathring{\mathfrak{U}}, \mathscr{L})}) \subset B^r(\mathring{\mathfrak{W}}, \mathscr{L})$. Sei p die Komposition der kanonischen Abbildungen

$$C^r_b(\mathfrak{U}, \mathscr{L}) \to C^r_h(\mathring{\mathfrak{U}}, \mathscr{L}) \xrightarrow{q} \overline{B^r_h(\mathring{\mathfrak{U}}, \mathscr{L})} \xrightarrow{\beta} B^r(\mathring{\mathfrak{W}}, \mathscr{L}) \to B^r_b(\mathfrak{V}, \mathscr{L}).$$

Dann hat p die gewünschte Eigenschaft.

Zu (4). Dies wird genauso wie (3) beweisen. Man beachte, daß $Z^r_h(\mathring{\mathfrak{U}}, \mathscr{L})$ ein abgeschlossener Unterraum von $C^r_h(\mathring{\mathfrak{U}}, \mathscr{L})$ ist.

Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm in der Kategorie der Banachräume über $\mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z^0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\beta^Z"'] & C^0 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\beta^0"'] & C^1 \arrow[d, "\beta^1"'] \\
0 \arrow[r] & Z^{0'} \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "\beta^{Z'}"'] & C^{0'} \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, "\beta^{0'}"'] & C^{1'} \arrow[d, "\beta^{1'}"'] \\
0 \arrow[r] & Z^{0''} \arrow[r, "i''"] & C^{0''} \arrow[r, "\delta''"] & C^{1''}
\end{tikzcd}$$

wobei die Zeilen exakt sind. Es sei

$$B^1 : = \mathrm{Bild}(\delta), \qquad B^{1'} : = \mathrm{Bild}(\delta') \qquad \text{und} \qquad B^{1''} = \mathrm{Bild}(\delta'').$$

(7.4) LEMMA. — *Sei* $S = (S, 0)$ *ein banachanalytischer Raumkeim. Dann gilt*

1. *Gibt es eine stetige* $\mathbb{C}$*-lineare Abbildung* $p^0 : C^0 \to Z^{0'}$ *mit* $p^0 i = \beta^Z$, *so folgt*

$$\mathrm{Hom}(S, \beta^Z)[\mathrm{Kern}(\mathrm{Hom}(S, i))] = 0.$$

2. *Gibt es stetige* $\mathbb{C}$*-lineare Abbildungen* $p^1 : C^1 \to B^{1'}$ *und* $\alpha : B^{1'} \to C^{0''}$ *mit* $p^1 | B^1 = \beta^1 | B^1$ *und* $\delta'' \alpha = \beta^{1'} | B^{1'}$, *so folgt*

$$\mathrm{Hom}(S, \beta^{0'} \beta^0)[\mathrm{Kern}(\mathrm{Hom}(S, \delta))] \subset \mathrm{Bild}(\mathrm{Hom}(S, i'')).$$

Beweis. — Wir dürfen annehmen, daß S durch ein Modell $f : (E, 0) \to (F, 0)$ gegeben wird, wobei E und F Banachräume sind und $S = f^{-1}(0)$ ist.

Zu (1). Sei φ aus $\mathrm{Kern}(\mathrm{Hom}(S, i))$ vorgegeben. Wir repräsentieren φ durch eine holomorphe Abbildung $\Phi : (E, 0) \to Z^0$. Nach Voraussetzung gibt es ein λ aus $\mathrm{Hom}((E, 0), L(F, C^0))$ mit $i\Phi = \lambda . f$. Sei λ' die Komposition von λ mit $L(F, p^0)$. Dann gilt $\beta^Z \Phi = p^0 i \Phi = \lambda' . f$ und damit $\beta^Z \Phi | S = 0$. Dies zeigt (1).

Zu (2). Gegeben sei eine holomorphe Abbildung $S \to C^0$, repräsentiert durch $\Phi : (E, 0) \to C^0$, so daß es ein λ aus $\mathrm{Hom}((E, 0), L(F, C^1))$ gibt mit $\delta\Phi = \lambda . f$. Sei λ' die

Komposition von λ mit $L(F, \alpha p^1)$. Dann gilt

$$\lambda'.f = \alpha p^1 \delta\Phi = \alpha \beta^1 \delta\Phi = \alpha\delta' \beta^0 \Phi$$

und $\zeta := \beta^{0\prime} - \alpha\delta' : C^{0\prime} \to C^{0\prime\prime}$ faktorisiert über $Z^{0\prime\prime}$ wegen

$$\delta''\zeta = \delta''\beta^{0\prime} - \delta''\alpha\delta' = \delta''\beta^{0\prime} - \beta^{1\prime}\delta' = 0.$$

Insgesamt erhält man

$$\lambda'.f = \alpha\delta'\beta^0\Phi = (\beta^{0\prime} - \zeta)\beta^0\Phi = \beta^{0\prime}\beta^0\Phi - \zeta\beta^0\Phi.$$

Dies bedeutet $\beta^{0\prime}\beta^0\Phi \,|\, S = \zeta\beta^0\Phi \,|\, S$, was die Behauptung (2) liefert.

(7.5) Sei $V \subset\subset \mathbb{C}^n$ offen. Die Auswertungsabbildung $\kappa : B(\bar{V}) \times V \to \mathbb{C}$, $(f, z) \mapsto f(z)$ ist dann holomorph, vgl. [Dou_1] 5.2. Für jeden banachanalytischen Raum S bekommen wir daher durch Komposition mit κ eine kanonische Abbildung

$$\mathrm{Hom}(S, B(\bar{V})) \to \mathrm{Hom}(S \times V, \mathbb{C}) = \Gamma(S \times V, \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n}),$$

$$a \mapsto \tilde{a} = \kappa(a \times \mathrm{id}_V).$$

Sei $Q \subset \mathbb{C}^n$ ein Kompaktum und $S = (S, 0)$ ein banachanalytischer Raumkeim. Dann erhalten wir mittels κ eine kanonische $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\Phi_{S,\,Q} : \varinjlim_{V \supset Q} \mathrm{Hom}(S, B(\bar{V})) \to \Gamma(\{0\} \times Q, \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n}),$$

wobei der Limes über alle offenen relativ kompakten Umgebungen V von Q genommen wird.

(7.6) PROPOSITION. — *Mit den Bezeichnungen von* (7.5) *gilt*

1. $\Phi_{S,\,Q}$ *ist stets injektiv.*

2. *Besitzt* Q *ein Fundamentalsystem* $(V_\alpha)_{\alpha \in R}$ *von offenen Umgebungen derart, daß* $H^1(V_\alpha, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ *separiert ist, so ist* $\Phi_{S,\,Q}$ *bijektiv.*

3. *Ist* S *endlichdimensional, so ist* $\Phi_{S,\,Q}$ *stets bijektiv.*

Beweis. — Zu (1). Wir betrachten das kanonische kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim\limits_{V \supset Q} \operatorname{Hom}(S, B(\bar{V})) \arrow[r, "\Phi_{S,\,Q}"] \arrow[d, "\Psi_{S,\,Q}"'] & \Gamma(\{0\} \times Q, \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n}) \arrow[d] \\
\prod\limits_{x \in Q} \lim\limits_{\substack{K, \\ x \in \mathring{K}}} \operatorname{Hom}(S, B(K)) \arrow[r, "\Pi\Phi_{S,\,\{x\}}"'] & \prod\limits_{x \in Q} \Gamma(\{0\} \times \{x\}, \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n})
\end{tikzcd}$$

Nach [Dou_1] 5.2 ist $\Phi_{S,\,\{x\}}$ bijektiv. Somit genügt es für die Injektivität von $\Phi_{S,\,Q}$ diejenige von $\Psi_{S,\,Q}$ zu verifizieren. Sei also φ aus $\operatorname{Hom}(S, B(\bar{V}))$ mit $\Psi_{S,\,Q}(\varphi)=0$. Dann gibt es eine endliche Familie $\mathcal{K}=(K_i)_{i \in I}$, von Polyzylindern im $\mathbb{C}^n$ mit $Q \subset |\mathring{\mathcal{K}}| \subset |\mathcal{K}| \subset V$, so daß alle Kompositionen $S \xrightarrow{\varphi} B(V) \to B(K_i)$ null sind. *Sei* $\mathcal{K}' \ll \mathcal{K}$ eine Schrumpfung von $\mathcal{K}$ mit $Q \subset |\mathring{\mathcal{K}}'|$ und $C^{\bullet} := C_b^{\bullet}(\mathcal{K}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ sowie $C^{\bullet\prime} := C_b^{\bullet}(\mathcal{K}', \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$. Dann ist wegen (7.2) (3) mit $r=0$ die Voraussetzung in (7.4) (1) erfüllt. Ist nun $V' \subset \mathbb{C}^n$ offen mit $Q \subset V' \subset\subset |\mathcal{K}'|$, so ist die Komposition $S \to B(\bar{V}) \to B(\bar{V}')$ der Nullmorphismus.

Zu (2). Nach (1) genügt es die Surjektivität von $\Phi_{S,\,Q}$ zu zeigen. Sei also a aus $\Gamma(\{0\} \times V, \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n})$ mit $Q \subset V$ gegeben. Wegen der Bijektivität der $\Phi_{S,\,\{x\}}$ gibt es endliche Familien $\mathcal{K}'' \ll \mathcal{K}' \ll \mathcal{K}$ von Polyzylindern im $\mathbb{C}^n$ und a_i aus $\operatorname{Hom}(S, B(K_i))$ mit

(i) $Q \subset |\mathring{\mathcal{K}}''| \subset |\mathcal{K}| \subset V$,

(ii) $\tilde{a}_i = a \,|\, \{0\} \times K_i$ für alle $i \in I$,

sowie offene Umgebungen W und W′ von Q mit

(iii) $|\mathcal{K}''| \subset W' \subset |\mathcal{K}'| \subset W \subset |\mathcal{K}|$,

(iv) $H^1(W, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ und $H^1(W', \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ sind separiert.

Wir setzen $C^{\bullet} := C_b^{\bullet}(\mathcal{K}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$, $C^{\bullet\prime} := C_b(\mathcal{K}', \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N})$ sowie $C^{\bullet\prime\prime} := C_b^{\circ}(\mathcal{K}'', \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$. Die Voraussetzung von Lemma (7.4) (2) ist dann erfüllt. Dies folgt aus (7.2) (3) mit $r=1$ und (7.2) (1) mit $r=1$. Wegen (1) darf man $\operatorname{Hom}(S, \delta)\, [(a_i)_{i \in I}]=0$ annehmen. Also gibt es einen Morphismus $S \xrightarrow{\varphi} Z^{0\prime\prime}$, dessen Komposition mit $Z^{0\prime\prime} \to B(K_i'')$ gerade $S \xrightarrow{a_i} B(K_i) \to B(K_i'')$ ist. Ist $V'' \subset \mathbb{C}^n$ offen mit $Q \subset V'' \subset\subset |\mathcal{K}''|$, so hat man eine kanonische $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\chi : Z^{0\prime\prime} \to B(\bar{V}'')$. Die Komposition $\chi\varphi$ hat dann die gewünschte Eigenschaft, d. h. $\Phi_{S,\,Q}(\chi\varphi)=a$.

Zu (3). Sind S' bzw. V offene Umgebungen von $0 \in S$ bzw. Q, so gilt

$$\Gamma(S' \times V, \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^N}) = \Gamma(S', \mathcal{O}_S) \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \Gamma(V, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = \operatorname{Hom}(S', \Gamma(V, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})),$$

woraus sofort die Bijektivität von $\Phi_{S,\, Q}$ folgt.

(7.7) KOROLLAR. — *Seien* $Q \subset P \subset \mathbb{C}^n$ *Kompakta mit folgender Eigenschaft: Es gibt Fundamentalsysteme* $(V_\alpha)_{\alpha \in R}$, $(W_\alpha)_{\alpha \in R}$ *offener Umgebungen von* Q *bzw.* P *mit* $V_\alpha \subset W_\alpha$, *so daß gilt*

1. *Die Beschränkungsabbildung*

$$\Gamma(W_\alpha, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) \to \Gamma(V_\alpha, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$$

ist bijektiv für alle $\alpha \in R$.

2. $H^1(W_\alpha, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ *und* $H^1(V_\alpha, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ *sind separiert für alle* $\alpha \in R$.

Dann ist für jeden banachanalytischen Raumkeim $S = (S, 0)$ *die Beschränkungsabbildung*

$$\Gamma(\{0\} \times P, \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n}) \to \Gamma(\{0\} \times Q, \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n})$$

bijektiv. Ist S *endlichdimensional, so ist die Voraussetzung* (2) *überflüssig.*

Beweis. — Wir betrachten das kanonische kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim\limits_{W_\alpha \supset P} \operatorname{Hom}(S, B(\bar{W}_\alpha)) \arrow[r, "\Phi_{S,\, P}"] \arrow[d] & \Gamma(\{0\} \times P, \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n}) \arrow[d] \\
\varinjlim\limits_{V_\alpha \supset Q} \operatorname{Hom}(S, B(\bar{V}_\alpha)) \arrow[r, "\Phi_{S,\, Q}"'] & \Gamma(\{0\} \times Q, \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n})
\end{tikzcd}$$

in dem $\Phi_{S,\, P}$ und $\Phi_{S,\, Q}$ nach (7.6) bijektiv sind. Es genügt also zu zeigen, daß der linke senkrechte Pfeil bijektiv ist. Wir konstruieren dazu eine Umkehrabbildung. Sei φ aus

$\mathrm{Hom}(S, B(\bar{V}_\alpha))$ gegeben und $\beta \in R$ mit $V_\beta \subset\subset W_\alpha$. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B(\bar{W}_\alpha) & \longrightarrow & B(\bar{V}_\alpha) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(W_\alpha, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(V_\alpha, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B(\bar{W}_\beta) & \longrightarrow & B(\bar{V}_\beta) \end{array}$$

bekommen wir wegen (1) eine kanonische $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $B(\bar{V}_\alpha) \to B(\bar{W}_\beta)$. Durch Vorschalten von φ also ein Element ψ aus $\varinjlim_{W_\gamma} \mathrm{Hom}(S, B(\bar{W}_\gamma))$. Dies definiert eine Umkehrabbildung, wie man sofort nachrechnet.

(7.8) SATZ. — *Sei $r \in \mathbb{N}$ mit $r \geqq 1$ und $Q \subset \mathbb{C}^n$ kompakt. Es gebe ein Fundamentalsystem $(V_\alpha)_{\alpha \in R}$ offener Umgebungen von Q mit $H^r(V_\alpha, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = 0$.*

Dann gilt auch $H^r(\{0\} \times Q, \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n}) = 0$ für jeden banachanalytischen Raumkeim $S = (S, 0)$.

Beweis. — Sei zunächst $\mathcal{K} = (K_i)_{i \in I}$ eine endliche Familie von Polyzylindern im $\mathbb{C}^n$ und S ein banachanalytischer Raumkeim. Aus (7.5) folgt, daß man eine kanonische Abbildung

$$(7.8.1) \qquad \Phi_{S, \mathcal{K}} : \varinjlim_{\mathcal{K}' \gg \mathcal{K}} \mathrm{Hom}(S, C_b^\bullet(\mathcal{K}', \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})) \to C^\bullet(\{0\} \times \mathcal{K}, \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n})$$

hat, welche nach (7.6) ein bijektiver Komplexisomorphismus ist.

Sei z aus $Z^r(\{0\} \times Q, \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n})$ vorgegeben. Es gibt ein $\alpha \in R$ und eine Kette $\mathcal{K}''' \ll \mathcal{K}'' \ll \mathcal{K}' \ll \mathcal{K}$ von endlichen Familien kompakter Polyzylinder im $\mathbb{C}^n$ mit

1. $Q \subset |\mathring{\mathcal{K}}'''|$, $|\mathcal{K}''| \subset V_\alpha \subset |\mathcal{K}'|$;
2. z wird repräsentiert durch ein ξ aus $Z^r(\{0\} \times \mathcal{K}, \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n})$;
3. Für das Paar $(\mathcal{K}', \mathcal{K}'')$ gilt die Aussage (7.2) (2).

Wegen (7.8.1) definiert ξ insbesondere einen Morphismus

$$\zeta : \quad S \to C_b^r(\mathcal{K}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$$

mit $\delta\,\zeta = 0$. Nach (7.2) (4) und (7.3) (1) faktorisiert die Komposition von ζ mit der Beschränkung

$$C_b^r(\mathcal{K}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) \to C_b^r(\mathcal{K}', \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$$

über $Z_b^r(\mathcal{K}', \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$. Sei $w : Z_b^r(\mathcal{K}', \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) \to C_b^{r-1}(\mathcal{K}'', \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ die Abbildung aus (7.2) (2). Dann gilt

$$\delta\, w\, \beta^{\mathcal{K}}_{\mathcal{K}'} \zeta = \beta^{\mathcal{K}}_{\mathcal{K}''} \zeta.$$

Durch Anwendung von $\varphi_{S, \mathscr{X}'''}$ folgt die Behauptung.

(7.9) SATZ. — *Seien $q \geqq 1$ eine natürliche Zahl und $Q \subset P \subset \mathbb{C}^n$ Kompakta mit folgenden Eigenschaften:*

Es gibt Fundamentalsysteme $(V_\alpha)_{\alpha \in R}$ und $(W_\alpha)_{\alpha \in R}$ offener Umgebungen von Q bzw. P mit $V_\alpha \subset W_\alpha$ und

(i) *Die Beschränkungsabbildung*

$$\Gamma(W_\alpha, \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}) \to \Gamma(V_\alpha, \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n})$$

ist bijektiv für alle α aus R.

(ii) *Es ist $H^r(W_\alpha, \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}) = 0$, $H^r(V_\alpha, \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}) = 0$ für $1 \leqq r < n - q$ und alle α aus* R.

Dann gilt : Sei $S = (S, 0)$ ein banachanalytischer Raumkeim und $\mathscr{F}$ ein S-anaflacher $\mathscr{O}_{S \times U}$-Modul, wobei $U \subset \mathbb{C}^n$ ein offener Polyzylinder ist mit $P \subset U$. Ist $q + 1 <$ Tiefe $(\mathscr{F}_0)$ (1) *oder S endlichdimensional und $q <$ Tiefe $(\mathscr{F}_0)$, so ist die Beschränkungsabbildung*

$$\Gamma(\{0\} \times P, \mathscr{F}) \to \Gamma(\{0\} \times Q, \mathscr{F})$$

bijektiv und es gilt

$$H^r(\{0\} \times P, \mathscr{F}) = 0, \qquad H^r(\{0\} \times Q, \mathscr{F}) = 0$$

für $1 \leqq r <$ Tiefe $(\mathscr{F}_0) - q$.

Beweis. — Wir zeigen die Aussage durch absteigende Induktion nach Tiefe $(\mathscr{F}_0)$. Nach eventueller kleiner Schrumpfung von U dürfen wir annehmen, daβ $\mathscr{F}$ eine endliche freie Auflösung $\mathscr{L}^\bullet$ über $\mathscr{O}_{S \times U}$ der Länge n — Tiefe $(\mathscr{F}_0)$ besitzt, vgl. [Dou_1] 8.3, Proposition 5.

Sei Tiefe $(\mathscr{F}_0) = n$. Dann folgt $\mathscr{F} = \mathscr{O}^k_{S \times U}$ und die Behauptung ergibt sich aus (7.7) und (7.8). Zum Induktionsschritt benutzen wir die exakte Sequenz

$$0 \to \mathscr{G} \to \mathscr{L}^0 \to \mathscr{F} \to 0,$$

wobei $\mathscr{G}$ wiederum S-anaflach ist und Tiefe $(\mathscr{G}_0) =$ Tiefe $(\mathscr{F}_0) + 1$ gilt. Sei zunächst $q <$ Tiefe $(\mathscr{F}_0)$. Dann folgt Tiefe $(\mathscr{G}_0) - q =$ Tiefe $(\mathscr{F}_0) + 1 - q > 1$ und es ist $H^1(P, \mathscr{G}) = 0$, $H^1(Q, \mathscr{G}) = 0$ nach Induktionsvoraussetzung. Aus dem kommutativen Diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma(P, \mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(P, \mathscr{L}^0) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(P, \mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Gamma(Q, \mathscr{G}) \arrow[r] & \Gamma(Q, \mathscr{L}^0) \arrow[r] & \Gamma(Q, \mathscr{F}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen und der Induktionsvoraussetzung sowie dem Induktionsanfang folgt die Bijektivität von $\Gamma(P, \mathscr{F}) \to \Gamma(Q, \mathscr{F})$ für $q + 1 <$ Tiefe $(\mathscr{F}_0)$ — bzw. für $q <$ Tiefe $(\mathscr{F}_0)$ und endlichdimensionales S —. Sei jetzt $1 \leqq r <$ Tiefe $(\mathscr{F}_0) - q$. Dann gilt

(1) Hierbei ist $\mathscr{F}_0$ die analytische Einschränkung von $\mathscr{F}$ auf $\{0\} \times U$.

wegen der Induktionsvoraussetzung $H^s(P, \mathscr{G})=0$, $H^s(Q, \mathscr{G})=0$ für $1 \leqq s < \text{Tiefe}(\mathscr{F}_0)+1-q$. Aus den exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccc} H^r(P, \mathscr{L}^0) & \longrightarrow & H^r(P, \mathscr{F}) & \longrightarrow & H^{r+1}(P, \mathscr{G}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^r(Q, \mathscr{L}^0) & \longrightarrow & H^r(Q, \mathscr{F}) & \longrightarrow & H^{r+1}(Q, \mathscr{G}) \end{array}$$

folgt der Induktionsschluβ.

(7.10) Wir wollen nun einsehen, daβ die Voraussetzungen im Satz (7.9) in der Nähe q-konkaver Randpunkte erfullt sind.

Sei dazu $U \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqq 2$, eine offene Nullumgebung und $\varphi: U \to \mathbb{R}$ eine $\mathscr{C}^\infty$-Funktion mit $\varphi(0)=0$, deren Leviform $L(\varphi)$ in jedem Punkt mindestens $n-q+1$ negative Eigenwerte besitzt. Wir setzen $B_\varphi := \{z \in U : \varphi(z) \leqq 0\}$. Dann gibt es einen kompakten Polyzylinder $P \subset U$ um den Nullpunkt, so daβ für $Q = Q_\varphi := B_\varphi \cap P$ die Bedingungen (i) und (ii) in (7.9) erfüllt sind. Dies folgt aus [An-Gr] Abschnitt 11, vgl. auch [Ra] III B. Hierbei sind die W_α als offene Polyzylinder annehmbar. Ist ferner $\psi: U \to \mathbb{R}$ eine kleine $\mathscr{C}^2$-Störung von φ in Umgebung von P, so bleiben (i) und (ii) richtig für P und $Q_\psi = P \cap B_\psi$. Nach geeigneter Wahl der Koordinaten im $\mathbb{C}^n$ kann man erreichen, daβ $U = U' \times U''$ ist mit $U' \subset \mathbb{C}^{q-1}$ und $U'' \subset \mathbb{C}^{n-q+1}$ offen derart, daβ die Leviform $L(\varphi) \mid T_{z''}(U'')$ negativ definit ist für $z=(z', z'')$ aus $U' \times U''$. Überdies kann P als Produkt $P = P' \times P''$ mit Polyzylinder P' und P'' gewählt werden.

Es sei angemerkt, daβ die Separiertheit der $\mathbb{C}$-Vektorräume $H^1(V_\alpha, \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n})$ im Falle $n-q=1$ nicht erwartet werden kann. Ist nämlich $n=2$, $q=1$ und $T := \Delta_1 \cup \Delta$ mit

$$\Delta_1 := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : (1/2) < |z| < 1, |w| < 1\},$$
$$\Delta := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < (1/2)\}$$

der Hartogs-Hammer im $\mathbb{C}^2$, so ist die Kohomologiegruppe $H^1(T, \mathscr{O}_{\mathbb{C}^2}) = H^1(\{\Delta, \Delta_1\}, \mathscr{O}_{\mathbb{C}^2})$ nicht separiert. Dies folgt sofort mit Hilfe der Laurent-Trennung. Wir notieren noch die folgende Aussage.

(7.11) Lemma. — *Seien* S *ein komplexer Raumkeim und* $p: X \to S$ *sowie* $q: Y \to S$ *holomorphe Abbildungen. Ferner seien* $Q \subset P$ *kompakte Teilmengen der ausgezeichneten Faser von* p, *so daβ für jeden banachanalytischen Raumkeim* T *über* S *die Beschränkungsabbildung*

$$\Gamma(P, \mathscr{O}_{X_T}) \to \Gamma(Q, \mathscr{O}_{X_T})$$

bijektiv ist.

Dann ist auch die Abbildung

$$\alpha_T: \quad \mathrm{Hom}_T((X_T, P), Y_T)^{P-\mathrm{klein}} \to \mathrm{Hom}_T((X_T, Q), Y_T)^{Q-\mathrm{klein}}$$

zwischen den kleinen Morphismen bijektiv.

Beweis. — Wir betrachten zunächst zwei Spezialfälle. Der Fall $Y = S \times \mathbb{C}^n$ folgt unmittelbar aus der Voraussetzung. Sei nun $Y = S \times D$, wobei $D \subset \mathbb{C}^n$ ein offener Polyzylinder ist. Wir können annehmen, daß $n = 1$ ist. Man reduziert die Behauptung (unter Berücksichtigung von Fall 1) sofort auf den Fall $T = \{0\}$. Sei also f aus $\Gamma(P, \mathcal{O}_P)$ eine holomorphe Funktion, so daß $f|Q$ nur Werte in $D \subset \mathbb{C}$ annimmt. Dann muß aber auch $f(P) \subset D$ gelten. Andernfalls gibt es ein $z_0 \in P \setminus Q$ mit $|f(z_0)| > \sup\{|f(z)| : z \in Q\}$. Damit wäre die Funktion $g := 1/(f - f(z_0))$ holomorph auf Q, aber nicht holomorph nach P fortsetzbar, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Aus diesen beiden Spezialfällen folgt auch der Fall

$$Y = \mathrm{Kern}\,(S \times D \underset{\mathrm{id}_S \times 0}{\overset{f}{\rightrightarrows}} S \times \mathbb{C}^m),$$

wobei f ein S-Morphismus ist. Für eine Teilmenge R der ausgezeichneten Faser von p und ein relatives Polyeder $\varphi : U \to S \times D$ von q bezeichne $h(R, \varphi)$ die Menge aller f aus $\mathrm{Hom}_T((X_T, R), Y_T)$ mit $f(R) \subset U_T$. Nach dem eben Gezeigten ist dann die kanonische Abbildung $h(P, \varphi) \to h(Q, \varphi)$ bijektiv. Insbesondere ist α_T damit surjektiv. Die Injektivität von α ergibt sich sofort aus folgender Überlegung. Sei $\psi : V \to S \times E$ ein weiteres Polyeder für q und $\varphi \times \psi : U \cap V \to S \times D \times E$ das Faserprodukt. Dann hat man ein kanonisches kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
h(P, \varphi) \arrow[r, "\sim"] & h(Q, \varphi) \\
h(P, \varphi \times \psi) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u] \arrow[d] & h(Q, \varphi \times \psi) \arrow[u] \arrow[d] \\
h(P, \psi) \arrow[r, "\sim"] & h(Q, \psi).
\end{tikzcd}$$

8. Beweis von Theorem (2.2)

Wir treffen zunächst einige Vorbereitungen.

(8.1) Sei S ein komplexer Raum, $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Teilmenge und $X \subset S \times U$ ein S-flacher abgeschlossener Unterraum. Ferner sei $\mathcal{L}^\bullet$ eine endliche Auflösung von $\mathcal{O}_X$ mit kohärenten freien $\mathcal{O}_{S \times U}$-Moduln $\mathcal{L}^k$ und (s_0, z_0) ein Punkt von X. Man beachte, daß für jeden kompakten Polyzylinder K in U und nach eventueller Verkleinerung von S als Umgebung von s_0 stets eine solche Auflösung über $S \times K$ existiert. Ist K privilegiert für $\mathcal{O}_{X_{s_0}}$, so auch für alle $\mathcal{O}_{X_s}$, wobei s aus einer kleinen Umgebung von s_0 ist.

Sei K privilegiert für alle $\mathcal{O}_{X_s}$ mit $s \in S$. Dann ist $\underline{X} := X \cap (S \times K)$ in kanonischer Weise ein funktorierter S-anaflacher Raum, vgl. [Pou] §4. Für jeden komplexen Raum

Y über S ist dann nach *loc. cit.* §5 der Funktor

$$T \mapsto \mathrm{Hom}_T((\underline{X})_T, Y_T) \tag{8.1.1}$$

auf der Kategorie der *banachanalytischen* Räume über S darstellbar. Sei nun $T=(T, t_0)$ ein banachanalytischer Raumkein über (S, s_0). Wir setzen $A := X_{s_0} \cap K$. Ferner sei h aus $\mathrm{Hom}(X_{s_0}, Y_{s_0})$ fixiert. Dann ist auch der Funktor

$$\mathrm{Hom}_T((\underline{X, A})_T, Y_T)^0 := \varinjlim_{\substack{T' \subset T,\\ t_0 \in T'}} \mathrm{Hom}_{T'}(\underline{X}_{T'}, Y_{T'})^0 \tag{8.1.2}$$

auf der Kategorie der banachanalytischen Raumkeime über (S, s_0) darstellbar. Hierbei wird in (8.1.2) der Limes über alle offenen Umgebungen T' von t_0 in T genommen und der Index »^{0}« bedeutet, daβ über der ausgezeichneten Faser die Beschränkung von h induziert wird.

(8.2) LEMMA. — *Sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie in der Kerne von Doppelpfeilen existieren und* $F, G : \mathscr{C} \to$ *(Mengen) zwei kontravariante Funktoren sowie* $a : F \to G$, $b : G \to F$ *Funktormorphismen mit* $ba = \mathrm{id}_F$.

Dann ist mit G *auch* F *darstellbar.*

Beweis. — Die Sequenz $F \xrightarrow{a} G \overset{\mathrm{id}}{\underset{ab}{\rightrightarrows}} G$ ist exakt. Sei $G \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, M)$ mit einem Objekt M aus $\mathscr{C}$. Ferner werde $ab : G \to G$ durch den Morphismus $\theta : M \to M$ dargestellt. Wir setzen $N := \mathrm{Kern}\,(M \overset{\mathrm{id}}{\underset{\theta}{\rightrightarrows}} M)$. Dann gilt $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, N)$.

(8.3) Sei $S=(S, 0)$ ein komplexer Raumkeim, $f : X \to S$ eine flache holomorphe Abbildung komplexer Räume mit ausgezeichneter q-konkaver Faser X_0, Ausschöpfungsfunktion φ und Ausnahmemenge K. Ferner sei $c \in \mathbb{R}$ ein zulässiger Wert von φ sowie $A := \bar{B}_c$ und es gelte $q+1 < \mathrm{Tiefe}\,(\mathscr{O}_{X_0} | (A \setminus K))$. Wir fixieren ferner einen komplexen Raum $g : Y \to S$ über S und eine holomorphe Abbildung $h : (X_0, A) \to Y_0$. Nach (6.6) und Abschnitt 7 gibt es Panzerungen $\underline{Q} \supset\supset \underline{\tilde{Q}} \supset\supset \underline{\tilde{\tilde{Q}}}$ von (f, A), so daβ h klein bzl. $\underline{Q}$ ist, $\underline{Q}$ und $\underline{\tilde{\tilde{Q}}}$ gut sind und $\underline{\tilde{Q}}$ privilegiert ist. Wir setzen zur Abkürzung $F(T) := \mathrm{Hom}_T((X_T, A), Y_T)^0$ für einen banachanalytischen Raumkeim T über S. Mit den Bezeichnungsweisen aus (6.1), (6.4), (8.1) haben wir dann folgendes in T funktorielle kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{F}(\mathrm{T}) \arrow[r] \arrow[dd] & \prod\limits_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}((\mathrm{X}_{\mathrm{T}}, \mathrm{Q}_i), \mathrm{Y}_{\mathrm{T}})^0 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod\limits_{i,\, j;\, \alpha \in \mathrm{A}_{ij}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}((\mathrm{X}_{\mathrm{T}}, \mathrm{Q}_{ij\alpha}), \mathrm{Y}_{\mathrm{T}})^0 \\
 & \prod\limits_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}((\mathrm{X}_{\mathrm{T}}, \mathrm{X}_i), \mathrm{Y}_{\mathrm{T}})^0 \arrow[u, "\wr"] \arrow[d] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod\limits_{i,\, j;\, \alpha \in \mathrm{A}_{ij}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}((\mathrm{X}_{\mathrm{T}}, \mathrm{X}_{ij\alpha}), \mathrm{Y}_{\mathrm{T}})^0 \arrow[u, "\wr"] \arrow[d] \\
\mathrm{G}(\mathrm{T}) \arrow[r] \arrow[dd] & \prod\limits_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}((\underline{\mathrm{X}, \tilde{\mathrm{X}}_i})_{\mathrm{T}}, \mathrm{Y}_{\mathrm{T}})^0 \arrow[d] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod\limits_{i,\, j;\, \alpha \in \tilde{\mathrm{A}}_{ij}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}((\underline{\mathrm{X}, \tilde{\mathrm{X}}_{ij\alpha}})_{\mathrm{T}}, \mathrm{Y}_{\mathrm{T}})^0 \arrow[d] \\
 & \prod\limits_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}((\mathrm{X}_{\mathrm{T}}, \tilde{\tilde{\mathrm{X}}}_i), \mathrm{Y}_{\mathrm{T}})^0 \arrow[d, "\wr"] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod\limits_{i,\, j\, \alpha \in \tilde{\tilde{\mathrm{A}}}_{ij}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}((\mathrm{X}_{\mathrm{T}}, \tilde{\tilde{\mathrm{X}}}_{ij\alpha}), \mathrm{Y}_{\mathrm{T}})^0 \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{F}(\mathrm{T}) \arrow[r] & \prod\limits_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}((\mathrm{X}_{\mathrm{T}}, \underline{\tilde{\tilde{\mathrm{Q}}}}_i), \mathrm{Y}_{\mathrm{T}})^0 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod\limits_{i,\, j;\, \alpha \in \tilde{\tilde{\mathrm{A}}}_{ij}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}((\mathrm{X}_{\mathrm{T}}, \underline{\tilde{\tilde{\mathrm{Q}}}}_{ij\alpha}), \mathrm{Y}_{\mathrm{T}})^0
\end{tikzcd}
$$

wobei die eingezeichneten Isomorphismen wegen (7.11), (7.9), (7.10) bijektiv sind und G (T) durch die Exaktheit der 3.-ten Zeile definiert ist. Der Index »^{0}« bedeutet wiederum, daß über der ausgezeichneten Faser die Beschränkung von h induziert wird.

Da nun die Komposition $\mathrm{F}(\mathrm{T}) \to \mathrm{G}(\mathrm{T}) \to \mathrm{F}(\mathrm{T})$ die Identität von F (T) ist und G durch einen banachanalytischen Raumkeim über S darstellbar ist [siehe (8.1)], gilt dies nach (8.2) auch für F. Sei also $\mathrm{F} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(-, \mathrm{N})$ mit einem banachanalytischen Raumkeim N über S. Wir müssen zeigen, daß N endlichdimensional ist. Dazu verwenden wir die oben eingeführten Bezeichnungen. Sei $\underline{\tilde{\mathrm{Q}}}' \subset\subset \underline{\tilde{\mathrm{Q}}}$ eine privilegierte Schrumpfung von $\underline{\tilde{\mathrm{Q}}}$ mit $\underline{\tilde{\tilde{\mathrm{Q}}}} \subset\subset \underline{\tilde{\mathrm{Q}}}'$, die eine Panzerung von $\overline{(f, \mathrm{A})}$ ist. Sei $\tilde{\mathrm{M}}_i$ bzw. $\tilde{\mathrm{M}}_i'$ der darstellende Raumkeim von $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}((\underline{\mathrm{X}, \tilde{\mathrm{X}}_i})_{\mathrm{T}}, \mathrm{Y}_{\mathrm{T}})^0$ bzw. $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}((\underline{\mathrm{X}, \tilde{\mathrm{X}}_i'})_{\mathrm{T}}, \mathrm{Y}_{\mathrm{T}})^0$. Dann ist die relative Tangentialabbildung von $\tilde{\mathrm{M}}_i \to \tilde{\mathrm{M}}_i'$ S-kompakt ([2]), wie sofort aus der Konstruktion von $\tilde{\mathrm{M}}_i$, $\tilde{\mathrm{M}}_i'$ folgt. Deshalb hat id_{N} ebenfalls eine S-kompakte relative Tangentialabbildung und N ist somit nach [Dou_2] p. 596 Proposition 3, endlichdimensional.

Es verbleibt noch der Fall $\mathrm{A} = \mathrm{X}_0$ zu untersuchen. Sei h aus $\mathrm{Hom}(\mathrm{X}_0, \mathrm{Y}_0)$ fixiert. Es gilt dann

Zu jedem zulässigen c gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für c_1, c_2 aus $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ mit $c_1 < c_2$ der Funktormorphismus

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}((\mathrm{X}, \bar{\mathrm{B}}_{c_2}), \mathrm{Y})^0 \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}((\mathrm{X}, \bar{\mathrm{B}}_{c_1}), \mathrm{Y})^0$$

([2]) Zum Begriff « S-kompakt » siehe [Dou_2] p. 596.

bijektiv ist.

Es gibt nämlich eine gute Panzerung $\underline{\mathrm{Q}}$ von $(f, \bar{\mathrm{B}}_c)$, die auch für jedes c' nahe bei c noch eine gute Panzerung von $(f, \bar{\mathrm{B}}_{c'})$ ist und so daß h klein bzgl. $\underline{\mathrm{Q}}$ ist. In dem folgenden kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{F}^{c_2}(\mathrm{T}) & \longrightarrow & \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}((\mathrm{X}_{\mathrm{T}}, \mathrm{Q}_i^{c_2}), \mathrm{Y}_{\mathrm{T}})^0 & \rightrightarrows & \prod_{i,\ j;\ \alpha \in \mathrm{A}_{ij}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}((\mathrm{X}_{\mathrm{T}}, \mathrm{Q}_{ij\alpha}^{c_2}), \mathrm{Y}_{\mathrm{T}})^0 \\
\downarrow & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
\mathrm{F}^{c_1}(\mathrm{T}) & \longrightarrow & \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}((\mathrm{X}_{\mathrm{T}}, \mathrm{Q}_i^{c_1}), \mathrm{Y}_{\mathrm{T}})^0 & \rightrightarrows & \prod_{i,\ j;\ \alpha \in \mathrm{A}_{ij}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}((\mathrm{X}_{\mathrm{T}}, \mathrm{Q}_{ij\alpha}^{c_1}), \mathrm{Y}_{\mathrm{T}})^0
\end{array}$$

sind die beiden rechten senkrechten Pfeile wegen (7.11), (7.9) (7.10) bijektiv, damit aber auch $\mathrm{F}^{c_2}(\mathrm{T}) \to \mathrm{F}^{c_1}(\mathrm{T})$ für jeden Raumkeim T über S. Sei

$$\mathrm{F}^c(-) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}((\mathrm{X}, \bar{\mathrm{B}}_c), \mathrm{Y})^0 = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(-, \mathrm{N}^c)$$

für einen zulässigen Wert c von φ. In obiger Situation ist dann der kanonische S-Morphismus $\mathrm{N}^{c_2} \to \mathrm{N}^{c_1}$ ein Isomorphismus. Nun gilt

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})^0 = \varprojlim_{c \text{ zulassig}} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}((\mathrm{X}, \bar{\mathrm{B}}_c), \mathrm{Y})^0$$

und zugleich ist dieser Limes nach dem eben Bemerkten isomorph zu $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}((\mathrm{X}, \bar{\mathrm{B}}_c), \mathrm{Y})^0$ für jedes zulässige c. Dies zeigt das Theorem 2 auch für den Fall $\mathrm{A} = \mathrm{X}_0$.

(8.4) *Bemerkung.* — Wie der Beweis von Theorem 2 zeigt, ist der Funktor $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{T}}((\mathrm{X}_{\mathrm{T}}, \mathrm{A}), \mathrm{Y}_{\mathrm{T}})^0$ sogar auf der Kategorie der banachanalytischen Raumkeime über S durch einen komplexen Raumkeim darstellbar.

9. Beweis von Theorem (2.1)

(9.0) Wir führen zunächst einige Sprechweisen ein. Sei S ein komplexer Raum. Für einen kontravarianten Funktor F auf (An/S) und einen Punkt $s \in \mathrm{S}$ sowie $x_0 \in \mathrm{F}(\mathrm{Spec}(\kappa(s)))$ sei

$$\mathrm{F}_{x_0}: \quad (\mathrm{Gan}/(\mathrm{S}, \mathrm{s})) \to (\mathrm{Mengen})$$

derjenige Funktor, der einem Raumkeim (T, t) über (S, s) die Menge aller x aus $\varinjlim_{t \in \mathrm{T}' \subset \mathrm{T}} \mathrm{F}(\mathrm{T}')$, wobei T′ die offenen Umgebungen von t in T durchläuft, zuordnet mit Blid x_0 in $\mathrm{F}(\mathrm{Spec}(\kappa(s)))$. Wir nennen F_{x_0} die *Lokalisierung* von F in x_0.

Sei $\varphi : F \to G$ ein Morphismus von kontravarianten mengenwertigen Funktoren auf (An/S). Wir nennen φ (*formal*) *glatt*, falls für jeden Punkt $s \in S$ und jedes $x_0 \in F(\mathrm{Spec}(\kappa(s)))$ der induzierte Funktormorphismus $\varphi_{x_0} : F_{x_0} \to G_{\varphi(x_0)}$ der Lokalisierungen im üblichen Sinne (formal) glatt ist. Ein Element $x \in G(T)$ heißt demgemäß (formal) glatt, falls der durch x gegebene Funktormorphismus $T \to G$ (formal) glatt ist.

Es gilt dann folgendes Darstellbarkeitskriterium (vgl. [S-V] (1.1)).

(9.1) SATZ. — *Sei* $F : (\mathrm{An}/S) \to (\mathrm{Mengen})$ *ein kontravarianter Funktor von lokaler Natur. Genau dann ist* F *durch einen (separierten) komplexen Raum darstellbar, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind.*

(i) *Für einen Raum* T *aus* (An/S) *und zwei Morphismen* $a, b : T \to F$ *ist der Funktor* Kern $(T \underset{b}{\overset{a}{\rightrightarrows}} F)$ *durch einen lokal abgeschlossenen (abgeschlossenen) Unterraum von* T *darstellbar.*

(ii) *Zu jedem* $s \in S$ *und* $x_0 \in F(\mathrm{Spec}(\kappa(s)))$ *gibt es einen punktierten Raum* (T, t) *über* (S, s) *und ein formal glattes Element* $x \in F(T)$ *mit Bild* x_0 *in* $\mathrm{Spec}(\kappa(s))$.

(9.2) Sei also $f : X \to S$ ein flacher q-konkaver Morphismus komplexer Räume mit relativer Ausschöpfungsfunktion φ und Ausnahmemenge K. Es sei c ein zulässiger Wert von φ und $A := \bar{B}_c$. Wir nehmen an, daß $q+1 < \min\{\text{Tiefe } \mathcal{O}_{X_s} | (A_s \setminus K_s)) : s \in S\}$ ist. Zur Abkürzung setzen wir

$$F(T) := \mathrm{Hom}_T((X_T, A_T), Y_T)$$

für einen komplexen Raum T über S.

Wir zeigen zunächst die Eigenschaft (i) für F. Sei dazu T ein komplexer Raum über S und $a, b : (X_T, A_T) \to Y_T$ zwei T-Morphismen. Wir müssen zeigen, daß der Funktor

$$W \mapsto N(W) := \{\varphi \in \mathrm{Hom}(W, T) : \varphi^*(a) = \varphi^*(b)\}$$

durch einen abgeschlossenen Unterraum von T darstellbar ist. Es bedeutet keine Einschränkung $T = S$ anzunehmen. Aus der Existenz guter Panzerungen für $f : (X, A_s) \to (S, s)$, $s \in S$, folgt, daß $a = b$ auf B_c gleichwertig ist mit $a = b$ auf A, vgl. (7.11).

Sei $M \subset S$ die Menge aller s mit $a_s = b_s$ auf A_s. Wir zeigen zunächst, daß M eine kanonische komplexe Struktur trägt bzgl. der M ein lokal abgeschlossener Unterraum von S wird. Sei $s \in M$ ein Punkt und $\underline{Q}$ eine gute Panzerung für $f : (X, A_s) \to (S, s)$ mit Einbettungen $U_i \to \tilde{S} \times D_i$, $i \in I$, wobei $\tilde{S}$ eine offene Umgebung von s ist und so daß a und b klein bzgl. $(Q_i)_{i \in I}$ sind. Ferner sei $\underline{\tilde{Q}} \subset\subset \underline{Q}$ eine privilegierte Schrumpfung von $\underline{Q}$. Wir dürfen annehmen, daß $\underline{Q}$ bzw. $\underline{\tilde{Q}}$ eine gute bzw. privilegierte Panzerung von $f : (X, A_t) \to (S, t)$ ist für alle t aus $\tilde{S}$ und a, b klein bzgl. $\underline{Q}$ sind. Wegen $|a_s| = |b_s|$ können zur lokalen Beschreibung von a und b dieselben relativen Polyeder von $Y \to S$ verwendet werden (nach eventueller Verkleinerung von $\tilde{S}$). Die komplexe Struktur auf M sowie die entsprechende universelle Eigenschaft und lokale Abgeschlossenheit ergibt sich dann sofort mit Hilfe der folgenden Aussage.

(9.3) PROPOSITION. — *Sei* S *ein komplexer Raum und* $L \subset \mathbb{C}^n$ *ein kompakter Polyzylinder um Null sowie* $X \subset S \times L$ *ein komplexer Unterraum. Es gebe einen stetigen* $\mathcal{O}_S$*-linearen*

Schnitt r zu dem kanonischen Epimorphismus $\pi_* \mathcal{O}_{S \times L} \to \pi_* \mathcal{O}_X$, *wobei* $\pi : S \times L \to S$ *die kanonische Projektion sei* (3).

Sind dann a, b zwei Elemente aus $\Gamma(X, \mathcal{O}_X^m)$, *so ist der Funktor*

$$\mathrm{N} : (\mathrm{An}) \to (\mathit{Mengen})$$

$$\mathrm{T} \mapsto \{ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathrm{T}, \mathrm{S}) : \varphi^* a = \varphi^* b \}$$

durch einen abgeschlossenen Unterraum von S *darstellbar.*

Beweis. — Sei $\tilde{a} := r(a)$, $\tilde{b} := r(b)$ und $\tilde{a} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \tilde{a}_\nu z^\nu$, $\tilde{b} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \tilde{b}_\nu z^\nu$ die Reihenentwicklungen von $\tilde{a}$ bzw. $\tilde{b}$ nach den Koordinaten $z = (z_1, \ldots, z_n)$ des $\mathbb{C}^n$ mit $\tilde{a}_\nu$, $\tilde{b}_\nu$ aus $\Gamma(\mathrm{S}, \mathcal{O}_S^m)$. Sei S′ der durch $(\tilde{a}_\nu - \tilde{b}_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}^n$, definierte abgeschlossene komplexe Unterraum von S Dann stellt S′ den Funktor N dar. Ist nämlich $\varphi : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ eine holomorphe Abbildung mit $\varphi^* a = \varphi^* b$ und setzen wir $r_\mathrm{T} := \mathcal{O}_\mathrm{T} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_S} r$, so gilt

$$r_\mathrm{T}(\varphi^* a) = \varphi^*(r(a)) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \varphi^*(\tilde{a}_\nu) z^\nu$$

und entsprechend $r_\mathrm{T}(\varphi^* b) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \varphi^*(\tilde{b}_\nu) z^\nu$. Wegen $r_\mathrm{T}(\varphi^* a) = r_\mathrm{T}(\varphi^* b)$ muß dann φ über S′ faktorisieren. Dies zeigt die Behauptung, da trivialerweise $a \mid \mathrm{S}' = b \mid \mathrm{S}'$ gilt. —

Wir zeigen nun noch, daß M abgeschlossen in S ist. Sei also $s \in \mathrm{S}$ und $s_k \to s$ eine Folge von Punkten mit $s_k \in \mathrm{M}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da f als flache Abbildung insbesondere offen ist, folgt $a_s(x) = b_s(x)$ für jeden Punkt $x \in \mathrm{A}_s$, also $|a_s| = |b_s|$. Man kann dann wieder die obige Situation mit den Panzerungen $\underline{\mathrm{Q}}$ und $\underline{\tilde{\mathrm{Q}}}$ herstellen und bzgl. $\tilde{\mathrm{K}}_i$ die Gültigkeit der Proposition (9.3) annehmen, wobei S als Umgebung von s eventuell zu verkleinern ist. Mit den eben verwendeten Bezeichnungen gilt dann $\tilde{a}_\nu(s_k) = \tilde{b}_\nu(s_k)$ für alle $\nu \in \mathbb{N}^n$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Damit folgt aber auch $\tilde{a}_\nu(s) = \tilde{b}_\nu(s)$ für alle ν und somit $a(s) = b(s)$. Also ist M abgeschlossen in S.

Zu (ii) Der Funktor F ist in natürlicher Weise auch auf der Kategorie (Ban/S) der banachanalytischen Räume über S erklärt. Sei also $s \in \mathrm{S}$ ein Punkt und $h : (\mathrm{X}_s, \mathrm{A}_s) \to \mathrm{Y}_s$ eine holomorphe Abbildung sowie $\mathrm{H} : (\mathrm{X}_\mathrm{N}, \mathrm{A}_\mathrm{N}) \to \mathrm{Y}_\mathrm{N}$ die nach (2.2) existierende universelle Deformation von h über dem Raumkeim (N, 0). Wir übernehmen die in (8.3) eingeführten Bezeichnungsweisen. Nach Verkleinerung von S als Umgebung von s können wir annehmen, daß eine Panzerungskette $\underline{\mathrm{Q}} \supset\supset \underline{\tilde{\mathrm{Q}}} \supset\supset \underline{\tilde{\tilde{\mathrm{Q}}}}$ für die globale Abbildung $f : \mathrm{W} \to \mathrm{S}$ gegeben ist [vgl. (6.6)], so daß für jeden Punkt $t \in \mathrm{S}$ die Panzerungen $\underline{\mathrm{Q}}_t$, $\underline{\tilde{\mathrm{Q}}}_t$, $\underline{\tilde{\tilde{\mathrm{Q}}}}_t$ die Eigenschaften aus (8.3) erfüllen und überdies jedes H_t klein bzgl. $\underline{\mathrm{Q}}_t$ ist und zwar bzgl. einer im folgenden festen relativen Polyederüberdeckung von $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$.

---

(3) Ist X S-flach und L «hinreichend» privilegiert, z. B. im Sinne von [Bi-Ko] Kapitel II, § 3, so existiert stets (nach Verkleinern von S) ein solcher Schnitt.

Es bezeichne $F^{\underline{Q}}$ bzw. $F^{\underline{\tilde{\tilde{Q}}}}$ den Unterfunktor von F derjenigen Morphismen, die klein bzgl. $\underline{Q}$ bzw. $\underline{\tilde{\tilde{Q}}}$ sind. Die Inklusion $F^{\underline{Q}} \to F^{\underline{\tilde{\tilde{Q}}}}$ ist dann durch eine offene Einbettung darstellbar. Die analoge Konstruktion von (8.3) durchgeführt für die kleinen Morphismen liefert eine Faktorisierung dieser Inklusion in $F^{\underline{Q}} \xrightarrow{a} G \xrightarrow{b} F^{\underline{\tilde{\tilde{Q}}}}$ mit einem durch M aus (Ban/S) darstellbaren Funktor G. Der Unterfunktor $G' := G \times_{F^{\underline{\tilde{\tilde{Q}}}}} F^{\underline{Q}}$ von G ist durch einen offenen Unterraum M′ von M darstellbar. Die Konstruktion von N zeigt, daβ $N = \text{Kern}\,(M' \overset{ab}{\underset{id}{\rightrightarrows}} M')$ gilt, nach eventueller Verkleinerung von N um 0. Ferner ist klar, daβ man ein Diagramm wie in (8.3) für jedes H_t, $t \in N$, durch Lokalisieren von $F^{\underline{Q}} \to G \to F^{\underline{\tilde{\tilde{Q}}}}$ in H_t erhält. Daher stellt (N, t) den Funktor $F^{\underline{Q}}_{H_t} = F_{H_t}$ dar für jedes $t \in N$. Dies zeigt die Behauptung.

10. Abzählbarkeit der Topologie des darstellenden Raumes des Funktors $\underline{\mathrm{Hom}}_S((X, A), Y)$

(10.1) Wir verwenden die in Abschnitt 5 und 6 eingeführten Rede- und Bezeichnungsweisen. Es seien $\varphi_a : U_a \to S_a \times D_a \subset S_a \times \mathbb{C}^{n_a}$, $a \in J$, abzählbar viele relative Polyeder von f, die A überdecken, und $\psi_b : V_b \to S_b \times E_b \subset S_b \times \mathbb{C}^{m_b}$, $b \in J'$, abzählbar viele relative Polyeder für $Y \to S$, die ganz Y überdecken. Es gibt dann Familien von Ketten von relativen Panzerungen (bzgl. der Polyeder φ_a) von f

$$\underline{Q}_k^{(\nu)} \supset\supset \underline{\tilde{Q}}_k^{(\nu)} \supset\supset \underline{Q}_k'^{(\nu)} \supset\supset \underline{\tilde{Q}}_k'^{(\nu)} \supset\supset \underline{Q}_k''^{(\nu)}, \qquad \nu, k \in \mathbb{N}$$

und offene Teilmengen $S_k^{(\nu)}$ von S mit folgenden Eigenschaften

1. $\underline{Q}_k^{(\nu)}$, $\underline{Q}_k'^{(\nu)}$ und $\underline{Q}_k''^{(\nu)}$ sind gute Panzerungen für alle $f : (X, A_t) \to (S, t)$ mit t aus $S_k^{(\nu)}$.
2. $\underline{\tilde{Q}}_k^{(\nu)}$ und $\underline{\tilde{Q}}_k'^{(\nu)}$ sind privilegierte Panzerungen für alle $f : (X, A_t) \to (S, t)$ mit t aus $S_k^{(\nu)}$.
3. Zu jedem $s \in S$ und jeder offenen Überdeckung $\mathfrak{U}$ von A_s gibt es ν, $k \in \mathbb{N}$ mit $s \in S_k^{(\nu)}$ und so daβ $\{ \underline{Q}_{k,i}^{(\nu)} : i \in I_k^{(\nu)} \}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{U}$ ist.
4. Es gilt $S = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k^{(\nu)}$ für all $\nu \in \mathbb{N}$.

Wir überlegen uns die Existenz solcher Familien von Panzerungsketten. Dazu fixieren wir eine Metrik auf X. Zu jedem Punkt $s \in S$ und $\nu \in \mathbb{N}$ gibt es dann Panzerungsketten

$$\underline{Q}_s^{(\nu)} \supset\supset \underline{\tilde{Q}}_s^{(\nu)} \supset\supset \underline{Q}_s'^{(\nu)} \supset\supset \underline{\tilde{Q}}_s'^{(\nu)} \supset\supset \underline{Q}_s''^{(\nu)}$$

von f und eine offene Umgebung $S_s^{(\nu)}$ von s in S mit folgenden Eigenschaften

(i) $\underline{Q}_s^{(\nu)}$, $\underline{Q}_s'^{(\nu)}$ und $\underline{Q}_s''^{(\nu)}$ sind gute Panzerungen für alle $f : (X, A_t) \to (S, t)$ mit t aus $S_s^{(\nu)}$.

(ii) $\underline{\tilde{Q}}_s^{(\nu)}$ und $\underline{\tilde{Q}}_s'^{(\nu)}$ sind privilegierte Panzerungen für alle $f : (X, A_t) \to (S, t)$ mit t aus $S_s^{(\nu)}$.

(iii) Der Durchmesser von $Q_{s,i}^{(\nu)}$ ist $<(1/\nu)$ in allen Fasern A_t, $t\in S_s^{(\nu)}$, und für alle $i\in I_s^{(\nu)}$.

Aus der offenen Überdeckung $\{S_s^{(\nu)} : s\in S\}$ von S wählen wir eine abzählbare Teilüberdeckung $\{S_k^{(\nu)} : k\in\mathbb{N}\}$ aus. Insbesondere ist dann (4) erfüllt. Ist nun $s\in S$ ein Punkt und $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung von A_s, so sei $\lambda>0$ eine Lebesguesche Zahl für $\mathfrak{U}$ und A_s (man beachte, daß A_s kompakt ist). Wir wählen ein $\nu_0\in\mathbb{N}$ mit $(1/\nu_0)\leqq\lambda$. Dann liegt s in mindestens einem $S_k^{(\nu_0)}$. Die Eigenschaft (3) folgt nun aus dem Lebesgueschen Lemma.

Es sei $N\to S$ der darstellende Raum von $\underline{\mathrm{Hom}}_S((X, A), Y)$ gemäß Theorem (2.1) und $\underline{Q}_k^{(\nu)}$ eine Panzerung aus obiger Familie mit der Indexmenge $I_k^{(\nu)}$ sowie $\tau : I_k^{(\nu)}\to J'$ eine Abbildung. Mit $N^{\underline{Q}_k^{(\nu)},\tau}$ bezeichnen wir dann die Menge aller h aus $\mathrm{Hom}((X_t, A_t), Y_t))$ für $t\in S_k^{(\nu)}$, so daß $h(Q_{k,i}^{(\nu)})\subset V_{\tau(i)}$ gilt für alle $i\in I_k^{(\nu)}$. Ersichtlich ist $N^{\underline{Q}_k^{(\nu)},\tau}$ eine offene Teilmenge von N, was sofort mit Hilfe des universellen Morphismus $(X_N, A_N)\to Y_N$ über N folgt. Ferner gilt wegen (3) und (4)

$$N=\bigcup_{\substack{\nu,\, k\in\mathbb{N},\\ \tau\in \mathrm{Abb}(I_k^{(\nu)},\, J')}} N^{\underline{Q}_{k,\tau}^{(\nu)}}.$$

Die Menge $\mathrm{Abb}(I_k^{(\nu)}, J')$ ist abzählbar. Daher genügt es zu zeigen, daß jedes $N^{\underline{Q}_k^{(\nu)},\tau}$ abzählbare Topologie besitzt. Wir unterdrücken deshalb im folgenden die Indizes ν und k. Gegeben sei alo eine Kette

$$\underline{Q}\supset\supset\underline{\tilde{Q}}\supset\supset\underline{Q}'\supset\supset\underline{\tilde{Q}}'\supset\supset\underline{Q}''$$

von Panzerungen für $f: (X, A_s)\to(S, s)$ und jedes $s\in S$ mit den Eigenschaften (1) und (2) für $S=S_k^{(\nu)}$. Ferner sei τ aus $\mathrm{Abb}(I, J')$ fixiert.

Sei T ein banachanalytischer Raum über S. Dann ist die kanonische in T funktorielle Sequenz (mit $W_i := V_{\tau(i)}$)

$$\mathrm{Hom}_T((X_T, A_T), Y_T)^{\underline{Q},\tau}\to\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_T((X_T, Q_{iT}), W_{iT})$$
$$\rightrightarrows\prod_{\substack{i,\, j\in I\\ \alpha\in A_{ij}}}\mathrm{Hom}_T((X_T, Q_{ij\alpha T}), (W_i\cap W_j)_T)$$

exakt und entsprechend auch für $\underline{Q}'$ und $\underline{Q}''$ anstatt $\underline{Q}$. Den Kern des folgenden Doppelpfeils [zur Bezeichnungsweise vergleiche man Abschnitt 6 und (8.1)]

$$\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_T(\underline{\tilde{X}}_{iT}, W_{iT})\rightrightarrows\prod_{\substack{i,\, j\in I\\ \alpha\in\tilde{A}_{ij}}}\mathrm{Hom}_T(\underline{\tilde{X}}_{ij\alpha T}, (W_i\cap W_j)_T)$$

bezeichnen wir mit $G^{\underline{\tilde{Q}},\tau}(T)$. Entsprechend sei $G^{\underline{\tilde{Q}}',\tau}$ definiert. Diese beiden Funktoren werden nach [Pou] § 5 dargestellt durch banachanalytische Räume $M^{\underline{\tilde{Q}},\tau}$ bzw. $M^{\underline{\tilde{Q}}',\tau}$ über S. Setzen wir zur Abkürzung $F := \underline{\mathrm{Hom}}_S((X, A), Y)$, so haben wir Funktormorphismen

$$F^{\underline{Q},\tau}\to G^{\underline{\tilde{Q}},\tau}\to F^{\underline{Q}',\tau}\to G^{\underline{\tilde{Q}}',\tau}\to F^{\underline{Q}'',\tau}$$

auf der Kategorie der banachanalytischen Räume über S [vgl. (8.3)]. Wegen (8.4) bekommen wir dann S-Morphismen banachanalytischer Räume

$$N^{\underline{Q},\tau} \to M^{\tilde{\underline{Q}},\tau} \to N^{\underline{Q}',\tau} \to M^{\tilde{\underline{Q}}',\tau} \to N^{\underline{Q}'',\tau}$$

wobei $N^{\underline{Q},\tau} \to N^{\underline{Q}',\tau}$, $N^{\underline{Q}',\tau} \to N^{\underline{Q}'',\tau}$ die kanonischen offenen Einbettungen sind. Die Abzählbarkeit der Topologie von $N^{\underline{Q},\tau}$ folgt nun aus (10.4), wenn man die Konstruktion von $M^{\underline{Q},\tau}$ und $M^{\tilde{\underline{Q}}',\tau}$ berücksichtigt.

Wir notieren die folgenden beiden einfachen Lemmata.

(10.2) LEMMA. — *Seien* $\alpha : X \to Y$, $\beta : Y \to Z$ *stetige Abbildungen topologischer Räume, so daß* $\beta\alpha : X \to Z$ *eine offene Einbettung ist. Dann ist* $\alpha : X \to \text{Bild}(\alpha)$ *ein Homöomorphismus.*

(10.3) LEMMA. — *Sei* X *ein metrisierbarer topologischer Raum. Dann hat* X *genau dann abzählbare Topologie, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge in* X *gibt.*

(10.4) PROPOSITION. — *Sei* S *ein komplexer Raum und*

$$N \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M' \to N'$$

S-*Morphismen banachanalytischer Räume über* S. *Zu jedem* $s \in S$ *gebe es eine offene Umgebung* $\tilde{S}$ *und ein kommutatives Diagramm von* $\tilde{S}$-*Morphismen*

$$\begin{tikzcd} M_{\tilde{S}} \arrow[r, "\beta \mid \tilde{S}"] \arrow[d] & M'_{\tilde{S}} \arrow[d, "i'"] \\ E \arrow[r, "\varphi"'] & E' \end{tikzcd}$$

wobei $E \to \tilde{S}$, $E' \to \tilde{S}$ *lokal triviale Banachvektorraumbündel über* $\tilde{S}$ *sind,* φ *ein linearer* S-*Morphismus und* i' *eine lokal abgeschlossene Einbettung ist. Es gelte*

1. $N \to N'$ *ist eine offene Einbettung*
2. $\varphi_s : E_s \to E'_s$ *ist kompakt für jedes* $s \in \tilde{S}$.

Dann hat N *abzählbare Topologie.*

Beweis. — Nach eventueller Verkleinerung von $\tilde{S}$ als Umgebung von s kann man E und E′ als trivial annehmen, d. h. $E = S \times F$ und $E' = S \times F'$ mit Banachräumen F und F′. Aus (10.2) folgt, daß $N \to M'$ ein Homöomorphismus aufs Bild ist. Es genügt daher zu zeigen, daß Bild(β) abzählbare Topologie besitzt. Nach Übergang zu einer genügend feinen abzählbaren Überdeckung von S kann man annehmen, daß es ein kommutatives Diagramm von S-Morphismen

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & M' \arrow[d, "i'"] \\ S \times F \arrow[r, "\varphi"'] & S \times F' \end{tikzcd}$$

gibt, wobei φ ein faserweise kompakter linearer S-Morphismus und i' eine lokal abgeschlossene Einbettung ist. Es genügt zu zeigen, daβ Bild(φ) abzählbare Topologie hat. Dazu verwenden wir das Kriterium (10.3). Sei $\{s_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge in S. Dann gibt es zu jedem k aus $\mathbb{N}$ eine abzählbare Familie $y_k^{(\nu)}$, $\nu \in \mathbb{N}$, von Elementen aus Bild$(\varphi_{s_k} | \{x \in F : \|x\| \leqq 1\})$ mit der Eigenschaft: Zu jedem $x \in F$, $k \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\lambda \in \mathbb{Q}$ und $\nu \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\varphi(s_k, x) - \lambda y_k^{(\nu)}\| < \varepsilon.$$

Die Menge $\{(s_k, \lambda y_k^{(\nu)}) : k, \nu \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{Q}\}$ ist dann abzählbar und dicht in Bild(φ).

LITERATUR

[An-Gr] A. ANDREOTTI und H. GRAUERT, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes* (*Bull. Soc. math. Fr.*, Bd 90, 1962, S. 193-259).

[Bi-Ko] J. BINGENER und S. KOSAREW, *Lokale Modulräume in der analytischen Geometrie*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1987.

[Dou_1] A. DOUADY, *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné* (*Ann. Inst. Fourier*, Bd 16, 1966, S 1-95).

[Dou_2] A. DOUADY, *Le problème des modules locaux pour les espaces $\mathbb{C}$-analytiques compacts* (*Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e sér., Bd 7, 1974, S. 569-602).

[Fl] H. FLENNER, *Über Deformationen holomorpher Abbildungen. Habilitationsschrift*, Osnabrück, 1978.

[Pie] A. PIETSCH, *Nuclear locally convex spaces* (*Ergeb. d. Math. u. Grenzgeb.*, Bd 66, Springer Verl., Berlin-Heidelberg-New York, 1972).

[Pou] G. POURCIN, *Sous-espaces privilégiés d'un polycylindre* (*Ann. Inst. Fourier*, Bd 25, 1975, S. 151-193).

[Ra] J. P. RAMIS, *Théorèmes de séparation et de finitude pour l'homologie et la cohomologie des espaces (p, q)-convexes-concaves* (*Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, Bd 27, 1973, S. 933-997).

[S-V] H. W. SCHUSTER und A. VOGT, *The moduli of quotients of a compact complex space* (*J. reine u. ang. Math.*, Bd 364, 1986, S. 51-59).

(Manuscrit reçu le 4 juin 1985,
révisé le 5 septembre 1985,
accepté le 30 mars 1987).

Siegmund KOSAREW,
Universität Regensburg, Mathematik,
8400 Regensburg,
31, Universitätsstrasse
Postfach 397, R.F.A

Gegenwärtige Adresse:
Max-Planck-Institut für Mathematik
Gottfried-Glaren-Strasse 26
5300 Bonn 3, R.F.A..