ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

FRANÇOIS ROUVIÈRE

Espaces symétriques et méthode de Kashiwara-Vergne

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 19, nº 4 (1986), p. 553-581

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1986_4_19_4_553_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4ᵉ série, t. 19, 1986, p. 553 à 581.

ESPACES SYMÉTRIQUES ET MÉTHODE DE KASHIWARA-VERGNE

PAR FRANÇOIS ROUVIÈRE

RÉSUMÉ. — On étudie une classe d'espaces symétriques G/H, pour lesquels la convolution des distributions invariantes se ramène, par l'exponentielle, à celle de l'espace tangent à l'origine. On montre, en manipulant la formule de Campbell-Hausdorff, que c'est le cas notamment si G est résoluble. Sur de tels espaces, les opérateurs différentiels invariants admettent une solution élémentaire invariante, et l'analyse harmonique se ramène à la transformation de Fourier usuelle sur l'espace tangent.

ABSTRACT. — We study a class of symmetric spaces G/H, for which convolution of invariant distributions transforms, by the exponential mapping, into convolution on the tangent space at the origin. This holds in particular for solvable G, as manipulation of the Campbell-Hausdorff formula shows. On such spaces, invariant differential operators have an invariant fundamental solution, and spherical harmonic analysis reduces to usual Fourier transform on the tangent space.

Mots clés : espaces symétriques, distributions invariantes, formule de Campbell-Hausdorff, opérateurs différentiels invariants.

AMS *Subject Classification :* 43 A 85, 58 G 35, 53 C 35.

Plan de l'Article

Introduction

1. Le but de cet article est de prolonger dans plusieurs directions les résultats de Kashiwara et Vergne [9], qu'il sera utile de rappeler succinctement. Ces auteurs considèrent la propriété (KV) suivante d'une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$:

(KV) Il existe des applications F^0 et G^0 de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ au voisinage de l'origine, telles que $Z=\log(e^Y e^X)$ s'écrive sous la forme

$$Z = X + Y - (1-e^{-\operatorname{ad} X})\,F^0(X, Y) - (e^{\operatorname{ad} Y}-1)\,G^0(X, Y), \tag{1}$$

avec la relation

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(\operatorname{ad} X . D_X F^0 + \operatorname{ad} Y . D_Y G^0) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\operatorname{ad} X}{e^{\operatorname{ad} X}-1} + \frac{\operatorname{ad} Y}{e^{\operatorname{ad} Y}-1} - \frac{\operatorname{ad} Z}{e^{\operatorname{ad} Z}-1} - 1\right). \tag{2}$$

F^0 et G^0 désignent des séries de crochets successifs de X et $Y\in\mathfrak{g}$, convergentes au voisinage de l'origine, et $\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}$ la trace d'un endomorphisme de $\mathfrak{g}$. L'écriture (1) revient essentiellement à grouper, dans les termes de la formule de Campbell-Hausdorff, ceux qui sont de la forme [X, . . .], resp. [Y, . . .]; un tel regroupement n'est pas unique.

Ils démontrent que cette propriété entraîne le résultat suivant. Soient G un groupe de Lie d'algèbre $\mathfrak{g}$, u et v deux fonctions (ou distributions) G-invariantes sur $\mathfrak{g}$, à supports convenables. Alors

$$(u \underset{\mathfrak{g}}{*} v)^{\sim} = \tilde{u} \underset{G}{*} \tilde{v}, \tag{3}$$

en notant $\tilde{u}(e^X)=j(X)^{-1/2}u(X)$, $X\in\mathfrak{g}$, j le jacobien de l'application exponentielle, et $*$ la convolution. Cette relation signifie donc qu'il y a isomorphisme entre les algèbres de convolution des distributions invariantes (locales), sur G et $\mathfrak{g}$, respectivement.

Pour déduire (3) de (1) et (2), Kashiwara et Vergne déforment $\mathfrak{g}$ en une algèbre de Lie abélienne, en munissant l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ de la structure d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_t$ dont le crochet est $[X, Y]_t=t[X, Y]$. On peut transformer (3) en une égalité dont les deux membres admettent des interprétations analogues, celui de gauche relatif à la structure $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}$, et celui de droite à la structure abélienne $\mathfrak{g}_0$. La condition de traces (2) permet de montrer qu'une certaine dérivée par rapport à t est identiquement nulle, et entraîne l'égalité (3).

Enfin la propriété (KV) est établie dans [9] pour $\mathfrak{g}$ résoluble, et conjecturée dans le cas général; elle est démontrée dans [13] pour l'algèbre $sl(2)$.

2. On cherche ici à étendre cette méthode à un espace symétrique $S=G/H$. Soient $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{s}$ la décomposition de l'algèbre de Lie de G associée à la symétrie, et J la racine carrée du jacobien de l'exponentielle $\operatorname{Exp} : \mathfrak{s}\to S$. On peut donner un sens à la convolution de deux distributions H-invariantes sur S (*voir* § 1 ci-dessous), et démontrer que la propriété

$$(u \underset{\mathfrak{s}}{*} v)^{\sim} = \tilde{u} \underset{S}{*} \tilde{v}, \tag{$\bigstar$}$$

où u et v sont deux distributions H-invariantes sur $\mathfrak{s}$, avec $\tilde{u}(\operatorname{Exp} X) = J(X)^{-1} u(X)$, et $X \in \mathfrak{s}$, est conséquence d'une propriété (P) qui généralise (KV); *voir* 3.6, théorème. La condition de traces analogue à (2) est maintenant relative à $\mathfrak{s}$, au lieu de $\mathfrak{g}$. Ce résultat redonne bien entendu celui de [9] si on considère un groupe de Lie G comme l'espace symétrique $G \times G/\text{diagonale}$.

Pour le démontrer, on est amené à étudier la formule de Campbell-Hausdorff pour un espace symétrique (§ 2); au passage on propose une définition explicite des applications F^0 et G^0 de (1) (2.5 et appendice). Afin d'obtenir des corollaires de (∗) aussi globaux que possible, on s'est efforcé de préciser les domaines de validité des formules, d'où résulte une certaine lourdeur de notations... Les calculs se déroulent sans surprise par rapport à ceux de [9], en séparant les composantes sur $\mathfrak{h}$ et sur $\mathfrak{s}$. La nouveauté est ici que la propriété (P) est loin d'être toujours vérifiée, comme on va voir.

Une interprétation « géométrique » de la condition (P) est donnée au paragraphe 4, indépendant du reste de l'article. On peut construire, par déformation de l'identité, un difféomorphisme local $\Phi : (X, Y) \mapsto (X', Y')$ de $\mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$, donné par action adjointe de $H \times H$, et tel que $e^{X'} e^{Y'} H = e^{X+Y} H$ (égalité de classes à gauche), autrement dit $e^{X'} . \operatorname{Exp} Y' = \operatorname{Exp}(X+Y)$. De plus la condition de traces qui figure dans (P) équivaut à dire (si S admet une mesure invariante) que le jacobien de Φ égale $J(X+Y)/J(X)\,J(Y)$.

3. Pour démontrer la propriété (P) pour certains espaces symétriques G/H, le plus simple est de la comparer à la propriété (KV) pour le groupe G, supposée établie. On montre ainsi (*voir* 5.1, Théorème) que (P), et donc la relation (∗), est vraie dans chacun des deux cas suivants :

(i) $S = G/H$ avec G résoluble.

(ii) $S = G/H$ où G vérifie (KV), et (G, H) est une paire « très symétrique » — notamment si H est une forme réelle du groupe complexe G.

Mais pour un espace riemannien symétrique de type non compact G/K, avec G semi-simple et K compact maximal, la propriété (∗) a lieu si et seulement si G admet une structure complexe (7.4, Proposition).

4. Dans les paragraphes 6 à 8, on abandonne la formule de Campbell-Hausdorff pour discuter seulement les conséquences de l'égalité (∗).

La principale concerne le cas où l'une au moins des distributions u, v a pour support l'origine. L'application $\tilde{}$ donne ainsi un isomorphisme entre l'algèbre $D(\mathfrak{s})$ des opérateurs différentiels à coefficients constants H-invariants sur $\mathfrak{s}$ et l'algèbre $D(S)$ des opérateurs différentiels G-invariants sur S (6.2, Proposition).

C'est la généralisation à certains espaces symétriques de l'isomorphisme de Duflo [3] pour les opérateurs bi-invariants sur un groupe de Lie. Pour un espace symétrique G/H avec G nilpotent, ce résultat a été démontré par Benoist ([1], [2]). On retrouve aussi bien sûr la commutativité de l'algèbre $D(S)$, établie sous des hypothèses beaucoup plus générales par Lichnérowicz, puis Duflo [4].

L'application $\tilde{}$ transforme une équation aux dérivées partielles G-invariante sur S en une équation à coefficients constants sur $\mathfrak{s}$, et cela permet de construire des solutions élémentaires. Tout opérateur de $D(S)$ admet ainsi, si G est résoluble notamment, une solution élémentaire H-invariante, solution globale pour G exponentiel (6.3, Proposition). Ce résultat est à rapprocher de ceux de Benoist [2] (obtenus par la formule de Plancherel de G/H pour G nilpotent), de Duflo [3] (pour les bi-invariants sur un groupe de Lie), et de Lion [10] (obtenu semi-globalement, par des inégalités *a priori*, pour tous les opérateurs semi-invariants).

Enfin $\sim$ permet de relier les distributions propres communes de $D(S)$ (distributions « sphériques ») à celles de $D(\mathfrak{s})$ (distributions « de Bessel »), et entrelace la transformation sphérique de l'espace symétrique donné avec celle d'un espace symétrique plat, son espace tangent à l'origine (7.1). On peut préciser cela dans le cas riemannien symétrique : un tel espace possède la propriété $(*)$ si et seulement si sa transformation sphérique se réduit à la transformation de Fourier usuelle sur l'espace tangent (7.2, Proposition). On donne aussi, dans ce contexte, une motivation de la présence de la fonction J dans l'application $\sim$ (7.3).

5. La situation est moins simple pour les espaces symétriques qui ne vérifient pas $(*)$, mais on peut penser qu'il existe toujours un certain opérateur intégral de Fourier $u \mapsto \tilde{u}$ qui permet d'obtenir les mêmes résultats qu'en 4. ci-dessus. La transformation d'Abel d'un espace riemannien symétrique de type non compact conduit à un tel opérateur; cet exemple est brièvement discuté au paragraphe 8.

NOTATIONS. — Dans tout l'article, G désigne un groupe de Lie réel connexe, H un sous-groupe fermé, $S=G/H$ l'espace homogène des classes à gauche $xH=px$, où $p : G \to S$ est la projection canonique. On note $g\cdot$, ou parfois $\tau(g)$, l'action de G sur S :

$$g\cdot px=\tau(g)px=p(gx)=gxH, \qquad g,\ x\in G.$$

Soient e l'élément neutre de G, et $a=pe=H$ l'origine de S.

L'espace $\mathscr{D}(S)$ des fonctions C^∞ à support compact sur S est muni de la topologie de Schwartz. Son dual $\mathscr{D}'(S)$ est l'espace des distributions densités d'ordre un; $\mathscr{E}'(S)$ est le sous-espace de celles dont le support est compact. L'indice H désigne le sous-espace des éléments H-invariants. Ainsi $f\in\mathscr{D}_H(S)$ si $f(h.s)=f(s)$ pour tous $h\in H$, $s\in S$, et $u\in\mathscr{D}'_H(S)$ si $\langle u, f\rangle=\langle u, f\circ\tau(h)\rangle$ pour tous $h\in H$, $f\in\mathscr{D}(S)$. La mesure de Dirac à l'origine est notée δ.

Soient Ad, resp. ad, la représentation adjointe de G, resp. de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. On écrira souvent $g.X$ pour $\mathrm{Ad}\, g(X)$, avec $g\in G$, $X\in\mathfrak{g}$.

Si A est un endomorphisme d'un espace vectoriel E, et F un sous-espace stable, $\mathrm{tr}_F\, A$ et $\mathrm{dét}_F\, A$ désignent la trace et le déterminant de A restreint à F.

Enfin si f est une application différentiable entre variétés, on note $D_{x_0} f$, ou parfois $D_{x=x_0} f$, sa différentielle en x_0, comme application linéaire entre les espaces tangents.

1. Convolution sur un espace homogène

1.1. Soit $S=G/H$ un espace homogène. On définit la convolution $*$, ou $\underset{S}{*}$ pour préciser, de $u\in\mathscr{D}'(\mathrm{S})$ par $v\in\mathscr{D}'_{\mathrm{H}}(\mathrm{S})$ selon

$$\langle u * v, f\rangle = \langle u(px)\otimes v(py), f(p(xy))\rangle = \langle u(px), \langle v, f\circ\tau(x)\rangle\rangle,$$

pour $f\in\mathscr{D}(\mathrm{S})$. La H-invariance de v assure que cette définition a bien un sens, indépendamment du représentant x choisi dans la classe px, dès que, par exemple, v est à support compact. La distribution $u * v$ est H-invariante si u et v le sont.

1.2. *Exemple.* — Soient G_1 un groupe de Lie, et prenons $\mathrm{G}=\mathrm{G}_1\times\mathrm{G}_1$ et $\mathrm{H}=\{(x, x), x\in\mathrm{G}_1\}$ le sous-groupe diagonal. L'application $(x', x'')\mapsto x'x''^{-1}$ de G dans G_1 permet d'identifier l'espace homogène S au groupe G_1, $\mathscr{D}'_{\mathrm{H}}(\mathrm{S})$ aux distributions centrales sur G_1, et la convolution ci-dessus à la convolution usuelle des distributions sur G_1. Notons que $u * v$ peut ici être définie même si v n'est pas H-invariante, grâce à la structure de groupe de S.

1.3. *Exemple.* — Si H est compact, la projection p est une application propre, et la convolution sur S peut se déduire de celle de G :

$$\langle u \underset{\mathrm{S}}{*} v, f\rangle = \langle p^* u \underset{\mathrm{G}}{*} p^* v, p^* f\rangle,$$

avec $u\in\mathscr{D}'(\mathrm{S})$, $v\in\mathscr{D}'_{\mathrm{H}}(\mathrm{S})$, $f\in\mathscr{D}(\mathrm{S})$,

$$p^* f = f\circ p \qquad \text{et} \qquad \langle p^* u, \varphi\rangle = \langle u(px), \int_{\mathrm{H}}\varphi(xh)\,dh\rangle$$

où $\varphi\in\mathscr{D}(\mathrm{G})$ et dh désigne la mesure de Haar normalisée de H. Ici encore $u * v$ a un sens même si v n'est pas H-invariante.

1.4. *Exemple* (le plus important dans la suite). — Ici $\mathrm{S}=\mathrm{G}/\mathrm{H}$ est un espace homogène quelconque, et $\mathrm{D}(\mathrm{S})$ l'algèbre des opérateurs différentiels G-invariants sur S. Un élément P de $\mathrm{D}(\mathrm{S})$ agit sur $\mathscr{D}(\mathrm{S})$, ou $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{S})$, et par transposition sur les distributions :

$$\langle {}^t\mathrm{P}u, f\rangle = \langle u, \mathrm{P}f\rangle$$

pour $u\in\mathscr{D}'(\mathrm{S})$, $f\in\mathscr{D}(\mathrm{S})$. Les ${}^t\mathrm{P}$ forment ainsi une algèbre ${}^t\mathrm{D}(\mathrm{S})$ pour la composition des opérateurs, anti-isomorphe à $\mathrm{D}(\mathrm{S})$ par la transposition; de plus ${}^t\mathrm{P}\mathscr{D}'_{\mathrm{H}}(\mathrm{S})\subset\mathscr{D}'_{\mathrm{H}}(\mathrm{S})$.

Si en outre S possède une mesure positive G-invariante ds, on peut identifier $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{S})$ à un sous-espace de $\mathscr{D}'(\mathrm{S})$ en associant à $\mathrm{U}\in\mathrm{C}^\infty(\mathrm{S})$ la distribution $u : f\mapsto\int_{\mathrm{S}}\mathrm{U}(s)f(s)\,ds;$ dans ce cas, la restriction ${}^t\mathrm{P}$ à $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{S})$ est l'adjoint formel de P par rapport à ds, et c'est encore un élément de $\mathrm{D}(\mathrm{S})$.

Abandonnons cette dernière hypothèse, et soit δ la mesure de Dirac à l'origine $a=\mathrm{H}$ de S. Alors

$$\langle {}^t\mathrm{P}\delta, f\rangle = \mathrm{P}f(a)$$

et, pour $u\in\mathscr{D}'(\mathrm{S})$, $\mathrm{P}\in\mathrm{D}(\mathrm{S})$, on a

$$u \underset{\mathrm{S}}{*} {}^t\mathrm{P}\delta = {}^t\mathrm{P}u.$$

Inversement, pour chaque distribution $T \in \mathscr{D}'_H(S)$ de support a, l'application $u \mapsto u * T$ est un opérateur de ${}^t D(S)$. En effet la relation

$$P f(px) = \langle T, f \circ \tau(x) \rangle$$

définit une application linéaire $P : \mathscr{D}(S) \to C^\infty(S)$ qui diminue le support, donc un opérateur différentiel, visiblement G-invariant; de plus $\langle u * T, f \rangle = \langle u, P f \rangle$.

2. Formule de Campbell-Hausdorff d'un espace symétrique

2.1. Désormais (G, H) sera une *paire symétrique*, i. e. G est un groupe de Lie réel connexe, σ un automorphisme involutif de G, et H un sous-groupe tel que $(G_\sigma)_0 \subset H \subset G_\sigma$, où G_σ est le sous-groupe des points fixes de σ, et $(G_\sigma)_0$ sa composante neutre; un tel H est fermé. Notons encore σ l'automorphisme involutif correspondant de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Dans la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{s}$ en $(+1)$ et (-1)-espaces propres de σ, $\mathfrak{h}$ s'identifie à l'algèbre de Lie de H et $\mathfrak{s}$, par l'application $D_e p$, à l'espace tangent à l'origine a de S; de plus $[\mathfrak{h}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$, $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{h}$, et $H . \mathfrak{s} \subset \mathfrak{s}$.

Soit $\mathrm{Exp} : \mathfrak{s} \to S$ l'application exponentielle de l'espace symétrique, définie par sa connexion canonique (*cf.* Loos [11]). Pour $X \in \mathfrak{s}$, on a $\mathrm{Exp}\, X = p(e^X)$, où $X \mapsto e^X = \exp X$ est l'application exponentielle de G.

De l'expression classique de la différentielle de exp :

$$D_X \exp = D_e L_{\exp X} \circ \frac{1 - e^{-\operatorname{ad} X}}{\operatorname{ad} X}, \tag{4}$$

où L est la translation à gauche, on déduit celle de Exp au point X de $\mathfrak{s}$:

$$D_X \,\mathrm{Exp} = D_a \tau(e^X) \circ \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{ad} X)}{\operatorname{ad} X}, \tag{5}$$

comme application linéaire de $\mathfrak{s}$ dans l'espace tangent en Exp X à S; (5) résulte aisément de (4) en notant que $p \circ L_{\exp X} = \tau(e^X) \circ p$.

2.2. Soit $\mathfrak{g}'$ un ouvert de $\mathfrak{g}$ invariant par Ad G, σ, et les homothéties de rapport $t \in [-1, 1]$, tel que exp soit un difféomorphisme de $\mathfrak{g}'$ sur l'ouvert $G' = \exp \mathfrak{g}'$ de G. Si G est simplement connexe, on peut prendre pour $\mathfrak{g}'$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}$ tels que $|\operatorname{Im} \lambda| < \pi$ pour toute valeur propre λ de ad X; si G est résoluble exponentiel, on peut prendre $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$, $G' = G$.

Alors $\mathfrak{s}' = 1/2\, \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{s}$ est un ouvert H-invariant de $\mathfrak{s}$, stable par les homothéties ci-dessus. Soit $S' = \mathrm{Exp}\, \mathfrak{s}'$.

LEMME. — *S' est un ouvert de S et $\mathrm{Exp} : \mathfrak{s}' \to S'$ est un difféomorphisme.*

Pour tout $x \in G$, $px \in S'$ entraîne $x \sigma x^{-1} \in G'$; la réciproque est vraie si et seulement si $H = G_\sigma$.

Si $px \in S'$, *alors*

(6)
$$\operatorname{Log}(px) = \frac{1}{2}\log(x\sigma x^{-1}),$$

Log *et* log *désignant les inverses respectifs de* Exp *et* exp *sur* S′ *et* G′.

Démonstration. — La propriété $px \in S'$ équivaut à $px = \operatorname{Exp} X = p(e^X)$, c'est-à-dire $e^{-X}x \in H$, avec $X \in \mathfrak{s}'$. Par suite $e^{-X}x = \sigma(e^{-X}x) = e^X \sigma x$, d'où $x\sigma x^{-1} = e^{2X}$, avec $2X \in \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{s}$, ce qui entraîne $x\sigma x^{-1} \in G'$ et $2X = \log(x\sigma x^{-1})$. Cela établit l'injectivité de Exp sur $\mathfrak{s}'$, et l'égalité (6).

D'autre part $D_{2X}\exp$ est inversible pour $2X \in \mathfrak{g}'$, donc

$$\operatorname{sh}(\operatorname{ad} X)/\operatorname{ad} X = e^{\operatorname{ad} X}(1 - e^{-2\operatorname{ad} X})/2\operatorname{ad} X$$

est, pour $X \in \mathfrak{s}'$, un endomorphisme inversible de $\mathfrak{g}$, *a fortiori* de $\mathfrak{s}$. Par suite Exp est régulière sur $\mathfrak{s}'$.

Si $H = G_\sigma$, la propriété $x\sigma x^{-1} \in G'$ entraîne $x\sigma x^{-1} = e^{2X}$, avec $2X \in \mathfrak{g}'$, unique. On a immédiatement $\sigma X = -X$, d'où $X \in \mathfrak{s}'$, et $e^{-X}x \in G_\sigma = H$, d'où $px = p(e^X) \in S'$.

Enfin si $x\sigma x^{-1} \in G'$ entraîne $px \in S'$, prenons $x \in G_\sigma$; d'après ce qui précède on aura $2\operatorname{Log}(px) = \log(x\sigma x^{-1}) = 0$, d'où $px = \operatorname{Exp} 0$, et $G_\sigma = H$. Le lemme est démontré. ■

Remarques. — D'après le lemme, on ne peut avoir $S' = S$ que si $H = G_\sigma$.

Si G est résoluble exponentiel et $H = G_\sigma$, ou si G/H est un espace riemannien symétrique de type non compact, Exp est un difféomorphisme global. Dans le premier cas le lemme, avec $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$, $G' = G$, $\mathfrak{s}' = \mathfrak{s}$, donne en effet $px \in S'$ pour tout $x \in G$, d'où $S' = S$. Pour le deuxième, *voir* Helgason [7], p. 253.

Le reste de ce paragraphe a pour but de mettre la formule de Campbell-Hausdorff de $\mathfrak{g}$, resp. $\mathfrak{s}$, sous forme (1), resp. analogue à (1), en précisant les domaines de validité.

2.3. Dégageons d'abord quelques propriétés communes aux applications F, G, Z... utilisées plus bas.

Soit ω un voisinage ouvert connexe de (0, 0) dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, supposé stable par $A \times A$: $(X, Y) \mapsto (AX, AY)$, pour $A \in \operatorname{Ad}(G)$ ou $A = \sigma$. Soit $\mathscr{E}(\omega)$ l'algèbre des applications analytiques $\varphi : \omega \to \operatorname{End}\mathfrak{g}$ telles qu'il existe $R > 0$ et un voisinage de l'origine dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ où φ admette un développement en série convergente de monômes (non commutatifs) en $x = \operatorname{ad} X$ et $y = \operatorname{ad} Y$:

$$\varphi(X, Y) = \sum_{n \geq 0,\ \alpha_i + \beta_i \geq 1} a_{\alpha\beta}\, x^{\alpha_1} y^{\beta_1} \ldots x^{\alpha_n} y^{\beta_n},$$

où les $a_{\alpha\beta}$ sont des coefficients complexes, avec $\sum |a_{\alpha\beta}| R^{|\alpha+\beta|} < \infty$. Soit enfin $\mathscr{F}(\omega)$ l'espace des applications analytiques $F : \omega \to \mathfrak{g}$ qui sont de la forme

$$F(X, Y) = \varphi(X, Y)X + \psi(X, Y)Y \qquad \text{avec} \quad \varphi, \psi \in \mathscr{E}(\omega).$$

Lemme. — *Soit* $F \in \mathscr{F}(\omega)$. *Alors*

(i) $F(AX, AY) = AF(X, Y)$ *pour* $(X, Y) \in \omega$, $A \in \operatorname{Ad}(G)$ *ou* $A = \sigma$.

(ii) $F(\omega \cap \mathfrak{h} \times \mathfrak{h})$ *est contenu dans* $\mathfrak{h}$; $F(\omega \cap \mathfrak{s} \times \mathfrak{s})$ *est contenu dans* $\mathfrak{h}$ *si* F *est paire, dans* $\mathfrak{s}$ *si* F *est impaire.*

(iii) $D_X F \circ \operatorname{ad} X + D_Y F \circ \operatorname{ad} Y = \operatorname{ad} F$.

(iv) $D_X F$ *et* $D_Y F$ *admettent, au voisinage de l'origine, des développements absolument convergents de la forme* $\sum u_{\alpha\beta}$, *où chaque* $u_{\alpha\beta}$ *est un polynôme (non commutatif) homogène en* x *et* y.

Démonstration. — (i) Soit V un voisinage de l'origine où est valable le développement en série de F. On a manifestement $F(AX, AY) = AF(X, Y)$ lorsque $(X, Y) \in V \cap (A \times A)^{-1} V$. Par prolongement analytique, c'est encore vrai sur ω, d'où (i), et (ii) en prenant $A = \sigma$.

(iii) se déduit de (i) : pour $Z \in \mathfrak{g}$ on a

$$(D_X F \circ \operatorname{ad} X + D_Y F \circ \operatorname{ad} Y)(Z) = D_{t=0} F(e^{-t \operatorname{ad} Z} X, e^{-t \operatorname{ad} Z} Y)$$
$$= D_{t=0} e^{-t \operatorname{ad} Z} F(X, Y) = \operatorname{ad} F(Z).$$

(iv) se démontre à partir de l'identité

$$D_X(x^m y^n Z(X, Y)) = x^m y^n D_X Z - \sum_{0 \leqq p < m} x^{m-p-1} \operatorname{ad}(x^p y^n Z),$$

où $Z(X, Y)$ est à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Il en résulte d'abord que le terme d'indice $\alpha\beta$ dans $F(X, Y) = \varphi(X, Y) X$ donne naissance dans $D_X F$ à $1 + |\alpha|$ termes, chacun de degré total $|\alpha + \beta|$, et de coefficient $\pm a_{\alpha\beta}$. Si on prend sur $\mathfrak{g}$ une norme telle que $\|[X, Y]\| \leqq \|X\| . \|Y\|$, alors $\|\operatorname{ad} X\| \leqq \|X\|$, et la norme de chacun de ces termes est majorée par $|a_{\alpha\beta}| r^{|\alpha+\beta|}$ si $\|X\|$, $\|Y\| \leqq r < R$.

Comme $\sum |a_{\alpha\beta}| (1 + |\alpha|) r^{|\alpha+\beta|} < \infty$, ceci justifie la dérivation terme à terme de la série donnant F, au voisinage de l'origine. L'identité

$$\operatorname{ad}(x^m y^n Z) = \sum_{p,\, q} (-1)^{p+q} C_m^p C_n^q x^{m-p} y^{n-q} \operatorname{ad} Z . y^q x^p$$

permet enfin de mettre chaque

$$u_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} D_X(x^{\alpha_1} \dots y^{\beta_n} X)$$

sous la forme annoncée. Le cas où $F = \psi(X, Y) Y$ est analogue, d'où le lemme. ■

2.4. Soit Ω^0 l'ensemble des $(X, Y) \in \mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}'$ tels que $e^{tX} e^{tY} \in G'$ pour tout $t \in [0, 1]$, et notons $Z^0(X, Y) = \log(e^X e^Y) \in \mathfrak{g}'$, pour $(X, Y) \in \Omega^0$. Alors Ω^0 est un ouvert connexe de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, par un argument de compacité, stable par passage de (X, Y) à (tX, tY), resp. (Y, X), resp. (AX, AY), avec $-1 \leqq t \leqq 1$, $A \in \operatorname{Ad}(G)$ ou $A = \sigma$.

Si on pose $Z(t) = Z^0(tX, tY)$ on a $e^{Z(t)} = e^{tX} e^{tY}$ d'où aisément d'après (4) :

$$\frac{e^{\operatorname{ad} Z(t)} - 1}{\operatorname{ad} Z(t)} D_t Z(t) = e^{tx}(X + Y),$$

pour $(X, Y) \in \Omega^0$, en notant $x = \operatorname{ad} X$, $y = \operatorname{ad} Y$. Comme $D_{Z(t)} \exp$ est inversible par définition de Ω^0, on en tire $D_t Z$ d'où, en intégrant, la formule classique

$$Z^0(X, Y) = \log(e^X e^Y) = \int_0^1 \varphi(z(t)) e^{tx} \, dt \, (X + Y), \tag{7}$$

valable pour $(X, Y) \in \Omega^0$, avec $z(t) = \operatorname{ad} Z(t)$, $\varphi(z) = z(e^z - 1)^{-1}$. Comme $e^{z(t)} = e^{tx} e^{ty}$, on peut remplacer $z(t)$ par $\log(e^{tx} e^{ty})$, au voisinage de l'origine.

Avec les notations 2.3, on a $Z^0 \in \mathscr{F}(\Omega^0)$: l'analyticité globale est claire, et le développement au voisinage de 0 est classique.

2.5. La méthode de Kashiwara et Vergne repose sur une écriture particulière de la formule de Campbell-Hausdorff de $\mathfrak{g}$, dont le principe est de séparer les termes de la forme $[X, \ldots]$, resp. $[Y, \ldots]$. En échangeant X et Y dans (7) on obtient d'abord

$$Z^0(Y, X) = \int_0^1 e^{ty} \varphi(z(t))\, dt\, (X+Y).$$

Posons

$$\chi(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}\left(\frac{z}{e^z - 1}\right)^2, \qquad \psi(z) = e^z \chi(z) - \frac{1}{2};$$

comme $e^{ty}(e^{z(t)} - 1) = (1 - e^{-tx}) e^{z(t)} + (e^{ty} - 1) e^{z(t)}$, on obtient sans difficulté, pour $(X, Y) \in \Omega^0$

$$Z^0(Y, X) = X + Y - \int_0^1 \left[(1 - e^{-tx})\left(\psi(z(t)) + \frac{1}{2}\right) + (e^{ty} - 1)\left(\psi(z(t)) - \frac{1}{2}\right)\right] dt\, (X+Y).$$

On en déduit une première forme de l'expression souhaitée

$$(1) \qquad Z^0(Y, X) = \log(e^Y e^X) = X + Y - (1 - e^{-x}) F^1(X, Y) - (e^y - 1) G^1(X, Y),$$

en notant

$$(8) \qquad \begin{cases} F^1(X, Y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - e^{-tx}}{1 - e^{-x}}\left(\psi(z(t)) + \frac{1}{2}\right) dt\, (X+Y) \\ G^1(X, Y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{ty} - 1}{e^y - 1}\left(\psi(z(t)) - \frac{1}{2}\right) dt\, (X+Y), \end{cases}$$

où $(X, Y) \in \Omega^0$, $x = \operatorname{ad} X$, $y = \operatorname{ad} Y$, $z(t) = \operatorname{ad}(\log e^{tX} e^{tY})$.

Les applications F^1, G^1 *sont dans* $\mathscr{F}(\Omega^0)$.

L'intégrand de F^1 s'écrit en effet

$$t \frac{x}{1 - e^{-x}} \cdot \frac{1 - e^{-tx}}{tx} \cdot e^{z(t)} \chi(z(t)),$$

et la définition de χ montre qu'il est analytique en (t, X, Y) sur l'ouvert défini par $t \in \mathbf{R}$, $X, Y \in \mathfrak{g}'$, $e^{tX} e^{tY} \in G'$; cet ouvert contient $[0, 1] \times \Omega^0$, d'où l'analyticité. D'autre part $1 - e^{-tx}/1 - e^{-x}(\psi(z) + 1/2)$, est développable en série entière des variables complexes t, x, z absolument convergente pour $|x| < 2\pi$, $|z| < 2\pi$, et tout t.

Revenons à $x = \operatorname{ad} X$, $z = z(t)$, et prenons sur $\mathfrak{g}$ une norme choisie comme en 2.3 (Démonstration); alors

$$z(t) = \log(e^{tx} e^{ty}) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} (e^{tx} e^{ty} - 1)^n$$

se développe en série de t, x, y avec la série majorante

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} (e^{\| tx \| + \| ty \|} - 1)^n.$$

Cela montre que F^1 admet, au voisinage de l'origine, un développement de la forme souhaitée, absolument convergent pour $\| X \| + \| Y \| < \log(2 - e^{-2\pi})$.

Le cas de G^1 se ramène au précédent, en observant que ψ est impaire, d'où

$$G^1(X, Y) = F^1(-Y, -X).$$

Explicitement, (8) conduit à

$$F^1(X, Y) = \frac{1}{4} X + \frac{1}{4} Y + \frac{1}{24} x Y - \frac{1}{48} x^2 Y - \frac{1}{48} y x Y - \frac{1}{180} x^3 Y - \frac{1}{480} y x^2 Y + \frac{1}{360} y^2 x Y + \ldots,$$

les ... étant des termes de degré $\geqq 5$.

Afin de rapprocher ces calculs de ceux de [9] il sera toutefois nécessaire de remplacer F^1 et G^1 par

$$(8') \qquad \begin{cases} F^0(X, Y) = \frac{1}{2}(F^1(X, Y) + e^x F^1(-X, -Y)) + \frac{1}{4}(Z^0(X, Y) - X) \\ G^0(X, Y) = F^0(-Y, -X), \end{cases}$$

pour obtenir certaine symétrie supplémentaire entre F^0 et G^0 (*voir* Appendice). De ce qui précède résulte sans difficulté que F^0 *et* G^0 *sont dans* $\mathscr{F}(\Omega^0)$, et que

$$(1) \qquad Z^0(Y, X) = \log(e^Y e^X) = X + Y - (1 - e^{-x}) F^0(X, Y) - (e^y - 1) G^0(X, Y).$$

Explicitement

$$F^0(X, Y) = \frac{1}{4} Y + \frac{1}{24} x Y - \frac{1}{48} x^2 Y - \frac{1}{48} y x Y - \frac{1}{180} x^3 Y - \frac{1}{480} y x^2 Y + \frac{1}{360} y^2 x Y + \ldots,$$

les ... étant des termes de degré $\geqq 5$.

Remarques. — Les applications F^0 et G^0 ne sont donc pas uniquement déterminées par (1). Elles ne le sont pas davantage par le système (1), (2) : le calcul montre qu'on peut par exemple rajouter à F^0 un terme $a(X, Y)(Z^0(X, Y) - X)$, et à G^0 le terme

$a(X, Y)(Z^0(X, Y)-Y)$, où $a : \Omega^0 \to \mathbf{R}$ vérifie $a(g.X, g.Y)=a(X, Y)$, $g\in G$, sans modifier les égalités (1) et (2).

On montrera en Appendice que le choix (8′) s'accorde avec celui effectué, de manière non explicite, dans [9]; les calculs de [9] entraînent que nos F^0, G^0 satisfont, pour $\mathfrak{g}$ résoluble, à l'égalité (2).

Le choix particulier (8′) ne sera pas utilisé en dehors de cela.

2.6. Soit Ω l'ensemble des $(X, Y)\in\mathfrak{s}'\times\mathfrak{s}'$ tels que $p(e^{tX}e^{tY})\in S'$ pour tout $t\in[0, 1]$, et notons

$$Z(X, Y)=\operatorname{Log} p(e^X e^Y)\in\mathfrak{s}', \qquad \text{pour} \quad (X, Y)\in\Omega.$$

A nouveau Ω est un ouvert connexe de $\mathfrak{s}\times\mathfrak{s}$, stable par passage de (X, Y) à (tX, tY), resp. $(h.X, h.Y)$, resp. (Y, X), avec $-1\leqq t\leqq 1$, $h\in H$.

D'après 2.2, lemme, on a, pour le choix de $\mathfrak{s}'$ fait en 2.2, $\Omega\subset(\Omega^0/2)\cap(\mathfrak{s}\times\mathfrak{s})$, avec égalité si $H=G_\sigma$, et

$$\text{(9)} \qquad Z(X, Y)=\frac{1}{2}\log(e^X e^{2Y} e^X)=\frac{1}{2}e^{-x}Z^0(2X, 2Y)=\frac{1}{2}e^{x}Z^0(2Y, 2X)$$

pour $(X, Y)\in\Omega$. Cela permet de prolonger Z en une application impaire appartenant à $\mathscr{F}(\Omega^0/2)$, ce qui sera parfois commode. Les relations (9) conduisent à un développement de $Z(X, Y)$ qui constitue la *formule de Campbell-Hausdorff de* $\mathfrak{s}$. On peut aussi l'écrire sous forme intégrale analogue à (7), en dérivant l'égalité $\operatorname{Exp} Z(t)=p(e^{tX}e^{tY})$; ce ne sera pas utile ici.

2.7. De (1) on déduit facilement une expression analogue de la formule de Campbell-Hausdorff sur $\mathfrak{s}$.

Comme $2Z(Y, X)=e^{-y}Z^0(2Y, 2X)$ d'après (9), on a d'abord, pour $(X, Y)\in\Omega^0/2$,

$$Z(Y, X)=e^{-y}(X+Y)-\frac{1}{2}(e^y e^x-e^{-y}e^{-x})e^{-x}F^0(2X, 2Y)-\operatorname{sh} y(G^0-F^0)(2X, 2Y).$$

Si on définit $F, G\in\mathscr{F}(\Omega^0/2)$ par

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} 2F(X, Y)=e^{-x}F^0(2X, 2Y)+e^{x}F^0(-2X, -2Y) \\ 2(G-F)(X, Y)=(G^0-F^0)(2X, 2Y)+(G^0-F^0)(-2X, -2Y), \end{cases}$$

l'imparité de Z conduit à l'analogue suivant de (1) :

$$\text{(11)} \quad Z(Y, X)=\operatorname{ch} y(X+Y)-(\operatorname{ch} y\operatorname{sh} x+\operatorname{sh} y\operatorname{ch} x)F(X, Y)-\operatorname{sh} y(G-F)(X, Y),$$

valable pour $(X, Y)\in\Omega^0/2$, en particulier sur Ω.

Explicitement, on trouve (par identification)

$$F(X, Y)=-\frac{1}{3}xY+\frac{7}{90}x^3Y+\frac{2}{15}yx^2Y+\frac{2}{45}y^2xY+\ldots$$

$$G(X, Y) = -\frac{2}{3}x\,Y + \frac{11}{90}x^3\,Y + \frac{1}{5}yx^2\,Y + \frac{4}{45}y^2\,x\,Y + \ldots,$$

les ... étant des termes pairs de degré total $\geqq 6$.

2.8. Soient $\mathfrak{s}'$ un ouvert H-invariant de $\mathfrak{s}$, stable par homothéties de rapport $t \in [-1, 1]$, tel que Exp soit un difféomorphisme de $\mathfrak{s}'$ sur $S' = \operatorname{Exp} \mathfrak{s}'$, et Ω l'ouvert des $(X, Y) \in \mathfrak{s}' \times \mathfrak{s}'$ tels que $p(e^{tX} e^{tY}) \in S'$ pour tout $t \in [0, 1]$. On note $Z_t(X, Y) = t^{-1} Z(tX, tY)$ pour $0 < t \leqq 1$, $(X, Y) \in \Omega$, et $Z_0(X, Y) = X + Y$; d'après (9), $Z_t(X, Y)$ est analytique en (t, X, Y) sur un ouvert de $\mathbf{R} \times \mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$ contenant $[0, 1] \times \Omega$.

LEMME. — *Soient* F, G : $\Omega \to \mathfrak{h}$, *analytiques, nulles à l'origine, telles que* (11) *ait lieu sur* Ω. *Alors pour* $0 \leqq t \leqq 1$, *et* $(X, Y) \in \Omega$ *on a*

$$D_t Z_t(X, Y) = P_t Z_t(X, Y)$$

où P_t *est l'opérateur différentiel d'ordre un sur* Ω

$$P_t = [X, F_t(X, Y)] . D_X + [Y, G_t(X, Y)] . D_Y,$$

avec

$$F_t(X, Y) = t^{-1} F(tX, tY), \qquad G_t(X, Y) = t^{-1} G(tX, tY).$$

Le . correspond ici à la dualité entre $\mathfrak{s}$ et son dual :

$$[X, F_t] . D_X f = D_{\varepsilon=0} f(X + \varepsilon [X, F_t], Y) \quad \text{pour} \quad f \in C^\infty(\Omega).$$

Dans ce lemme, $\mathfrak{s}'$, Ω, F, G pourront par exemple être ceux construits plus haut.

Démonstration. — Bien que ce lemme puisse se déduire de [9], Lemma 3.2, en séparant parties paire et impaire, nous préférons en donner une démonstration directe à partir de (11).

(*a*) En remplaçant (X, Y) par (tX, tY) on se ramène à calculer pour $t = 1$.

(*b*) Pour éviter la prolifération des applications tangentes, il est commode de calculer « modulo ε^2 » en notant $f(\varepsilon) \sim g(\varepsilon)$ si deux applications f et g, d'un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ à valeurs dans une variété, ont un contact d'ordre un en $\varepsilon = 0$. Ainsi

$$e^{\varepsilon X} e^{\varepsilon Y} \sim e^{\varepsilon (X+Y)}, \qquad \operatorname{Exp}(Y + \varepsilon X) \sim e^Y . \operatorname{Exp}\left(\varepsilon \frac{\operatorname{sh} y}{y} X\right);$$

la deuxième relation, pour $X, Y \in \mathfrak{s}$, vient de l'expression (5) de D_Y Exp, et la première, pour $X, Y \in \mathfrak{g}$, de la formule de Campbell-Hausdorff.

(*c*) Montrons d'abord que :

$$D_t Z_t = [Z_t, F_t] + D_Y Z_t . [Y, G_t - F_t]; \tag{12}$$

on calcule pour $t = 1$, en omettant les indices t. Cette égalité équivaut à

$$Z_{1+\varepsilon} \sim e^{-\varepsilon \operatorname{ad} F} Z(X, Y + \varepsilon [Y, G - F]),$$

ou encore

$$(13) \qquad e^{-X}.\operatorname{Exp} Z_{1+\varepsilon} \sim e^{-X} e^{-\varepsilon F} e^{X}.\operatorname{Exp}(Y+\varepsilon[Y, G-F]).$$

Le deuxième membre de (13) s'écrit, modulo ε^2,

$$e^{-\varepsilon e^{-x} F} e^{Y}.\operatorname{Exp}(\varepsilon \operatorname{sh} y(G-F)).$$

Le premier membre de (13) équivaut à

$$e^{-X}.\operatorname{Exp}[(1-\varepsilon)\operatorname{Log}(e^{(1+\varepsilon)X}.\operatorname{Exp}(1+\varepsilon)Y)];$$

or $\operatorname{Exp}(1-\varepsilon)T = e^{-\varepsilon T}.\operatorname{Exp} T$, $T \in \mathfrak{s}$, d'où l'expression

$$e^{-X}.\operatorname{Exp} Z_{1+\varepsilon} \sim e^{-X} e^{-\varepsilon Z} e^{X} e^{\varepsilon X} e^{\varepsilon Y}.\operatorname{Exp} Y \sim e^{\varepsilon(X+Y-e^{-x}Z)}.\operatorname{Exp} Y.$$

La propriété souhaitée s'écrit donc

$$e^{Y}.\operatorname{Exp} \varepsilon A \sim e^{\varepsilon B}.\operatorname{Exp} Y$$

en notant $A = \operatorname{sh} y\,(G-F)$, $B = X+Y-e^{-x}Z+e^{-x}F$.

Or on vérifie, en utilisant σ et la relation $e^{-x}Z(X, Y) = e^{y} Z(Y, X)$, que la formule (11) équivaut à : $A - e^{-y}B \in \mathfrak{h}$. Par suite

$$e^{Y}.\operatorname{Exp} \varepsilon A \sim e^{Y}.\operatorname{Exp}(\varepsilon e^{-y} B) = e^{\varepsilon B}.\operatorname{Exp} Y,$$

ce qui établit l'égalité (13).

(*d*) Comme $Z(h.X, h.Y) = h.Z(X, Y)$ pour $X, Y \in \Omega$, $h \in H$, on voit en raisonnant comme en 2.3 Lemme (iii) que les restrictions à $\mathfrak{h}$ de $D_X Z \circ x + D_Y Z \circ y$ et ad Z coïncident. Ceci, joint à (12), achève la démonstration. ■

3. La propriété (*)

3.1. Soient (G, H) une paire symétrique, $\mathfrak{s}'$ un ouvert de $\mathfrak{s}$, H-invariant et stable par homothéties de rapport $t \in [-1, 1]$, tel que Exp induise un difféomorphisme de $\mathfrak{s}'$ sur un ouvert S′ de S (*cf.* par exemple 2.2).

Dans ce paragraphe Exp désignera seulement l'exponentielle comme application de $\mathfrak{s}'$ sur S′; on garde les autres notations du paragraphe 2.8. Soit

$$J(X) = \left(\operatorname{dét}_{\mathfrak{s}} \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{ad} X)}{\operatorname{ad} X}\right)^{1/2},$$

fonction analytique, strictement positive, et H-invariante sur $\mathfrak{s}'$.

Pour $u \in \mathscr{D}'(\mathfrak{s}')$ on définit $\tilde{u} \in \mathscr{D}'(S')$ par $\tilde{u} = \operatorname{Exp}_*(J u)$, c'est-à-dire

$$\langle \tilde{u}, f \rangle = \langle u(X), J(X) f(\operatorname{Exp} X) \rangle$$

pour $f \in \mathscr{D}(S')$; plus généralement cette définition est valable dès que $f \in C^\infty(S')$ et que $(f \circ \mathrm{Exp}).u$ est une distribution à support compact dans $\mathfrak{s}'$. L'application $\sim$ est bijective de $\mathscr{D}'(\mathfrak{s}')$ sur $\mathscr{D}'(S')$, et respecte la H-invariance.

3.2. Lorsque S possède une mesure G-invariante ds, on a $\mathrm{Exp}^* ds = J(X)^2 \, dX$ sur $\mathfrak{s}'$, où dX est une mesure de Lebesgue convenablement normalisée sur $\mathfrak{s}$, qui est ici H-invariante (*cf.* Helgason [8], p. 93). Si $u = \varphi(X)\, dX$ est la distribution définie par la fonction φ, localement intégrable sur $\mathfrak{s}'$, on a $\tilde{u} = (J^{-1}\varphi)(\mathrm{Log}\, s)\, ds$; de plus $\langle \tilde{u}, \tilde{v} \rangle = \langle u, v \rangle$ dès que, par exemple, $u \in \mathscr{D}'(\mathfrak{s}')$, $v \in C^\infty(\mathfrak{s}')$, identifiée à une distribution, et $\mathrm{supp}\, u \cap \mathrm{supp}\, v$ est un compact de $\mathfrak{s}'$.

3.3. On s'intéresse à la propriété suivante de l'espace symétrique S :

$$(\bigstar) \qquad (u \underset{\mathfrak{s}}{*} v)^\sim = \tilde{u} \underset{S}{*} \tilde{v} \quad \textit{sur } S',$$

pour toutes distributions H-*invariantes* u, $v \in \mathscr{D}'_H(\mathfrak{s})$, *à supports convenables.* La convolution au premier membre est celle de l'espace vectoriel $\mathfrak{s}$, et au second celle définie en 1.1. L'hypothèse sur les supports sert à donner un sens aux deux membres de (*) comme distributions sur S', et à assurer que $Z_t(X, Y)$ est bien défini, et le lemme 2.8 applicable, en tous les points (X, Y) utiles.

Explicitement, on suppose (*a*) ou (*b*) :

(*a*) $\mathrm{supp}\, u \subset \mathfrak{s}'$, $\mathrm{supp}\, v \subset \mathfrak{s}'$ et, pour tout compact C de $\mathfrak{s}'$ il existe un voisinage U de $\mathrm{supp}\, u$ dans $\mathfrak{s}'$ et un compact C' de Ω tels que

$$\left.\begin{array}{c} X \in U, \qquad Y \in \mathrm{supp}\, v \\ X + Y \in C \text{ ou } \exists\, t \in]0, 1], \quad p(e^{tX} e^{tY}) \in \mathrm{Exp}\, tC \end{array}\right\} \Rightarrow (X, Y) \in C'$$

(*b*) $\mathrm{supp}\, u$ quelconque et $\mathrm{supp}\, v = \{0\}$.

Soit en effet $f \in \mathscr{D}(S')$ et appliquons (*a*) avec $C = \mathrm{Log}\,(\mathrm{supp}\, f)$, $t = 1$. Alors pour chaque $X \in U$, la distribution

$$(f \circ \tau(e^X) \circ \mathrm{Exp})(Y)\, v(Y) = f(p(e^X e^Y))\, v(Y)$$

a son support contenu dans la section C'_X de C' à X fixé, qui est un compact de $\mathfrak{s}'$. On peut donc écrire

$$\langle \tilde{v}, f \circ \tau(e^X) \rangle = \langle v(Y), J(Y)\, f(p(e^X e^Y)) \rangle = g(\mathrm{Exp}\, X),$$

avec $g \in C^\infty(\mathrm{Exp}\, U)$. La distribution $(g \circ \mathrm{Exp}).u$ a son support contenu dans la première projection de C', compact de $\mathfrak{s}'$. Finalement

$$\langle \tilde{u}, g \rangle = \langle \tilde{u}(px), \langle \tilde{v}(py), f(p(xy)) \rangle\rangle = \langle u(X), J(X) \langle v(Y), J(Y)\, f(p(e^X e^Y)) \rangle\rangle;$$

comme on peut prolonger $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ par 0 en des distributions H-invariantes sur S entier, cela s'écrit aussi

$$\langle \tilde{u} * \tilde{v}, f \rangle = \langle u(X)\, v(Y), J(X)\, J(Y)\, f(\mathrm{Exp}\, Z(X, Y)) \rangle$$

(en omettant le signe $\otimes$). D'autre part (*a*) définit aussi $u * v$ comme distribution sur $\mathfrak{s}'$.

Lorsque supp $v = \{0\}$, la condition (*a*) se réduit à supp $u \subset \mathfrak{s}'$, mais cette hypothèse est même superflue (cas *b*) : on peut en effet reprendre ce qui précède en remplaçant U par $\mathfrak{s}'$, C′ par $C \times \{0\}$, d'où $\operatorname{supp}(g \circ \operatorname{Exp}) \subset C$; enfin $\tilde{v}$ est supportée à l'origine, donc la convolution par $\tilde{v}$ est un opérateur différentiel (*cf.* 1.4), et il n'y a pas à prolonger $\tilde{u}$ pour définir $\tilde{u} * \tilde{v}$ sur S′.

3.4. Nous cherchons maintenant une propriété algébrique qui entraîne ($*$). Pour $f \in \mathscr{D}(\mathfrak{s}')$ on a d'une part

$$\langle (u * v)^{\sim}, (J^{-1} f) \circ \operatorname{Log} \rangle = \langle u * v, f \rangle,$$

d'autre part

$$\langle \tilde{u} * \tilde{v}, (J^{-1} f) \circ \operatorname{Log} \rangle = \langle u(X)\, v(Y), J(X)\, J(Y)\, (J^{-1} f)(Z(X, Y)) \rangle$$

d'après les calculs de 3.3, avec $(J^{-1} f) \circ \operatorname{Log}$ au lieu de f.

Par suite ($*$) équivaut à

$$\langle u(X)\, v(Y), \frac{J(X)\, J(Y)}{J(Z(X, Y))} f(Z(X, Y)) \rangle = \langle u(X)\, v(Y), f(X+Y) \rangle \tag{14}$$

pour tout $f \in \mathscr{D}(\mathfrak{s}')$.

Soit $Z_t(X, Y) = t^{-1} Z(tX, tY)$ pour $0 < t \leqq 1$, et $Z_0(X, Y) = X + Y$; ce Z_t est l'application Z associée à la structure d'algèbre de Lie $[X, Y]_t = t[X, Y]$ sur $\mathfrak{g}$. Les deux membres de (14) étant les valeurs pour $t = 1$, resp. $t = 0$, de la fonction $\langle u(X)\, v(Y), J(tX)\, J(tY)\, J(tZ_t(X, Y))^{-1} f(Z_t(X, Y)) \rangle$, la propriété ($*$) est donc conséquence de l'égalité

$$\langle u(X)\, v(Y), D_t \left(\frac{J(tX)\, J(tY)}{J(tZ_t(X, Y))} f(Z_t(X, Y)) \right) \rangle = 0, \tag{15}$$

pour $f \in \mathscr{D}(\mathfrak{s}')$, $0 < t \leqq 1$.

Sous l'hypothèse de 2.8 Lemme, on $D_t(f \circ Z_t) = P_t(f \circ Z_t)$, ce qui permettra d'utiliser l'invariance de u et v en « intégrant par parties », grâce au :

LEMME. — *Soient* $u \in \mathscr{D}'_H(\mathfrak{s})$, $f \in \mathscr{D}(\mathfrak{s})$, *et* F *une application* C^∞ *au voisinage de* supp f *dans* $\mathfrak{s}$, *à valeurs dans* $\mathfrak{h}$. *Alors*

$$\langle u(X), [X, F(X)] . D_X f(X) + \operatorname{tr}_{\mathfrak{s}}(\operatorname{ad} X \circ D_X F(X))\, f(X) \rangle = 0.$$

Noter que $\operatorname{ad} X \circ D_X F$ est un endomorphisme de $\mathfrak{s}$, bien que $\operatorname{ad} X$ et $D_X F$ n'en soient pas.

Démonstration. — Supposons d'abord $F(X) = A$, constant. Alors, par H-invariance de u,

$$\begin{aligned} 0 = D_{t=0} \langle u(X), f(e^{t \operatorname{ad} A} X) \rangle &= \langle u, [A, X] . D_X f \rangle \\ &= \langle D_X . ([X, A]\, u), f \rangle = \langle [X, A] . D_X u - \operatorname{tr}_{\mathfrak{s}}(\operatorname{ad} A)\, u, f \rangle, \end{aligned}$$

d'où $[X, A].D_X u - \mathrm{tr}_s(\mathrm{ad}\, A)u = 0$ pour tout $A \in \mathfrak{h}$.

Dans le cas général, la décomposition $F(X) = \sum F_i(X) A_i$ selon une base $A_1, \ldots, A_n$ de $\mathfrak{h}$ donne par linéarité

$$(16) \qquad [X, F].D_X u - \mathrm{tr}_s(\mathrm{ad}\, F)u = 0.$$

Transposons à nouveau :

$$\langle u, D_X.([F, X]f) - \mathrm{tr}_s(\mathrm{ad}\, F)f \rangle = 0;$$

comme $D_X.[F, X] = \mathrm{tr}_s(\mathrm{ad}\, F - \mathrm{ad}\, X \circ D_X F)$, le lemme est démontré. ■

3.5. Pour obtenir (15) en $t = t_0$, on va décomposer le premier membre en deux termes. Dans l'expression

$$\langle u(X)v(Y), J(t_0 X)J(t_0 Y)D_{t=t_0}(J(t_0 Z_t(X, Y))^{-1} f(Z_t(X, Y))\rangle$$

on peut d'abord remplacer $D_{t=t_0}$ par P_{t_0} agissant sur X et Y (*cf.* 2.8) puis, $J(t_0 X)u(X)$ et $J(t_0 Y)v(Y)$ étant H-invariantes, remplacer P_{t_0} par $-\mathrm{tr}_s(x D_X F_{t_0} + y D_Y G_{t_0})$ (*cf.* 3.4, Lemme); comme plus haut on note $x = \mathrm{ad}\, X$, $y = \mathrm{ad}\, Y$.

Notre premier terme est donc

$$-\langle u(X)v(Y), \mathrm{tr}_s(x D_X F_t + y D_Y G_t)\frac{J(tX)J(tY)}{J(tZ_t)} f(Z_t)\rangle,$$

pris en $t = t_0$.

Le deuxième :

$$\langle u(X)v(Y), D_{t=t_0}\left(\frac{J(tX)J(tY)}{J(tZ_{t_0}(X, Y))}\right)^f (Z_{t_0}(X, Y))\rangle$$

s'évalue par le

LEMME. — $D_t \log J(tX) = 1/2\, \mathrm{tr}_s(x \coth tx - 1/t)$ *pour* $X \in \mathfrak{s}'$, $0 < t \leqq 1$; qui se déduit sans peine de la définition de J.

Finalement (15) s'écrit

$$\langle u(X)v(Y), A(tX, tY)\frac{J(tX)J(tY)}{J(tZ_t(X, Y))} f(Z_t(X, Y))\rangle = 0,$$

avec

$$A(X, Y) = \mathrm{tr}_s(x D_X F + y D_Y G) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}_s(x \coth x + y \coth y - z \coth z - 1),$$

et $z = \mathrm{ad}\, Z(X, Y)$. On en déduit la généralisation suivante du théorème de Kashiwara-Vergne.

3.6. THÉORÈME. — *Soit* (G, H) *une paire symétrique. La propriété* ($*$) *de l'espace symétrique* $S=G/H$ (*cf.* 3.3) *est conséquence de la propriété* (P) *suivante :*

(P) *Il existe des applications* $F, G : \Omega \to \mathfrak{h}$, *analytiques, nulles à l'origine, qui permettent de mettre la formule de Campbell-Hausdorff de* S *sous forme* (11) *sur* Ω, *et telles que*

$$(17)\qquad \operatorname{tr}_{\mathfrak{s}}(x\,D_X F+y\,D_Y G)=\frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathfrak{s}}(x \coth x+y \coth y-z \coth z-1),$$

pour $(X, Y)\in\Omega$, *avec* $x=\operatorname{ad} X$, $y=\operatorname{ad} Y$, $z=\operatorname{ad} Z(X, Y)$.

Rappelons que Ω est l'ouvert des $(X, Y)\in\mathfrak{s}'\times\mathfrak{s}'$ tels que $p(e^{tX}e^{tY})\in\operatorname{Exp}\mathfrak{s}'$ pour $0\leqq t\leqq 1$, et $\mathfrak{s}'$ est comme en 3.1. Par prolongement analytique en (X, Y), il suffit de vérifier (17) au voisinage de l'origine.

Dans la situation étudiée par Benoist [2], on en déduit le :

COROLLAIRE. — *Si* G *est nilpotent simplement connexe, l'espace symétrique* G/H *possède la propriété* ($*$).

Démonstration. — Avec les notations de 2.2, 2.4, on peut prendre ici $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}$, $G'=G$, $\Omega^0=\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$, $\mathfrak{s}'=\mathfrak{s}$, (et $S'=S$ si $H=G_\sigma$ par 2.2. Remarque). Définissons F^0, G^0, F, $G\in\mathscr{F}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})$ par (8′) et (10); alors (11) est vérifié, ainsi que (17), tous les endomorphismes utiles étant nilpotents d'après 2.3 Lemme (iv). ■

4. Interprétation de la condition de traces

4.1. Les hypothèses et les notations sont celles de 2.1 et 2.8. Les résultats du présent paragraphe ne seront pas utilisés dans la suite.

La formule de Campbell-Hausdorff (11), ou le résultat équivalent de 2.8 Lemme, et la condition de traces (17) peuvent s'écrire sous forme « géométrique » :

PROPOSITION. — *Il existe un difféomorphisme local*
$\Phi : (X, Y)\mapsto(X_1, Y_1)$ *au voisinage de l'origine dans* $\mathfrak{s}\times\mathfrak{s}$ *tel que*
(i) $X_1=a(X, Y).X$, $Y_1=b(X, Y).Y$,
où a et b sont deux applications analytiques à valeurs dans H.
(ii) $p(e^{X_1}e^{Y_1})=p(e^{X+Y})$, *i. e.* $Z(X_1, Y_1)=X+Y$.
(iii) *La condition* (17) *équivaut à l'égalité de jacobiens :*

$$\operatorname{dét} D\Phi(X, Y)=\frac{J(X+Y)}{J(X)\,J(Y)}\operatorname{dét}_{\mathfrak{s}}\operatorname{Ad}(a(X, Y)\,b(X, Y)).$$

Démonstration. — Φ sera construit par déformation de l'identité en une famille à un paramètre de difféomorphismes $\Phi_t : (X, Y)\mapsto(X_t, Y_t)$, $0\leqq t\leqq 1$, tels que

$$\begin{cases} X_t=a_t(X, Y).X \\ Y_t=b_t(X, Y).Y \end{cases},\qquad a_0(X, Y)=b_0(X, Y)=e,$$

et $Z_t(X_t, Y_t)=X+Y$ (notations 2.8), où a_t et b_t sont des applications analytiques à valeurs dans H; alors $\Phi=\Phi_1$ vérifiera (i) et (ii).

Construisons d'abord a_t et b_t en intégrant le système différentiel sur $H\times H$, de paramètres X et Y :

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{l} D_t a_t(X, Y)=D_e R_{a_t}.F_t(a_t(X, Y).X, b_t(X, Y).Y) \\ D_t b_t(X, Y)=D_e R_{b_t}.G_t(a_t(X, Y).X, b_t(X, Y).Y), \end{array}\right.$$

avec les conditions initiales $a_0(X, Y)=b_0(X, Y)=e$; R_a désigne la translation à droite par a dans H. Il existe $\varepsilon>0$, un ouvert ω de $\mathfrak{s}\times\mathfrak{s}$ (que l'on peut supposer étoilé par rapport à l'origine) et des applications a_t, b_t : $\omega\to H$, analytiques, uniques, solutions de (18) pour $(X, Y)\in\omega$ et $|t|\leqq\varepsilon$; cela sous-entend que $(a_t.X, b_t.Y)$ reste dans l'ouvert Ω où sont définies F et G.

Comme $F_t(uX, uY)=uF_{tu}(X, Y)$, on a par unicité $a_t(uX, uY)=a_{tu}(X, Y)$ pour $0\leqq u\leqq 1$, et de même avec b_t; en remplaçant ω par $\varepsilon.\omega$ si nécessaire, on peut donc supposer $\varepsilon=1$. Notons que, de plus, on a $a_t(h.X, h.Y)=ha_t(X, Y)h^{-1}$, et de même avec b_t, si on suppose $F(h.X, h.Y)=h.F(X, Y)$, et de même avec G, comme c'est le cas pour les applications définies par (10), avec h voisin de e dans H.

Soient $X_t(X, Y)=a_t(X, Y).X$, $Y_t(X, Y)=b_t(X, Y).Y$, pour $(X, Y)\in\omega$, $0\leqq t\leqq 1$. En utilisant l'expression $D_g\,\mathrm{Ad}=\mathrm{Ad}\,g\circ\mathrm{ad}\circ(D_e L_g)^{-1}$ de la différentielle de la représentation adjointe de G, on déduit de (18) que X_t et Y_t sont solutions du système différentiel

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{l} D_t X_t=[F_t(X_t, Y_t), X_t] \\ D_t Y_t=[G_t(X_t, Y_t), Y_t] \end{array}\right.$$

avec $X_0=X$, $Y_0=Y$, $0\leqq t\leqq 1$. On a bien sûr $X_t(X, Y)=t^{-1}X_1(tX, tY)$, et de même avec Y_t. D'après les propriétés générales des systèmes différentiels, l'application Φ_t : $(X, Y)\mapsto(X_t, Y_t)$ est un difféomorphisme analytique de ω sur un ouvert ω_t de $\mathfrak{s}\times\mathfrak{s}$. Enfin

$$\begin{aligned} D_t(Z_t(X_t, Y_t)) &= (D_t Z_t)(X_t, Y_t)+D_X Z_t.D_t X_t+D_Y Z_t.D_t Y_t \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après (19) et 2.8), lemme, d'où $Z_t(X_t, Y_t)=Z_0(X_0, Y_0)=X+Y$ pour $0\leqq t\leqq 1$. Cela démontre (i) et (ii).

En remplaçant (X, Y) par (tX, tY) on voit que l'égalité de (iii) équivaut à

$$\text{dét}\, D\Phi_t(X, Y)=\frac{J(tX+tY)}{J(tX)\,J(tY)}\,\text{dét}_{\mathfrak{s}}\,\mathrm{Ad}(a_t(X, Y)\,b_t(X, Y))$$

pour $(X, Y)\in\omega$, $0\leqq t\leqq 1$. Comme Φ_0 est l'identité, cette égalité est triviale en $t=0$, donc équivaut à l'égalité des dérivées logarithmiques en t. On a d'une part :

(20) $D_t\log\text{dét}\,D\Phi_t(X, Y)=\mathrm{tr}_{\mathfrak{s}}(\mathrm{ad}(F_t+G_t)-x\,D_X F_t-y\,D_Y G_t)(X_t, Y_t)$,
avec $x=\mathrm{ad}\,X$, $y=\mathrm{ad}\,Y$. Le premier membre est en effet, d'après (19), la divergence du champ de vecteurs $v_t(X, Y)=([F_t(X, Y), X], [G_t(X, Y), Y])$ sur Ω, prise au point $(X_t,$

Y_t). Or

$$D_{X,\,Y} v_t = \begin{pmatrix} \operatorname{ad} F_t - x D_X F_t & -x D_Y F_t \\ -y D_X G_t & \operatorname{ad} G_t - y D_Y G_t \end{pmatrix},$$

dont la trace a l'expression voulue. D'autre part on obtient aisément grâce à (18) :

$$\text{(21)} \qquad D_t \log \det_{\mathfrak{s}} \operatorname{Ad} a_t(X, Y) = \operatorname{tr}_{\mathfrak{s}}(\operatorname{ad} F_t(X_t, Y_t)).$$

Par (20), (21), et 3.5 Lemme, l'égalité de (iii) équivaut à

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{s}}(x D_X F_t + y D_Y G_t)(X_t, Y_t) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}_{\mathfrak{s}}\left(x \coth tx + y \coth ty - (x+y) \coth t(x+y) - \frac{1}{t}\right)$$

pour $(X, Y) \in \omega$, $0 < t \leqq 1$, ou seulement $t=1$ par homogénéité. Comme $X_1 = a_1 . X$, $Y_1 = b_1 . Y$, et $Z(X_1, Y_1) = X + Y$, le membre de droite de l'égalité s'identifie à celui de (17), pris au point (X_1, Y_1); ce dernier parcourt un voisinage ω_1 de l'origine, d'où résulte la proposition. ■

4.2. *Remarque.* — Dans le cas d'un groupe de Lie G_1 considéré comme espace symétrique (Exemple 1.2), on obtient ainsi un difféomorphisme local $\Phi : (X, Y) \mapsto (X_1, Y_1)$ de $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$, avec $X_1 = a(X, Y) . X$, $Y_1 = b(X, Y) . Y$, a et b à valeurs dans G_1, tel que

$$e^{X_1} e^{Y_1} = e^{X+Y}.$$

Cela permet d'écrire la formule de Campbell-Hausdorff de $\mathfrak{g}_1$ sous la forme

$$\log(e^X e^Y) = X + Y + (e^{\operatorname{ad} A(X,\,Y)} - 1) X + (e^{\operatorname{ad} B(X,\,Y)} - 1) Y,$$

avec

$$A = -\log(a \circ \Phi^{-1}), \qquad B = -\log(b \circ \Phi^{-1}).$$

5. Quelques cas de validité de (*)

5.1. THÉORÈME. — *Soit* (G, H) *une paire symétrique. Dans chacun des deux cas suivants l'espace symétrique* $S = G/H$ *possède la propriété* (∗) :

(i) G *est un groupe résoluble.*

(ii) $\mathfrak{g}$ *vérifie la propriété de Kashiwara-Vergne* (1), (2) *sur l'ouvert* Ω^0, *et* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *est une paire « très symétrique », i.e. il existe un isomorphisme linéaire* $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *tel que* $A \circ \sigma = -\sigma \circ A$ *et* A *commute aux* ad X, $X \in \mathfrak{g}$.

Les notations sont celles du paragraphe 2; en particulier $\mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{s}'$ sont ceux de 2.2, Ω^0, resp. Ω, est défini en 2.4, resp. 2.6, et F^0, G^0, resp. F, G, sont donnés par (8′), resp. (10).

Rappelons qu'il est conjecturé dans [9] que la propriété (1), (2) est vraie pour toute algèbre de Lie.

5.2. *Exemples.* — (*a*) La paire $(G_1 \times G_1, H)$ de l'exemple 1.2 est très symétrique, avec $A(X', X'') = (X', -X'')$, $\sigma(X', X'') = (X'', X')$. Le résultat ci-dessus se réduit alors à celui de [9].

(*b*) Si $\mathfrak{g}$ *admet une structure complexe, et si* $\mathfrak{h}$ *est une forme réelle de* $\mathfrak{g}$, *alors* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *est très symétrique* en prenant pour σ la conjugaison par rapport à $\mathfrak{h}$ et pour A la multiplication par i.

(*c*) Je ne connais pas d'autre exemple de paire très symétrique... Cette propriété entraîne notamment que $\dim \mathfrak{g} = 2 \dim \mathfrak{h}$.

5.3. *Démonstration.* — D'après le théorème 5.1, il suffit d'établir la propriété (P). Plutôt que de le faire directement, nous allons la comparer à la propriété (KV), supposée établie pour $\mathfrak{g}$, à savoir

$$Z^0(Y, X) = \log(e^Y e^X) = X + Y - (1 - e^{-x}) F^0(X, Y) - (e^y - 1) G^0(X, Y)$$

pour $(X, Y) \in \Omega^0$, avec

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(x D_X F^0 + y D_Y G^0) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{x}{e^x - 1} + \frac{y}{e^y - 1} - \frac{z^0}{e^{z^0} - 1} - 1\right); \tag{2}$$

à nouveau on note $x = \operatorname{ad} X$, $y = \operatorname{ad} Y$, $z^0 = \operatorname{ad} Z^0(Y, X)$.

On peut transformer le premier membre de (2) au moyen du lemme 2.3 (iii), et le second en observant que

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \coth \frac{x}{2} - \frac{x}{2},$$

et que $\operatorname{tr}(x + y - z^0) = 0$ puisque $e^{z^0} = e^y e^x$; on obtient

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(y D_Y (G^0 - F^0) + \operatorname{ad} F^0) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{x}{2} \coth \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \coth \frac{y}{2} - \frac{z^0}{2} \coth \frac{z^0}{2} - 1\right).$$

Pour F et G définies sur $\Omega^0/2$ par (10) on en déduit aisément que

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(y D_Y (G - F) + \operatorname{ad} F) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(x \coth x + y \coth y - z \coth z - 1),$$

avec $z = \operatorname{ad} Z(X, Y)$, soit encore, par le lemme 2.3 (iii) :

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(x D_X F + y D_Y G) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(x \coth x + y \coth y - z \coth z - 1). \tag{22}$$

L'égalité (17) du théorème 3.6 n'est donc que la restriction de (22) à $(X, Y) \in \Omega \subset \mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$, à condition de pouvoir remplacer partout $\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}$ par $\operatorname{tr}_{\mathfrak{s}}$. Or, si u et v sont deux endomorphismes de $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{s}$ qui envoient $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{h}$, alors uv et vu laissent stables $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{s}$, et

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{h}} uv = \operatorname{tr}_{\mathfrak{s}} vu. \tag{23}$$

En particulier, en prenant $X \in \mathfrak{s}$, $u = x = \mathrm{ad}\, X$, $v = x^{2p+1}$, on a

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{h}}\, x^{2p+2} = \mathrm{tr}_{\mathfrak{s}}\, x^{2p+2} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\, x^{2p+2},$$

pour p entier $\geqq 0$. Par suite $1/2\ \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(x \coth x - 1) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{s}}(x \coth x - 1)$, ce qui permet de remplacer $1/2\ \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}$ par $\mathrm{tr}_{\mathfrak{s}}$ au second membre de (22) lorsque $X, Y \in \mathfrak{s}$.

Finalement, compte tenu de (23), la condition de traces (17) pour G/H est conséquence de celle pour G (2) si

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{h}}([\mathrm{ad}\, X, D_X F] + [\mathrm{ad}\, Y, D_Y G]) = 0 \tag{24}$$

pour X, Y voisins de 0 dans $\mathfrak{s}$; [,] est ici le crochet de l'algèbre des endomorphismes de $\mathfrak{g}$.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre résoluble [cas (i)], sa complexifiée $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ admet une base pour laquelle x et y sont représentés par des matrices triangulaires supérieures; il en est de même pour $D_X F$ et $D_Y G$ d'après le lemme 2.3 (iv). Alors $[x, D_X F]$ et $[y, D_Y G]$ sont des endomorphismes nilpotents de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, pour $X, Y \in \mathfrak{s}$, donc de $\mathfrak{h}$ par restriction, d'où (24). Comme F^0 et G^0 satisfont à (1) et (2) sur Ω^0 pour $\mathfrak{g}$ résoluble (*voir* Appendice), l'assertion (i) du théorème est établie.

Dans le cas très symétrique, l'application A va permettre de ramener x, $D_X F$, ... à des endomorphismes de $\mathfrak{h}$, pour qui la relation (24) est évidente. Si $X, Y \in \mathfrak{s}$ écrivons $X = AX'$, $Y = AY'$ avec $X', Y' \in \mathfrak{h}$. Alors $\mathrm{ad}\, X = A \circ \mathrm{ad}\, X' = \mathrm{ad}\, X' \circ A$ d'après les hypothèses et, si $u = x^{\alpha_1} y^{\beta_1} x^{\alpha_2} y^{\beta_2} \ldots$ est un monôme dans $D_X F$ ou $D_Y G$ [*cf.* Lemme 2.3 (iv)], on aura

$$u = A^{2p-1} \circ u' = u' \circ A^{2p-1}$$

où u' est le monôme déduit de u en changeant X en X′, Y en Y′, et $2p-1$ est le degré total de u, impair puisque F et G sont paires. D'où $\mathrm{tr}_{\mathfrak{h}}(ux) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{h}}(u' A^{2p} x')$ où u', x', A^2 sont des endomorphismes de $\mathfrak{h}$, ce qui donne

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{h}}(ux) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{h}}(A^{2p} x' u') = \mathrm{tr}_{\mathfrak{h}}(A\, x' A^{2p-1} u') = \mathrm{tr}_{\mathfrak{h}}(xu).$$

L'égalité (24) est ainsi démontrée terme par terme, d'où l'assertion (ii) du théorème. ■

6. Application aux opérateurs différentiels invariants

6.1. Dans tout ce paragraphe $S = G/H$ désigne un espace symétrique qui possède la propriété (∗). Les notations sont celles de 3.1 et 3.3.

L'espace tangent $\mathfrak{s}$ à l'origine a de S s'identifie à l'espace symétrique plat G_0/H, où G_0 est le produit semi-direct $H \times \mathfrak{s}$ pour l'action adjointe de H sur $\mathfrak{s}$. Soit $D(\mathfrak{s})$, resp. $D(S)$, l'algèbre des opérateurs différentiels G_0-invariants sur $\mathfrak{s}$, resp. G-invariants sur S. Les éléments de $D(\mathfrak{s})$ sont les opérateurs à coefficients constants, H-invariants, sur $\mathfrak{s}$, et

$D(\mathfrak{s})$ est commutative. On définit par transposition les algèbres ${}^t D(\mathfrak{s})$, resp. ${}^t D(S)$, comme en 1.4.

Soit δ_0, resp. δ, la masse de Dirac à l'origine de $\mathfrak{s}$, resp. S. Pour $P \in D(\mathfrak{s})$, la distribution $({}^t P \delta_0)^\sim$ est H-invariante sur S, supportée à l'origine, et la convolution à droite par cette distribution définit un opérateur de ${}^t D(S)$. Explicitement

$$w \underset{S}{*} ({}^t P \delta_0)^\sim = {}^t \tilde{P} w \qquad \text{pour} \quad w \in \mathscr{D}'(S),$$

avec

$$(\tilde{P} f)(px) = P_{Y=0}(J(Y) f(x . \operatorname{Exp} Y)) \qquad \text{pour} \quad f \in C^\infty(S), \quad x \in G,$$

d'où $\tilde{P} \in D(S)$ et $({}^t P \delta_0)^\sim = {}^t \tilde{P} \delta$.

6.2. Proposition. — *Si* $(*)$ *est vérifiée, l'application* $P \mapsto \tilde{P}$ *est un isomorphisme d'algèbres de* $D(\mathfrak{s})$ *sur* $D(S)$; *en particulier* $D(S)$ *est commutative.*

De plus $({}^t P u)^\sim = {}^t \tilde{P} \tilde{u}$ *sur l'ouvert* S', *pour* $P \in D(\mathfrak{s})$ *et* $u \in \mathscr{D}'_H(\mathfrak{s})$.

Cette proposition généralise un résultat de Benoist ([1], [2]) pour les espaces symétriques nilpotents; dans le cas d'un groupe de Lie considéré comme espace symétrique, $P \mapsto \tilde{P}$ est l'isomorphisme de Duflo [3]. D'autre part la commutativité de $D(S)$ a été démontrée algébriquement par Duflo [4], généralisant un résultat de Lichnérowicz, sous la seule hypothèse que l'espace symétrique S admet une mesure relativement invariante. Signalons que la proposition 4.2 de [9] (et sa démonstration) s'étendent à notre situation; cela a été fait par Duflo lorsque G est nilpotent.

Démonstration. — D'après $(*)$ on a, pour $u \in \mathscr{D}'_H(\mathfrak{s})$,

$$({}^t P u)^\sim = (u * {}^t P \delta_0)^\sim = \tilde{u} * {}^t \tilde{P} \delta = {}^t \tilde{P} \tilde{u}.$$

En particulier si $u = {}^t Q \delta_0$, avec $P, Q \in D(\mathfrak{s})$, d'où :

$$(QP)^\sim = \tilde{Q} \tilde{P}.$$

Enfin $P \mapsto \tilde{P}$ est bijective, son application réciproque étant donnée par :

$$P \varphi(X) = \tilde{P}_{s=a}(J(\operatorname{Log} s)^{-1} \varphi(X + \operatorname{Log} s)), \qquad \varphi \in C^\infty(\mathfrak{s}),$$

d'où la proposition. ∎

6.3. Proposition. — *Si* $(*)$ *est vérifiée, tout opérateur non nul appartenant à* ${}^t D(S)$ *admet une solution élémentaire* H-*invariante sur l'ouvert* S'.

Cette proposition s'applique notamment à $S = G/H$ avec G résoluble [*cf.* 5.1, Théorème (i)]; rappelons que $S' = S$ si G est exponentiel et $H = G_\sigma$ (*cf.* 2.2, Remarque). Ces résultats sont à rapprocher de ceux de Benoist [2] (obtenus par la formule de Plancherel de G/H pour G nilpotent), de Duflo [3] (pour les bi-invariants sur un groupe de Lie), et de Lion [10] (obtenus semi-globalement, par des inégalités *a priori*, pour tous les opérateurs semi-invariants).

Démonstration. — Tout élément de ${}^t D(S)$ s'écrit ${}^t \tilde{P}$ d'après la proposition précédente, avec $P \in D(\mathfrak{s})$. L'opérateur ${}^t P$, à coefficients constants et H-invariant sur $\mathfrak{s}$, admet une solution élémentaire H-invariante (et tempérée) $E \in \mathscr{D}'_H(\mathfrak{s})$ (*cf.* Raïs [12]). Alors $\tilde{E} \in \mathscr{D}'_H(S')$ et ${}^t\tilde{P}\tilde{E} = \tilde{\delta}_0 = \delta$ sur S'. ■

7. Application à l'analyse harmonique sphérique

7.1. Dans tout ce paragraphe $S = G/H$ désigne un espace symétrique pour lequel $S' = S$, avec les notations de 3.1.

On appelle *distribution sphérique* sur S toute distribution H-invariante $\varphi \in \mathscr{D}'_H(S)$ qui est distribution propre commune à tous les opérateurs différentiels invariants de ${}^tD(S)$; on définit de même les distributions sphériques sur $\mathfrak{s}$, ou *distributions de Bessel.* L'étude de ces distributions, pour G semi-simple, a été entreprise par J. L. Clerc, J. Faraut, S. Sano, J. Sekiguchi, G. van Dijk, ...

Un exemple remarquable de distribution de Bessel sur $\mathfrak{s}$ s'obtient comme suit. Soit $\lambda \in \mathfrak{s}^*$ une forme linéaire sur $\mathfrak{s}$, et supposons que son orbite $H.\lambda$ pour l'action coadjointe soit tempérée, i. e. admette une mesure H-invariante m_λ qui soit une distribution tempérée sur $\mathfrak{s}$. Soient dX une mesure de Lebesgue de $\mathfrak{s}$, et F la transformation de Fourier :

$$Fg(\xi) = \int_{\mathfrak{s}} g(X)\, e^{-i\xi(X)}\, dX,$$

$g \in \mathscr{D}(\mathfrak{s})$, $\xi \in \mathfrak{s}^*$. Alors la transformée de Fourier ψ_λ de m_λ :

$$\langle \psi_\lambda, g \rangle = \int_{H.\lambda} Fg(\xi)\, dm_\lambda(\xi)$$

est une distribution de Bessel sur $\mathfrak{s}$, puisque ${}^tP\psi_\lambda = P(i\lambda)\psi_\lambda$ pour $P \in D(\mathfrak{s})$, identifié à un polynôme sur $\mathfrak{s}^*$.

La distribution $\varphi_\lambda = \tilde{\psi}_\lambda \in \mathscr{D}'_H(S)$ s'écrit alors :

$$\langle \varphi_\lambda, f \rangle = \langle \psi_\lambda, J.f \circ \mathrm{Exp} \rangle = \int_{H.\lambda} F(J.f \circ \mathrm{Exp})(\xi)\, dm_\lambda(\xi), \tag{25}$$

pour $f \in \mathscr{D}(S)$. Si (*) est vérifiée, la proposition 6.2 donne ${}^t\tilde{P}\varphi_\lambda = P(i\lambda)\varphi_\lambda$, et φ_λ est une distribution sphérique sur S. La première égalité de (25) signifie alors que, au moins pour les orbites tempérées, *les transformations sphériques sur* S *et sur* $\mathfrak{s}$ *se correspondent par le changement de fonction* $f \mapsto J.f \circ \mathrm{Exp}$. La deuxième égalité de (25) est bien sûr un analogue de la formule du caractère de Kirillov.

7.2. Supposons de plus que le groupe $\mathrm{Ad}_G H$ est compact, c'est-à-dire que S est un *espace riemannien symétrique* (*cf.* Helgason [7], chap. IV, § 3). Toute orbite est alors tempérée, avec la mesure

$$\int_{H.\lambda} g(\xi)\, dm_\lambda(\xi) = \int_{\mathrm{Ad}\, H} g(h.\lambda)\, d\bar{h} = \int_{H/H \cap Z} g(h.\lambda)\, d\bar{h};$$

on sait en effet que $\mathrm{Ad}_G \mathrm{H}$ s'identifie à $\mathrm{H}/\mathrm{H} \cap \mathrm{Z}$, où Z est le centre de G, et Ad h à la classe $\bar{h}$; $d\bar{h}$ est la mesure de Haar normalisée de $\mathrm{Ad}_G \mathrm{H}$. De plus la mesure $d\mathrm{X}$ est H-invariante, et $ds = \mathrm{Exp}_*(\mathrm{J}(\mathrm{X})^2 \, d\mathrm{X})$ est une mesure G-invariante sur S. Les laplaciens de S et $\mathfrak{s}$ étant des opérateurs invariants elliptiques, toutes les distributions sphériques s'identifient, grâce aux densités ds et $d\mathrm{X}$, à des fonctions analytiques; on les normalise par la condition de prendre la valeur 1 à l'origine.

PROPOSITION. — *Soit* $\mathrm{S} = \mathrm{G}/\mathrm{H}$ *un espace riemannien symétrique, dont l'application exponentielle est un difféomorphisme global de* $\mathfrak{s}$ *sur* S. *Alors* $(*)$ *est vérifiée pour tous* u, $v \in \mathscr{E}'_{\mathrm{H}}(\mathfrak{s})$ *si et seulement si pour tout* $\lambda \in \mathfrak{s}^*$ *il existe une fonction sphérique normalisée* φ_λ *sur* S *telle que*

$$\langle \tilde{u}, \varphi_\lambda \rangle = \mathrm{F}\, U(\lambda)$$

pour tout $u \in \mathscr{E}'_{\mathrm{H}}(\mathfrak{s})$.

Cela signifie que l'analyse harmonique sphérique sur S se ramène à l'analyse de Fourier usuelle sur l'espace tangent.

Démonstration. — Supposons $(*)$ pour u, $v \in \mathscr{E}'_{\mathrm{H}}(\mathfrak{s})$. Comme $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$, la proposition 6.2 donne $({}^t\mathrm{P}u)^{\sim} = {}^t\tilde{\mathrm{P}}\tilde{u}$ pour $\mathrm{P} \in \mathrm{D}(\mathfrak{s})$, $u \in \mathscr{E}'_{\mathrm{H}}(\mathfrak{s})$. Par compacité de Ad H, il existe sur $\mathfrak{s}$ une norme H-invariante, d'où des troncatures H-invariantes. Le résultat s'étend donc à tout $u \in \mathscr{D}'_{\mathrm{H}}(\mathfrak{s})$ et, d'après les remarques ci-dessus, les fonctions

$$\psi_\lambda(\mathrm{X}) = \int_{\mathrm{Ad}\ \mathrm{H}} e^{-i\lambda(h \cdot \mathrm{X})} \, d\bar{h}, \qquad \text{resp. } \varphi_\lambda(\mathrm{Exp}\ \mathrm{X}) = \mathrm{J}(\mathrm{X})^{-1} \psi_\lambda(\mathrm{X})$$

sont, pour chaque $\lambda \in \mathfrak{s}^*$, sphériques sur $\mathfrak{s}$, resp. S.

De plus, d'après 3.2, on a pour $u \in \mathscr{E}'_{\mathrm{H}}(\mathfrak{s})$:

$$\langle \tilde{u}, \varphi_\lambda \rangle = \langle \tilde{u}, \tilde{\psi}_\lambda \rangle = \langle u, \psi_\lambda \rangle = \mathrm{F}\, u(\lambda).$$

Réciproquement cette relation entraîne, pour u, $v \in \mathscr{E}'_{\mathrm{H}}(\mathfrak{s})$

$$\langle (u * v)^{\sim}, \varphi_\lambda \rangle = \mathrm{F}\, u(\lambda)\, \mathrm{F}\, v(\lambda) = \langle \tilde{u}, \varphi_\lambda \rangle \langle \tilde{v}, \varphi_\lambda \rangle = \langle \tilde{u} * \tilde{v}, \varphi_\lambda \rangle,$$

d'après l'équation fonctionnelle des fonctions sphériques, qui s'écrit ici :

$$\varphi_\lambda(px)\, \varphi_\lambda(py) = \int_{\mathrm{H}/\mathrm{H} \cap \mathrm{Z}} \varphi_\lambda(p(xhy))\, d\bar{h}$$

(*cf.* Helgason [8], p. 400, en modifiant légèrement la démonstration). Soit alors $w \in \mathscr{E}'_{\mathrm{H}}(\mathfrak{s})$ tel que $\tilde{w} = \tilde{u} * \tilde{v} - (u * v)^{\sim}$; on a ainsi $\langle \tilde{w}, \varphi_\lambda \rangle = 0$, soit $\mathrm{F}\, w(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{s}^*$, et $w = 0$, ce qui démontre la proposition. ■

7.3. *Remarque.* — Supposons encore $\mathrm{Ad}_G \mathrm{H}$ compact, et $\mathfrak{s}' = \mathfrak{s}$, $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$. Modifions la définition de $\sim$ en 3.1, en remplaçant J par une fonction $\mathrm{J}' \in \mathrm{C}^\infty(\mathfrak{s})$, positive, H-invariante, et σ-invariante (i. e. paire).

Lorsque $u = u(\mathrm{X})\, d\mathrm{X}$ est une fonction, l'égalité $\langle \tilde{u}, f \rangle = \langle u, \mathrm{J}'. f \circ \mathrm{Exp} \rangle$ et l'identification $\tilde{u} = \tilde{u}(s)\, ds$, avec $ds = \mathrm{Exp}_*(\mathrm{J}(\mathrm{X})^2\, d\mathrm{X})$, conduisent à

$$\tilde{u}(\mathrm{Exp}\ \mathrm{X}) = \mathrm{J}'(\mathrm{X})\, \mathrm{J}(\mathrm{X})^{-2}\, u(\mathrm{X}).$$

Par suite, pour u, $v \in \mathscr{D}_{\mathrm{H}}(\mathfrak{s})$,

$$(u * v)^{\sim}(a) = \mathrm{J}'(0) \int_{\mathfrak{s}} u(\mathrm{X})\, v(-\mathrm{X})\, d\mathrm{X};$$

d'autre part, d'après la définition de la convolution de S,

$$(\tilde{u} * \tilde{v})(a) = \int_{\mathfrak{s}} \tilde{u}(\mathrm{Exp\ X})\, \tilde{v}(\mathrm{Exp}(-\mathrm{X}))\, \mathrm{J}(\mathrm{X})^2\, d\mathrm{X},$$

$$= \int_{\mathfrak{s}} \mathrm{J}'(\mathrm{X})^2\, \mathrm{J}(\mathrm{X})^{-2}\, u(\mathrm{X})\, v(-\mathrm{X})\, d\mathrm{X}.$$

Si $(*)$ a lieu avec cette définition modifiée et u, $v \in \mathscr{D}_{\mathrm{H}}(\mathfrak{s})$, on en déduit aisément, en prenant $v=1$ sur $-\operatorname{supp} u$, que la fonction H-invariante $\mathrm{J}'(\mathrm{X})^2\,\mathrm{J}(\mathrm{X})^{-2} - \mathrm{J}'(0)$ est identiquement nulle, d'où $\mathrm{J}'(0)=1$ et $\mathrm{J}'=\mathrm{J}$.

Dans le cas riemannien symétrique, le facteur J *qui intervient dans la propriété* $(*)$ *ne peut donc être que la racine carrée du jacobien de* Exp.

7.4. Proposition. — *Soient* G *un groupe semi-simple connexe, non compact, de centre fini, et* K *un sous-groupe compact maximal. La propriété* $(*)$ *a lieu pour* $\mathrm{S}=\mathrm{G}/\mathrm{K}$ (*et* u, $v \in \mathscr{E}'_{\mathrm{K}}(\mathfrak{s})$) *si et seulement si* G *admet une structure complexe.*

Démonstration. — D'après 7.2 Démonstration, la propriété $(*)$ entraîne notamment que $\varphi_0(\mathrm{Exp\ X}) = \mathrm{J}(\mathrm{X})^{-1}$ est fonction propre du laplacien L de S. Pour expliciter cette propriété, introduisons une décomposition d'Iwasawa $\mathrm{G}=\mathrm{KAN}$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ de A, le système R de racines (restreintes) de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, les multiplicités $m_\alpha = \dim \mathfrak{g}_\alpha$ des $\alpha \in \mathrm{R}$, une base orthonormale (H_i) de $\mathfrak{a}$ pour le produit scalaire induit par la forme de Killing $(\mathrm{H}_i . \mathrm{H}_j = \delta_{ij})$, le laplacien L′ de $\mathfrak{a}$, et les $\mathrm{H}_\alpha \in \mathfrak{a}$ définis par $\mathrm{H}_\alpha . \mathrm{H} = \alpha(\mathrm{H})$ pour tout $\mathrm{H} \in \mathfrak{a}$.

En restreignant à A l'égalité $\mathrm{L}\,\varphi_0 = c\,\varphi_0$ sur S, et transportant à $\mathfrak{a}$ par exp, on obtient

$$\mathrm{JL}'(\mathrm{J}^{-1}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathrm{R}} m_\alpha \coth \alpha . \mathrm{JH}_\alpha(\mathrm{J}^{-1}) = c, \tag{26}$$

valable sur l'ouvert $\mathfrak{a}'$ des éléments réguliers de $\mathfrak{a}$; cette égalité a lieu en effet sur une chambre de Weyl d'après la théorie de la partie radiale (*cf.* Helgason [8], p. 267), et se prolonge à $\mathfrak{a}'$ par invariance par le groupe de Weyl. Pour $\mathrm{H} \in \mathfrak{a}$ on a

$$\mathrm{J}(\mathrm{H}) = \prod_{\beta \in \mathrm{R}} \left(\frac{\operatorname{sh} \beta(\mathrm{H})}{\beta(\mathrm{H})} \right)^{m_\beta/4}.$$

Lorsque $\mathrm{H}_0 \in \mathfrak{a}$ est considéré comme opérateur différentiel sur $\mathfrak{a}$, on obtient donc

$$\mathrm{JH}_0 \circ \mathrm{J}^{-1} = \mathrm{H}_0 + \frac{1}{4} \sum_{\beta} m_\beta\, \beta(\mathrm{H}_0)\, (\beta^{-1} - \coth \beta),$$

d'où

$$\sum_{\alpha} m_\alpha \coth \alpha \,.\, \mathrm{JH}_\alpha(\mathrm{J}^{-1}) = \frac{1}{4}\sum_{\alpha,\,\beta} m_\alpha m_\beta (\alpha\,.\,\beta)(\coth \alpha)(\beta^{-1} - \coth \beta).$$

De même

$$\mathrm{JL}'(\mathrm{J}^{-1}) = \sum_{i} (\mathrm{JH}_i \circ \mathrm{J}^{-1})^2\, 1$$

se transforme aisément en

$$\frac{1}{4}\sum_{\beta} m_\beta \mathrm{H}_\beta (\beta^{-1} - \coth \beta) + \frac{1}{16}\sum_{\alpha,\,\beta} m_\alpha m_\beta (\alpha\,.\,\beta)(\alpha^{-1} - \coth \alpha)(\beta^{-1} - \coth \beta),$$

compte tenu des relations $\alpha\,.\,\beta = \sum \alpha(\mathrm{H}_i)\,\beta(\mathrm{H}_i)$ et $\mathrm{H}_\beta = \sum \beta(\mathrm{H}_i)\,\mathrm{H}_i$.

Après simplifications, (26) s'écrit

$$4\sum m_\alpha (\mathrm{sh}^{-2}\alpha(\mathrm{H}) - \alpha(\mathrm{H})^{-2})\,|\alpha|^2 + \left|\sum m_\alpha \alpha(\mathrm{H})^{-1}\alpha\right|^2 - \left|\sum m_\alpha \coth \alpha(\mathrm{H})\,\alpha\right|^2 = 16c$$

pour tout $\mathrm{H} \in \mathfrak{a}'$, avec $|\alpha|^2 = \alpha\,.\,\alpha$. Remplaçons H par $t\mathrm{H}$, et effectuons un développement limité du premier membre pour $t \to \infty$. Les termes constants donnent $c = -|\rho|^2$, où ρ est la demi-somme des racines positives comptées avec leurs multiplicités; les termes en t^{-2} donnent

(27) $$\left|\sum_{\alpha \in \mathrm{R}} m_\alpha \alpha(\mathrm{H})^{-1}\alpha\right|^2 = 4\sum_{\alpha \in \mathrm{R}} m_\alpha \alpha(\mathrm{H})^{-2}|\alpha|^2.$$

Soient α une racine indivisible, $\varepsilon > 0$, et choisissons H, proche du mur Ker α, tel que $\alpha(\mathrm{H}) = \varepsilon$ et $|\beta(\mathrm{H})| \geqq 1$ pour toute racine β non proportionnelle à α.

L'égalité des termes en ε^{-2} dans (27) donne alors $m_\alpha + m_{2\alpha} = 2$, donc $m_\alpha = m_{2\alpha} = 1$, ou bien $m_\alpha = 2$ et $m_{2\alpha} = 0$. Le premier cas est exclu d'après l'égalité $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha] = \mathfrak{g}_{2\alpha}$ entre espaces propres. On a donc $m_\alpha = 2$ et $m_{2\alpha} = 0$ pour toute racine indivisible α; d'après les résultats d'Araki sur les multiplicités, $\mathfrak{g}$ admet alors une structure d'algèbre semi-simple complexe.

La réciproque résulte de 5.1 théorème (ii), si l'on admet la conjecture de Kashiwara-Vergne pour $\mathfrak{g}$. Elle se déduit aussi directement de 7.2, proposition, et de l'expression des fonctions sphériques sur G/K pour G complexe (*cf.* Helgason [8], p. 425). ■

8. Remarques finales

8.1. Le résultat de 7.4 montre que la propriété (∗) est loin d'être vérifiée par tout espace symétrique. L'exemple ci-dessous conduit toutefois à penser qu'une approche analogue peut s'appliquer à des espaces symétriques plus généraux.

Soient G un groupe semi-simple connexe, non compact, de centre fini, K un sous-groupe compact maximal, et S = G/K. Avec les notations de 7.4, la transformation d'Abel

$$\mathscr{A} f(\mathrm{H}) = e^{\rho(\mathrm{H})} \int_{\mathrm{N}} f(p(e^{\mathrm{H}} n))\, dn,$$

pour $f \in \mathscr{D}_{\mathrm{K}}(\mathrm{S})$, $\mathrm{H} \in \mathfrak{a}$, est une bijection de $\mathscr{D}_{\mathrm{K}}(\mathrm{S})$ sur $\mathscr{D}_{\mathrm{W}}(\mathfrak{a})$, W désignant le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$; de plus

$$\mathscr{A}(f \underset{\mathrm{S}}{*} g) = \mathscr{A} f \underset{\mathfrak{a}}{*} \mathscr{A} g,$$

propriété analogue à $(*)$, et qui s'étend à f, $g \in \mathscr{E}'_{\mathrm{K}}(\mathrm{S})$ (*cf.* Duistermaat et coll. [5], p. 38). Cela permet, entre autres, de construire une solution élémentaire aux opérateurs de $\mathrm{D}(\mathrm{S})$, comme en 6.3 (*cf.* Helgason [6]).

8.2. Pour comparer avec ce qui précède, il est préférable de remplacer $\mathscr{A}$ par une bijection $\tilde{}$ entre espaces de distributions K-invariantes sur $\mathfrak{s}$ (au lieu de $\mathfrak{a}$), et sur S; on note ici $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ la décomposition définie par l'involution de Cartan associée à K. La propriété cruciale de $\mathscr{A}$ étant la relation (analogue à celle de 7.2, proposition) :

$$\int_{\mathrm{S}} f(s)\, \varphi_{-\lambda}(s)\, ds = \int_{\mathfrak{a}} \mathscr{A} f(\mathrm{H})\, e^{-i\lambda(\mathrm{H})}\, d\mathrm{H}, \tag{28}$$

pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $f \in \mathscr{D}_{\mathrm{K}}(\mathrm{S})$, où les φ_λ sont les fonctions sphériques de S, il est naturel de définir ici l'application $u \mapsto \tilde{u}$ de manière à avoir

$$\int_{\mathrm{S}} \tilde{u}(s)\, \varphi_{-\lambda}(s)\, ds = \int_{\mathfrak{s}} u(\mathrm{X})\, e^{-i\lambda(\mathrm{X})}\, d\mathrm{X} \tag{29}$$

pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ (prolongé par 0 sur l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{s}$).

Soient $\mathrm{F}_{\mathfrak{s}}$ et $\mathrm{F}_{\mathfrak{a}}$ les transformations de Fourier respectives de $\mathfrak{s}$ et de $\mathfrak{a}$, et R l'opérateur de restriction à $\mathfrak{a}^*$ des fonctions sur $\mathfrak{s}^*$. La comparaison de (28) et (29) conduit à définir

$$\tilde{u} = \mathscr{A}^{-1}\, \mathrm{F}_{\mathfrak{a}}^{-1}\, \mathrm{R}\, \mathrm{F}_{\mathfrak{s}}\, u,$$

pour u fonction K-invariante, appartenant par exemple à l'espace de Schwartz de $\mathfrak{s}$. On aura ainsi

$$(u \underset{\mathfrak{s}}{*} v)^{\sim} = \tilde{u} \underset{\mathrm{S}}{*} \tilde{v},$$

d'après les propriétés de $\mathscr{A}$, $\mathrm{F}_{\mathfrak{a}}$, et $\mathrm{F}_{\mathfrak{s}}$. Dans le cas particulier où G a une structure complexe, l'application $\sim$ ainsi définie coïncide avec celle de 3.1, i.e.

$\tilde{u}(\mathrm{Exp}\, \mathrm{X}) = \mathrm{J}(\mathrm{X})^{-1} u(\mathrm{X})$, d'après l'expression des φ_λ dans ce cas (*cf.* Helgason [8], p. 425).

Cet exemple suggère donc que la propriété $(*)$ et ses conséquences pourraient s'étendre à tout espace symétrique, à condition de prendre pour $\sim$ un opérateur intégral de Fourier convenable. Le cas étudié dans cet article est celui où cette application se réduit à un opérateur différentiel d'ordre zéro (multiplication par J^{-1}, et difféomorphisme Exp).

Appendice

On montre ici que les applications F^0 et G^0 de 2.5 s'accordent avec celles construites dans [9]. Pour $\mathfrak{g}$ résoluble, la propriété (1), (2) de Kashiwara-Vergne sera donc valable sur tout l'ouvert Ω^0 défini en 2.4. Les notations sont celles de 2.5.

Comme on a obtenu

$$F^0(X, Y)=\frac{1}{4}Y+\ldots,\qquad G^0(X, Y)=-\frac{1}{4}X+\ldots,$$

où les ... sont des crochets d'ordre deux au moins, la proposition 5.3 de [9] et sa démonstration montrent que (2) se déduit de l'égalité

$$\operatorname{tr}\left(\frac{x}{1-e^{-x}}D_X A-\frac{y}{e^y-1}D_Y A\right)=\operatorname{tr}\left(\frac{z}{e^z-1}-1+\frac{1}{2}z\right), \tag{30}$$

en notant $z=\operatorname{ad} Z^0(X, Y)$ et

$$A(X, Y)=(1-e^{-x})F^0(X, Y)+(1-e^y)G^0(X, Y).$$

Montrons comment les calculs de [9], § 5, donnent (30). D'abord $A(-Y, -X)=A(X, Y)$, puisque $G^0(X, Y)=F^0(-Y, -X)$.
Si on note

$$A^1=(1-e^{-x})F^1+(1-e^y)G^1,$$

on obtient grâce à (8′), par un calcul facile,

$$2A(X, Y)=A^1(X, Y)-A^1(-X, -Y);$$

donc A est impaire, et c'est pour obtenir cela que F^0, G^0 sont préférables à F^1, G^1.

D'autre part l'expression intégrale (8) donne

$$A^1(X, Y)=\int_0^1 p^1(tx, ty)\,dt\,(X+Y),$$

avec

$$p^1(x, y)=(1-e^{-x})\left(\psi(z)+\frac{1}{2}\right)+(1-e^y)\left(\psi(z)-\frac{1}{2}\right);$$

par suite

$$A(X, Y)=\int_0^1 p(tx, ty)\,dt\,(X+Y),$$

avec $2p(x, y)=p^1(x, y)+p^1(-x, -y)$. Soit θ l'opérateur d'Euler, i.e. $\theta A(X, Y)=D_{t=1}A(tX, tY)$; on obtient alors $\theta A(X, Y)=p(x, y)(X+Y)$.

Soit enfin $z = \mathrm{ad}\, Z^0(X, Y)$, $z' = \mathrm{ad}\, Z^0(Y, X)$, $\psi = \psi(z)$, et $\psi' = \psi(z')$. Des calculs élémentaires donnent :

$$2p(x, y) = 4(\psi - \psi') + \left(\psi - \frac{1}{2}\right)(e^x - 1) + \left(\psi' + \frac{1}{2}\right)(1 - e^{-x})$$

$$+ \left(\psi + \frac{1}{2}\right)(e^{-y} - 1) + \left(\psi' - \frac{1}{2}\right)(1 - e^y),$$

$$\psi + \frac{1}{2} = \left(1 - \frac{z}{e^z - 1}\right)\frac{1}{1 - e^{-z}},$$

$$\psi - \frac{1}{2} = \left(1 - \frac{z}{1 - e^{-z}}\right)\frac{1}{e^z - 1},$$

$(e^x - 1)(X + Y) = (e^z - 1)Y$ et trois relations analogues.

Il en résulte que notre $A(X, Y)$ vérifie l'équation différentielle (5.2) de Kashiwara-Vergne, et les calculs de [9], p. 267-271 démontrent l'égalité (30), lorsque $\mathfrak{g}$ est résoluble. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. BENOIST, *Sur l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique nilpotent* (*C.R. Acad. Sc.*, Paris, vol. 295, 1982, p. 59-62).

[2] Y. BENOIST, *Analyse harmonique sur les espaces symétriques nilpotents* (*J. Funct. Anal.*, vol. 59, 1984, p. 211-253).

[3] M. DUFLO, *Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie*, (*Ann. E.N.S.*, vol. 10, 1977, p. 265-288).

[4] M. DUFLO, *Opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique* (*C.R. Acad. Sc.*, Paris, vol. 289, 1979, p. 135-137).

[5] J. J. DUISTERMAAT, J. A. C. KOLK et V. S. VARADARAJAN, *Spectra of compact locally symmetric manifolds of negative curvature* (*Invent. Math.*, vol. 52, 1979, p. 27-93).

[6] S. HELGASON, *Fundamental solutions of invariant differential operators on symmetric spaces* (*Amer. J. Math.*, vol. 86, 1964, p. 565-601).

[7] S. HELGASON, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, New York, 1978.

[8] S. HELGASON, *Groups and geometric analysis*, Acad. Press, New York, 1984.

[9] M. KASHIWARA et M. VERGNE, *The Campbell-Hausdorff formula and invariant hyperfunctions* (*Invent. Math.*, vol. 47, 1978, p. 249-272).

[10] G. LION, *Résolubilité d'opérateurs différentiels semi-invariants sur l'espace d'une représentation induite* (*C.R. Acad. Sc.*, Paris, vol. 300, 1985, p. 535-538).

[11] O. LOOS, *Symmetric spaces-1;* Benjamin, New York, 1969.

[12] M. RAÏS, *Solutions élémentaires des opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie nilpotent* (*C.R. Acad. Sc.*, Paris, vol. 273, 1971, p. 495-498).

[13] F. ROUVIÈRE, *Démonstration de la conjecture de Kashiwara-Vergne pour l'algèbre sl(2)* (*C.R. Acad. Sc.*, Paris, vol. 292, 1981, p. 657-660).

(Manuscrit reçu le 19 septembre 1985.)

F. ROUVIÈRE,
Département de Mathématiques,
U.A. n° 168,
Faculté des Sciences,
Parc Valrose,
06034 Nice Cedex.