

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PH. DELANOË

Plongements radiaux $S^n \hookrightarrow R^{n+1}$ à courbure de Gauss positive prescrite

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 18, n° 4 (1985), p. 635-649

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1985_4_18_4_635_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PLONGEMENTS RADIAUX $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ A COURBURE DE GAUSS POSITIVE PRESCRITE.

PAR Ph. DELANOË(*)

RÉSUMÉ. — Nous appliquons des résultats de notre thèse (principalement de [6], [7]) à l'amélioration d'un théorème récent de V. I. Oliker [12] qui traite de la variante suivante du problème de Minkowski : trouver un prolongement *radial* $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ à courbure de Gauss prescrite $K > 0$. Au lieu de conditions intégrales nécessaires et suffisantes sur K , comme celles qui s'introduisent naturellement dans le problème de Minkowski (voir e. g. [13]), on ne peut qu'énoncer des conditions *suffisantes*; nous parvenons à éliminer la condition de monotonie de Oliker (comparer [12] théorème 1.2 condition (d) et le théorème 2 ci-après).

En outre, au même égard, nous démontrons un *nouveau théorème* (théorème 1 ci-après) qui traite du problème de valeur propre non linéaire global suivant : soit $\Phi > 0$ une fonction définie sur S^n , trouver un réel $\lambda(\Phi) > 0$ et une hypersurface Σ dont le vecteur-position générique Y dans \mathbb{R}^{n+1} vérifie,

$$|Y|^n H_n(Y) = \lambda(\Phi) \Phi \left(\frac{Y}{|Y|} \right)$$

H_n désignant la *courbure de Gauss* de $\Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

ABSTRACT. — We apply results from our thesis (mainly from [6], [7]) to improve a recent theorem of V. I. Oliker [12] which deals with the following variant of the Minkowski problem: find a *radial* embedding $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ with prescribed Gauss curvature $K > 0$. Instead of necessary and sufficient integral conditions on K , such as those which naturally arise in the Minkowski problem (see e. g. [13]), one may only state *sufficient* conditions; we are able to drop Oliker's monotonicity condition (compare [12] theorem 1.2 condition (d) and theorem 2 hereafter).

Moreover, in the same connection, we prove a *new theorem* (theorem 1 hereafter) which deals with the following nonlinear global eigenvalue problem: let $\Phi > 0$ be a function defined on S^n , find a real number $\lambda(\Phi) > 0$ and a hypersurface Σ whose generic position-vector Y in \mathbb{R}^{n+1} satisfies,

$$|Y|^n H_n(Y) = \lambda(\Phi) \Phi \left(\frac{Y}{|Y|} \right)$$

H_n denoting the *Gauss curvature* of $\Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

1980 A.M.S. Subject classification : 53 A 07, 53 C 21, 53 C 42, 53 C 45, 47 H 17.

KEY-WORDS. — Hypersurface strictement convexe, courbure de Gauss prescrite, équations de Monge-Ampère, Méthodes de Point Fixe, d'itération, de continuité, estimations *a priori*.

(*) Chargé de Recherches au C.N.R.S. (U.A. 168).

Remerciements

C'est un plaisir d'exprimer à A. Treibergs notre vive gratitude pour avoir attiré notre attention sur une possible application des résultats d'analyse globale de notre thèse. Au printemps 1983 au M.S.R.I. (Berkeley) nous avons un séminaire informel où A. Treibergs a bien voulu exposer des questions analogues pour la courbure moyenne (voir [1], [15]).

Introduction

Dans cet article, nous nous intéressons à un problème de géométrie différentielle dans lequel l'inconnue est un *plongement*

$$Y : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

astreint à posséder une courbure de Gauss $H_n(Y)$ donnée,

$$K(Y) > 0$$

(S^n est l'hypersphère unité de l'espace euclidien ambiant \mathbb{R}^{n+1}). On cherche l'hypersurface $\Sigma = Y(S^n)$ sous forme d'un *graphe radial sur S^n , strictement convexe* puisque $H_n(Y) > 0$.

Ce problème constitue une variante du problème de Minkowski (voir e. g. [11], [13], [3]) dont il diffère par la *nature de la paramétrisation de Σ par S^n* (graphe radial au lieu de l'inverse de l'application de Gauss; voir commentaire ci-après). Il a été abordé pour la première fois par V. I. Oliker dans [12]; il s'inspire du cinquante neuvième problème soulevé par S. T. Yau dans la section de problèmes de son séminaire 1979-1980 [17]. Il s'agit de trouver *des conditions suffisantes* raisonnables sur la courbure prescrite K afin que l'hypersurface Σ existe. A cet égard, nous affaiblirons substantiellement les conditions stipulées dans le théorème de [12], qui sont essentiellement les conditions (H. 1) et (H. 3) de la section II ci-après, les ramenant simplement à la condition (H. 2) (voir section II) : c'est l'objet du théorème 2 (ci-après). Cette simplification est rendue possible par le théorème 3 de [6].

Mais il est un candidat K *naturel* pour être la courbure de Gauss H_n de Σ ; il s'agit de K définie par,

$$\forall Y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, \quad K(Y) = \frac{1}{|Y|^n} \Phi\left(\frac{Y}{|Y|}\right)$$

où $\Phi > 0$ est définie sur S^n . Ce candidat ne satisfait pas aux conditions du théorème 2, sauf dans le cas trivial où $\Phi \equiv 1$. Pour pallier à cette insuffisance, nous démontrerons le

THÉORÈME 1. — Soit $\Phi > 0$ une fonction de classe C^k sur S^n , $k \geq 3$. Il existe un réel unique $\lambda(\Phi)$ et un *plongement radial* unique à homothétie près,

$$Y : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

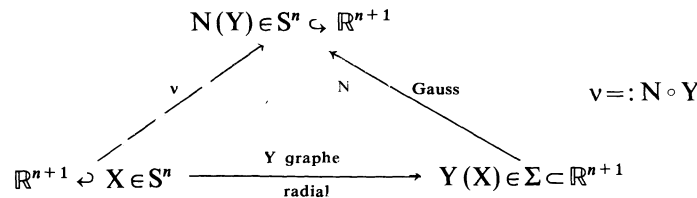
de classe $C^{k+1, \alpha}$ sur S^n , $\forall \alpha \in]0, 1[$ (ou analytique si Φ est analytique), dont la courbure de Gauss vaille,

$$H_n(Y) = \frac{1}{|Y|^n} \lambda(\Phi) \Phi \left(\frac{Y}{|Y|} \right)$$

On sait a priori que $\lambda(\Phi) \in [(\text{Sup}_{S^n} \Phi)^{-1}, (\text{inf}_{S^n} \Phi)^{-1}]$.

Commentaire. — Comme le notait A. Treibergs dans son exposé au M.S.R.I. (du 23 mars 1983), la paramétrisation d'une hypersurface de \mathbb{R}^{n+1} , Σ , comme *graphe radial* sur S^n , est *plus générale* que la paramétrisation de Σ par S^n via l'inverse de l'application de Gauss, la première permettant de traiter globalement non seulement du cas où Σ est strictement convexe, mais plus généralement du cas où Σ est étoilée par rapport à l'origine. Cette remarque conduit à des variantes du problème de Minkowski [12] et du problème de Christoffel [1], [15]*.

La situation peut être résumée par le diagramme commutatif suivant,



dont les trois flèches sont inversibles lorsque Σ est *strictement convexe*. Dans ce cas soit $H_n(Y)$ la courbure de Gauss du plongement Y ; deux fonctions G et g sont simultanément définies sur S^n par,

$$G(X) \equiv g(N) \equiv H_n(Y),$$

et l'on a l'identité (vectorielle) de Minkowski

$$(*) \quad 0 \equiv \int_{S^n} \frac{N}{g(N)} dS(N) = \int_{\Sigma} N(Y) d\Sigma(Y).$$

Mais en choisissant *pour inconnue* la paramétrisation plus générale $X \rightarrow Y$, dans le problème de courbure de Gauss prescrite

$$H_n(Y) = K(Y) > 0,$$

on perd le bénéfice de la condition (*) car elle est satisfaite indépendamment de $G(X) \equiv K(Y)$. On ne peut que chercher des conditions suffisantes, aussi faibles que possible, sur $K(Y)$ pour $Y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$.

I. — Mise en équation

Si Σ est un graphe radial sur S^n , il est commode de représenter son vecteur-position Y dans \mathbb{R}^{n+1} sous la forme,

$$X \in S^n \mapsto Y(X) = \exp[-\psi(X)]X \in \mathbb{R}^{n+1}$$

* Novembre 1985. On pourra consulter le récent travail [18] sur les hypersurfaces étoilées de \mathbb{R}^{n+1} dont une fonction symétrique des courbures principales est prescrite; les problèmes de valeurs propres nonlinéaires correspondants n'y sont toutefois pas considérés (dans la version dont l'auteur a eu connaissance par N. V. Krylov).

où ψ est une fonction définie sur S^n . On prolonge naturellement ψ à $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ en la maintenant constante *radialement*.

On obtient, par les *mêmes* calculs que dans [15] (section 1), l'expression suivante pour l'image réciproque sur S^n , par $X \mapsto Y$, de la courbure de Gauss H_n de Σ :

$$H_n(e^{-\psi} X) \equiv e^n \psi (1 + |\nabla \psi|^2)^{-1 - (n/2)} \det(\delta_{ij} + \psi_i \psi_j + \psi_{ij}).$$

ψ_i, ψ_{ij} indique la dérivation covariante sur S^n munie de sa métrique canonique, par rapport à un repère orthonormé tangent local. Lorsque Σ est *strictement convexe*, le tenseur

$$(\delta_{ij} + \psi_i \psi_j + \psi_{ij})$$

est partout *défini positif* (et vice versa).

Le problème envisagé dans [12] peut donc être mis en équation de la façon suivante : étant donnée une fonction $K > 0$ de classe C^k , $k \geq 3$, sur $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, chercher une fonction ψ de classe $C^{k+1, \alpha}$, $\forall \alpha \in]0, 1[$, définie sur S^n et vérifiant,

$$(2) \quad (\delta_{ij} + \psi_i \psi_j + \psi_{ij}) \text{ défini positif sur } S^n$$

$$(3) \quad \det(\delta_{ij} + \psi_i \psi_j + \psi_{ij}) = K(e^{-\psi} X) e^{-n\psi} (1 + |\nabla \psi|^2)^{1 + (n/2)}.$$

Il s'agit d'un problème global du type de *Monge-Ampère elliptique* sur la variété riemannienne compacte (S^n, e) , e désignant la métrique canonique induite sur S^n par la métrique euclidienne ambiante de \mathbb{R}^{n+1} .

Remarque 1. — Si $\psi \in C^2(S^n)$ vérifie (3), nécessairement ψ vérifie aussi (2) [6] (lemme 6). En effet (2) est vérifiée *a priori* au *minimum* de ψ sur S^n , et par continuité, comme $K > 0$, (2) se propage à toute la variété. Ainsi (3) est-elle *a priori* une équation différentielle non linéaire *elliptique*, comme le montre sa linéarisation; classiquement, lorsque K est *analytique* toute solution de (3) l'est aussi d'après e. g. [10] (section 5.7).

II. — Hypothèses sur la courbure prescrite

Dans ce paragraphe nous énonçons des conditions *suffisantes* sur K pour que le problème (3) admette une solution. Tout d'abord, nous prendrons toujours

$$(H. 0) \quad K \in C^k(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}), \quad k \geq 3 \text{ et } K > 0.$$

Dès lors, la résolution de (3) repose entièrement sur la possibilité d'obtenir une certaine estimation *a priori* C^0 (voir section III ci-après). A cet effet, V. I. Oliker introduit l'hypothèse suivante [12] :

(H. 1) Il existe deux réels R_1, R_2 dans $]0, +\infty[$, $R_1 \leq 1 \leq R_2$, tels que,

$$K(Y) > |Y|^{-n} \quad \text{si } |Y| < R_1$$

et,

$$K(Y) < |Y|^{-n} \quad \text{si } |Y| > R_2.$$

Comme nous le verrons (section III), il est possible d'affaiblir cette hypothèse dans les termes suivants :

(H. 2) Il existe deux réels R_1, R_2 dans $]0, +\infty[$, $R_1 \leq R_2$, tels que,

$$\inf_{X \in S^n} K(R_1 X) \geq \frac{1}{(R_1)^n}, \quad \sup_{X \in S^n} K(R_2 X) \leq \frac{1}{(R_2)^n}.$$

(H. 1) implique (H. 2). Cependant, observons que même (H. 2) ne permet pas de traiter le théorème 1.

Dans [12] V. I. Oliker émet, outre (H. 1), l'hypothèse de monotonie suivante qui assure *a priori* l'unicité de la solution, et l'inversibilité locale du problème (3) (nécessaire pour appliquer la méthode de continuité) :

(H. 3) il existe un intervalle $]r_1, r_2[$ dans $]0, +\infty[$ contenant $[R_1, R_2]$ sur lequel K ne croît pas plus vite en fonction de la distance r à l'origine que la courbure de Gauss d'hypersphères centrées à l'origine, i. e.

$$\forall r \in]r_1, r_2[, \quad \forall X \in S^n, \quad \frac{\partial}{\partial r} [r^n K(rX)] \leq 0.$$

Dans l'introduction de [12], Oliker signale un travail de Vereschagin [16], sur un propos analogue dans \mathbb{R}^3 , dans lequel la condition (H. 3) n'est pas présente. Nous verrons en effet (section III) que cette condition est superflue, en démontrant le :

THÉORÈME 2. — *Sous les hypothèses (H. 0) et (H. 2), il existe une hypersurface strictement convexe Σ admettant K comme courbure de Gauss. Σ est un graphe radial sur S^n de classe $C^{k+1, \alpha}(S^n)$, $\forall \alpha \in]0, 1[$ (ou analytique si K est analytique), situé entre les deux hypersphères centrées en O de rayons R_1 et R_2 .*

Sous l'hypothèse supplémentaire (H. 3), V. I. Oliker a démontré que Σ est unique, éventuellement à homothétie près [12].

III. Preuve du théorème 2

III. 1. *Preuve sous les hypothèses (H. 0) et (H. 1).* — Sous les hypothèses (H. 0) et (H. 1) la preuve découle directement du théorème 3 de [6] (p. 405) en résolvant (3) via la méthode de *Point Fixe* de Leray-Schauder.

Indiquons brièvement la procédure à suivre. Soit $\alpha \in]0, 1[$ fixé.

Considérons l'espace de Banach $C^{4, \alpha}(S^n)$ et l'application

$$\mathcal{C} : [0, 1] \times C^{4, \alpha}(S^n) \rightarrow C^{4, \alpha}(S^n)$$

définie, grâce au théorème 3 de [6], par $\mathcal{C}(t, \xi) = \psi$ où ψ est l'unique solution de classe $C^{4, \alpha}(S^n)$ de l'équation

$$(3. t) \quad \det(\delta_{ij} + \psi_i \psi_j + \psi_{ij}) = [K(e^{-\xi} X) e^{-n\xi} (1 + |\nabla \xi|^2)^{1+(n/2)}]^t e^{\psi-t\xi}.$$

Par construction,

$$\forall \xi \in C^{4, \alpha}(S^n), \quad \mathcal{C}(0, \xi) \equiv 0.$$

En outre K étant de classe C^3 , $\forall \beta \in]0, 1[$, $\psi \in C^{4, \beta}(S^n)$; donc pour tout $t \in [0, 1]$ fixé, il suit du théorème d'Ascoli que l'opérateur $\xi \rightarrow \mathcal{C}(t, \xi)$ est *compact*. Enfin pour tout $\xi \in C^{4, \alpha}(S^n)$ fixé, il suit du théorème des fonctions implicites que $t \rightarrow \mathcal{C}(t, \xi)$ est *continue*. Nous sommes bien dans les conditions d'application du théorème de Leray-Schauder [9] : si l'ensemble,

$$\mathcal{E} = : \{ \psi \in C^{4, \alpha}(S^n), \exists t \in [0, 1], \mathcal{C}(t, \psi) \equiv \psi \}$$

est *a priori* borné dans $C^{4, \alpha}(S^n)$, l'opérateur $\mathcal{C}(1, \cdot)$ admet un point fixe, de classe $C^{k+1, \alpha}$ par la théorie de Schauder (e.g. [10]), solution par construction du problème original (3).

Soit $\psi \in \mathcal{E}$. L'estimation *a priori* C^0 sur ψ est bâti dans [12] : on raisonne sur l'équation (3. t) avec $\xi \equiv \psi$ en se plaçant *aux extrema* de ψ sur S^n . On trouve l'encadrement annoncé au théorème 2,

$$\min(1, R_1) = R_1 \leq e^{-\psi} \leq \max(1, R_2) = R_2,$$

(sans supposer $R_1 \leq 1 \leq R_2$, on obtiendra une *meilleure* estimation dans la section III. 3 ci-après).

Comme le remarque V. I. Oliker, l'estimation *a priori* sur $|\nabla\psi|$ découle du lemme 6 de [6] (p. 422) où sont caractérisées les fonctions vérifiant (2); on trouve,

$$\sup_{S^n} |\nabla\psi| \leq \sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1}.$$

Les estimations *a priori* sur $|\nabla^2\psi|$ et $|\nabla^3\psi|$ ont été établies dans [7] pour des équations de Monge-Ampère elliptiques bien plus générales, par des calculs *intrinsèques* menés dans le cadre d'une variété Riemannienne compacte *quelconque*.

Ces calculs s'appliquent sans restriction au cas présent, la condition (28) énoncée dans la conclusion de [7] étant trivialement satisfaite avec $u = \psi$, $\alpha = 1$ et $\beta = n$ (voir [7], p. 176). Pour être complet disons en deux mots qu'il s'agit d'appliquer le principe du maximum, pour l'estimée C^2 , à la fonctionnelle,

$$L \delta g(n + |\nabla\psi|^2 - \Delta\psi) - k\psi + l|\nabla\psi|^2,$$

pour l'estimée C^3 , à la fonctionnelle,

$$(g^{ai} g^{bj} g^{ck} \psi_{abc} \psi_{ijk})^{1/2} - q \Delta\psi,$$

k, l, q , désignant des paramètres réels à choisir astucieusement, Δ désignant le laplacien de la métrique e et (g^{ij}) la matrice *inverse* de $(\delta_{ij} + \psi_i \psi_j + \psi_{ij})$.

Oliker quant à lui établit dans [12] l'estimation C^2 (et il énonce sans démonstration la C^3) dans le style *extrinsèque* de e.g. [13] : par un choix astucieux des coordonnées dans

un hémisphère et par un changement correspondant de fonction inconnue, il se ramène à des estimations intérieures pour l'équation de Monge-Ampère classique dans un ouvert de \mathbb{R}^n .

Dès lors, l'estimation *a priori* dans $C^{4, \beta}(S^n)$, $\forall \beta \in]0, 1[$, découle des inégalités de Schauder pour les équations linéaires elliptiques (e.g. [10]), en dérivant une fois l'équation (3. t) (avec $\xi \equiv \psi$). Si $K \in C^k(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})$ avec $k \geq 5$, on peut aussi établir directement une estimation *a priori* sur ψ dans $C^k(S^n)$ par des calculs intrinsèques assez brefs comme dans [8].

Sous les hypothèses (H. 0) et (H. 1) le théorème 2 est donc prouvé.

III. 2. *Un lemme.* — Pour prouver le théorème 2, nous avons besoin d'un lemme préliminaire qui est une variante du théorème 3 de [6].

LEMME 1. — Soit (V_n, e) une variété riemannienne compacte. Étant donnés $f \in C^k(T^*V_n)$, $k \geq 3$, et $\lambda \in]0, +\infty[$, $\forall \alpha \in]0, 1[$ il existe une solution unique $\psi \in C^{4+\alpha, \alpha}(V_n)$ du problème de type Monge-Ampère elliptique suivant, $g_\psi = : (e + \nabla\psi \otimes \nabla\psi + \nabla^2\psi)$ défini positif sur V_n ,

$$\det(e^{-1} \cdot g_\psi) = \exp[\lambda\psi + f(X, \nabla\psi)]$$

∇ indiquant la dérivation covariante dans la métrique e .

La preuve du lemme 1 est immédiate en utilisant encore le théorème 3 de [6] combiné avec un argument de *Point Fixe* [9] : on considère l'application,

$$(t, \xi) \in [0, 1] \times C^{4, \alpha}(V_n) \rightarrow \psi \in C^{4, \alpha}(V_n)$$

où ψ vérifie,

$$\det(e^{-1} \cdot g_\psi) = \exp[\lambda\psi + tf(X, \nabla\xi)]$$

(rappelons que cela implique *a priori* que g_ψ est partout défini positif, cf. [6], lemme 6).

Les estimées sur les points fixes ψ sont les mêmes que dans [6], [7].

En particulier,

$$|\psi|_{C^0} \leq \frac{1}{\lambda} |f(\cdot, 0)|_{C^0}.$$

Nous considérons le lemme 1 acquis.

III. 3. *Preuve du théorème 2.* — On procède par une méthode d'itération (voir e.g. [7], section IV) en définissant convenablement une suite de fonctions, *a priori* contenue dans un compact d'un bon espace de Hölder, et dont la limite est par construction solution de l'équation (3). Posons :

$$\lambda = 1 + \max \left\{ 0, \sup \frac{\partial}{\partial s} [\log K(e^{-s}X)] - n \right\},$$

le sup étant pris sur $(X, s) \in S^n \times [-\log R_2, -\log R_1]$.

Grâce au lemme 1 nous pouvons considérer la suite $(\psi^{(i)})$, $i \in \mathbb{N}$, définie par,

$$\psi^{(0)} = -\log R_2$$

et $\forall i \geq 1$, $\psi^{(i)}$ est la solution $C^{4, \alpha}(S^n)$ de l'équation,

$$\det(e^{-1} \cdot g_i) = [K(e^{-\psi^{(i-1)}} X) e^{-n\psi^{(i-1)}} (1 + |\nabla\psi^{(i)}|^2)^{1+(n/2)}] \exp[\lambda(\psi^{(i)} - \psi^{(i-1)})]$$

où $g_i = : g_{\psi^{(i)}}$ (notation du lemme 1).

Estimation a priori uniforme C^0 sur $\psi^{(i)}$.

Montrons par récurrence que,

$$(4) \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad -\log R_2 \leq \psi^{(i)} \leq -\log R_1.$$

Ceci est vrai pour $i=0$, supposons-le vrai jusqu'au rang $(i-1)$.

Montrons d'abord que $-\log R_2 \leq \psi^{(i)}$. Au point $X_i \in S^n$ où $\psi^{(i)}$ atteint son *minimum*, $|\nabla\psi^{(i)}|(X_i) = 0$, $\nabla^2\psi^{(i)}(X_i) \geq 0$, donc

$$\log \det(e^{-1} \cdot g_i)(X_i) \geq 0$$

et d'après le choix de λ , l'hypothèse de récurrence et l'hypothèse (H. 2),

$$\begin{aligned} \log \det(e^{-1} \cdot g_i)(X_i) &= \lambda[\psi^{(i)}(X_i) + \log R_2] + \log[(R_2)^n K(R_2 X_i)] \\ &\quad + \{[\log K(e^{-\psi^{(i-1)}} X_i) - n\psi^{(i-1)}] - \log[(R_2)^n K(R_2 X_i)] \\ &\quad - \lambda[\psi^{(i-1)}(X_i) + \log R_2]\} \\ &\leq \lambda[\psi^{(i)}(X_i) + \log R_2]. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\psi^{(i)} \geq \psi^{(i)}(X_i) \geq -\log R_2.$$

On raisonnerait de même, au point X'_i où $\psi^{(i)}$ atteint son *maximum* sur S^n pour prouver que

$$\psi^{(i)} \leq \psi^{(i)}(X'_i) \leq -\log R_1.$$

On montre encore par un même raisonnement (voir e. g. [4], lemme 4) que $(\psi^{(i)})$ est une suite *croissante*.

Notons que l'encadrement *a priori* (4), obtenu par cette méthode d'itération à partir de $\psi^{(0)} = -\log R_2$, est *plus resserré* que l'encadrement C^0 (de la section III. 1) obtenu par une méthode de Point Fixe.

Estimations a priori uniformes d'ordres supérieurs et conclusion.

Il suit de (4) et du lemme 6 de [6] que,

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \sup_{S^n} |\nabla\psi^{(i)}| \leq \sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 1}.$$

Dès lors les estimations *a priori* uniformes sur $|\nabla^2 \psi^{(i)}|$ et $|\nabla^3 \psi^{(i)}|$ sont établies comme dans [7] (section IV).

On déduit du théorème d'Ascoli que la suite $(\psi^{(i)})$ (croissante) converge (toute entière) dans $C^{2, \alpha}(S^n)$, $\forall \alpha \in]0, 1[$, vers une fonction ψ satisfaisant par construction (3) (donc (2)) et l'encadrement (4). Il suit de la théorie de Schauder (e. g. [10]) que $\psi \in C^{k+1, \alpha}(S^n)$ et le théorème 2 est prouvé.

III. 4. *Remarques concernant l'unicité.* — Lorsque l'hypothèse (H. 3) n'est pas satisfaite, on ne peut *a priori* se prononcer sur l'unicité de l'hypersurface Σ donnée par le théorème 2.

Notons en particulier que les méthodes de Point Fixe (section III. 1) et d'itération (section III. 3) ne fournissent pas nécessairement la même solution.

Dans le même ordre d'idée que la remarque 7.2 de [12], notons surtout que si l'hypothèse (H. 2), sur la courbure prescrite K , est satisfaite par plusieurs couples (R_1, R_2) tels que les segments $[R_1, R_2]$ soient deux à deux disjoints, le théorème 2 affirme l'existence de plusieurs hypersurfaces Σ strictement convexes deux à deux disjointes (et non nécessairement homothétiques) admettant K comme courbure de Gauss.

Enfin, si la courbure de Gauss prescrite K vérifie identiquement sur $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, $K(Y) \equiv K(-Y)$, l'équation (3) passe au quotient sur $P_n(\mathbb{R})$: on l'y résoud comme ci-avant, en utilisant le lemme 1 et les méthodes de [6] [7]. L'hypersurface Σ obtenue est alors symétrique par rapport à l'origine. Cette symétrie est impérative, par unicité, lorsque (H. 3) est satisfaite.

IV. — Preuve du théorème 1

D'après (3), le théorème 1 est une conséquence du lemme suivant que nous énoncerons dans le cadre d'une variété riemannienne compacte quelconque, en reprenant les notations du lemme 1.

LEMME 2. — Soit (V_n, e) une variété riemannienne compacte dont on suppose la courbure sectionnelle minorée par une constante strictement positive. Soit $\Phi \in C^k(V_n)$, $k \geq 3$, $\Phi > 0$. Il existe un unique réel $\lambda(\Phi) \in [(\sup_{V_n} \Phi)^{-1}, (\inf_{V_n} \Phi)^{-1}]$ et une fonction $\psi \in C^{k+1, \alpha}(V_n)$,

$\forall \alpha \in]0, 1[$ (ou analytique si Φ est analytique), unique à une constante additive près, solution de l'équation de Monge-Ampère

$$(5) \quad \det(e^{-1} \cdot g_\psi) = \lambda(\Phi) \Phi(X) (1 + |\nabla \psi|^2)^{1+(n/2)}.$$

Ce lemme permet de conclure puisqu'il s'applique à (S^n, e) pour laquelle la courbure sectionnelle est constante, égale à 1 (voir e. g. [2], p. 68 et 99). La fin de cet article est consacrée à la preuve du lemme 2.

L'encadrement *a priori* de $\lambda(\Phi)$ est immédiat en considérant (5) successivement au maximum et au minimum de ψ sur V_n . Quant aux questions d'unicité, nous les examinons en fin de section.

IV. 1. *Existence d'une solution de (5).* — Utilisons la *Méthode de Continuité*. Pour appréhender le facteur d'échelle $\lambda(\Phi)$ et l'inversibilité locale, introduisons (comme dans [5]) la moyenne $\bar{\psi}$ de ψ sur (V_n, e) dans l'équation de continuité,

$$(5_t) \quad \det(e^{-1} \cdot g_\psi) = [\Phi(X)]^t (1 + |\nabla\psi|^2)^{1+(n/2)} \exp(-\bar{\psi}),$$

où $t \in [0, 1]$. Pour $\alpha \in]0, 1[$ fixé, soit

$$\mathcal{F} = \{t \in [0, 1], \exists \psi_t \in C^{k+1, \alpha}(V_n) \text{ solution de (5}_t)\}.$$

Par construction de (5), \mathcal{F} est *non vide* (car $0 \in \mathcal{F}$ trivialement) et résoudre (5) équivaut à prouver que $1 \in \mathcal{F}$, avec $\lambda(\Phi) \equiv \exp(-\bar{\psi}_1)$ *unique* (voir section IV. 3). Par un argument de *connexité* nous allons montrer que

$$\mathcal{F} \equiv [0, 1].$$

L'*inversibilité locale* du problème (5) se démontre sans nouvelle difficulté en raisonnant comme dans [5] (p. 345-347). L'ouverture relative de \mathcal{F} dans $[0, 1]$ en résulte.

Nous n'avons plus qu'à établir le

LEMME 3. — *L'ensemble $\{\psi_t, t \in \mathcal{F}\}$ est borné dans $C^0(V_n)$.*

En effet, supposons un instant ce lemme acquis. Le lemme 6 de [6] et les estimations *a priori* C^2 et C^3 de [7] fournissent pour $\{\psi_t, t \in \mathcal{F}\}$ une borne dans $C^3(V_n)$. Le théorème d'Ascoli joint à la régularité elliptique de Schauder [10] permet d'en déduire que \mathcal{F} est *fermé*, par un argument standard (voir e. g. [4], p. 367).

La preuve du lemme 2 est donc réduite à celle du lemme 3 qui fait l'objet de la section suivante.

IV. 2. *Estimation a priori C^0 (preuve du lemme 3).* — Nous allons procéder par étapes successives.

Dans une carte générique de (V_n, e) nous noterons $\nabla_{ij}, \nabla_{ijk}$, etc. les dérivées covariantes $\nabla_i \nabla_j, \nabla_i \nabla_j \nabla_k$, etc., et $(e^{ij}), (g_t^{ij})$ les matrices de e^{-1} et de $(g_{\psi_t})^{-1}$.

Comme nous l'avons déjà signalé à propos de $\lambda(\Phi)$, le lemme suivant est immédiat en raisonnant sur (5) *aux extrema* de $\psi = \psi_t$.

LEMME 4. — $\forall t \in \mathcal{F}$, la moyenne $\bar{\psi}_t$ vérifie a priori l'encadrement uniforme :

$$\min_{V_n} \{0, \inf \log \Phi\} \leq t \inf_{V_n} (\log \Phi) \leq \bar{\psi}_t \leq t \sup_{V_n} (\log \Phi) \leq \max \{0, \sup \log \Phi\}.$$

Grâce au lemme 4, il suffit désormais d'estimer uniformément

$$a_t = : \sup_{V_n} |\nabla\psi_t|$$

en vertu de l'inégalité vérifiée identiquement $\forall \psi \in C^1(V_n)$,

$$|\psi|_{C^0} \leq |\bar{\psi}| + D \sup_{V_n} |\nabla\psi|$$

où D désigne le diamètre de (V_n, e) . A cet effet, nous raisonnerons au point $X_t \in V_n$ où la fonction-test

$$u_t = : \frac{1}{2} |\nabla \psi_t|^2$$

atteint son maximum sur V_n , écrivant dans une carte locale :

$$(6) \quad |\nabla u_t|(X_t) = 0, \quad (g_t^{ij} \nabla_{ij} u_t)(X_t) \leq 0.$$

Calculons les expressions qui interviennent dans (6).

Un calcul intrinsèque.

Dérivons une première fois u_t dans une carte,

$$(7) \quad \nabla_i u_t = \nabla^i \psi_t \nabla_{li} \psi_t$$

puis une seconde fois et saturons,

$$(8) \quad g_t^{kl} \nabla_{kl} u_t = g_t^{kl} \nabla_k^i \psi_t \nabla_{li} \psi_t + \nabla^i \psi_t (g_t^{kl} \nabla_{kli} \psi_t).$$

Pour exprimer le dernier terme de (8), nous commençons par dériver une fois l'équation (5) ce qui fournit :

$$g_t^{kl} (\nabla_{ikl} \psi_t + 2 \nabla_k \psi_t \nabla_{il} \psi_t) = t \nabla_i (\log \Phi) + \left(1 + \frac{n}{2}\right) \nabla_i [\log (1 + 2 u_t)].$$

Pour pouvoir exploiter ces relations on doit introduire le tenseur de courbe $R_t^j{}_{ki}$ de (V_n, e) ; (8) s'écrit finalement,

$$(9) \quad g_t^{kl} \nabla_{kl} u_t = g_t^{kl} \nabla_k^i \psi_t \nabla_{li} \psi_t + g_t^{kl} R_t^j{}_{ki} \nabla^i \psi_t \nabla_j \psi_t \\ + t \nabla^i \psi_t \nabla_i (\log \Phi) + \left(1 + \frac{n}{2}\right) \nabla^i \psi_t \nabla_i [\log (1 + 2 u_t)] \\ + 2 g_t^{kl} \nabla_k \psi_t \nabla_l \psi_t (1 + 2 u_t) - 4 u_t.$$

Choix d'une carte en X_t .

Au point X_t où u_t atteint son maximum sur V_n , prenons une carte normale pour g telle que

$$(10) \quad \partial_i \psi_t(X_t) = \delta_{i1} |\nabla \psi_t|(X_t) \equiv \delta_{i1} a_t$$

et telle que la sous-matrice $(\partial_{\alpha\beta} \psi_t(X_t))$, $\alpha, \beta > 1$, soit diagonale. Il suit de (6) et (7) que,

$$(11) \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \partial_{1i} \psi_t(X_t) = 0,$$

donc $(g_t^{ij}(X_t))$ est en fait diagonale et ses valeurs propres sont simplement,

$$(12) \quad g_t^{11} = \frac{1}{1 + a_t^2}; \quad \forall \alpha > 1, \quad g_t^{\alpha\alpha} = \frac{1}{1 + \partial_{\alpha\alpha} \psi_t(X_t)}.$$

Si $n=1$, (5) et (11) joints au lemme 4 fournissent,

$$\sqrt{1+a_t^2} = [\Phi(X_t)]^{-t} \exp(\bar{\Psi}_t) \leq \frac{\sup \Phi}{\inf \Phi},$$

et la preuve est achevée. Nous supposons désormais $n \geq 2$.

Expression de l'inégalité de (6) en X_t .

Compte tenu des relations (9) à (12) l'inégalité de (6) s'écrit,

$$\sum_{\alpha=2}^n \frac{1}{(1+\partial_{\alpha\alpha}\Psi_t)} [(\partial_{\alpha\alpha}\Psi_t)^2 + a_t^2 R_{\alpha-1\alpha-1}] + t a_t \partial_1(\log \Phi) \leq 0.$$

Par hypothèse la courbure sectionnelle de (V_n, e) est minorée par $\sigma > 0$. Nécessairement donc,

$$b_t = : -\partial_1(\log \Phi)(X_t) > 0$$

et nous obtenons l'inégalité importante

$$(13) \quad t a_t b_t \geq a_t^2 \sigma \sum_{\alpha=2}^n \frac{1}{(1+\partial_{\alpha\alpha}\Psi_t)} + \sum_{\alpha=2}^n \frac{(\partial_{\alpha\alpha}\Psi_t)^2}{(1+\partial_{\alpha\alpha}\Psi_t)}.$$

CONCLUSION. — Pour conclure à partir de (13), distinguons deux cas.

Si,

$$\sum_{\alpha=2}^n \frac{1}{(1+\partial_{\alpha\alpha}\Psi_t)(X_t)} \geq 1,$$

nous avons immédiatement :

$$a_t \leq \frac{1}{\sigma} t b_t \leq \frac{1}{\sigma} \sup_{V_n} |\nabla(\log \Phi)|.$$

Sinon nécessairement,

$$\forall \alpha=2, \dots, n, \quad \partial_{\alpha\alpha}\Psi_t(X_t) > 0$$

et comme,

$$\frac{(\partial_{\alpha\alpha}\Psi_t)^2}{(1+\partial_{\alpha\alpha}\Psi_t)} \equiv \partial_{\alpha\alpha}\Psi_t - \frac{\partial_{\alpha\alpha}\Psi_t}{(1+\partial_{\alpha\alpha}\Psi_t)}.$$

Nous déduisons de (13) :

$$(14) \quad \sum_{\alpha=2}^n [1 + \partial_{\alpha\alpha}\Psi_t(X_t)] < 2n + t a_t b_t.$$

Mais compte-tenu de (12), l'équation (5_t) s'écrit en X_t :

$$\prod_{\alpha=2}^n [1 + \partial_{\alpha\alpha} \psi_t(X_t)] = [\Phi(X_t)]^t (1 + a_t^2)^{n/2} \exp(-\bar{\psi}_t),$$

et d'après l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique, (14) implique :

$$[\Phi(X_t)]^t (1 + a_t^2)^{n/2} \exp(-\bar{\psi}_t) < \left(\frac{2n + t a_t b_t}{n-1} \right)^{n-1},$$

d'où l'on déduit encore, à l'aide du lemme 4, une estimation uniforme qui suit de

$$(a_t)^n < \frac{\sup \Phi}{\inf \Phi} \left[\frac{a_t}{n-1} \sup_{V_n} |\nabla(\log \Phi)| + \frac{2n}{n-1} \right]^{n-1}.$$

Ainsi s'achève la preuve du lemme 3.

IV. 3. *Questions d'unicité.* — L'existence d'une solution $\psi \in C^{k+1, \alpha}(V_n)$ de l'équation

$$(15) \quad \det(e^{-1} \cdot g_\psi) = \exp(-\bar{\psi}) \Phi(X) (1 + |\nabla\psi|^2)^{1+(n/2)}$$

étant acquise, nous devons encore justifier l'écriture :

$$\exp(-\bar{\psi}) = \lambda(\Phi).$$

Nous supposons à cet effet que ψ et ξ sont deux solutions de classe $C^{k+1, \alpha}$ de l'équation (15) et nous montrerons que nécessairement $\bar{\psi} = \bar{\xi}$.

Raisonnons sur l'identité suivante, tout à fait immédiate,

$$(16) \quad \frac{\det(e^{-1} \cdot g_\psi)}{\det(e^{-1} \cdot g_\xi)} \equiv \det(g_\xi^{-1} \cdot g_\psi) \equiv \det[\delta_j^i + g_\xi^{ik} (\nabla_{kj} \delta + \nabla_k \delta \nabla_j \xi + \nabla_j \delta \nabla_k \psi)]$$

où l'on note $\delta = :(\psi - \xi)$. Au *maximum* (resp. *minimum*) de δ sur V_n , $|\nabla\delta| = 0$ et $\nabla^2 \delta$ est non positif (resp. non négatif), donc d'après (15) et (16) : $\exp(\bar{\xi} - \bar{\psi}) \leq 1$ (resp. ≥ 1). D'où l'égalité *a priori*,

$$\exp(-\bar{\psi}) \equiv \exp(-\bar{\xi})$$

qui justifie la *définition* :

$$\lambda(\Phi) = : \exp(-\bar{\psi}).$$

Pour achever la preuve du lemme 2, il reste à prouver que deux solutions ψ et ξ de classe $C^{k+1, \alpha}$ de l'équation (5) *ne diffèrent que par une constante additive*.

L'inégalité arithmétique-géométrique, (5) et (16) fournissent l'inégalité suivante (valable en tout point de V_n) :

$$(17) \quad \left(\frac{1 + |\nabla\psi|^2}{1 + |\nabla\xi|^2} \right)^{(1/2)+(1/n)} \leq 1 + \frac{1}{n} g_\xi^{ij} [\nabla_{ij} \delta + \nabla_i \delta \nabla_j (\psi + \xi)],$$

avec encore $\delta = :(\psi - \xi)$. Supposons non vide l'ouvert de V_n .

$$\Omega = : \{X \in V_n \mid |\nabla\psi|^2(X) > |\nabla\xi|^2(X)\}.$$

Notons que δ atteint *nécessairement* ses extrema (sur V_n) sur $\partial\Omega$: soit $X_0 \in \partial\Omega$ le point où δ atteint son *maximum*. D'une part,

$$|\nabla\delta|(X_0) = 0 \quad \text{et} \quad (\nabla_{ij}\delta)(X_0) \quad \text{est non positif,}$$

d'autre part d'après (17), δ vérifie dans $\bar{\Omega}$ l'inégalité différentielle *elliptique*,

$$(18) \quad g_{\xi}^{ij} [\nabla_{ij}\delta + \nabla_i\delta\nabla_j(\psi + \xi)] \geq 0.$$

Il s'ensuit que la matrice hessienne de δ en X_0 est identiquement *nulle* (en particulier, $|\nabla(|\nabla\psi|^2 - |\nabla\xi|^2)|(X_0) = 0$ donc $\partial\Omega$ ne satisfait pas a priori à la « condition de sphère intérieure » en X_0 suffisante pour appliquer le Principe du Maximum fort [14] (p. 65) et contredire ainsi immédiatement $|\nabla\delta|(X_0) = 0$). Dans ces conditions, pour X voisin de X_0 ,

$$\delta(X) = 0(\rho^4), \quad |\nabla\delta(X)| = 0(\rho^3), \quad |\nabla^2\delta(X)| = 0(\rho^2),$$

où ρ désigne la distance géodésique de X à X_0 . Mais d'après (16) et (5), δ vérifie l'équation,

$$\begin{aligned} \det[\delta_j^i + g_{\xi}^{ik}(\nabla_{kj}\delta + \nabla_k\delta\nabla_j\xi + \nabla_j\delta\nabla_k\psi)] &= \left(\frac{1 + |\nabla\psi|^2}{1 + |\nabla\xi|^2} \right)^{1+(n/2)} \\ &= \left[1 + \frac{g^{ij}\nabla_i\delta\nabla_j(\psi + \xi)}{1 + |\nabla\xi|^2} \right]^{1+(n/2)}, \end{aligned}$$

dont le développement selon les puissances de ρ montre que nécessairement $|\nabla^2\delta|(X) = 0$ pour X voisin de X_0 . D'après le théorème des accroissements finis, il existe donc $X \in \Omega$ tel que $|\nabla\delta|(X) = 0$, ce qui contredit la définition de Ω . Ω est donc vide. En permutant les rôles de ψ et de ξ on montrerait de même que $\{|\nabla\xi|^2 > |\nabla\psi|^2\} = \emptyset$. En résumé, $|\nabla\psi|^2 = |\nabla\xi|^2$, et d'après (17) δ satisfait identiquement (18) sur V_n . Il suit du Principe du Maximum que δ doit être *constante*.

Q.E.D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. BAKELMAN et B. KANTOR, *Existence of Spherically Homeomorphic Hypersurfaces in Euclidean Space with Prescribed Mean Curvature* (Geometry and Topology, Leningrad, vol. 1, 1974, p. 3-10).
- [2] M. BERGER, P. GAUDUCHON et E. MAZET, *Le Spectre d'une variété riemannienne* (Lect. Notes Math., n° 194, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1971).
- [3] S.-Y. CHENG et S.-T. YAU, *On the regularity of the Solution of the n-Dimensional Minkowski Problem* (Comm. Pure Appl. Math., vol. XXXIX, 1976, p. 495-516).
- [4], [5], [6] Ph. DELANOË, *Equations du type de Monge-Ampère sur les variétés riemanniennes compactes I, II, III*, (J. Funct. Anal., vol. 40, n° 3, 1981, p. 358-386; vol. 41, n° 3, 1981, p. 341-353; vol. 45, n° 3, 1982, p. 403-430).

- [7] Ph. DELANOË, *Equations de Monge-Ampère invariantes sur les variétés riemanniennes Compactes* (*Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. Non Linéaire*, vol. 1, n° 3, 1984, p. 147-178).
- [8] Ph. DELANOË et A. HIRSCHOWITZ, *About Nonlinear Elliptic Problems on Compact Manifolds* (à paraître).
- [9] J. LERAY et J. SCHAUDER, *Topologie et équations fonctionnelles* (*Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.*, vol. 51, 1934, p. 45-78).
- [10] C. B. MORREY, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations* (*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band*, 130, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966).
- [11] L. NIRENBERG, *The Weyl and Minkowski Problems in Differential Geometry in the Large* (*Comm. Pure Appl. Math.*, vol. VI, 1953, p. 337-394).
- [12] V. I. OLIKER, *Hypersurfaces in \mathbb{R}^{n+1} with Prescribed Gaussian Curvature and Related Equations of Monge-Ampère Type*, (*Comm. P.D.E.*, vol. 9, n° 8, 1984, p. 807-838).
- [13] A. V. POGORELOV, *The Minkowski Multidimensional Problem* (Winston-Wiley, 1978, New York, Toronto, London, Sydney).
- [14] M. H. PROTTER et H. F. WEINBERGER, *Maximum Principles in Differential Equations* (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.Y., 1967).
- [15] A. E. TREIBERGS et S. WALTER WEI, *Embedded Hyperspheres with prescribed Mean Curvature*, (preprint M.S.R.I., 026-83, Berkeley, March 1983).
- [16] B. M. VERESCHAGIN, *Reconstruction d'une surface fermée convexe à partir de sa courbure de Gauss* (*Questions de Géométrie Globale*, A. L. VERNER éd., Inst. Pédag. d'État de Léninegrad, 1979, p. 7-12, en russe).
- [17] YAU éd., *Seminar on Differential Geometry* (*Ann. of Math. Studies*, Study 102, Princeton University Press, Princeton N.J., 1982).
- [18] L. CAFFARELLI, L. NIRENBERG et J. SPRUCK, *Nonlinear Second Order Elliptic Equations IV. Starshaped Compact Weingarten Hypersurfaces*, (preprint 1985).

(Manuscrit reçu le 4 décembre 1984,
révisé le 30 avril 1985.)

Ph. DELANOË
Université de Nice,
Mathématiques,
Parc Valrose, 06034 Nice Cedex.