

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HERWIG HAUSER

La construction de la déformation semi-universelle d'un germe de variété analytique complexe

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 18, n° 1 (1985), p. 1-56

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1985_4_18_1_1_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA CONSTRUCTION DE LA DÉFORMATION SEMI-UNIVERSELLE D'UN GERME DE VARIÉTÉ ANALYTIQUE COMPLEXE

PAR HERWIG HAUSER

TABLE DES MATIÈRES

<i>Introduction</i>	2
<i>I. Morphismes plats</i>	4
1. La notion de morphismes plats banachiques.	4
2. Caractérisation des morphismes plats.	6
3. Le platificateur local d'un morphisme.	9
<i>II. La déformation semi-universelle d'une singularité isolée</i>	13
1. Déformations.	13
2. Déploiements.	14
3. Lien entre déploiements et déformations.	15
4. La construction d'une famille semi-universelle de déploiements banachiques.	16
5. La construction d'une famille semi-universelle de déformations banachiques.	20
6. La déformation semi-universelle d'une singularité isolée.	23
<i>III. Calculs</i>	25
1. Un algorithme de construction de la déformation semi-universelle d'une singularité isolée.	25
2. Exemples.	28
<i>A. 0. Appendice, préliminaires</i>	33
<i>A. I. Variétés analytiques banachiques</i>	35
1. Définitions.	35
2. Critères de finitude.	38
3. Morphismes sur un produit.	40
4. Fibrés banachiques.	42
<i>A. II. Le théorème de division</i>	45
1. Quelques invariants.	45
2. Le théorème de division.	46
3. Critères de constructibilité.	50
4. Division avec paramètres.	53

Introduction

L'objet de cet article est d'indiquer de façon aussi précise que possible une construction algorithmique de la déformation semi-universelle d'une singularité isolée.

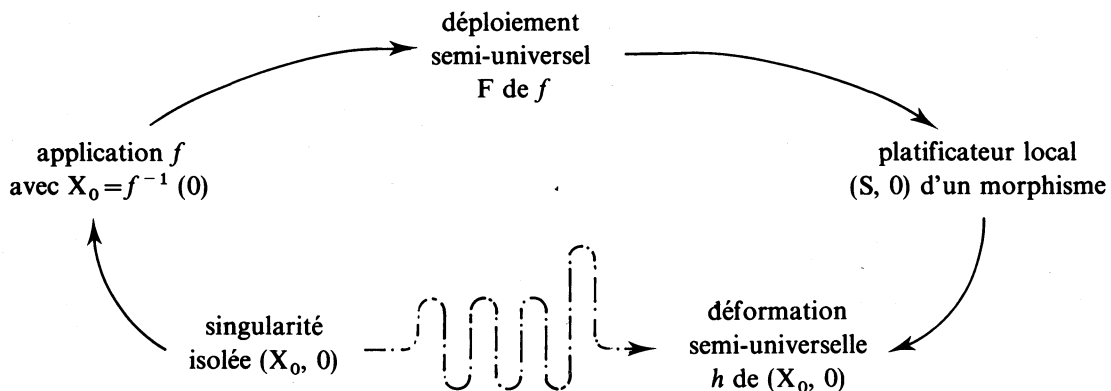
Soit X_0 une variété analytique complexe. On sait d'après un théorème de Grauert (*Inv. Math.*, vol. 15, 1972) que le germe $(X_0, 0)$ admet une déformation semi-universelle s'il est à singularité isolée à l'origine. Si de plus $(X_0, 0)$ est de type singulier fini, la construction d'un déploiement semi-universel d'un germe d'application analytique f définissant X_0 comme sa fibre $f^{-1}(0)$ [*Théorème de Mather (Pub. I.H.E.S.*, n° 37, 1969)], et l'existence d'un platificateur local d'un morphisme entre variétés analytiques (HIRONAKA, LEJEUNE et TEISSIER, *Astér.*, n° 7/8, 1973) s'amalgament dans une construction de la déformation semi-universelle du germe $(X_0, 0)$ (TEISSIER, *Proc. Real and Complex Singularities*, Oslo, 1976; GALLIGO, *Ann. Inst. Fourier*, t. XXIX, 1979).

Mais la plupart des singularités isolées refuse d'être de type singulier fini. Dans le cas général, à part un certain nombre d'exemples calculés à la main, aucune procédure algorithmique de construction ne semble être connue.

Dans ce travail on s'est proposé d'aplanir cet inconvénient en généralisant la dite construction au cas de toute singularité isolée, et de développer un algorithme détaillé de la construction.

Initié par une idée de B. Teissier (*loc. cit.*, p. 635), on va considérer des déploiements à une infinité de paramètres du germe f définissant $(X_0, 0)$, et poursuivre la construction dans la catégorie des variétés analytiques banachiques introduite par A. Douady. Une extension du théorème du platificateur d'un morphisme au cas banachique permettra de récupérer à partir d'un déploiement semi-universel banachique du germe f la déformation semi-universelle banachique h de $(X_0, 0)$. On prouvera que, si X_0 est à singularité isolée à l'origine, celle-ci est en effet un morphisme entre variétés de dimension finie. Ainsi la théorie des variétés analytiques banachiques ne sert que comme intermédiaire.

Voici une illustration du chemin parcouru :



L'outil essentiel de la construction sera la division de séries convergentes dans la version généralisée de Grauert, Hironaka et Galligo. On indiquera des conditions suffisantes pour qu'elle admette un algorithme fini.

Le premier chapitre introduit et caractérise la notion de morphisme plat entre variétés analytiques banachiques. On prouve l'existence d'un platificateur local banachique et on en donne une description explicite.

Le deuxième chapitre rappelle les notions de déploiement et de déformation et les étend au cas d'une infinité de paramètres. On établira l'existence et la construction d'une « famille semi-universelle » de déploiements banachiques pour tout germe d'application analytique entre espaces affines de dimension finie. Appliquant le théorème du platificateur on en déduira une construction d'une « famille semi-universelle » de déformations banachiques pour tout germe de variété analytique de dimension finie $(X_0, 0)$. Finalement on montrera que, si $(X_0, 0)$ est à singularité isolée à l'origine, cette famille contient une déformation de $(X_0, 0)$ qui est semi-universelle et de dimension finie. Elle sera de plus équivariante par rapport à une \mathbb{C}^* -action si $(X_0, 0)$ admet une \mathbb{C}^* -action.

Le troisième chapitre tire du précédent un algorithme de construction qui sera illustré par le calcul de quelques exemples simples.

Dans un appendice on a accueilli les outils et techniques utilisés dans les trois premiers chapitres. On y trouve un court aperçu de la théorie des variétés analytiques banachiques, le théorème de division et des critères de constructibilité.

Le point de départ de ce texte était le travail sur une Thèse de Troisième Cycle à l'Université Paris-Sud, Orsay, en 1979-1980. Elle a été dirigée par B. Teissier et A. Douady. C'est à eux qu'elle doit sa naissance. Je les remercie de tout cœur pour l'attention, l'aide et la stimulation qu'ils m'ont apportées.

Ma reconnaissance va également à R. O. Buchweitz pour des nombreuses discussions, et à l'équipe du Centre de Mathématiques à l'École Polytechnique pour son accueil chaleureux.

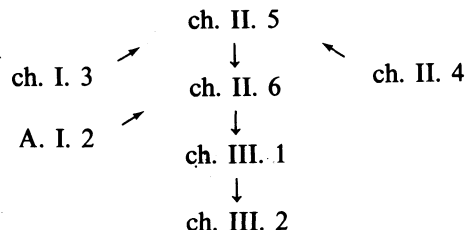
Avertissement

Le texte est composé de deux parties :

- une partie principale (Chap. I, II, III) développant les résultats nouveaux et l'algorithme de construction;
- un appendice (A.0, I, II) fournissant des résultats sur les variétés banachiques et le théorème de division.

Pour exhiber les connections internes du texte on s'est parfois permis de joindre aux résultats l'endroit où ils seront utilisés dans la suite (ex. : *cf.* la dém. du th. 2, A. II. 4 : comparer la démonstration du théorème 2 du deuxième chapitre de l'appendice, paragraphe 4).

Le lecteur désirant gagner un aperçu rapide sur le contenu de cet article devrait procéder selon le plan suivant de lecture :



I. — Morphismes plats

Dans les deux premières sections, X et S désignent deux variétés analytiques banachiques complexes (déf. 2, A. I. 1) munies d'un morphisme h de X dans S à fibres $X_s = h^{-1}(s)$ de dimension finie. On suppose que le morphisme h est installé [déf. 8(d), A. I. 2] au moyen d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{j} & S \times U \\
 & \searrow h & \swarrow \text{pr} \\
 & & S
 \end{array}$$

où U est un ouvert de \mathbb{C}^n , pr la projection sur le premier facteur et j un plongement de X dans $S \times U$ [cf. la prop. 1(b), A. I. 2]. Nous identifions X à la sous-variété $j(X)$ de $S \times U$ et écrivons alors $x = (s, u) \in X \subseteq S \times U$. Le faisceau structural \mathcal{O}_X sur X devient ainsi un faisceau quotient de $\mathcal{O}_{S \times U}$. A partir du n° 2 on supposera que X est une sous-variété de définition finie de $S \times U$ [déf. 8(c), A. I. 2].

1. LA NOTION DE MORPHISMES PLATS BANACHIQUES.

DÉFINITION 1. — Soient $x = (s, u)$ un point de X et $s = h(x)$ son image dans S par le morphisme $h : X \rightarrow S$.

Une résolution finie libre de l'anneau local $\mathcal{O}_{X, x}$ de X en x sur $\mathcal{O}_{S \times U, x}$ est une suite exacte L_* de $\mathcal{O}_{S \times U, x}$ -modules libres de type fini

$$L_* : 0 \rightarrow \mathcal{O}_{S \times U, x}^{p_m} \xrightarrow{D_m} \dots \xrightarrow{D_1} \mathcal{O}_{S \times U, x}^{p_0} \xrightarrow{D_0} \mathcal{O}_{X, x} \rightarrow 0.$$

Toute résolution finie libre L_* de $\mathcal{O}_{X, x}$ induit un complexe $L_*(s)$ de fibres sur $s \in S$:

$$L_*(s) : 0 \rightarrow \mathcal{O}_{U, u}^{p_m(s)} \xrightarrow{D_m(s)} \dots \xrightarrow{D_1(s)} \mathcal{O}_{U, u}^{p_0(s)} \xrightarrow{D_0(s)} \mathcal{O}_{X_s, x} \rightarrow 0,$$

identifiant $L_i(s) = \mathcal{O}_{\{s\} \times U, x}^{P_i}$ à $\mathcal{O}_{U, u}^{P_i}$.

DÉFINITION 2. — On dit qu'un morphisme installé h de X dans S est plat en un point $x = (s, u)$ de X s'il existe une résolution finie libre L_* de $\mathcal{O}_{X, x}$ sur $\mathcal{O}_{S \times U, x}$

$$0 \rightarrow L_m \xrightarrow{D_m} \dots \xrightarrow{D_1} L_0 \xrightarrow{D_0} \mathcal{O}_{X, x} \rightarrow 0,$$

qui induit une suite exacte de fibres $L_*(s)$

$$0 \rightarrow L_m(s) \xrightarrow{D_m(s)} \dots \xrightarrow{D_1(s)} L_0(s) \xrightarrow{D_0(s)} \mathcal{O}_{X_s, x} \rightarrow 0.$$

Remarques. — (a) La définition généralise la notion de morphismes plats en dimension finie : en effet, si S et donc X sont des variétés de dimension finie, les anneaux

$$\mathcal{O}_{X_s, x} = \mathcal{O}_{X, x} \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U, x}} \mathcal{O}_{U, u} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{X, x} \otimes_{\mathcal{O}_{S, s}} \mathbb{C},$$

sont isomorphes, ce qui implique l'équivalence des définitions.

(b) La définition ne dépend pas de la résolution choisie : si h est plat en $x \in X$, toute autre résolution libre finie L' de $\mathcal{O}_{X, x}$ sur $\mathcal{O}_{S \times U, x}$ induit une suite exacte de fibres.

(c) On note que la définition néglige une partie importante de la structure banachique de X en x ne considérant que son anneau local $\mathcal{O}_{X, x}$ des fonctions analytiques complexes sur X (cf. l'exemple de A. I. 1). Cependant, si le germe (X, x) est de définition finie dans $(S \times U, x)$ — c'est le cas qui nous intéresse — (X, x) est entièrement déterminé par l'anneau local $\mathcal{O}_{X, x} = \mathcal{O}_{S \times U, x} / I$ en tant que sous-variété de $(S \times U, x)$, i. e., à isomorphisme de paires de variétés près.

(d) La platitude d'un morphisme est une propriété ouverte : si un morphisme h est plat en un point x de X il l'est en tout point d'un voisinage ouvert V de x dans X .

PROPOSITION 1. — La notion de platitude est stable par changement de base : si le morphisme h de X dans S est plat en $x = (s, u) \in X$ et si v est un morphisme d'une variété analytique banachique T dans S le morphisme induit h^v du diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times_S T & \longrightarrow & X \\ \downarrow h^v & & \downarrow h \\ T & \longrightarrow & S \end{array}$$

est plat en $y = (x, t) \in X \times_S T$ pour tout $t \in T$ d'image s dans S .

Démonstration. — Soit L_* une résolution libre finie de $\mathcal{O}_{X, x}$ sur $\mathcal{O}_{S \times U, x}$. Elle induit de manière naturelle un complexe

$$L'_* = L_* \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U, x}} \mathcal{O}_{T \times U, (t, u)}.$$

La suite des fibres $L'_*(s)$ coïncide avec $L_*(s)$ et est donc exacte. Ceci entraîne en vertu de la proposition 6, A. I. 4, que le complexe L'_* est exact, i. e., une résolution libre finie de $\mathcal{O}_{X \times_S T, y}$ sur $\mathcal{O}_{T \times U, y}$.

2. CARACTÉRISATION DES MORPHISMES PLATS. — Nous supposons maintenant que X est une sous-variété de définition finie de $S \times U$, c'est-à-dire, la fibre $F^{-1}(0)$ d'un morphisme F de $S \times U$ dans un espace affine \mathbb{C}^p . Pour raisons de simplicité, toute situation locale sera seulement considérée comme étant à l'origine des espaces de Banach ambiants. Le morphisme $h : X \rightarrow S$ est la restriction à X de la projection sur le premier facteur de $S \times U$ sur S ; sa fibre $h^{-1}(0)$ s'identifie à la fibre $f^{-1}(0)$ de la restriction f de F à $\{0\} \times U$. On note I (resp. I_0) l'idéal de $\mathcal{O}_{S \times U, 0}$ (resp. $\mathcal{O}_{U, 0}$) engendré par les composantes F_1, \dots, F_p de F (resp. f_1, \dots, f_p de f). Suivant les notations des théorèmes de division, th. 1, A. II. 2, et th. 2, A. II. 4, on fixe une fois pour toutes un complémentaire $\Delta(I)$ de I dans $\mathcal{O}_{S \times U, 0}$ d'image $\Delta(I_0)$ dans $\mathcal{O}_{U, 0}$:

$$I + \Delta(I) = \mathcal{O}_{S \times U, 0},$$

$$I_0 \oplus \Delta(I_0) = \mathcal{O}_{U, 0}.$$

Voici la caractérisation des morphismes plats :

THÉORÈME 1 [cf. la partie (B) de la dém. du th. 2, chap. I. 3]. — *On a équivalence entre les conditions suivantes :*

(A) *Le morphisme h de X dans S est plat à l'origine de X .*

(A₀) *Pour toute sous-variété T de S de dimension finie, la restriction $h_T : X_T \rightarrow T$ de h sur T est plat à l'origine de $X_T = X \times_S T$.*

(B) *Toute relation $r \in \mathcal{O}_{U, 0}^p$ entre f_1, \dots, f_p se relève à une relation $R \in \mathcal{O}_{S \times U, 0}^p$ entre F_1, \dots, F_p dont l'image par l'application $\mathcal{O}_{S \times U, 0}^p \rightarrow \mathcal{O}_{U, 0}^p$ est r .*

(C) *La projection canonique $\mathcal{O}_{S \times U, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{S \times U, 0}/I$ induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_{S, 0}$ -modules $\pi : \Delta(I) \rightarrow \mathcal{O}_{S \times U, 0}/I$.*

(D) *Désignant par $\overline{m_S \cdot \mathcal{O}_{S \times U, 0}}$ l'idéal de $\mathcal{O}_{S \times U, 0}$ des germes de fonctions s'annulant sur $(\{0\} \times U, 0)$, on a l'égalité*

$$I \cdot \overline{(m_S \cdot \mathcal{O}_{S \times U, 0})} = I \cap \overline{m_S \cdot \mathcal{O}_{S \times U, 0}}.$$

Remarque. — Les seules implications non triviales sont celles qui déduisent (A) et (C) des autres conditions. L'anneau $\mathcal{O}_{S, 0}$ n'étant plus noethérien, les démonstrations usuelles de ces implications ne s'appliquent plus (cf. Hironaka, p. 249 et 262). Ceci exige le recours à certains résultats de la théorie des variétés analytiques banachiques (cf. la prop. 6, A. I. 4).

Démonstration. — Nous suivrons le schéma

$$\begin{array}{ccc}
 (A) \Leftrightarrow (B) & \Rightarrow & \\
 \downarrow & \uparrow & (C) \\
 (A_0) \Rightarrow (D) & \Leftarrow &
 \end{array}$$

(A) \Rightarrow (B). — Il existe une résolution finie libre L_* de $O_{X,0}$ sur $O_{S \times U,0}$ telle que l'homomorphisme D_1 de $L_1 = O_{S \times U,0}^p$ dans $L_0 = O_{S \times U,0}$ est défini par (F_1, \dots, F_p) . Les suites horizontales du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 L_2 & \xrightarrow{D_2} & L_1 & \xrightarrow{D_1} & L_0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 L_2(0) & \xrightarrow{d_2} & L_1(0) & \xrightarrow{d_1} & L_0(0)
 \end{array}$$

sont exactes d'après (A); on a les égalités :

$$\text{Ker } d_1 = \text{Im } d_2 = (\text{Im } D_2)(0) = (\text{Ker } D_1)(0).$$

Le module $\text{Ker } D_1$ des relations entre F_1, \dots, F_p s'envoie donc surjectivement sur le module $\text{Ker } d_1$ des relations entre f_1, \dots, f_p , d'où (B).

(B) \Rightarrow (A). — Le $O_{U,0}$ -module $O_{X_0,0} = O_{U,0}/I_0$ admet une résolution finie l_* sur $O_{U,0}$ puisqu'il est un module de type fini sur un anneau régulier noethérien. On peut supposer que l'homomorphisme d_1 de l_1 dans l_0 est donné par le vecteur (f_1, \dots, f_p) où $l_i = O_{U,0}^{p_i}$ avec $p_0 = 1$ et $p_1 = p$.

La construction d'une résolution finie libre L_* de $O_{X,0}$ sur $O_{S \times U,0}$ vérifiant $L_*(0) = l_*$ se fait par récurrence : soient $L_i = O_{S \times U,0}^{p_i}$ et D_1 l'homomorphisme de L_1 dans L_0 défini par le vecteur (F_1, \dots, F_p) . Nous supposons construits des homomorphismes D_j de L_j dans L_{j-1} pour $j=0, \dots, i$ induisant un diagramme commutatif à des suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 L_{i+1} & \xrightarrow{D_{i+1}} & L_i & \xrightarrow{D_i} & L_{i-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & L_0 & \xrightarrow{d_0} & O_{X,0} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 l_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & l_i & \longrightarrow & l_{i-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & l_0 & \xrightarrow{d_0} & O_{X_0,0} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Les $O_{U,0}$ -modules $(\text{Ker } D_i)(0)$ et $\text{Ker } d_i = \text{Im } d_{i+1}$ coïncident pour $i=1$ d'après (B), et pour $i \geq 2$ en vertu de la proposition 6, A. I. 4. Ceci permet de définir un homomorphisme D_{i+1} de L_{i+1} dans L_i en relevant des générateurs de $\text{Ker } d_i = \text{Im } d_{i+1}$ à $\text{Ker } D_i$ de manière

telle que $\text{Im } D_{i+1} \subseteq \text{Ker } D_i$ et telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} L_{i+1} & \xrightarrow{D_{i+1}} & L_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ l_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & l_i \end{array}$$

La suite $L_{i+1} \xrightarrow{D_{i+1}} L_i \xrightarrow{D_i} L_{i-1}$ est exacte selon la proposition 6, A.I.4, ce qui établit le passage de i à $i+1$. Par récurrence, la résolution cherchée L_* de $O_{X,0}$ sur $O_{S \times U,0}$ existe, d'où (A).

(B) \Rightarrow (C). — Soit $r = (r^1, \dots, r^q)$, $r^i \in O_{U,0}^p$, un système de générateurs du module des relations entre f_1, \dots, f_p . Selon (B) il existe une famille de relations $R = (R^1, \dots, R^q)$, $R^i \in O_{S \times U,0}^p$, entre F_1, \dots, F_p et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} O_{S \times U,0}^p & \xrightarrow{R} & O_{S \times U,0}^p & \xrightarrow{F} & O_{S \times U,0} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ O_{U,0}^p & \xrightarrow{r} & O_{U,0}^p & \xrightarrow{f} & O_{U,0} \end{array}$$

Posons $N_0 = \text{Ker } f = \text{Im } r \subset O_{U,0}^p$ et $N = \text{Ker } F \subset O_{S \times U,0}^p$. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \Delta(N) & \xrightarrow{F} & O_{S \times U,0} = I + \Delta(I) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Delta(N_0) & \xrightarrow{f} & O_{U,0} = I_0 \oplus \Delta(I_0) \end{array}$$

où les complémentaires $\Delta(N)$ et $\Delta(N_0)$ de N et N_0 respectivement sont définis comme dans A.II.1 et A.II.4. En vertu du théorème de division (th. 1, A.II.2) on a $N_0 \oplus \Delta(N_0) = O_{U,0}^p$, d'où l'exactitude de la suite en bas. D'autre part, la proposition 2, A.II.1, permet d'appliquer la remarque après la démonstration de la proposition 6, A.I.4. Il résulte alors de la partie (a) de cette proposition que la suite en haut est exacte, et de la partie (b) que

$$\text{Im } F + \Delta(I) = I + \Delta(I) = O_{S \times U,0}$$

est en effet une décomposition en somme directe, d'où la bijectivité de l'application

$$\pi : \Delta(I) \rightarrow O_{S \times U,0}/I.$$

(C) \Rightarrow (D). — Il est clair que $I \cdot \overline{(m_S \cdot O_{S \times U,0})} \subseteq I \cap \overline{m_S \cdot O_{S \times U,0}}$. Soit donc $G \cdot F$, $G \in O_{S \times U,0}^p$, un élément de $I \cap \overline{m_S \cdot O_{S \times U,0}}$. Il appartient à $I \cdot \overline{(m_S \cdot O_{S \times U,0})}$ si et seulement si, désignant par g l'image de G dans $O_{U,0}^p$, l'élément $g \cdot F$ y appartient. On divise $g \cdot F$ par F_1, \dots, F_p :

$$g \cdot F = \sum Q_i \cdot F_i + H,$$

avec $Q_i \in \mathcal{O}_{S \times U, 0}$ et $H \in \Delta(I)$. Il résulte de l'hypothèse sur $G \cdot F$ que $g \cdot F \in \overline{\mathfrak{m}_S \cdot \mathcal{O}_{S \times U, 0}}$. D'autre part, le reste de la division H est nul car $\Delta(I) \cap I = 0$ d'après (C). Par conséquent on a en vertu de la proposition 5(a), A. II. 4,

$$g \cdot F = \sum Q_i \cdot F_i \in I \cdot \overline{(\mathfrak{m}_S \cdot \mathcal{O}_{S \times U, 0})},$$

ce qui établit (D).

(D) \Rightarrow (B). — Si $r \in \mathcal{O}_{U, 0}^p$ est une relation entre f_1, \dots, f_p , l'élément $r \cdot F$ appartient à $I \cap \overline{\mathfrak{m}_S \cdot \mathcal{O}_{S \times U, 0}}$ et donc à $I \cdot \overline{(\mathfrak{m}_S \cdot \mathcal{O}_{S \times U, 0})}$ d'après (D). L'écrivant $r \cdot F = \sum Q_i \cdot F_i$ avec $Q_i \in \overline{\mathfrak{m}_S \cdot \mathcal{O}_{S \times U, 0}}$, le vecteur $r - Q$ de $\mathcal{O}_{S \times U, 0}^p$ relève r à une relation entre F_1, \dots, F_p , d'où (B).

Comme l'implication (A) \Rightarrow (A₀) résulte de la proposition 1, chap. I. 1, ne reste qu'à prouver :

(A₀) \Rightarrow (D). — Soit T une sous-variété de dimension finie de S et posons $\mathcal{O}_{T, 0} = \mathcal{O}_{S, 0} / \mathfrak{a}_T$. On réapplique la démonstration de (A) \Rightarrow (D) au morphisme plat $h_T : X_T \rightarrow T$ et trouve

$$I \cap \overline{\mathfrak{m}_S \cdot \mathcal{O}_{S \times U, 0}} \equiv I \cdot \overline{(\mathfrak{m}_S \cdot \mathcal{O}_{S \times U, 0})} \pmod{\mathfrak{a}_T}.$$

Alors, si T varie, l'intersection \bigcap_T s'annule, d'où

$$I \cap \overline{\mathfrak{m}_S \cdot \mathcal{O}_{S \times U, 0}} = I \cdot \overline{(\mathfrak{m}_S \cdot \mathcal{O}_{S \times U, 0})} \text{ et (D).}$$

3. LE PLATIFICATEUR LOCAL D'UN MORPHISME. — Nous considérons maintenant des germes de morphismes installés $h : (X, 0) \rightarrow (Z, 0)$. Notre objet consiste à construire une sous-variété maximale $(S, 0)$ de $(Z, 0)$ telle que la restriction h_S de h au-dessus de $(S, 0)$, $h_S : (X_S, 0) \rightarrow (S, 0)$, soit un morphisme plat à l'origine. En dimension finie, l'existence d'un tel platificateur local $(S, 0)$ a été prouvée par Hironaka-Lejeune-Teissier. Le théorème suivant étend leur résultat au cas banachique :

THÉORÈME 2 (cf. la not. 3 et la dém. du th. 4, chap. II. 5). — Soit $h : (X, 0) \rightarrow (Z, 0)$ le germe d'un morphisme installé au moyen d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (X, 0) & \xrightarrow{j} & (Z \times U, 0) \\ & \searrow h & \swarrow \text{pr} \\ & & (Z, 0) \end{array}$$

où le plongement j identifie $(X, 0)$ à une sous-variété de définition finie de $(Z \times U, 0)$.

(a) Il existe une famille $\mathcal{S} = ((S_m, 0)_{m \geq m_0})$, $m \in \mathbb{N}$, de germes de sous-variétés de $(Z, 0)$, $(S_m, 0) \equiv (S_{m+1}, 0)$, qui satisfait à la propriété universelle suivante :

Pour tout changement de base $v : (T, 0) \rightarrow (Z, 0)$ le morphisme induit $h^v : (X \times_Z T, 0) \rightarrow (T, 0)$ est plat à l'origine si et seulement si v se factorise par $(S_m, 0)$ pour $m \in \mathbb{N}$ assez grand. On dit qu'une telle famille \mathcal{S} est un platificateur local du morphisme h .

(b) Si $\mathcal{S} = ((S_m, 0)_{m \geq m_0})$ et $\mathcal{S}' = ((S'_m, 0)_{m \geq m'_0})$ sont deux telles familles de sous-variétés, il existe pour tout $m \geq m_0$ des entiers k et m' et un diagramme commutatif de plongements

$$\begin{array}{ccc} (S_m, 0) & \hookrightarrow & (S_{m+k}, 0) \\ & \searrow & \nearrow \\ & (S'_{m'}, 0) & \end{array}$$

(c) Il existe un algorithme de construction d'un morphisme

$$B : (Z \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^q, 0),$$

tel que, notant

$$b_m : (Z, 0) \rightarrow (\mathcal{O}_{U,0}(m)^q, 0), \quad m \geq m_0,$$

les morphismes induits par B (cf. la prop. 4, A. I. 3), la famille

$$\neq \mathcal{S} = ((S_m, 0)_{m \geq m_0}) = ((b_m^{-1}(0), 0)_{m \geq m_0}),$$

\cong de sous-variétés de $(Z, 0)$ forme un platificateur local du morphisme h .

Remarque 1. — En général, il n'existe pas un entier $m_1 > m_0$ tel que tout changement de base $v : (T, 0) \rightarrow (Z, 0)$ induisant un morphisme plat $h^v : (X \times_Z T, 0) \rightarrow (T, 0)$ se factorise par $(S_m, 0)$ pour tout $m \geq m_1$ [cf. la partie (B) de la démonstration du théorème et l'exemple de A. I. 3].

Remarque 2. — Tous les germes $(S_m, 0) = (b_m^{-1}(0), 0)$ sont faiblement égaux, i. e., par définition, tout germe de morphisme v d'une variété $(T, 0)$ de dimension finie dans $(Z, 0)$ qui se factorise par $(S_m, 0)$ pour un $m \geq m_0$ se factorise pour tout $m \geq m_0$.

Les variétés $(S_m, 0)$ sont égales, si elles sont toutes de dimension finie, en particulier, si h est un morphisme entre variétés de dimension finie.

Démonstration. — L'assertion (a) est incluse dans (c), et (b) résulte immédiatement de la propriété universelle d'un platificateur, la remarque 2 découle de la définition des variétés analytiques banachiques (A. I. 1) et des variétés $(S_m, 0)$ comme fibres des morphismes b_m . Reste à établir (c). On se ramène d'abord au cas où $(Z, 0)$ est une variété lisse : or, si $i : (Z, 0) \hookrightarrow (V, 0)$ désigne un plongement de $(Z, 0)$ dans une variété lisse $(V, 0)$ et $\tilde{\mathcal{S}} = ((\tilde{S}_m, 0)_{m \geq m_0})$ un platificateur du morphisme composé $\tilde{h} = i \circ h : (X, 0) \rightarrow (V, 0)$, on définit une famille \mathcal{S} de sous-variétés $(S_m, 0)$, $m \geq m_0$, de $(Z, 0)$ par

$$(S_m, 0) = (i^{-1}(\tilde{S}_m), 0).$$

Elle satisfait la propriété universelle d'un platificateur de h : en effet, un changement de base v de $(T, 0)$ dans $(Z, 0)$ se factorise par $(S_m, 0)$ si et seulement si $\tilde{v} = i \circ v : (T, 0) \rightarrow (V, 0)$ se factorise par $(\tilde{S}_m, 0)$, ce qui équivaut en vertu de la propriété universelle de la famille $\tilde{\mathcal{S}} = ((\tilde{S}_m, 0)_{m \geq m_0})$ que $\tilde{h}^{\tilde{v}} = h^v : (X \times_Z T, 0) \rightarrow (T, 0)$ est un morphisme plat.

On suppose donc dorénavant que $(Z, 0)$ est une variété lisse. La construction du morphisme B de $(Z \times U, 0)$ dans $(\mathbb{C}^q, 0)$ repose sur le résultat suivant (les notations sont celles de la dernière section, la lettre S étant remplacée par Z) :

LEMME 1. — *Toute relation $r \in \mathcal{O}_{U,0}^p$ entre f_1, \dots, f_p se relève à un vecteur $R \in \mathcal{O}_{Z \times U,0}^p$ d'image r tel que l'élément*

$$R \cdot F = \sum R_i \cdot F_i \in \mathcal{O}_{Z \times U,0}$$

appartient au $\mathcal{O}_{Z,0}$ -sous-module $\Delta(I)$ de $\mathcal{O}_{Z \times U,0}$. De plus, d'après la proposition 5(d), A. II. 4, il existe un entier m_0 dépendant seulement de f_1, \dots, f_p et de r tel que l'on puisse choisir le vecteur R dans $\mathcal{O}_{Z \times U,0}(m)^p$ pour tout $m \geq m_0$ (cf. la notation de A. II. 4). Par conséquent, pour tout $m \geq m_0$ tel que $F \in \mathcal{O}_{Z \times U,0}(m)^p$, l'élément $R \cdot F$ appartient à $\Delta(I)(m)$.

Démonstration du lemme. — Par le théorème de division (th. 2, A. II. 4), il existe $Q_i \in \mathcal{O}_{Z \times U,0}$ et $H \in \Delta(I)$ tels que

$$r \cdot F = \sum Q_i \cdot F_i + H.$$

Comme $r \cdot F \in \overline{m_Z \cdot \mathcal{O}_{Z \times U,0}}$ on peut supposer que les Q_i y appartiennent aussi en vertu de la proposition 5(a), A. II. 4. On définit alors le vecteur $R \in \mathcal{O}_{Z \times U,0}^p$ par $R = r - Q$.

Suite de la démonstration du théorème :

(A) *Construction du morphisme B et de la famille \mathcal{S} (cf. les dém. du th. 4 A, chap. II. 5, et de la prop. 3, chap. II. 6).* — On choisit un système de générateurs r^1, \dots, r^q du module des relations entre f_1, \dots, f_p et leur associe selon le lemme 1 des vecteurs R^1, \dots, R^q tels que $R^j \cdot F \in \Delta(I)$ pour tout j . Le vecteur

$$R \cdot F = (R^1 \cdot F, \dots, R^q \cdot F) \in \mathcal{O}_{Z \times U,0}^q$$

définit un morphisme B de $(Z \times U, 0)$ dans $(\mathbb{C}^q, 0)$. Si m_0 désigne l'entier minimal tel que les $R^j \cdot F$ appartiennent tous à l'espace $\Delta(I)(m_0)$ (not. A. II. 4), le morphisme $B : (Z \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^q, 0)$ induit pour tout $m \geq m_0$ des morphismes

$$b_m : (Z, 0) \rightarrow (\mathcal{O}_{U,0}(m)^q, 0)$$

(prop. 4, A. I. 3). Notons que b_m se factorise d'après construction par le sous-espace $(\Delta(I_0)(m)^q, 0)$ de $(\mathcal{O}_{U,0}(m)^q, 0)$. On pose alors

$$(S_m, 0) = (b_m^{-1}(0), 0) \subseteq (Z, 0), \quad \mathcal{S} = ((S_m, 0)_{m \geq m_0});$$

c'est la « sous-variété » de $(Z, 0)$ définie par l'annulation de tous les coefficients des « séries » $R^j \cdot F \in \mathcal{O}_{Z \times U,0}$. Les variétés $(S_m, 0)$ varient avec $m \geq m_0$ selon les espaces $\mathcal{O}_{U,0}(m)^q$ dans lesquelles les équations de $(S_m, 0)$ prennent leurs valeurs.

(B) *La propriété universelle de la famille $\mathcal{S} = ((S_m, 0)_{m \geq m_0})$.* — On utilise les caractérisations (B) et (C), th. 1, chap. I. 2, de morphismes plats. Soit donc $v : (T, 0) \rightarrow (Z, 0)$ un changement de base. En vertu de la proposition 3, A. I. 3, l'anneau local $\mathcal{O}_{x_T,0}$ du germe

$(X_T, 0) = (X \times_Z T, 0)$ s'identifie à $O_{T \times U, 0}/J$ où J désigne l'image de I par l'application

$$(v \times \text{Id}_U)^* : O_{Z \times U, 0} \rightarrow O_{T \times U, 0}.$$

Nous notons $G_i = (v \times \text{Id}_U)^*(F_i) = F_i \circ (v \times \text{Id}_U)$ la famille génératrice de J induite par les F_i .

Supposons d'abord que $h^v : (X_T, 0) \rightarrow (T, 0)$ est un morphisme plat à l'origine et montrons que v se factorise par $(S_m, 0)$ pour m assez grand : en vertu du théorème 1, chap. I. 2, condition (C), l'hypothèse équivaut à l'égalité

$$\Delta(J) \cap J = 0.$$

Comme $R^j \cdot F$ appartient à

$$(v \times \text{Id}_U)^*(\Delta(I) \cap I) \subseteq (v \times \text{Id}_U)^*(\Delta(I)) \cap (v \times \text{Id}_U)^*(I) = \Delta(J) \cap J = 0,$$

l'homomorphisme composé

$$(v \times \text{Id}_U)^* \circ B^* : O_{C^q, 0} \rightarrow O_{T \times U, 0}$$

est nul par définition de B . Il résulte de la remarque après la notation 1, A. I. 3, que le germe de morphisme

$$D = B \circ (v \times \text{Id}_U) : (T \times U, 0) \rightarrow (C^q, 0)$$

est nul lui aussi. Pour $m \geq m_0$, les morphismes associés

$$d_m : (T, 0) \rightarrow (O_{U, 0}(m)^q, 0),$$

sont définis et s'identifient aux morphismes composés $b_m \circ v$. Or, selon la remarque après la proposition 4, A. I. 3, il existe $m_1 \geq m_0$ tel que pour tout $m \geq m_1$ le morphisme $d_m = b_m \circ v$ est nul. On note que l'entier m_1 dépend du changement de base $v : (T, 0) \rightarrow (Z, 0)$ (cf. l'exemple de A. I. 3). Celui-ci se factorise donc par la sous-variété $(S_m, 0)$ de $(Z, 0)$ pour tout $m \geq m_1$, d'où la première implication.

Réciproquement, montrons que si $b_m \circ v = 0$ pour $m \in \mathbb{N}$ assez grand, le morphisme $h^v : (X_T, 0) \rightarrow (T, 0)$ est plat à l'origine : en vertu du théorème 1, chap. I. 2, condition (B), il suffit de prouver que chacun des générateurs r^j du module des relations entre f_1, \dots, f_p se relève à une relation \tilde{R}^j entre G_1, \dots, G_p . Or, $b_m \circ v$ étant le morphisme nul, le morphisme

$$B \circ (v \times \text{Id}_U) = (v \times \text{Id}_U)^*(R^1 \cdot F, \dots, R^q \cdot F),$$

de $(T \times U, 0)$ dans $(C^q, 0)$ l'est aussi. On pose alors $\tilde{R}^j = (v \times \text{Id}_U)^*(R^j)$ et vérifie immédiatement la propriété cherchée. Ceci achève la démonstration du théorème.

**II. — La déformation semi-universelle
d'une singularité isolée**

1. DÉFORMATIONS.

DÉFINITION 1. — Soient $(X_0, 0)$ et $(S, 0)$ deux germes de variétés analytiques de dimension finie. Une déformation de $(X_0, 0)$ à base $(S, 0)$ est une famille $X = ((X_s, x_s), s \in (S, 0))$ de germes de variétés analytiques qui varient continûment avec $s \in (S, 0)$ et vérifient $(X_0, x_0) \simeq (X_0, 0)$. Pour être précis, c'est le germe d'un morphisme plat $h : (X, 0) \rightarrow (S, 0)$ à fibre spéciale $(h^{-1}(0), 0)$ isomorphe à $(X_0, 0)$. On note :

$$\begin{array}{ccc} (X_0, 0) & \longrightarrow & (X, 0) \\ \downarrow & & \downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & (S, 0) \end{array}$$

DÉFINITION 2. — (a) Deux déformations $h : (X, 0) \rightarrow (S, 0)$ et $h' : (X', 0) \rightarrow (S, 0)$ à même base $(S, 0)$ sont isomorphes, s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (X, 0) & \xrightarrow{\simeq \Phi} & (X', 0) \\ \downarrow h & & \downarrow h' \\ (S, 0) & \longrightarrow & (S, 0) \end{array}$$

tel que l'isomorphisme Φ induit l'identité sur $(X_0, 0)$.

(b) Soient $h : (X, 0) \rightarrow (S, 0)$ une déformation de $(X_0, 0)$ et $v : (T, 0) \rightarrow (S, 0)$ un morphisme. Le morphisme canonique induit $h^v : (X_T, 0) \rightarrow (T, 0)$, $X_T = X \times_S T$, est une déformation de $(X_0, 0)$ à base $(T, 0)$. On l'appelle la déformation de $(X_0, 0)$ obtenue de h par le changement de base v .

DÉFINITION 3. — (a) Une déformation verselle de $(X_0, 0)$ est une déformation h qui contient toutes les déformations de $(X_0, 0)$. A savoir, $h : (X, 0) \rightarrow (S, 0)$ est une déformation verselle de $(X_0, 0)$, si toute autre déformation $g : (Y, 0) \rightarrow (T, 0)$ de $(X_0, 0)$ est isomorphe à h à un changement de base près :

$$\begin{array}{ccccc} (X, 0) & \longleftarrow & (X_T, 0) & \xleftarrow{\simeq \Phi} & (Y, 0) \\ \downarrow h & & \downarrow h^v & & \downarrow g \\ (S, 0) & \xleftarrow{v} & (T, 0) & \longleftarrow & (T, 0) \end{array}$$

(b) On dit qu'une déformation $h : (X, 0) \rightarrow (S, 0)$ de $(X_0, 0)$ est semi-universelle, si elle est verselle et si sa base $(S, 0)$ est de dimension minimale. Il équivaut à dire, que toute déformation $g : (Y, 0) \rightarrow (T, 0)$ de $(X_0, 0)$ détermine entièrement l'application tangente $T_0 v$ du changement de base v vérifiant $g \simeq h^v$. Toutes les déformations semi-universelles de $(X_0, 0)$ sont isomorphes entre elles.

THÉORÈME 1 (Grauert). — *Tout germe de variété analytique $(X_0, 0)$ à singularité isolée à l'origine possède une déformation semi-universelle.*

2. DÉPLOIEMENTS. — L'étude des déformations d'un germe $(X_0, 0)$ repose sur la classification des déploiements de l'application $f: (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, $U \subseteq \mathbb{C}^n$, définissant $(X_0, 0)$ comme fibre $(f^{-1}(0), 0)$.

DÉFINITION 4. — Soient U un ouvert de \mathbb{C}^n , $f: (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ le germe d'une application analytique et $(Z, 0)$ le germe d'une variété analytique de dimension finie. Un déploiement de f à base $(Z, 0)$ est un morphisme $F: (Z \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ vérifiant $F|_{\{0\} \times U} = f$.

DÉFINITION 5. — (a) Deux déploiements $F_i: (Z \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, $i=1, 2$, de $f: (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ à même base $(Z, 0)$ sont isomorphes, s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (Z \times U, 0) & \xrightarrow{\simeq \Phi} & (Z \times U, 0) \\ \text{pr} \searrow & & \swarrow \text{pr} \\ & (Z, 0) & \end{array}$$

tel que les variétés $(F_1^{-1}(0), 0)$ et $((F_2 \circ \Phi)^{-1}(0), 0)$ soient isomorphes. Ceci équivaut à dire qu'il existe un morphisme

$$M: (Z \times U, 0) \rightarrow (GL_p(\mathbb{C}), 1),$$

vérifiant $M|_{\{0\} \times U} = 1$ tel que $F_1 = M \cdot (F_2 \circ \Phi)$.

(b) Soient $F: (Z \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ un déploiement de f et $v: (T, 0) \rightarrow (Z, 0)$ un morphisme. Le morphisme $F^v: (T \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ défini par $F^v(t, x) = F(v(t), x)$ est un déploiement de f à base $(T, 0)$. On l'appelle le déploiement de f obtenu de F par le changement de base v .

DÉFINITION 6. — (a) Un déploiement $F: (Z \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ de f est versel, si tout autre déploiement $G: (T \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ de f est isomorphe à $F^v: (T \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ pour un changement de base $v: (T, 0) \rightarrow (Z, 0)$.

(b) Le déploiement $F: (Z \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ de f est semi-universel s'il est versel et si sa base $(Z, 0)$ est de dimension minimale. Il équivaut à dire que tout déploiement $G: (T \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ de f détermine entièrement l'application tangente $T_0 v$ du changement de base v vérifiant $G \simeq F^v$.

NOTATION 1. — Pour tout germe d'application analytique f de U dans \mathbb{C}^p on pose :

$$\begin{aligned} T_f^1 &= (f_1, \dots, f_p) \cdot \mathcal{O}_{U,0}^p + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \cdot \mathcal{O}_{U,0} \subseteq \mathcal{O}_{U,0}^p, \\ K_f^1 &= \mathcal{O}_{U,0}^p / T_f^1. \end{aligned}$$

Le résultat suivant montre que K_f^1 est l'espace des modules du germe f .

THÉORÈME 2 (Mather). — (a) Un germe d'application analytique f de U dans \mathbb{C}^p possède un déploiement semi-universel, si et seulement si l'espace K_f^1 est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

(b) Toute \mathbb{C} -base g_1, \dots, g_d d'un complémentaire direct Z de T_f^1 dans $\mathcal{O}_{U,0}^p$, $Z \oplus T_f^1 = \mathcal{O}_{U,0}^p$, définit un déploiement semi-universel F de f par

$$F : (Z \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0),$$

$$(z, x) \rightarrow F(z, x) = f(x) + \sum_{i=1}^d z_i \cdot g_i(x).$$

3. LE LIEN ENTRE DÉPLOIEMENTS ET DÉFORMATIONS. — C'est l'existence d'un platificateur local d'un morphisme qui lie le concept analytique d'un déploiement d'une application au concept géométrique d'une déformation d'une variété :

PROPOSITION 1 (cf. la dém. du th. 4, chap. II.5). — Soit $(X_0, 0)$ le germe d'une variété analytique de dimension finie défini comme fibre $(f^{-1}(0), 0)$ d'un germe d'une application analytique $f : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$.

(a) Toute déformation $h : (X, 0) \rightarrow (S, 0)$ de $(X_0, 0)$ définit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (X, 0) & \xrightarrow{j} & (S \times U, 0) \\ & \searrow h & \swarrow \text{pr} \\ & (S, 0) & \end{array}$$

et un déploiement $F : (S \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ de f qui décrit l'image de $(X, 0)$ par le plongement j comme fibre $(F^{-1}(0), 0)$. On note que le morphisme F n'est pas unique.

(b) Tout déploiement $F : (Z \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ de f définit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (X, 0) & \xrightarrow{\quad} & (Z \times U, 0) \\ & \searrow H & \swarrow \text{pr} \\ & (Z, 0) & \end{array}$$

par $(X, 0) = (F^{-1}(0), 0)$, et une déformation $h = H_S : (X_S, 0) \rightarrow (S, 0)$ de $(X_0, 0)$ où $(S, 0) \subseteq (Z, 0)$ désigne le platificateur du morphisme H et $h = H_S$ la restriction de H sur $(S, 0)$.

La vérification des deux assertions est laissée en exercice.

COROLLAIRE. — La déformation $h : (X_S, 0) \rightarrow (S, 0)$ de $(X_0, 0)$ que l'on obtient du déploiement $F : (Z \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ de f suivant (b) est verselle (resp. semi-universelle) si F est versel (resp. semi-universel).

Démonstration. — A toute autre déformation $g : (Y, 0) \rightarrow (T, 0)$ de $(X_0, 0)$ on associe selon (a) un déploiement $G : (T \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ de f . Comme F est versel (resp. semi-universel) il existe un changement de base $v : (T, 0) \rightarrow (Z, 0)$ (dont, resp., l'application tangente $T_0 v$ est uniquement déterminée par G) tel que $G \simeq F \circ v$. En vertu de la propriété universelle du platificateur $(S, 0)$ du morphisme H , v se factorise par $(S, 0)$, d'où $g \simeq h \circ v$.

Pour la démonstration que, si F est semi-universel, la déformation g détermine entièrement $T_0 v$, on renvoie à Teissier, p. 632, ou à la démonstration du théorème 4, chap. II. 5.

Remarque. — (a) Si le germe $(X_0, 0)$ peut être défini comme fibre d'une application f telle que $\dim_{\mathbb{C}} K_f^1 < \infty$, la construction de la déformation semi-universelle de $(X_0, 0)$ se déduit de ce qui précède comme suit : on construit d'abord, suivant le théorème 2, chap. II. 2, un déploiement semi-universel $F : (Z \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ de f . On lui associe selon la partie (b) de la dernière proposition un morphisme $H : (X, 0) \rightarrow (Z, 0)$ de fibre $(H^{-1}(0), 0) = (X_0, 0)$. Le théorème 2(c), chap. I. 3, fournit en vertu de la remarque 2 qui le suit la construction du platicateur $(S, 0)$ du morphisme H . D'après le dernier corollaire, le morphisme

$$h = H_S : (X_S, 0) \rightarrow (S, 0),$$

décrit alors la déformation semi-universelle du germe $(X_0, 0)$. Une description de cette construction se trouve dans Teissier, Galligo.

(b) La situation devient considérablement plus compliquée, s'il n'existe aucune application f définissant $(X_0, 0)$ avec $\dim_{\mathbb{C}} K_f^1 < \infty$, i. e., si $(X_0, 0)$ n'est pas de type singulier fini. Par le théorème de Grauert on sait encore qu'une déformation semi-universelle de $(X_0, 0)$ existe, pourvu que $(X_0, 0)$ soit à singularité isolée à l'origine. Suivant une proposition de B. Teissier, on va considérer des déploiements et déformations à une infinité de paramètres et étendre la construction d'au-dessus à la catégorie des variétés analytiques banachiques. Les deux prochaines sections étudient les problèmes qui s'y opposent et décrivent une manière de les surmonter, tout en généralisant les notions et résultats précédents.

4. LA CONSTRUCTION D'UNE FAMILLE SEMI-UNIVERSELLE DE DÉPLOIEMENTS BANACHIQUES.

Remarque. — Soient $f : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ le germe d'une application analytique et $Z \subseteq O_{U,0}^p$ un complémentaire direct de T_f^1 dans $O_{U,0}^p$ (cf. le th. 2, chap. II. 2). L'extension naturelle de l'assertion (b) de ce théorème est de définir un déploiement F de f par

$$\begin{aligned} F : (Z \times U, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^p, 0), \\ (z, x) &\rightarrow F(z, x) = f(x) + z(x) \end{aligned}$$

et de montrer qu'il est semi-universel, même si $\dim_{\mathbb{C}} Z = \dim_{\mathbb{C}} K_f^1 = \infty$. Mais, si l'espace Z n'est pas de dimension finie, il n'admet pas de structure d'espace de Banach. Pour rester dans la catégorie des variétés analytiques banachiques, on sera donc obligé de remplacer Z par la famille des espaces de Banach $Z_k = Z \cap O_{U,0}(k)^p$, $k \in \mathbb{N}$. C'est le même inconvénient que l'on a rencontré dans la construction du platicateur d'un morphisme (cf. le th. 2, chap. I. 3). Pour éviter ce genre de complications, il serait utile de développer une théorie de variétés de dimension infinie incluant le cas de sous-variétés analytiques des espaces $O_{\mathbb{C}^n, 0}$.

DÉFINITION 7. — Soit $f : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, $U \subseteq \mathbb{C}^n$, le germe d'une application analytique. Les notions du chapitre II. 2, de déploiements $F : (Z \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ de f , de changements de base et d'isomorphie s'étendent de manière naturelle au cas où la base $(Z, 0)$ est une variété analytique banachique.

On dit qu'une famille $F = (F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de déploiements banachiques $F_k : (Z_k \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ de f est verselle, si tout autre déploiement banachique $G : (T \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ de f est isomorphe au déploiement $F_k^{v_k} : (T \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ assez grand et des changements de base $v_k : (T, 0) \rightarrow (Z_k, 0)$. La famille F est semi-universelle, si les applications tangentes $T_0 v_k$ de v_k sont uniquement déterminées par G .

THÉORÈME 3 (cf. le th. 4, chap. II. 5, et le chap. III. 1). — *Tout germe d'application analytique $f : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ possède une famille semi-universelle $F = (F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de déploiements banachiques. En particulier, chaque complémentaire direct Z de T_f^1 dans $O_{U,0}^p$ en définit une par*

$$\begin{aligned} F_k : (Z_k \times U, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^p, 0), \\ (z, x) &\rightarrow F_k(z, x) = f(x) + z(x), \end{aligned}$$

où $Z_k = Z \cap O_{U,0}(k)^p$ (cf. les not. 2, A. 0, et not. 1, chap. II. 2).

Démonstration. — On utilise le résultat suivant :

LEMME 1. — *Soit Z un complémentaire direct de T_f^1 dans $O_{U,0}^p$. Tout déploiement banachique $G : (T \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ de f à base lisse $(T, 0)$ est isomorphe à un déploiement $H : (T \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ de f s'écrivant $H(t, x) = f(x) + H'(t, x)$ de sorte que pour tout $t \in (T, 0)$ la série $H'(t, x)$ appartient au sous-espace Z de $O_{U,0}^p$. Le déploiement H n'est pas unique; par contre, son terme de degré 1 en t est entièrement déterminé par G et même par son terme de degré 1 en t .*

Le lemme sert à la démonstration du théorème comme suit : soit $G : (T \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ un déploiement banachique de f . Si sa base $(T, 0)$ est lisse, G est isomorphe à un déploiement $H = f + H'$ de f comme décrit dans le lemme. L'application

$$H' : (T \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0),$$

induit d'après la proposition 4, A. I. 3, des applications analytiques

$$v_k : (T, 0) \rightarrow (O_{U,0}(k)^p, 0) \quad (k \geq k_0).$$

Celles-ci se factorisent par $Z_k \subseteq O_{U,0}(k)^p$ car $H'(t, x) \in Z$ pour tout $t \in (T, 0)$. Ceci signifie que H et donc G sont isomorphes à $F_k^{v_k}$. D'autre part, si $(T, 0)$ n'est pas lisse, il existe d'après A. I. 1 un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} (T \times U, 0) & \hookrightarrow & (\tilde{T} \times U, 0) & \xrightarrow{\cong} & (\tilde{T} \times U, 0) \\ \downarrow G & & \downarrow \tilde{G} & & \downarrow F^{v_k} \\ (\mathbb{C}^p, 0) & \xrightarrow{\cong} & (\mathbb{C}^p, 0) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^p, 0) \end{array}$$

avec $(\tilde{T}, 0)$ lisse et des changements de base $\tilde{v}_k : (\tilde{T}, 0) \rightarrow (Z_k, 0)$. Il en résulte, notant $v_k : (T, 0) \rightarrow (Z_k, 0)$ les morphismes induits par \tilde{v}_k , que $G \simeq F_k^{v_k}$. Ceci prouve la versalité de la famille de déploiements $F = (F_k)$.

La famille F est en effet semi-universelle : en vertu du lemme 1, l'application tangente $T_0 \tilde{v}_k$ de \tilde{v}_k est déterminée par le déploiement \tilde{G} . On en déduit immédiatement que G détermine entièrement $T_0 v_k$. Ceci termine la démonstration du théorème.

Démonstration du lemme 1. — Selon la définition 5, chap. II. 2, d'isomorphismes de déploiements il faut trouver des applications analytiques

$$M : (T \times U, 0) \rightarrow (Gl_p(\mathbb{C}), 1),$$

et

$$\Phi : (T \times U, 0) \rightarrow (T \times U, 0),$$

vérifiant $M|_{\{0\} \times U} = 1$, $\Phi|_{\{0\} \times U} = Id_U$ et $\Phi(t, x) = (t, \Phi(t, x))$ telles que le déploiement

$$H = M \cdot (G \circ \Phi) : (T \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$$

satisfait à l'assertion du lemme. Écrivons M et Φ en sommes de polynômes homogènes en t :

$$M = \sum_{i=0}^{\infty} m_i, \quad m_i : (T \times U, 0) \rightarrow (M_p(\mathbb{C}), m_i(0)),$$

$$\Phi = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i, \quad \varphi_i : (T \times U, 0) \rightarrow (U, 0).$$

L'idée de la démonstration consiste à construire récursivement des applications homogènes m_i et φ_i de sorte que les sommes partielles

$$M^j = \sum_{i=0}^j m_i \quad \text{et} \quad \Phi^j = \sum_{i=0}^j \varphi_i,$$

satisfont à la propriété cherchée à termes de degré $> j$ en t près. Le passage à la limite sur j établira le résultat.

On pose $m_0 = 1 \in Gl_p(\mathbb{C})$ et $\varphi_0 = Id_{T \times U}$. Supposons construits pour $i=0, \dots, j$ des applications m_i et φ_i telles que :

(a) m_i et φ_i sont homogènes de degré i en t et s'annulent sur $\{0\} \times U$ pour $i > 0$;

(b) notant H_0^j la partie de degré $\leq j$ en t de $H^j = M^j \cdot (G \circ \Phi^j)$, et fixant $t \in (T, 0)$, l'application

$$H_0^j(t, x) : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0),$$

appartient à l'espace $Z \subseteq O_{U,0}^p$.

La construction des applications m_{j+1} et φ_{j+1} se déduit du développement en série de Taylor de H^{j+1} . On écrit :

$$\begin{aligned} H^{j+1} &= M^{j+1} \cdot (G \circ \Phi^{j+1}) = (M^j + m_{j+1}) \cdot (G \circ (\Phi^j + \varphi_{j+1})) \\ &= M^j \cdot (G \circ \Phi^j) + m_{j+1} \cdot (f \circ \Phi^0) + M^0 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \varphi_{j+1} \\ &\quad + (\text{termes de degré } > j+1 \text{ en } t) \\ &= H^j + m_{j+1} \cdot f + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \varphi_{j+1} + (\text{termes de degré } > j+1 \text{ en } t). \end{aligned}$$

Par conséquent, la partie H_0^{j+1} de H^{j+1} de termes de degré $\leq j+1$ en t s'écrit

$$H_0^{j+1} = H_0^j + H_1^j + m_{j+1} \cdot f + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \varphi_{j+1},$$

désignant par H_1^j le terme de degré $j+1$ en t de H^j .

Rappelons que Z est un complémentaire direct dans $O_{U,0}^l$ du sous-module

$$T_f^1 = (f_1, \dots, f_p) \cdot O_{U,0}^l + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \cdot O_{U,0}$$

et que pour $t \in (T, 0)$, l'application $H_0^j(t, x)$ y appartient d'après construction de H^j et (b). Pour que l'application H^{j+1} vérifie (b) il suffit donc que pour $t \in (T, 0)$

$$\left(H_1^j + m_{j+1} \cdot f + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \varphi_{j+1} \right)(t, x),$$

appartient à l'espace Z . En vertu du théorème 2, A. II. 4, et la proposition 5(b), A. II. 4, il existe des applications m_{j+1} et φ_{j+1} avec les propriétés cherchées. En particulier, l'unicité du terme H_1^0 de degré 1 en t de H en résulte au moyen de l'égalité

$$G = M^0 \cdot (G \circ \Phi^0) = H^0 \equiv H_1^0 + m_1 \cdot f + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \varphi_1 \text{ (modulo termes de degré } > 1 \text{ en } t).$$

Reste à montrer la convergence des séries $M = \sum_{i=0}^{\infty} m_i$ et $\Phi = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i$, la propriété cherchée de $H = M \cdot (G \circ \Phi)$ étant alors immédiate.

Il résulte de la proposition 5(c), A. II. 4, que les applications m_{j+1} et φ_{j+1} peuvent être choisies de manière telle que pour $r > 0$

$$(1) \quad \|m_{j+1}\|_r + \|\varphi_{j+1}\|_r \leq \frac{1}{c} \cdot \|H_1^j\|_r$$

pour une constante $c > 0$ indépendante de j . D'autre part, selon le développement en série de Taylor de H^{j+1} , il existe une constante $a > 0$ telle que

$$\|H^{j+1} - H^j\|_r \leq a \cdot (\|m_{j+1}\|_r + \|\varphi_{j+1}\|_r).$$

En résulte $\|H^{j+1}\|_r \leq d \cdot \|H^j\|_r$ pour $d = (a/c) + 1$, d'où par (1) et récurrence

$$\|m_{j+1}\|_r + \|\varphi_{j+1}\|_r \leq d^j \cdot d_0.$$

Ceci établit la convergence de $M = \sum m_i$ et $\Phi = \sum \varphi_i$ et termine la démonstration du lemme.

Remarque 1 (cf. la dém. du th. 4, chap. II. 5). — On note en complément de l'assertion du théorème : soit $g : (Y, 0) \rightarrow (T, 0)$ un morphisme de fibre $(X_0, 0)$ à base lisse $(T, 0)$,

qui soit installé par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (Y, 0) & \xrightarrow{\quad} & (T \times U, 0) \\ & \searrow h & \swarrow \text{pr} \\ & (T, 0) & \end{array}$$

A toute application analytique $G : (T \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ définissant $(Y, 0)$ comme fibre $(G^{-1}(0), 0)$ on associe en vertu du théorème un changement de base $v_k : (T, 0) \rightarrow (Z_k, 0)$ tel que $G \simeq F_k^v$. Alors l'application tangente $T_0 v_k$ de v_k ne dépend pas du choix de G et est entièrement déterminée par le morphisme g .

Démonstration. — Deux applications analytiques G et G' définissant $(Y, 0) \subseteq (T \times U, 0)$ sont isomorphes comme déploiements de f avec $f^{-1}(0) = X_0$. Par conséquent, les applications H et H' associées à G et G' selon le lemme 1 sont isomorphes. L'assertion résulte alors immédiatement de ce lemme, de la définition de F_k et de la construction du changement de base v_k .

Remarque 2. — Supposons que l'idéal I_0 de $A = \mathcal{O}_{U,0}$ engendré par les composantes f_1, \dots, f_p de f est invariant par rapport à une \mathbb{C}^* -action μ sur \mathbb{C}^n , i.e., que les f_i sont μ -homogènes de poids $e_i \in \mathbb{Z}$, $\lambda \circ f_i = \lambda^{e_i} \cdot f_i$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Il existe alors une \mathbb{C}^* -action $\hat{\mu}$ sur $Z_k \times U$ qui étend μ , telle que la i -ième composante du déploiement semi-universel $F_k : (Z_k \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ soit $\hat{\mu}$ -homogène de poids e_i .

Démonstration. — Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, notons $d_\alpha \in \mathbb{Z}$ le poids du monôme $x^\alpha \in A$. On définit une \mathbb{C}^* -action sur A^p ,

$$\lambda \circ (g_1, \dots, g_p) = (\lambda \circ g_1, \dots, \lambda \circ g_p),$$

par

$$\lambda \circ g_i = \lambda \circ \left(\sum g_{i\alpha} x^\alpha \right) = \sum \lambda^{e_i - d_\alpha} \cdot g_{i\alpha} x^\alpha, \quad \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Posant $\lambda \circ (g, x) = (\lambda \circ g, \lambda \circ x)$ pour $(g, x) \in Z_k \times U$, l'assertion est immédiate.

5. LA CONSTRUCTION D'UNE FAMILLE SEMI-UNIVERSELLE DE DÉFORMATIONS BANACHIQUES.

DÉFINITION 8. — Soit X_0 une variété analytique de dimension finie, $X_0 \subseteq U \subseteq \mathbb{C}^n$. Une déformation banachique du germe $(X_0, 0)$ est un morphisme plat de variétés analytiques banachiques $h : (X, 0) \rightarrow (S, 0)$ de fibre $(h^{-1}(0), 0) \simeq (X_0, 0)$ de sorte que $(X, 0)$ est de définition finie sur $(S, 0)$, i.e., isomorphe à une sous-variété de définition finie de $(S \times U, 0)$ [cf. la prop. 1(b), A. I. 2]. Dans ce texte, on ne considère pas le cas où $(X, 0)$ n'est pas de définition finie sur $(S, 0)$. Les notions du chapitre II. 1 de changements de base et d'isomorphie s'étendent de manière naturelle au cas de déformations banachiques.

On dit qu'une famille $h = (h_l)_{l \in \mathbb{N}}$ de déformations banachiques $h_l : (X_l, 0) \rightarrow (S_l, 0)$ de $(X_0, 0)$ est verselle, si toute autre déformation banachique $g : (Y, 0) \rightarrow (T, 0)$ de $(X_0, 0)$ est isomorphe à $h_l^{v_l} : (X_l \times_{S_l} T, 0) \rightarrow (T, 0)$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ assez grand et des changements

de base $v_l : (T, 0) \rightarrow (S_l, 0)$. La famille h est semi-universelle, si les applications tangentes $T_0 v_l$ de v_l sont uniquement déterminées par g .

Remarque. — On s'aperçoit facilement que la proposition 1, chap. II. 3, garde sa validité dans le cas banachique. L'objet de cette section est de généraliser le corollaire de cette proposition au cas de familles de déploiements et déformations banachiques.

NOTATION 3. — Pour le reste du chapitre nous fixons la situation suivante :

La variété X_0 est définie comme fibre $f^{-1}(0)$ d'une application analytique $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$, où U est un ouvert de \mathbb{C}^n . On désigne par Z un complémentaire direct de T_f^1 dans $O_{U,0}^p$,

$$Z \oplus T_f^1 = O_{U,0}^p$$

(cf. le th. 1, A. II. 2, et la not. 1, chap. II. 2). Posant $Z_k = Z \cap O_{U,0}(k)^p$ pour $k \in \mathbb{N}$, la famille

$$\begin{aligned} F_k : (Z_k \times U, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^p, 0), \\ (z, x) &\rightarrow f(x) + z(x), \end{aligned}$$

forme une famille semi-universelle de déploiements banachiques de f (cf. le th. 3, chap. II. 4).

On note $(X_k, 0)$ la fibre $(F_k^{-1}(0), 0)$ du déploiement F_k , et

$$H_k : (X_k, 0) \rightarrow (Z_k, 0),$$

la restriction à $(X_k, 0)$ de la première projection de $Z_k \times U$ sur Z_k . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit

$$\mathcal{S}_k = ((S_{km}, 0)_{m \geq k}),$$

$(S_{km}, 0) \subseteq (Z_k, 0)$, le platificateur local du morphisme H_k (cf. le th. 2, chap. I. 3). Pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand, les variétés $(S_{km}, 0)$ sont définies pour tout $m \geq k$: en effet, d'après la construction du platificateur [partie (A) de la dém. du th. 2, chap. I. 3] et du lemme 1, chap. I. 3, il existe un entier m_0 dépendant seulement de f_1, \dots, f_p et d'une base de relations r^1, \dots, r^q tel que $(S_{km}, 0)$ soit défini pour tout $m \geq \max(k, m_0)$. Pour ceci on utilise le fait que l'application F_k appartient d'après définition à $O_{Z_k \times U, 0}(k)^p$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour simplifier les notations nous supposerons dorénavant $k \geq m_0$ et écrirons donc

$$\mathcal{S}_k = ((S_{km}, 0)_{m \geq k}).$$

Notons enfin $h_{km} : (\tilde{X}_{km}, 0) \rightarrow (S_{km}, 0)$, $\tilde{X}_{km} = X_k \times_{Z_k} S_{km}$, les morphismes induits par H_k . Voici le diagramme correspondant à la situation

$$\begin{array}{ccccc} (Z_k \times U, 0) \cong (X_k, 0) & \longleftarrow & (X_k \times_{Z_k} S_{km}, 0) = (\tilde{X}_{km}, 0) & & \\ \searrow \text{pr} & & \downarrow H_k & & \downarrow h_{km} \\ & & (Z_k, 0) & \longleftarrow & (S_{km}, 0) \end{array}$$

On rappelle (cf. la rem. au début du chap. II. 4) que l'indexation double provient de la filtration de $O_{U,0}$ en espaces de Banach $O_{U,0}(k)$.

THÉORÈME 4. — *La famille de morphismes*

$$h_{km} : (X_{km}, 0) \rightarrow (S_{km}, 0), \quad m \geq k \geq m_0,$$

forme une famille semi-universelle de déformations banachiques du germe $(X_0, 0)$. Pour préciser encore, si $g : (Y, 0) \rightarrow (T, 0)$ est une déformation banachique de $(X_0, 0)$, il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \geq k_1$ un $m_1(k) \geq k$ tels que g soit isomorphe au déploiement

$$h_{km}^{v_{km}} : (\tilde{X}_{km} \times_{S_{km}} T, 0) \rightarrow (T, 0),$$

pour tout couple $(k, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \geq k_1$ et $m \geq m_1(k)$ et des changements de base $v_{km} : (T, 0) \rightarrow (S_{km}, 0)$.

Démonstration. — Montrons d'abord que la famille (h_{km}) est verselle. Soit donc $g : (Y, 0) \rightarrow (T, 0)$ une déformation de $(X_0, 0)$ et supposons-la installée par un diagramme

$$\begin{array}{ccc} (Y, 0) & \hookrightarrow & (T \times U, 0) \\ & \searrow g & \swarrow \text{pr} \\ & (T, 0) & \end{array}$$

de manière telle que $(Y, 0) \cong (T \times U, 0)$ soit la fibre $(G^{-1}(0), 0)$ d'un déploiement $G : (T \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ de f [prop. 1 (a), chap. II. 3]. On note que G n'est pas unique.

La famille des déploiements $F_k : (Z_k \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ de f est verselle; il existe donc $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \geq k_1$, le déploiement G soit isomorphe à

$$F_k^{v_k} : (T \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0),$$

pour des changements de base $v_k : (T, 0) \rightarrow (Z_k, 0)$. Il en résulte que pour $k \geq k_1$, la déformation g est isomorphe au morphisme $H_k^{v_k}$:

$$\begin{array}{ccccc} (Y, 0) & \longrightarrow & (X_k \times_{Z_k} T, 0) & \longrightarrow & (X_k, 0) \\ \downarrow g & & \downarrow H_k^{v_k} & & \downarrow H_k \\ (T, 0) & \longrightarrow & (T, 0) & \xrightarrow{v_k} & (Z_k, 0) \end{array}$$

Par conséquent, $H_k^{v_k}$ est un morphisme plat. Le changement de base $v_k : (T, 0) \rightarrow (Z_k, 0)$ se factorise donc par la sous-variété $(S_{km}, 0)$ de $(Z_k, 0)$ pour m assez grand en vertu de la propriété universelle du platificateur $\mathcal{S}_k = ((S_{km}, 0)_m)$ du morphisme H_k . Plus précisément, pour tout $k \geq k_1$ il existe un entier minimal $m_1 = m_1(k) \geq k$ tel que pour $m \geq m_1(k)$, v_k se factorise par $(S_{km}, 0)$. Ceci prouve que $g \simeq h_{km}^{v_{km}}$ pour $v_{km} : (T, 0) \rightarrow (S_{km}, 0)$, le morphisme induit par v_k . La famille (h_{km}) est donc verselle. Pour prouver qu'elle est en effet semi-universelle, il faut montrer que g détermine entièrement l'application tangente $T_0 v_{km}$ de v_{km} . Or, la famille des déploiements F_k étant semi-universelle, le déploiement G de f détermine l'application tangente $T_0 v_k$ de v_k . En vertu de la remarque 1 après la démonstration du théorème 3, chap. II. 4, $T_0 v_k$ est déjà déterminée par la déformation g dans le

cas où $(T, 0)$ est lisse. Le cas général s'en déduit aussitôt. Comme $T_0 v_{km}$ est induit par $T_0 v_k$, l'assertion et donc le théorème sont démontrés.

Remarque. — Si le germe $(X_0, 0)$ est invariant par rapport à une \mathbb{C}^* -action μ sur U et si $\hat{\mu}$ désigne la \mathbb{C}^* -action sur $Z_k \times U$ définie dans la remarque 2 après le théorème 3, chap. II. 4, alors les morphismes $h_{km} : (X_{km}, 0) \rightarrow (S_{km}, 0)$, $m \geq k \geq m_0$, sont $\hat{\mu}$ -équivariants. Ceci résulte du lemme 2(e), A. II. 4, et de la construction des variétés $(S_{km}, 0)$ comme fibres $(b_{km}^{-1}(0), 0)$ des applications b_{km} à composantes $\hat{\mu}$ -homogènes [cf. le th. 2, chap. I. 3, la not. 3, chap. II. 5, et le chap. III. 1 (B)].

THÉORÈME 4 A. — *La famille de morphismes*

$$h_{kk} : (\tilde{X}_{kk}, 0) \rightarrow (S_{kk}, 0), \quad k \geq m_0,$$

forme une famille semi-universelle de déformations banachiques du germe $(X_0, 0)$.

Démonstration. — D'après la versalité de la famille de déformations $h_{km} : (\tilde{X}_{km}, 0) \rightarrow (S_{km}, 0)$ (th. 4) on sait que toute déformation $g : (T, 0) \rightarrow (Y, 0)$ de $(X_0, 0)$ est isomorphe à la déformation

$$h_{km}^{v_{km}} : (\tilde{X}_{km} \times_{S_{km}} T, 0) \rightarrow (T, 0),$$

pour tout couple $(k, m) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $m \geq m_1(k) \geq k \geq k_1$ et des changements de base $v_{km} : (T, 0) \rightarrow (S_{km}, 0)$. Il suffit donc de montrer pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand que $m_1(k) = k$, i. e., par définition de $m_1(k)$, que $v_k : (T, 0) \rightarrow (Z_k, 0)$ se factorise par $(S_{kk}, 0) \subseteq (Z_k, 0)$.

Avec les notations du théorème 2(c), chap. I. 3, soit

$$b_{km} : (Z_k, 0) \rightarrow (O_{U,0}(m)^q, 0),$$

le morphisme définissant $(S_{km}, 0)$ comme sa fibre $(b_{km}^{-1}(0), 0)$. Alors le morphisme v_k se factorise par $(S_{km}, 0)$ si et seulement si

$$b_{km} \circ v_k = 0.$$

Il est clair que la composition $b_{km} \circ v_k : (T, 0) \rightarrow (O_{U,0}(m)^q, 0)$ ne dépend pas de l'entier k . Comme elle est nulle pour tout couple (k, m) avec $m \geq m_1(k) \geq k \geq k_1$ par définition de $m_1(k)$, elle l'est aussi pour tout couple (k, m) avec $m \geq m_1(k_1)$ et $m \geq k$, en particulier pour $k = m \geq m_1(k_1)$. Ceci établit l'assertion.

6. LA DÉFORMATION SEMI-UNIVERSELLE D'UNE SINGULARITÉ ISOLÉE. — Dans cette section nous établirons la description explicite de la déformation semi-universelle d'une singularité isolée donnant ainsi un moyen de la construire. La terminologie est celle fixée dans la notation 3 de la dernière section.

PROPOSITION 3. — *Soit $(X_0, 0)$ le germe d'une variété analytique de dimension finie.*

(a) *Le plongement canonique $(Z_k, 0) \overset{i}{\hookrightarrow} (Z_{k'}, 0)$, $k \leq k'$, induit des plongements $(S_{km}, 0) \overset{i}{\hookrightarrow} (S_{k'm'}, 0)$ pour tout couple $(m, m') \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $k \leq m$, $k' \leq m'$ et $m \leq m'$.*

(b) Si X_0 est à singularité isolée à l'origine, les variétés $(S_{kk}, 0)$ sont de dimension finie et isomorphes entre elles pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq m_0$.

Démonstration. — Soit $b_{km} : (Z_k, 0) \rightarrow (O_{U,0}(m)^q, 0)$ l'application analytique définissant la sous-variété $(S_{km}, 0) = (b_{km}^{-1}(0), 0)$ de $(Z_k, 0)$ [cf. la construction du platificateur $\mathcal{S}_k = ((S_{km}, 0)_m)$, th. 2, chap. I. 3]. La première assertion résulte du diagramme commutatif suivant ($k \leq m$, $k' \leq m'$, $m \leq m'$)

$$\begin{array}{ccccc} (S_{km}, 0) & \hookrightarrow & (Z_k, 0) & \xrightarrow{b_{km}} & (O_{U,0}(m)^q, 0) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ (S_{k'm'}, 0) & \hookrightarrow & (Z_{k'}, 0) & \xrightarrow{b_{k'm'}} & (O_{U,0}(m')^q, 0) \end{array}$$

Pour prouver que les variétés $(S_{kk}, 0)$ sont de dimension finie on applique le critère de finitude de la proposition 1(a), A. I. 2 : l'application tangente $T_0 b_{km}$ du morphisme b_{km} est directe pour $k = m$ en vertu de la proposition 3(b), A. II. 2. Afin de montrer que son noyau $\text{Ker } T_0 b_{kk}$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie, on considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (Z_k, 0) & \xrightarrow{b_{kk}} & (O_{U,0}(k)^q, 0) \\ & \searrow b_{kk} & \uparrow \\ & & (\Delta(T_0)(k)^q, 0) \\ & \downarrow \simeq & \downarrow \simeq \\ K_f^1(k) & \xrightarrow{d_{kk}} & (O_{X_0,0}(k)^q, 0) \end{array}$$

L'application b_{kk} se factorise par $(\Delta(I_0)(k)^q, 0)$ d'après construction, d'où la flèche diagonale. Les deux isomorphismes verticaux sont donnés par le théorème de division (th. 1, A. II. 2) et déterminent l'application d_{kk} . On déduit alors de la définition de b_{kk} et F_k que l'application tangente $T_0 d_{kk}$ de d_{kk} vérifie

$$T_0 d_{kk}(\bar{z}) = (\overline{r^1 \cdot z}, \dots, \overline{r^q \cdot z}),$$

$z \in (Z_k, 0)$, la barre désignant l'image des éléments par les deux isomorphismes. L'application $T_0 d_{kk}$ provient donc du morphisme de faisceau

$$\tilde{r} : O_U^p / (f_1, \dots, f_p) \cdot O_U^p + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \cdot O_U \rightarrow (O_U / (f_1, \dots, f_p) \cdot O_U)^p,$$

donné par la matrice

$$\tilde{r} = (r^1, \dots, r^q) \in O_U^{p \cdot q}.$$

Le morphisme \tilde{r} est concentré sur le lieu singulier de $(X_0, 0)$. Celui-ci est égal à (0) d'après l'hypothèse. Il en résulte que le noyau de \tilde{r} est un faisceau en \mathbb{C} -espaces vectoriels

de dimension finie. Ceci implique

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(T_0 b_{kk}) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(T_0 d_{kk}) < \infty.$$

Les hypothèses de la proposition 1(a), A.I.2, étant satisfaites, les variétés $(b_{kk}^{-1}(0), 0) = (S_{kk}, 0)$ sont de dimension finie. Reste à montrer que les plongements

$(S_{kk}, 0) \xrightarrow{i} (S_{k'k'}, 0)$, $k \leq k'$, sont des isomorphismes. Posant $m = k$ et $m' = k'$ dans le diagramme du début de la démonstration on remarque les propriétés suivantes :

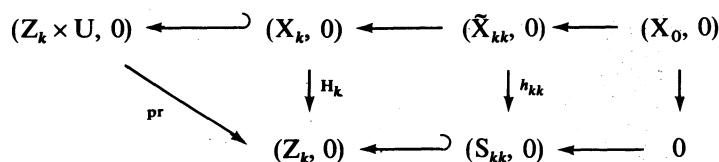
- (i) L'application j envoie $\text{Im}(T_0 b_{kk})$ dans $\text{Im}(T_0 b_{k'k'})$.
- (ii) L'application i induit l'identité de $\text{Ker}(T_0 b_{kk})$ sur $\text{Ker}(T_0 b_{k'k'})$.

La première assertion est immédiate. Pour voir la deuxième, on remarque que l'on peut supposer f_1, \dots, f_p et donc aussi $r^1, \dots, r^q \in \mathcal{O}_{U,0}^p$ polynômiaux car X_0 est à singularité isolée. Par conséquent, $\text{Ker}(T_0 b_{kk})$ et $\text{Ker}(T_0 b_{k'k'})$ admettent des \mathbb{C} -bases finies polynômiales.

En vertu de la remarque après la notation 2, A.0, on peut les choisir égales, d'où (ii). L'assertion résulte alors de la proposition 2, A.I.2.

Comme corollaire du théorème 4 A, chap. II.5, de la proposition 3 d'au-dessus et de la remarque après le théorème 4, chap. II.5, nous obtenons :

THÉORÈME 5. — Soit X_0 une variété analytique de dimension finie à singularité isolée à l'origine. Avec les conventions de la notation 3, chap. II.5, on considère le diagramme suivant ($k > m_0$)



- (a) Le morphisme h_{kk} ne dépend pas de l'entier k . Nous le notons $h : (X_S, 0) \rightarrow (S, 0)$.
- (b) Le morphisme $h : (X_S, 0) \rightarrow (S, 0)$ décrit la déformation semi-universelle du germe $(X_0, 0)$.
- (c) Si $(X_0, 0)$ admet une \mathbb{C}^* -action μ , il existe une \mathbb{C}^* -action $\hat{\mu}$ sur $(S \times U, 0)$ qui étend μ et pour laquelle la déformation semi-universelle $h : (X_S, 0) \rightarrow (S, 0)$ est un morphisme équivariant.

III. — Calculs

1. UN ALGORITHME DE CONSTRUCTION DE LA DÉFORMATION SEMI-UNIVERSELLE D'UNE SINGULARITÉ ISOLÉE. — Soit X_0 une variété analytique à singularité isolée à l'origine.

L'algorithme suivant fournit en vertu des théorèmes 3, chap. II. 4, 4 et 4 A, chap. II. 5, et 5, chap. II. 6, la déformation semi-universelle du germe $(X_0, 0)$. [Pour raisons de simplicité et en vertu du théorème 5, on supprimera les indexations par rapport à la filtration en espaces de Banach de $O_{U,0} = \varinjlim_k O_{U,0}(k)$. En particulier, on parlera de

déploiements au lieu de familles de déploiements, etc.]

Soit $f: U \rightarrow \mathbb{C}^p$, $U \subseteq \mathbb{C}^n$, une application analytique définissant X_0 comme sa fibre $f^{-1}(0)$. Comme $(X_0, 0)$ est à singularité isolée on peut supposer que f est polynômiale. On note $I_0 = (f_1, \dots, f_p) \subseteq O_{U,0}$.

(A) *Construction d'un déploiement semi-universel de f .* — (1) Choisir selon la proposition 2, A. II. 1, des coordonnées dans \mathbb{C}^n telles que $\Delta(I_0) \subset O_{U,0}$ forme une réalisation additive ordonnée de l'anneau $O_{X_0,0} = O_{U,0}/I_0$ (th. 1, A. II. 2, cf. Benson et Hironaka).

(2) Construire selon le lemme 3 et la définition 3, A. II. 3, une base standard f_1, \dots, f_p de I_0 . Si $O_{U,0/I_0}$ est un anneau de Cohen-Macaulay, la compléter à une base standard complète (cf. déf. 5 et prop. 4, A. II. 3).

(3) Construire en divisant $\Delta(I_0)^p$ par les vecteurs $\partial f / \partial x_i \in O_{U,0}^p$, $i = 1, \dots, n$, un complémentaire direct

$$Z = \Delta(T_f^1) \subseteq \Delta(I_0)^p \subseteq O_{U,0}^p,$$

du module

$$T_f^1 = (f_1, \dots, f_p) \cdot O_{U,0}^p + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \cdot O_{U,0}.$$

Ainsi l'on obtient en vertu du théorème 3, chap. II. 4, la description du déploiement semi-universel de f par

$$\begin{aligned} F: (Z \times U, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^p, 0), \\ (z, x) &\rightarrow F(z, x) = f(x) + z(x). \end{aligned}$$

On remarque que si $O_{U,0}/I_0$ est un anneau de Cohen-Macaulay, les composantes F_1, \dots, F_p de F satisfont les hypothèses de la proposition 6, A. II. 4.

(B) *Construction d'une déformation semi-universelle de $(X_0, 0)$.* — (4) Construire un système de générateurs r^1, \dots, r^q du module des relations entre f_1, \dots, f_p (cf. Schreyer):

(a) Trouver une base de relations monômiales $m^1, \dots, m^q \in O_{U,0}^p$ entre les termes initiaux in (f_i) des f_i .

(b) Diviser les séries $m^j \cdot f$ par f_1, \dots, f_p :

$$m^j \cdot f = n^j \cdot f + h^j, \quad n^j \in O_{U,0}, \quad h^j \in \Delta(I_0).$$

(nota bene : $n^j \neq m^j$ si $m^j \cdot f \neq 0$). Les séries h^j sont nulles car $\Delta(I_0) \cap I_0 = 0$. Les séries $r^j = m^j - n^j$ forment alors une base de relations entre f_1, \dots, f_p .

(5) Relever selon le lemme 1, chap. I.3, les relations r^1, \dots, r^q à des vecteurs $R^1, \dots, R^q \in O_{Z \times U, 0}^p$ vérifiant

$$R^j \cdot F \in \Delta(I).$$

(6) Considérer dans Z le système d'équations donné par l'annulation des $O_{Z,0}$ -coefficients de $R^j \cdot F$ [cf. les th. 4 et 4 A, chap. II.5, et la partie (A) de la démonstration du th. 2, chap. I.3] :

(a) Résoudre sa partie linéaire pour obtenir une base de $T_{X_0}^1$, i. e., l'espace de plongement $(\mathbb{C}^e, 0)$, $e = \dim_{\mathbb{C}} T_{X_0}^1$, de $(S, 0)$ (cf. le th. 5, chap. II.6).

(b) Choisir une base finie de générateurs de l'idéal de $O_{\mathbb{C}^e, 0}$ définissant $(S, 0)$ comme sous-variété de $(\mathbb{C}^e, 0)$.

On obtient ainsi la déformation semi-universelle

$$h : (X_S, 0) \rightarrow (S, 0),$$

du germe $(X_0, 0)$ (cf. le th. 5, chap. II.6).

Remarquons que le choix particulier de la base standard f_1, \dots, f_p de I_0 sert à l'étape (4) en vertu de la proposition 4, A.II.3, et à l'étape (5) selon la définition de F et la proposition 6, A.II.6. On en déduit que si $O_{X_0,0} = O_{U,0}/I_0$ est un anneau de Cohen-Macaulay, l'étape (5) admet un algorithme fini.

Ce qui précède fournit en particulier une borne supérieure de la dimension de la base $(S, 0)$ de la déformation semi-universelle de $(X_0, 0)$: écrivons la réalisation additive Z de K_f^1 sous forme

$$Z = \prod_{k=1}^p \bigoplus_{i=0}^n \bigoplus_{\alpha \in \Delta_i^k} \mathbb{C} \{x_1, \dots, x_i\} (x_{i+1}, \dots, x_n)^\alpha \subseteq O_{U,0}^p,$$

$$\Delta_i^k \subseteq \mathbb{N}^{n-i}.$$

On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 1. — *La dimension de plongement e de la base $(S, 0)$ de la déformation semi-universelle h de $(X_0, 0)$ est inférieure ou égale à la codimension d'un $\mathbb{C} \{x_1\}$ -sous-module maximal de Z qui est égale à la cardinalité de l'ensemble fini*

$$\prod_{k=1}^p \Delta_0^k.$$

COROLLAIRE. — *Il en résulte que si $\Delta_0^k = \emptyset$ pour tout k , le germe $(X_0, 0)$ est rigide, i. e., coïncide avec sa déformation semi-universelle.*

Démonstration. — On réutilise les arguments et notations de la démonstration de la proposition 3 (a), chap. II. 6. Décomposons Z en somme directe $Z = Z' \oplus Z''$, où

$$Z' = \prod_{k=1}^p \bigoplus_{\alpha \in \Delta_0^k} \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)^\alpha$$

et

$$Z'' = \prod_{k=1}^p \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{\alpha \in \Delta_0^k} \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_i\}(x_{i+1}, \dots, x_n)^\alpha.$$

L'espace tangent $T_0 S$ de la base $(S, 0)$ est alors le noyau de l'application

$$T_0 b = T_0 b_{kk} : Z = Z' \oplus Z'' \xrightarrow{\tilde{r}} \mathbb{K}_f^1 \xrightarrow{\tilde{r}} (\mathbb{C}\{x\}/I_0)^q,$$

où \tilde{r} est défini par la matrice $(r^1, \dots, r^q) \in \mathbb{C}\{x\}^{p \cdot q} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, 0}^{p \cdot q}$ (cf. le th. 4 A, chap. II. 5, et sa démonstration). La restriction à Z'' de $T_0 b$ est $\mathbb{C}\{x_1\}$ -linéaire. L'espace $T_0 S = \text{Ker}(T_0 b)$ étant de dimension finie, l'intersection de $T_0 S$ et Z'' doit être nulle. Ceci implique que

$$\dim_{\mathbb{C}} T_0 S \leq \# \left(\prod_{k=1}^p \Delta_0^k \right),$$

d'où l'assertion.

2. EXEMPLES.

Exemple 1. — Soit X_0 la courbe monômiale de \mathbb{C}^3 définie par $x = t^3$, $y = t^4$ et $z = t^5$. On choisit les équations suivantes :

$$f_1 = y^2 - xz, \quad f_2 = yz - x^3, \quad f_3 = z^2 - x^2 y.$$

Soit $l : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ une forme linéaire injective introduisant l'ordre $z < y \ll x$ sur $\mathbb{C}\{x, y, z\}$ (cf. A. II. 1). Les termes initiaux y^2 , yz et z^2 de f_1 , f_2 et f_3 induisent la représentation additive

$$\Delta(I_0) = \mathbb{C}\{x\} \oplus \mathbb{C}\{x\}y \oplus \mathbb{C}\{x\}z,$$

de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, 0}/I_0$. Les f_i forment une base standard de I_0 ; on verra plus bas qu'il n'est pas nécessaire de la compléter (cf. la prop. 4, A. II. 3).

L'image du sous-module $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, 0}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, 0}^3$ dans $(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, 0}/I_0)^3$ est engendrée par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} z \\ 3x^2 \\ 2xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2y \\ z \\ -x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 2z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ 0 \\ -x^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^3 \\ x^2 y \end{pmatrix},$$

Il est facile de choisir une forme linéaire injective $l : (\mathbb{N}^3)^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que ce système de générateurs admet les termes initiaux

$$\begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2y \end{pmatrix}.$$

Ils donnent la représentation suivante du module K_f^1 :

$$K_f^1 \cong \begin{pmatrix} \mathbb{C}\{x\} + \mathbb{C}y \\ \times \\ \mathbb{C}\{x\} + \mathbb{C}y + \mathbb{C}xy \\ \times \\ \mathbb{C}\{x\} + \mathbb{C}y + \mathbb{C}xy \end{pmatrix} = Z.$$

Elle est ordonnée : la dimension de plongement de la base de la déformation semi-universelle de $(X_0, 0)$ va être plus petite ou égale à 5 (cf. la prop. 1, chap. III. 1).

Le déploiement semi-universel F de f s'écrit alors :

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1 + ay \sum g_i \cdot x^i, \\ F_2 &= f_2 + by + cxy + \sum h_i \cdot x^i, \\ F_3 &= f_3 + dy + exy + \sum k_i \cdot x^i, \end{aligned}$$

avec des variables a, b, c, d, e, g_i, h_i et $k_i, i \geq 0$.

Le module des relations entre f_1, f_2 et f_3 est engendré par les deux vecteurs

$$r^1 = (z, -y, x) \quad \text{et} \quad r^2 = (x^2, -z, y),$$

qui se relèvent à des vecteurs

$$R^1 = r^1 + (b + cx, -a, 0) \quad \text{et} \quad R^2 = r^2 + (-d - ex, b + cx, 0).$$

On en déduit les équations suivantes du platificateur $(S, 0)$:

$$\begin{aligned} g_0 &= 0, & h_0 &= 0, & k_0 &= ad - b^2, \\ g_1 &= b, & h_1 &= d, & k_1 &= ae - 2bc, \\ g_2 &= c, & h_2 &= e, & k_2 &= -a - c^2, \\ g_{i+3} &= 0, & h_{i+3} &= 0, & k_{i+3} &= 0. \end{aligned}$$

La base $(S, 0)$ est donc lisse de dimension 5. La déformation semi-universelle $h : (X_S, 0) \rightarrow (S, 0)$ est la restriction de la projection $\text{pr} : (\mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ à la sous-variété $(X_S, 0)$ de $(\mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^3, 0)$ définie par les équations

$$\begin{aligned} H_1 &= f_1 + bx + cx^2 + ay, \\ H_2 &= f_2 + dx + ex^2 + by + cxy, \\ H_3 &= f_3 + (ad - b^2) + (ae - 2bc) \cdot x + (-a - c^2) \cdot x^2 + dy + exy. \end{aligned}$$

Exemple 2. — Soit X_0 la sous-variété de \mathbb{C}^3 formée de trois droites concourantes. On

choisit les équations suivantes

$$f_1 = y^2 - xy, \quad f_2 = yz - xz, \quad f_3 = z^2 - xz.$$

Comme dans le premier exemple on trouve la représentation suivante de $O_{\mathbb{C}^3, 0}/I_0$:

$$\Delta(I_0) = \mathbb{C}\{x\} + \mathbb{C}\{x\}y + \mathbb{C}\{x\}z.$$

L'image de $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$ dans $(O_{\mathbb{C}^3, 0}/I_0)^3$ est engendrée par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} xz - xy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y - x \\ 2z - x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2y - 2x \\ y - x \\ -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy - x^2 \\ xy - x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy \end{pmatrix}.$$

Pour une forme linéaire convenable ils admettent les termes initiaux

$$\begin{pmatrix} xz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy \end{pmatrix}$$

et donnent la représentation suivante de K_f^1

$$K_f^1 \simeq \begin{pmatrix} \mathbb{C}\{x\} + \mathbb{C}z \\ \times \\ \mathbb{C}\{x\} + \mathbb{C}y \\ \times \\ \mathbb{C}\{x\} + \mathbb{C}y \end{pmatrix} = Z.$$

Elle est ordonnée : la dimension de plongement de la base de la déformation semi-universelle de $(X_0, 0)$ va être plus petite ou égale à 5 (cf. la prop. 1, chap. III. 1).

Le déploiement semi-universel F de f s'écrit alors :

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1 + az + \sum d_i \cdot x^i, \\ F_2 &= f_2 + by + \sum e_i \cdot x^i, \\ F_3 &= f_3 + cy + \sum g_i \cdot x^i, \end{aligned}$$

avec des variables a, b, c, d_i, e_i, g_i et $i \geq 0$.

Le module des relations entre f_1, f_2 et f_3 est engendré par les deux vecteurs

$$r^1 = (z, -y, x) \quad \text{et} \quad r^2 = (0, z - x, x - y)$$

qui se relèvent à des vecteurs

$$R^1 = r^1 + (b, 0, -a) \quad \text{et} \quad R^2 = r^2 + (c, -b, 0).$$

On en déduit les équations suivantes du platificateur $(S, 0)$:

$$\begin{aligned} d_0 &= -ab, & e_0 &= -ac, & g_0 &= -b^2, \\ d_1 &= -a, & e_1 &= -b, & g_1 &= -b, \end{aligned}$$

$$d_{i+2}=0, \quad e_{i+2}=0, \quad g_{i+2}=0.$$

La base $(S, 0)$ est donc lisse de dimension 3. La déformation semi-universelle $h : (X_S, 0) \rightarrow (S, 0)$ est la restriction de la projection $\text{pr} : (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ à la sous-variété $(X_S, 0)$ de $(\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3, 0)$ définie par les équations

$$H_1 = f_1 - ab - ax + az,$$

$$H_2 = f_2 - ac - bx + by,$$

$$H_3 = f_3 - b^2 - bx + cy.$$

Exemple 3. — Soit X_0 la sous-variété de \mathbb{C}^4 formée de deux « plans » touchant en un point. Ses équations xz, yz, xw, yw se transforment par le changement de coordonnées $x \rightarrow z-x, y \rightarrow w-y, z \rightarrow z, w \rightarrow w$ en

$$f_1 = z^2 - xz, \quad f_2 = zw - xw,$$

$$f_3 = w^2 - yw, \quad f_4 = yz - xw.$$

Il est clair comment choisir une forme linéaire injective $l : \mathbb{N}^4 \rightarrow \mathbb{R}_+$ pour obtenir les termes initiaux z^2, zw, w^2 et yz des f_i . Ils fournissent la représentation suivante de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^4, 0} / I_0$.

$$\Delta(I_0) = \mathbb{C}\{x, y\} + \mathbb{C}\{x, y\}w + \mathbb{C}\{x\}zw.$$

Contrairement aux deux premiers exemples, $\mathcal{O}_{X_0, 0}$ n'est pas un anneau de Cohen-Macaulay. On choisit maintenant une forme linéaire injective $l : (\mathbb{N}^4)^4 \rightarrow \mathbb{R}_+$ induisant l'ordre

$$w < z < y \ll x \quad \text{et} \quad 1^{\text{re}} < 2^{\text{e}} < 3^{\text{e}} < 4^{\text{e}} \text{ ligne sur } \mathcal{O}_{\mathbb{C}^4, 0}^4.$$

L'image de $(\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z, \partial f / \partial w)$ dans $(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^4, 0} / I_0)^4$ est engendrée par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} z \\ w \\ 0 \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -w \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z-x \\ 0 \\ 0 \\ -w+y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z-x \\ -y \\ 2z-x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dont les termes initiaux par rapport à l sont

$$\begin{pmatrix} 0 \\ w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ils donnent la représentation suivante de K_f^1 :

$$K_f^1 \simeq \left(\begin{array}{c} \mathbb{C}\{x, y\} + \mathbb{C}\{x, y\}w + \mathbb{C}\{x\}z + \mathbb{C}\{x\}zw \\ \times \\ \mathbb{C}\{x, y\} \\ \times \\ \mathbb{C}\{x\} + \mathbb{C}\{x\}y + \mathbb{C}\{x\}z \\ \times \\ \mathbb{C}\{x, y\} + \mathbb{C}\{x\}z \end{array} \right) = Z.$$

Il résulte alors du corollaire de la proposition 1, chap. III. 1, que $(X_0, 0)$ est rigide. Cependant, on se convainc facilement que l'on ne peut pas relever les deux générateurs

$$r^1 = (w, -z, 0, 0) \quad \text{et} \quad r^2 = (0, w, -z, -w),$$

du module de relations entre les f_i par un algorithme fini de division [cf. l'étape (5), chap. III. 1, et la prop. 6, A. II. 4].

Exemple 4. — Soit X_0 la sous-variété de \mathbb{C}^4 formée de trois plans définis par les monômes xz , yw et zw . La variété X_0 n'est pas à singularité isolée à l'origine. Nous montrerons qu'elle admet une « déformation semi-universelle à base de dimension infinie ». Par le changement de coordonnées $x \rightarrow z - x$, $y \rightarrow w - y$, $z \rightarrow z$ et $w \rightarrow w$ les équations de X_0 se transforment en

$$f_1 = z^2 - xz, \quad f_2 = w^2 - yw, \quad f_3 = zw,$$

à des termes privilégiés z^2 , w^2 et zw . On a alors

$$\Delta(I_0) = \mathbb{C}\{x, y\} + \mathbb{C}\{x, y\}z + \mathbb{C}\{x, y\}w$$

et

$$K_f^1 \simeq \left(\begin{array}{c} \mathbb{C}\{x, y\} + \mathbb{C}\{y\}w \\ \times \\ \mathbb{C}\{x, y\} + \mathbb{C}\{x\}z \\ \times \\ \mathbb{C}\{x, y\} \end{array} \right) = Z.$$

Le déploiement semi-universel F de f s'écrit :

$$F_1 = f_1 + \sum a_{ij} \cdot x^i y^j + \sum b_j \cdot y^j w,$$

$$F_2 = f_2 + \sum c_{ij} \cdot x^i y^j + \sum d_i \cdot x^i z,$$

$$F_3 = f_3 + \sum e_{ij} \cdot x^i y^j.$$

Les deux générateurs r^1 et r^2 du module des relations entre les f_i

$$r^1 = (w, 0, x - z) \quad \text{et} \quad r^2 = (0, z, y - w),$$

se relèvent à des vecteurs

$$R^1 = r^1 + (0, -\sum b_j y^j, 0) \quad \text{et} \quad R^2 = r^2 + (-\sum d_i x^i, 0, 0),$$

induisant les équations suivantes du platicateur $(S, 0)$

$$\begin{aligned} a_{00} &= 0, & c_{00} &= 0, \\ a_{i+1, j} &= 0, & c_{i, j+1} &= 0, \\ a_{0, j+1} + b_j &= 0, & c_{i+1, 0} + d_i &= 0, \\ e_{ij} + d_i b_j &= 0. \end{aligned}$$

La base $(S, 0)$ est donc lisse de dimension infinie à coordonnées b_j et d_i pour $i, j \geq 0$. La déformation semi-universelle $h : (X_S, 0) \rightarrow (S, 0)$ de $(X_0, 0)$ est la restriction de la projection $\text{pr} : (S \times \mathbb{C}^4, 0) \rightarrow (S, 0)$ à la sous-variété $(X_S, 0)$ de $(S \times \mathbb{C}^4, 0)$ définie par les équations

$$\begin{aligned} H_1 &= f_1 + \sum b_j \cdot y^j \cdot (y + w), \\ H_2 &= f_2 + \sum d_i \cdot x^i \cdot (x + z), \\ H_3 &= f_3 - \sum b_j d_i \cdot x^i y^j. \end{aligned}$$

APPENDICE

A. 0. Préliminaires

Le corps de base est toujours le corps des nombres complexes \mathbb{C} . On dit qu'une application $f : V \rightarrow F$ d'un ouvert V d'un espace de Banach E à valeurs dans un espace de Banach F est analytique en $a \in V$, s'il existe une suite d'applications (f_j) de E dans F , chacune polynômiale homogène continue de degré j , et un nombre réel $r > 0$ tels que $\|f\|_r = \sum \|f_j\| r^j < \infty$ et tels que $f(a+x) = \sum f_j(x)$ pour $x \in E$ suffisamment petit. L'application f est analytique dans V , si elle l'est en tout point de V . On remarque que le principe du prolongement unique d'une application analytique n'est plus vrai en dimension infinie.

NOTATION 1. — On désigne par $H(V, F)$ [resp. $H_x(V, F)$] le faisceau des germes d'applications analytiques sur V (resp. l'espace vectoriel des germes d'applications analytiques en $x \in V$) à valeurs dans F . On pose en particulier $O_V = H(V, \mathbb{C})$ et $O_{V, x} = H_x(V, \mathbb{C})$.

NOTATION 2. — Soit $l : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ une forme linéaire fixe. On considère l'anneau $A = O_{\mathbb{C}^n, 0} = H_0(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ des séries convergentes $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha x^\alpha$ à l'origine de \mathbb{C}^n . Pour tout

$k \in \mathbb{N}$ on pose

$$A(k) = \left\{ f \in A, \sum_{\alpha} |f_{\alpha}| \cdot k^{-l(\alpha)} < \infty \right\}.$$

Les espaces $A(k)$ munis de la norme $\|f\|_k = \sum |f_{\alpha}| \cdot k^{-l(\alpha)}$ sont des espaces de Banach et l'on a $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A(k)$. On munit alors A de la topologie de la limite inductive. Elle ne

dépend pas de la forme linéaire l choisie. On l'appelle la topologie analytique sur A . Tout sous-module I_0 de A^q est fermé pour cette topologie (théorème de fermeture de Krull). Chaque fois qu'on parle des espaces de Banach $A(k)$, $k \in \mathbb{N}$, on sous-entend avec la donnée d'une forme linéaire injective $l: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$. On remarque que tout sous-espace vectoriel A' de A de dimension finie qui est engendré par des polynômes de A vérifie

$$A'(k) := A' \cap A(k) = A'$$

(cf. la dém. de la prop. 3, chap. II. 6).

Une autre manière de présenter A comme limite inductive d'espaces de Banach consiste à considérer des polycylindres fermés K dans \mathbb{C}^n et les espaces de Banach $B(K)$ des fonctions continues sur K et analytiques sur l'intérieur $\overset{\circ}{K}$ de K (cf. Douady).

DÉFINITION 1. — Une application analytique $f: V \rightarrow E$ est un isomorphisme local en $a \in V$, si f induit un homéomorphisme d'un voisinage de a sur un voisinage de $f(a)$ dont l'inverse est analytique.

L'espace tangent $T_a V$ d'un ouvert V de E en $a \in V$ est l'espace des applications analytiques $v: \bar{T} \rightarrow V$ d'image a où $\bar{T} = \text{Spec } \mathbb{C}\{\varepsilon\}/\varepsilon^2$. Il s'identifie de manière naturelle à E . L'application tangente $T_a f$ d'une application analytique $f: V \rightarrow F$ en $a \in V$ est l'application linéaire $T_a f: T_a V \rightarrow T_{f(a)} F$ définie par $(T_a f)(v) = v \circ f$. Elle s'identifie à l'application linéaire $f_1: E \rightarrow F$ du développement en série de $f(a+x) = \sum f_j(x)$ en a .

THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES (cf. Douady). — Soit $f: V \rightarrow F$ une application analytique en $a \in V$. Si l'application tangente $T_a f: T_a V \rightarrow T_{f(a)} F$ de f en a est un isomorphisme, f est un isomorphisme local en a .

DÉFINITION 2. — (a) On dit qu'un sous-espace E' d'un espace vectoriel topologique E est direct s'il admet un supplémentaire topologique E'' , $E = E' \oplus E''$. En vertu du théorème de Hahn-Banach, E' est direct si et seulement si E' est fermé et admet un supplémentaire fermé E'' .

(b) On dit qu'une application linéaire continue $u: E \rightarrow F$ d'espaces vectoriels topologiques est stricte, si u induit un isomorphisme topologique de $E/\text{Ker } u$ sur $\text{Im } u$, c'est-à-dire, si l'image de u est fermée. On dit qu'elle est directe, si le noyau et l'image de u sont des sous-espaces directs de E et F respectivement.

(c) Une application analytique $f: V \rightarrow F$ en $a \in V \subseteq E$ est une immersion (resp. immersion directe, submersion, submersion directe), si à des isomorphismes analytiques locaux en $a \in V$ et $f(a) \in F$ près, f est la restriction d'un homomorphisme injectif (resp. injectif direct, surjectif, surjectif direct) de E dans F . Notons que l'image réciproque d'un point de F par une submersion directe $f: V \rightarrow F$ est localement isomorphe à V .

PROPOSITION 1. — Soit $f: V \rightarrow F$ une application analytique en $a \in V$. Si l'application tangente $T_a f: T_a V \rightarrow T_{f(a)} F$ de f en a est un homomorphisme injectif direct (resp. surjectif direct), f est une immersion directe (resp. submersion directe) en $a \in V$.

L'assertion est une conséquence facile du théorème des fonctions implicite et n'est plus vraie si l'on supprime l'hypothèse que $T_a f$ soit un homomorphisme direct (cf. Douady).

A. I. Variétés analytiques banachiques

1. DÉFINITIONS.

DÉFINITION 1. — Un modèle de variété $m(V, f, F)$ d'une variété analytique banachique est la donnée d'un ensemble X dans un ouvert V d'un espace de Banach E et d'une application analytique $f: V \rightarrow F$ à valeurs dans un espace de Banach F tels que

$$X = f^{-1}(0) = \{x \in V, f(x) = 0\}.$$

On dit que X est l'ensemble analytique défini par f . A tout modèle $m(V, f, F)$ et tout espace de Banach G on associe le faisceau en espaces vectoriels

$$\Phi(f, G),$$

des germes d'applications analytiques sur X à valeurs dans G ; c'est par définition le quotient

$$\Phi(f, G) = H(V, G) / I(f, G),$$

du faisceau $H(V, G)$ des germes d'applications analytiques sur V dans G par le sous-faisceau $I(f, G)$ de $H(V, G)$ des combinaisons linéaires des composantes de f . Plus précisément, $I(f, G)$ est le faisceau des germes d'applications h de $H(V, G)$ s'écrivant $h = \lambda \circ f$ avec $(\lambda \circ f)(x) = \lambda(x)(f(x))$, où λ est le germe d'une application analytique de V dans l'espace de Banach $L(F, G)$ des applications linéaires continues de F dans G .

Soient $m(V_i, f_i, F_i)$, $i = 1, 2$, deux modèles de variétés et $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ une application analytique. Pour tout espace de Banach G , φ induit un homomorphisme de faisceau

$$\varphi^*(G): H(V_2, G) \rightarrow H(V_1, G),$$

par $\varphi^*(G)(\alpha) = \alpha \circ \varphi$.

Soit X un sous-ensemble analytique d'un espace de Banach E . On dit que les deux modèles $m(V_i, f_i, F_i)$ sont équivalents sur X , si

$$f_1^{-1}(0) = f_2^{-1}(0) = X$$

et si pour tout espace de Banach G , les faisceaux $\Phi(f_1, G)$ et $\Phi(f_2, G)$ sont isomorphes, i. e., s'il existe une application analytique $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ induisant pour tout G des isomorphismes

$$\varphi^*(G): \Phi(f_2, G) \xrightarrow{\cong} \Phi(f_1, G).$$

DÉFINITION 2. — Une variété analytique banachique $X = (X, \Phi)$ est un sous-ensemble analytique X d'un espace de Banach E muni de la collection $\Phi(X, G)$, G espace de Banach, des classes d'isomorphie des faisceaux $\Phi(f, G)$ associés à un modèle $m(V, f, G)$ définissant $X = f^{-1}(0)$. Par abus de notation on écrit souvent

$$(X, \Phi) = X = m(V, f, G)$$

et

$$\Phi(X, G) = \Phi(f, G) = H(V, G)/I(f, G).$$

Remarque. — Une variété analytique banachique X n'est pas entièrement déterminée par le faisceau $\Phi(X, \mathbb{C})$ des fonctions analytiques sur X .

Exemple. — Soient $k_0 < k_1 \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{C}^n$ ouvert et $A = O_{U,0}$. Considérons les modèles $m(A(k_0), \text{Id}, A(k_0))$ et $m(A(k_0), j, A(k_1))$ où j désigne l'injection naturelle de $A(k_0)$ dans $A(k_1)$ (cf. la not. 2, A.0). Ces deux modèles définissent des variétés banachiques X et X' vérifiant

$$\Phi(X, \mathbb{C}) \simeq \Phi(X', \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}.$$

Par contre, posant $G = A(k_1)$, les faisceaux $\Phi(\text{Id}, G)$ et $\Phi(j, G)$ ne sont pas isomorphes : en effet, comme $A(k_0)$ n'est pas un sous-espace direct de $A(k_1)$, l'application naturelle

$$L(A(k_1), A(k_1)) \rightarrow L(A(k_0), A(k_1))$$

n'est pas une surjection. Ceci implique que $I(j, G) \subset I(\text{Id}, G)$. L'assertion en résulte selon la définition de $\Phi(\text{Id}, G)$ et $\Phi(j, G)$.

DÉFINITION 3. — (a) Pour toute variété X définie par un modèle $m(V, f, G)$ et tout ouvert V' de V on note $X|_{V'}$ et appelle la sous-variété ouverte de X définie par V' la variété banachique X' associée au modèle $m(V', f|_{V'}, F)$.

Le germe (X, x) d'une variété banachique X en un point x de X est défini comme la limite inductive des variétés $X|_{V'}$ par rapport à des ouverts V' avec $x \in V' \subseteq V$. Le germe (X, x) est entièrement déterminé par la collection des espaces vectoriels $\Phi_x(X, G)$, G espace de Banach, des germes d'applications analytiques sur X en x à valeurs dans G .

(b) On dit qu'une variété banachique X est lisse en $x \in X$, si elle est définie par un modèle $m(V, f, F)$ où $f: V \rightarrow F$ est une submersion directe en x . Si X est définie par une application linéaire continue $f: V \rightarrow F$, X est lisse si et seulement si f est un homomorphisme direct. Toute variété X qui est lisse en $x \in X$ est localement isomorphe en x à un ouvert d'un espace de Banach.

DÉFINITION 4. — Soient $X = m(V, f, F)$ et $X' = m(V', f', F')$, $V \subseteq E$, $V' \subseteq E'$, deux variétés analytiques banachiques.

(a) Deux applications analytiques $h_i: V_i \rightarrow E'$, $i = 1, 2$, $X \subseteq V_i \subseteq E$, sont équivalentes sur X s'il existe un ouvert W de V avec $X \subseteq W \subseteq V_i$ tel que

$$h_1 - h_2|_W \in I(f|_W, E').$$

(b) Un morphisme ou une application analytique de X dans X' est la classe d'équivalence sur X d'une application analytique $h: V \rightarrow V'$ vérifiant $f' \circ h \in I(f, F')$. On écrit par abus de notation $h: X \rightarrow X'$.

(c) En vertu de la remarque après la définition 3(b) au-dessus les notions d'immersion et de submersion locale s'étendent de manière naturelle au cas de morphismes entre variétés lisses.

Remarques. — (1) La définition d'un morphisme ne dépend pas des modèles choisis.

(2) Il est un exercice d'analyse complexe (cf. Douady) de montrer que tout morphisme $h : X \rightarrow X'$ induit pour tout espace de Banach G des homomorphismes bien définis

$$h^*(G) : \Phi(X', G) \rightarrow \Phi(X, G),$$

$$\bar{\rho} \rightarrow \overline{\rho \circ h}.$$

Ceci permet en particulier de définir la composition de deux morphismes comme la classe d'équivalence de la composition de leurs représentants et d'introduire la notion d'isomorphisme entre variétés banachiques.

DÉFINITION 5. — (a) Une sous-variété d'une variété analytique banachique $X = m(V, f, F)$ est une variété X' définie par un modèle $m(V', (f, f'), F \times F')$ où V' est un ouvert de V et f' une application analytique de V' dans un espace de Banach F' .

Soient $h : X \rightarrow S$ un morphisme de variétés banachiques et $S' = m(W, g, G)$ une sous-variété de S . L'image inverse $h^{-1}(S') = X_{S'}$ de S' par h est la sous-variété Y de X définie par le modèle

$$Y = m(V \cap \tilde{h}^{-1}(W), (f, g \circ \tilde{h}), F \times G),$$

désignant par \tilde{h} un représentant du morphisme h . Si $S' = \{s\}$ est un point de S , $h^{-1}(s) = X_s$ est appelé la fibre sur s du morphisme h . Notons que les fibres d'une submersion entre variétés lisses sont encore des variétés lisses.

(b) Un plongement de X dans une variété Y (resp. un plongement local de X en $x \in X$) est un morphisme $j : X \rightarrow Y$ qui induit un isomorphisme de X sur une sous-variété Y' de Y (resp. un morphisme j d'une sous-variété ouverte X' de X contenant x dans Y induisant un isomorphisme sur une sous-variété Y' de Y).

Remarque (cf. les dém. du lemme 1 et de la prop. 2, A. I. 2). — Soient $X = m(V, f, F)$ et $Y = m(W, g, G)$ deux variétés et $h : V \rightarrow G$ une application analytique induisant un morphisme $j : X \rightarrow Y$. Si h est une immersion directe (en $x \in X$), j est un plongement (local en x) de X dans Y .

DÉFINITION 6. — (a) Le produit $X_1 \times X_2$ de deux variétés $X_i = m(V_i, f_i, F_i)$, $i = 1, 2$, est défini par $X_1 \times X_2 = m(V_1 \times V_2, f_1 \times f_2, F_1 \times F_2)$. Il ne dépend pas des modèles choisis.

(b) Soient $h_i : X_i \rightarrow S$, $i = 1, 2$, deux morphismes. Le produit fibré $X_1 \times_S X_2$ de X_1 et X_2 sur S est l'image inverse $(h_1 \times h_2)^{-1}(D)$ de la diagonale $D \subseteq S \times S$ par le morphisme produit $h_1 \times h_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow S \times S$.

DÉFINITION 7. — (a) L'espace tangent $T_x X$ d'une variété X en $x \in X$ est l'espace des morphismes $v : \bar{\mathbb{T}} \rightarrow X$, $\bar{\mathbb{T}} = \text{Spec } \mathbb{C} \{ \varepsilon \} / \varepsilon^2$, d'image x . L'application tangente $T_x h$ d'un morphisme $h : X \rightarrow Y$ est définie par $T_x h : T_x X \rightarrow T_{h(x)} Y$, $(T_x h)(v) = h \circ v$.

(b) Un morphisme de fibrés triviaux sur une variété analytique banachique S est la donnée de deux espaces de Banach E_1 et E_2 et d'un morphisme

$$\begin{array}{ccc}
 H : S \times E_1 & \longrightarrow & S \times E_2 \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & S &
 \end{array}$$

rendant commutatif le diagramme et de sorte que $H(s, x)$ est linéaire continu en s et analytique en x . Pour tout $s \in S$, H induit un homomorphisme d'espaces de Banach $H(s) : E_1 \rightarrow E_2$ par $H(s)(x) = H(s, x)$.

2. CRITÈRES DE FINITUDE.

DÉFINITION 8. — (a) Une variété analytique banachique X est de dimension finie (resp. de définition finie) si elle peut être définie par un modèle $m(V, f, F)$ où V est un ouvert d'un espace affine de dimension finie (resp. où F est un espace affine de dimension finie).

(b) Une variété X est de dimension finie (resp. de définition finie) en $x \in X$ s'il existe un voisinage V' de x tel que $X|_{V'}$ est de dimension finie (resp. de définition finie).

(c) Une sous-variété X' de X est de définition finie dans X si elle est la fibre $h^{-1}(s)$, $s \in S$, d'un morphisme $h : X \rightarrow S$ dans une variété S de dimension finie.

(d) Une variété X sur S , i. e., une variété X munie d'un morphisme $h : X \rightarrow S$, est de dimension finie sur S (en $x \in X$) s'il existe un plongement (local en x) j de X dans le produit $S \times U$ de S avec un ouvert U de \mathbb{C}^n et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{j} & S \times U \\
 & \searrow h & \swarrow \text{pr} \\
 & S &
 \end{array}$$

On dit que le morphisme h est installé par le diagramme au-dessus.

Remarque. — Notons que toute variété X de dimension finie est de définition finie et donc entièrement déterminée par son faisceau de fonctions analytiques sur $X : \Phi(X, \mathbb{C}) = \mathcal{O}_V / \mathcal{I}(X, \mathbb{C}) = \mathcal{O}_X$.

PROPOSITION 1 [cf. la dém. de la prop. 3(a), chap. II. 6]. — (a) Une variété banachique $X = m(V, f, F)$, $V \subseteq E$, est de dimension finie en $x \in X$, si l'application tangente $T_x f : E \rightarrow F$ de f en x est un homomorphisme direct de noyau $T_x X$ de dimension finie.

(b) Une variété X sur S , $h : X \rightarrow S$, est de dimension finie sur S en $x \in h^{-1}(s) \subseteq X$ si et seulement si la fibre $h^{-1}(s)$ de h sur $s \in S$ est de dimension finie en x .

Démonstration. — (a) Nous décomposons F en somme directe $F = F' \oplus F''$ avec $F' = \text{Im } T_x f$ de manière telle que $f : V \rightarrow F$ définit une application analytique $f' : V \rightarrow F'$ vérifiant $\text{Im } T_x f = \text{Im } T_x f' = F'$. Selon la proposition des préliminaires, f' est une submersion directe en x . Par conséquent, la variété $Y = f'^{-1}(0)$ est lisse en x d'espace tangent

$T_x Y = \text{Ker } T_x f' = \text{Ker } T_x f$ de dimension finie. Comme X se plonge localement dans Y en x , l'assertion est montrée.

(b) Pour prouver l'implication non triviale, soit $i_0 : X_s \hookrightarrow U$ un plongement local en x de $X_s = h^{-1}(s)$ dans un ouvert U de \mathbb{C}^n . Il est induit par un morphisme $i : X \rightarrow U$. Comme la fibre sur (s, x) du morphisme $j = (h, i) : X \rightarrow S \times U$ est isomorphe à la variété lisse O , l'assertion découle du résultat suivant :

LEMME 1. — *Tout morphisme $j : X \rightarrow Y$ à fibre $j^{-1}(y)$ isomorphe à la variété lisse O est un plongement local en $x = j^{-1}(y)$.*

Démonstration. — Nous pouvons supposer que $x=0$ et $y=0$ et que Y est lisse. Soient $X = m(V, f, F)$, $V \subseteq E$, et $k : V \rightarrow Y$ un représentant de j . La fibre $j^{-1}(0)$ s'identifie à $g^{-1}(0)$, désignant par g le morphisme $g = (f, k) : V \rightarrow F \times Y$. Comme $j^{-1}(0) = 0$ est lisse, Id_V induit le morphisme nul sur $j^{-1}(0)$, d'où par définition, $\text{Id}_V = \lambda \circ g$ pour une application analytique $\lambda : V \rightarrow L(F, E)$. Il en résulte que $T_0 \text{Id}_V = \text{Id}_E = T_0(\lambda \circ g) = \lambda(0)(T_0 g)$ ce qui prouve que $T_0 g$ est un monomorphisme direct. La proposition des préliminaires, A.0, entraîne que g est une immersion directe à l'origine. L'assertion résulte alors en vertu de la remarque après la définition 5. A.1.1. du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{g} & F \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

PROPOSITION 2 (cf. la dém. de la prop. 3 chap. II.6). — *On considère un diagramme commutatif de morphismes entre germes de variétés banachiques lisses à l'origine*

$$\begin{array}{ccc} (X, 0) & \xrightarrow{i} & (X', 0) \\ \downarrow h & & \downarrow h' \\ (Y, 0) & \xrightarrow{j} & (Y', 0) \end{array}$$

On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) *Les morphismes i et j sont des immersions à l'origine.*
- (ii) *Les applications tangentes $T_0 h$ et $T_0 h'$ sont des homomorphismes directs de noyau de dimension finie.*
- (iii) *Identifiant Y à un ouvert de son espace tangent $T_0 Y$ on a l'inclusion $j((\text{Im } T_0 h, 0)) \subseteq (\text{Im } T_0 h', 0)$.*
- (iv) *L'immersion $i : (X, 0) \hookrightarrow (X', 0)$ induit un isomorphisme*

$$T_0 i : \text{Ker } T_0 h \rightarrow \text{Ker } T_0 h'.$$

Alors $i : (X, 0) \rightarrow (X', 0)$ induit un isomorphisme entre les fibres $(h^{-1}(0), 0)$ et $(h'^{-1}(0), 0)$.

Démonstration. — On peut supposer que X, X', Y et Y' sont des ouverts d'espaces de Banach E, E', F et F' . En vertu de (ii), F et F' se décomposent en somme directe

$$F = F_1 \oplus F_2 \quad \text{et} \quad F' = F'_1 \oplus F'_2,$$

avec $F_1 = \text{Im } T_0 h$ et $F'_1 = \text{Im } T_0 h'$. En résultent les décompositions

$$h = h_1 \oplus h_2 \quad \text{et} \quad h' = h'_1 \oplus h'_2.$$

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (X, 0) & \xrightarrow{i} & (X', 0) \\ \downarrow h & & \downarrow h' \\ (F_1, 0) & \xrightarrow{j_1} & (F'_1, 0) \end{array}$$

est bien défini en vertu de (iii). Il induit un morphisme $i_1 : (V_1, 0) \rightarrow (V'_1, 0)$ entre les variétés lisses $V_1 = h_1^{-1}(0)$ et $V'_1 = h'_1^{-1}(0)$. En vertu du théorème des fonctions implicites, A. 0, et (iv), c'est un isomorphisme. Considérons maintenant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (V_1, 0) & \xrightarrow{\simeq i_1} & (V'_1, 0) \\ \downarrow h_2 & & \downarrow h'_2 \\ (F_2, 0) & \xrightarrow{j_2} & (F'_2, 0) \end{array}$$

Les variétés lisses $(V_1, 0)$ et $(V'_1, 0)$ sont de dimension finie d'après la proposition 1 (a), A. I. 2, et (ii). Les idéaux $I(h_2, \mathbb{C})$ et $I(h'_2, \mathbb{C})$ de $O_{V_1, 0}$ et $O_{V'_1, 0}$ décrivent donc entièrement les fibres $(h_2^{-1}(0), 0)$ et $(h'_2^{-1}(0), 0)$ (cf. les remarques après la déf. 2, A. I. 1, et la déf. 8, A. I. 2). Comme l'application duale d'une application linéaire injective entre espaces de Banach est d'image dense, il résulte de (i) que l'idéal $I(j_2 \circ h_2, \mathbb{C})$ est dense dans $I(h_2, \mathbb{C})$. Par le théorème de fermeture de Krull, les deux sont égaux. D'autre part, l'idéal $I(h'_2, \mathbb{C})$ est isomorphe à $I(h'_2 \circ i_1, \mathbb{C}) = I(j_2 \circ h_2, \mathbb{C})$, d'où $I(h_2, \mathbb{C}) \simeq I(h'_2, \mathbb{C})$. Ceci prouve que les fibres $(h_2^{-1}(0), 0)$ et $(h'_2^{-1}(0), 0)$ sont isomorphes. Comme $(h^{-1}(0), 0)$ et $(h'^{-1}(0), 0)$ s'identifient de manière naturelle à ces deux variétés, la proposition est démontrée.

3. MORPHISMES SUR UN PRODUIT. — Soit X une variété analytique banachique définie par un modèle $m(V, f, F)$, V ouvert d'un espace de Banach E .

NOTATION 1. — On désigne par O_X le faisceau des germes de fonctions analytiques complexes sur X , $O_x = \Phi(X, \mathbb{C})$, et par $O_{x, x}$, $x \in X$, l'anneau des germes de fonctions analytiques en x . Pour simplicité nous supposons toujours $x = O \in E$ et écrivons alors

$$O_{x, 0} = O_{V, 0} / I,$$

pour un idéal I de $O_{V, 0}$. Si la variété X est de définition finie à l'origine, l'anneau $O_{x, 0}$ détermine entièrement le germe $(X, 0)$ de X à l'origine. Pour un germe de morphisme $h : (X, 0) \rightarrow (X', 0)$ on note $h^* : O_{X', 0} \rightarrow O_{X, 0}$ l'homomorphisme associé, défini par $h^*(\alpha) = \alpha \circ h$. Si une des deux variétés X et X' est de dimension finie à l'origine, h^* détermine entièrement le germe de morphisme h .

PROPOSITION 3 [cf. la dém. du th. 2, chap. I. 3, partie (B)]. — Soient S une variété analytique banachique, U un ouvert de \mathbb{C}^n , et X une sous-variété de $S \times U$. Pour tout

morphisme $v : T \rightarrow S$ on considère le diagramme induit

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X_T = X \times_S T \\ \downarrow h & & \downarrow h^v \\ S & \xleftarrow{v} & T \end{array}$$

désignant par h la restriction à X de la première projection de $S \times U$ sur S . Soit $O_{X,0} = O_{S \times U,0}/I$ l'anneau local de X à l'origine.

Si ou bien X est une sous-variété de définition finie de $S \times U$ ou bien T est une variété de dimension finie, l'anneau local $O_{X_T,0}$ du produit fibré $X_T = X \times_S T$ est décrit par les isomorphismes naturels suivants :

$$\alpha_1 : O_{X,0} \otimes_{O_{S \times U,0}} O_{T \times U,0} \xrightarrow{\cong} O_{X_T,0},$$

$$\alpha_2 : O_{T \times U,0}/(v \times \text{Id}_U)^*(I) \xrightarrow{\cong} O_{X_T,0}.$$

On laisse au lecteur de vérifier les assertions. On remarque encore que si S est une variété de dimension finie, le produit tensoriel

$$O_{X,0} \otimes_{O_{S \times U,0}} O_{T \times U,0}$$

s'identifie de manière naturelle au produit $O_{X,0} \otimes_{O_S,0} O_{T,0}$.

PROPOSITION 4 (cf. les notations de A. II. 4, et les dém. du th. 2, chap. I. 3, du lemme 1 et du th. 3, chap. II. 4, et de la prop. 6, A. I. 4). — Soient S une variété analytique banachique dans un ouvert V d'un espace de Banach E , et U un ouvert de \mathbb{C}^n . Soit $B : (S \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de morphisme que nous supposons induit par le germe d'une application analytique $\tilde{B} : (V \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ assez grand on associe à \tilde{B} des germes d'applications analytiques

$$\tilde{b}_k : (V, 0) \rightarrow (O_{U,0}(k), b_k(0)),$$

en posant $\tilde{b}_k(s)(x) = \tilde{B}(s, x)$ pour $s \in (V, 0)$ et $x \in (U, 0)$ (cf. la not. 2, A. 0). Alors, les morphismes induits

$$b_k : (S, 0) \rightarrow (O_{U,0}(k), b_k(0)),$$

sont entièrement déterminés par le morphisme B et ne dépendent pas du choix de \tilde{B} . Ainsi l'anneau local $O_{S \times U,0}$ s'identifie à la limite inductive

$$\lim_k \rightarrow H_0(S, O_{U,0}(k)),$$

des germes de morphismes de S dans $O_{U,0}(k)$. On laisse au lecteur de vérifier l'assertion.

Remarque (cf. la dém. du th. 2, chap. I. 3). — Dans la situation de la proposition, soit k_0 l'entier minimal tel que le morphisme

$$b_k : (S, 0) \rightarrow (O_{U,0}(k), b_k(0))$$

est défini. Si le germe de morphisme $B : (S \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ est nul, le germe b_k n'est pas nécessairement nul pour tout $k \geq k_0$. Par contre, il existe $k_1 \geq k_0$ tel que b_k est nul pour tout $k \geq k_1$.

Exemple. — Soient $k_0 < k_1 \in \mathbb{N}$, $A = O_{U,0}$ et $j : A(k_0) \hookrightarrow A(k_1)$ l'injection naturelle (cf. l'exemple de A. I. 1). Soient S la variété définie par le modèle $m(A(k_0), j, A(k_1))$, i. e., la fibre du morphisme j , et $B : (S \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ le morphisme induit par $\tilde{B} : (A(k_0) \times U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ où $\tilde{B}(s, x) = s(x)$. On prétend que B est le morphisme nul, que les morphismes associés $b_k : (S, 0) \rightarrow (A(k), 0)$ sont bien définis pour tout $k \geq k_0$, mais ne sont nuls que pour $k \geq k_1 > k_0$. Les deux premières assertions se vérifient immédiatement. Prouvons la troisième : nous notons $\tilde{b}_k : (A(k_0), 0) \rightarrow (A(k), 0)$, $k \geq k_0$, les applications analytiques associées à \tilde{B} . Alors le morphisme $b_k : (S, 0) \rightarrow (A(k), 0)$, est nul si et seulement si, selon les définitions, il existe une application analytique

$$\lambda_k : (A(k_0), 0) \rightarrow L(A(k_1), A(k)) \quad \text{avec} \quad \tilde{b}_k = \lambda_k \circ j.$$

Il en résulte que $\lambda_k(s)(s) = s$ pour tout $s \in A(k_0)$. Comme $A(k_0)$ est dense dans $A(k_1)$, on a $\lambda_k(s)(t) = t$ pour tout $t \in A(k_1)$ par continuité. L'application λ_k est donc seulement définie pour $k \geq k_1$, d'où l'assertion.

4. FIBRÉS BANACHIQUES.

PROPOSITION 5. — *Considérons un diagramme commutatif de fibrés triviaux sur une variété analytique banachique S [cf. la déf. 7(b), A. I. 1].*

$$\begin{array}{ccccc} S \times E_1 & \xrightarrow{H_1} & S \times E_2 & \xrightarrow{H_2} & S \times E_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E_1 & \xrightarrow{H_1(0)} & E_2 & \xrightarrow{H_2(0)} & E_3 \end{array}$$

On suppose que $H_2 \circ H_1 = 0$. Alors, si la suite des fibres en bas est exacte directe, il existe un ouvert S' de S et un diagramme commutatif de fibrés triviaux sur S'

$$\begin{array}{ccccc} S' \times E_1 & \xrightarrow{H_1} & S' \times E_2 & \xrightarrow{H_2} & S' \times E_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S' \times (F_1 \oplus G_1) & \xrightarrow{\tilde{H}_1} & S' \times (F_2 \oplus G_2) & \xrightarrow{\tilde{H}_2} & S' \times (F_3 \oplus G_3) \end{array}$$

tels que $\tilde{H}_i|_{S' \times F_i} = 0$ et $\tilde{H}_i : S' \times G_i \xrightarrow{\cong} S' \times F_{i+1}$ pour $i = 1, 2$.

Démonstration. — L'hypothèse permet de décomposer E_i en somme directe $E_i = F_i \oplus G_i$ telle que

$$(1) \quad \begin{cases} F_1 = \text{Ker } H_1(0), \\ F_2 = \text{Im } H_1(0) = \text{Ker } H_2(0), & F_3 = \text{Im } H_3(0). \end{cases}$$

Par conséquent, les morphismes $H_i(s)$, $s \in S$, s'identifient à des matrices

$$H_i(s) = \begin{vmatrix} a_i(s) & b_i(s) \\ c_i(s) & d_i(s) \end{vmatrix},$$

par rapport aux décompositions des E_i . Les conditions (1) se traduisent en

$$(2) \quad b_1(0) \text{ inversible, } \quad H_2(0) \circ H_1(0) = 0, \quad b_2(0) \text{ inversible.}$$

Pour tout $s \in S$ on a $H_2(s) \circ H_1(s) = 0$; d'autre part, l'inversibilité étant une condition ouverte, il existe un ouvert S' de S tel que $b_1(s)$ et $b_2(s)$ sont inversibles pour tout $s \in S'$. Il en résulte que pour $s \in S'$

$$(3) \quad \begin{cases} \text{Ker } H_1(s) \oplus G_1 = E_1, & \text{Im } H_1(s) = \text{Ker } H_2(s), \\ \text{Im } H_1(s) \oplus G_2 = E_2, & \text{Im } H_2(s) \oplus G_3 = E_3. \end{cases}$$

L'existence du diagramme cherché en découle immédiatement. En particulier on a prouvé :

COROLLAIRE. — Dans la situation de la proposition précédente, l'ensemble des points $s \in S$ tels que

$$E_1 \xrightarrow{H_1(s)} E_2 \xrightarrow{H_2(s)} E_3,$$

soit une suite exacte, forme un ouvert de S .

Le résultat suivant présente une version généralisée du lemme de Nakayama pour des anneaux non noethériens. Il jouera le rôle clef dans la caractérisation des morphismes plats, chap. I. 2.

PROPOSITION 6 [cf. les dém. de la prop. 1, chap. I. 1, et du th. 1, (B) \Rightarrow (A) et (B) \Rightarrow (C), chap. I. 2]. — Soient S une variété analytique banachique et U un ouvert de \mathbb{C}^n . Soient L_i , $i = 1, 2, 3$, des $\mathcal{O}_{S \times U, 0}$ -modules libres de type fini. $L_i = \mathcal{O}_{S \times U, 0}^{p_i}$. On considère un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} L_1 & \xrightarrow{D_1} & L_2 & \xrightarrow{D_2} & L_3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L_1(0) & \xrightarrow{D_1(0)} & L_2(0) & \xrightarrow{D_2(0)} & L_3(0) \end{array}$$

où D_1 et D_2 sont des homomorphismes de $\mathcal{O}_{S \times U, 0}$ -modules et où les flèches verticales sont induites par la projection $\mathcal{O}_{S \times U, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{U, 0}$. On suppose que $D_2 \circ D_1 = 0$.

(a) Si la suite des fibres en bas du diagramme est exacte, la suite en haut l'est aussi.

(b) Si $M_i(0)$ sont des sous-espaces vectoriels de $L_i(0)$ tels que

$$\begin{aligned} M_1(0) \oplus \text{Ker } D_1(0) &= L_1(0), \\ M_2(0) \oplus \text{Im } D_1(0) &= M_2(0) \oplus \text{Ker } D_2(0) = L_2(0), \\ M_3(0) \oplus \text{Im } D_2(0) &= L_3(0), \end{aligned}$$

l'on a, posant $M_i = \varinjlim_k H_0(S, M_i(0)(k))$, $M_i(0)(k) = M_i(0) \cap \mathcal{O}_{U,0}(k)^{p_i}$ (cf. la prop. 4,

A. I. 3),

$$\begin{aligned} M_1 \oplus \text{Ker } D_1 &= L_1, \\ M_2 \oplus \text{Im } D_1 &= M_2 \oplus \text{Ker } D_2 = L_2, \\ M_3 \oplus \text{Im } D_2 &= L_3. \end{aligned}$$

Remarque. — On note que l'énoncé ne s'étend pas au cas de $\mathcal{O}_{S \times U, 0}$ -modules non libres : soit $g \neq 0$ un élément de l'idéal $\overline{m_S \cdot \mathcal{O}_{S \times U, 0}}$ de $\mathcal{O}_{S \times U, 0}$ formé des germes de fonctions sur $(S \times U, 0)$ s'annulant sur $\{0\} \times U$. Alors la suite

$$\mathcal{O}_{S \times U, 0} \xrightarrow{g \cdot \text{Id}} \mathcal{O}_{S \times U, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{S \times U, 0} / \overline{m_S \cdot \mathcal{O}_{S \times U, 0}}$$

n'est pas exacte.

Démonstration. — En vertu de la proposition 4, A. I. 3, on sait que

$$L_i = \varinjlim H_0(S, L_i(0)(k)),$$

avec $L_i(0)(k) = \mathcal{O}_{U,0}(k)^{p_i}$.

(a) Comme le foncteur limite inductive est exact, il suffit de prouver que la suite induite

$$(*) \quad H_0(S, L_1(0)(k)) \xrightarrow{D_1} H_0(S, L_2(0)(k)) \xrightarrow{D_2} H_0(S, L_3(0)(k)),$$

est exacte pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand. Remarquons d'abord qu'elle est bien définie pour k assez grand parce que D_1 et D_2 sont des applications $\mathcal{O}_{S \times U, 0}$ -linéaires s'identifiant ainsi à des matrices à coordonnées dans $\mathcal{O}_{S \times U, 0}$. D'autre part, la suite correspondante de fibrés triviaux

$$S' \times L_1(0)(k) \xrightarrow{D_1} S' \times L_2(0)(k) \xrightarrow{D_2} S' \times L_3(0)(k)$$

est exacte pour un ouvert S' de S en vertu du corollaire précédent. L'exactitude de $(*)$ résulte alors du passage aux sections des fibrés.

(b) C'est une conséquence immédiate des égalités (3) de la démonstration de la dernière proposition.

Remarque [cf. les dém. du th. 2, A.II.4, et du th. 1, (B) \Rightarrow (C), chap. I.2]. — La démonstration de la proposition utilise de la $O_{S \times U, 0}$ -module-structure des modules L_i seulement la description comme limite inductive des $H_0(S, L_i(0)(k))$. L'énoncé restera donc vrai si on remplace L_i par des $O_{S, 0}$ -sous-modules de $O_{S \times U, 0}^{l_i}$ isomorphes à des sommes directes finies de la forme

$$\bigoplus_{j=0}^n O_{S \times U, 0}^{l_j} = \varinjlim_k H_0(S, O_{U, 0}(k)^{q_j})$$

> et les homomorphismes D_i par des restrictions à L_i d'homomorphismes $O_{S \times U, 0}$ -linéaires.

A. II. Le théorème de division

Le but de ce chapitre est d'associer de manière naturelle et explicite à toute famille f_1, \dots, f_p d'éléments de $A^q = O_{U, 0}^q$ un sous-espace vectoriel $\Delta = \Delta(f)$ de A^q tel que pour tout $g \in A^q$ il existe m_1, \dots, m_p dans A et un unique h dans Δ tels que g s'écrit

$$g = \sum m_i \cdot f_i + h.$$

1. QUELQUES INVARIANTS. — Toute application analytique $f \in A^q = O_{U, 0}^q$ s'écrit de manière unique comme série convergente $f(x) = \sum f_\alpha \cdot x^\alpha$, $f_\alpha \in \mathbb{C}^q$. Autrement dit, les vecteurs monômiaux $(0, \dots, x^\alpha, 0, \dots, 0)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, forment une \mathbb{C} -base analytique de A^q . On les ordonne au moyen d'une forme linéaire injective

$$l: (\mathbb{N}^n)^q \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

Pour $q=1$ et $k \in \mathbb{N}$ on pose $A(k) = \{f \in A, \sum |f_\alpha| \cdot k^{-l(\alpha)} < \infty\}$. L'anneau A s'écrit alors comme réunion des espaces de Banach $A(k)$, $k \in \mathbb{N}$ (cf. A.0). Dans toutes les considérations de ce chapitre, la forme linéaire injective l soit donnée et fixée tacitement à l'avance sauf mention expresse du contraire.

DÉFINITION 1. — (a) Le terme privilégié ou la forme initiale relatif à l d'une série non nulle $f \in A^q$ est le premier élément

$$\text{in}(f) = \text{in}_l(f) = (0, \dots, x^\alpha, 0, \dots, 0),$$

de la base monômiale de A^q apparaissant dans le développement en série convergente de

$$f = (\sum f_\alpha^i \cdot x^\alpha)_{i=1, \dots, q} = \sum f_\alpha \cdot x^\alpha,$$

$f_\alpha = (f_\alpha^1, \dots, f_\alpha^q) \in \mathbb{C}^q$. Le terme privilégié de $0 \in A^q$ est l'ensemble vide.

(b) Soit I_0 un sous-ensemble de A^q . On lui associe les objets suivants :

- L'ensemble $E(I_0) = E_l(I_0) \subseteq A^q$ des termes privilégiés des éléments de I_0 .
- Le sous-module $M(I_0) = M_l(I_0)$ de A^q engendré par $E(I_0)$.
- L'espace vectoriel $\Delta(I_0) = \Delta_l(I_0) \subseteq A^q$, le complémentaire ensembliste de $M(I_0)$.

Comme les trois sous-ensembles $E(I_0)$, $M(I_0)$ et $\Delta(I_0)$ de A^q sont formés, respectivement engendrés par des monômes, on peut les identifier à des sous-ensembles de \bar{N}^{nq} , $\bar{N} = N \cup \{\infty\}$, associant à chaque monôme son exposant ($\text{exp. } (0) := \infty$).

PROPOSITION 1. — Soit I_0 un sous-ensemble de A^q .

(a) Le module $M(I_0)$ est engendré par un nombre fini d'éléments de $E(I_0)$.

(b) Si I_0 est un sous-module de A^q engendré par des vecteurs monômiaux de la forme $(0, \dots, 0, x^\alpha, 0, \dots, 0)$, la projection $A^q \rightarrow A^q/I_0$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\Delta(I_0) \rightarrow A^q/I_0.$$

L'assertion (a) résulte du fait que A^q est un A -module noethérien, (b) de l'égalité $I_0 = E(I_0) = M(I_0)$.

Nous donnons sans démonstration une description explicite de l'espace vectoriel $\Delta(I_0) \subseteq A^q$ (cf. Hironaka et Galligo) :

PROPOSITION 2 [cf. la dém. de la prop. 4, A. II. 3, et la partie A (1) du chap. III. 1]. — (a) Soient I_0 un idéal de A , l une forme linéaire injective sur N^n et $x = (x_1, \dots, x_n)$ des coordonnées dans \mathbb{C}^n . Il existe des sous-ensembles finis uniques Δ_i de N^{n-i} , $i=0, \dots, n$, tels que pour tout choix générique d'un changement linéaire de coordonnées $\varphi \in GL_n(\mathbb{C})$, l'espace $\Delta(I_0)$ s'écrit dans les coordonnées $z = \varphi(x)$ sous la forme

$$\Delta(I_0) = \bigoplus_{i=0}^n \bigoplus_{\alpha \in \Delta_i} \mathbb{C} \{z_1, \dots, z_i\} (z_{i+1}, \dots, z_n)^\alpha,$$

à une permutation des z_1, \dots, z_n près.

(b) Soit I_0 maintenant un sous-module de A^q . Alors $\Delta(I_0)$ s'écrit dans les coordonnées $z = \varphi(x)$ comme produit de q espaces vectoriels de la forme de sommes directes de (a).

COROLLAIRE. — Les espaces $\Delta(I_0)$ sont des sous-espaces fermés pour la topologie analytique sur A^q .

DÉFINITION 2. — La description de $\Delta(I_0)$ comme somme directe selon la proposition 2 est appelée la réalisation additive ordonnée (relative à l) du module quotient A^q/I_0 . Cette définition sera justifiée par le théorème de la section suivante.

2. LE THÉORÈME DE DIVISION. — C'étaient H. Grauert et H. Hironaka qui ont généralisé le théorème de division de Weierstrass au cas de division par un idéal de séries convergentes. La version présentée ici est due à A. Galligo. On se réfère aux notations fixées dans la définition 1.

THÉORÈME 1. — Soit I_0 un sous-module de $A^q = O_{U,0}^q$, U ouvert de \mathbb{C}^n . La projection naturelle $A^q \rightarrow A^q/I_0$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $\Delta(I_0) \xrightarrow{\pi} A^q/I_0$.

Énoncés équivalents. — (a) Tout sous-module I_0 de A^q admet $\Delta(I_0)$ comme complémentaire direct en tant qu'espace vectoriel

$$I_0 \oplus \Delta(I_0) = A^q.$$

C'est en plus un complémentaire topologique pour la topologie analytique en vertu du corollaire de la proposition 2, A. II. 1.

(b) Soient $f_1, \dots, f_p \in A^q$ des générateurs du sous-module I_0 . Alors, pour tout $g \in A^q$, il existe $m_1, \dots, m_p \in A$ et un unique $h \in \Delta(I_0)$ tels que

$$g = \sum m_i \cdot f_i + h.$$

Pour des conditions supplémentaires sur les m_i assurant leur unicité on renvoie à Galligo. On remarque qu'il résulte du théorème entre autre que $A = O_{U,0}$ est un anneau noethérien.

Démonstration. — On se contente de prouver le résultat pour $q=1$. Pour le cas général, voir Galligo.

L'application π est injective : en effet, si $g \in A$ était un élément non nul du noyau $\Delta(I_0) \cap I_0$ de π , son terme privilégié $\text{in}(g)$ appartiendrait selon les définitions à la fois à $\Delta(I_0)$ et $E(I_0)$, d'où une contradiction.

L'application π est surjective, si pour une famille génératrice f_1, \dots, f_p de I_0 , l'application linéaire

$$\begin{aligned} w : A^p \times \Delta(I_0) &\rightarrow A, \\ (m_1, \dots, m_p; h) &\rightarrow \sum m_i \cdot f_i + h, \end{aligned}$$

l'est. Écrivant $f_i = \text{in}(f_i) + f'_i = x^{\alpha_i} + f'_i$, w se décompose en somme de deux applications $w = u + v$, où

$$\begin{aligned} u(m, h) &= \sum m_i \cdot x^{\alpha_i} + h, \\ v(m, h) &= \sum m_i \cdot f'_i. \end{aligned}$$

On peut supposer que les f_i sont choisis de sorte que les $\text{in}(f_i)$ engendrent $E(I_0)$. L'application u est alors surjective selon la proposition 1 (b), A. II. 1. L'idée pour prouver la surjectivité de $w = u + v$ est d'utiliser le résultat suivant :

LEMME 1. — Soit $w = u + v : E \rightarrow F$ la somme de deux applications linéaires continues entre des espaces de Banach. Si u est surjective et si $\|v\| < \text{con}(u) = \text{conorme de } u$, alors w est surjective et satisfait $\text{con}(w) \geq \text{con}(u) - \|v\|$.

Remarque. — La conorme d'une application linéaire continue injective $z : E \rightarrow F$ est définie par

$$\text{con}(z) = \inf_{x \neq 0} \frac{\|z(x)\|}{\|x\|},$$

celle d'une surjection $u : E \rightarrow F$ par $\text{con}(u) = \text{con}(u^T)$, désignant par $u^T : F^T \rightarrow E^T$ l'application duale de u . On vérifie alors facilement le critère suivant :

$$\text{con}(u) \geq c > 0 \Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E$$

$$\text{tel que } u(x) = y \text{ et } \|x\| \leq \frac{1}{c} \|y\|.$$

Démonstration. — Posons $\text{con}(u) = c > c' = \|v\|$ et $\rho = c'/c < 1$. Pour tout $x \in E$ il existe $x' \in E$ tel que

$$u(x') = v(x) \quad \text{et} \quad \|x'\| \leq \frac{1}{c} \|v(x)\|,$$

c'est-à-dire $\|x'\| \leq \rho \|x\|$. Soit $y \in F$. On construit par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E vérifiant

$$u(x_0) = y, \quad u(x_{n+1}) = -v(x_n) \quad \text{et} \quad \|x_{n+1}\| \leq \rho \|x_n\|.$$

La somme $x = \sum_0^\infty x_n$ converge et d'après construction

$$y = u(x_0) = (u+v)(x_0) - v(x_0) = \dots = (u+v)\left(\sum_0^m x_n\right) - v(x_m),$$

d'où $y = (u+v)(x) = w(x)$. L'inégalité $\text{con}(w) \geq \text{con}(u) - \|v\|$ se montre facilement à l'aide du critère cité.

Suite de la démonstration du théorème. — Pour adopter notre situation à celle du lemme 1, on remarque d'abord qu'il suffit de prouver la surjectivité de l'application linéaire

$$w_k = u_k + v_k : A^p(k) \times \Delta(I_0)(k) \rightarrow A(k),$$

pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand, où $\Delta(I_0)(k) = \Delta(I_0) \cap A(k)$ (cf. la not. 2, A. 0). Nous montrerons qu'il existe un entier k_1 dépendant des générateurs f_1, \dots, f_p de I_0 tel que pour tout $k \geq k_1$ les applications u_k et v_k satisfont aux conditions du lemme. Ceci établira le théorème. Plus précisément on montrera pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand que

$$\text{con}(u_k) \geq 1 > \|v_k\|,$$

où le produit $A^p(k) \times \Delta(I_0)(k)$ est muni de la structure d'espace de Banach définie par la norme

$$\|(m_1, \dots, m_p, h)\|_k = \sum \|m_i \cdot \text{in}(f_i)\|_k + \|h\|_k = \sum \|m_i\|_k \cdot k^{-l(\alpha_i)} + \|h\|_k.$$

Prouvons $\text{con}(u_k) \geq 1$: tout élément g de $A(k)$ s'écrit

$$g = m_1 \cdot x^{\alpha_1} + g_1,$$

d'où par itération

$$g_{i-1} = m_i \cdot x^{\alpha_i} + g_i, \quad i = 2, \dots, p,$$

de sorte que l'élément g_i soit sans terme multiple de x^{α_i} . Il en résulte que l'élément $h = g_p$ appartient à $\Delta(I_0)(k)$ et que g s'écrit comme somme

$$g = \sum m_i \cdot \text{in}(f_i) + h = u_k(m, h),$$

où les termes $m_i \cdot \text{in}(f_i) = m_i \cdot x^{\alpha_i}$ et h ont des ensembles d'exposants deux à deux disjoints. L'injectivité de la forme linéaire $l : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ définissant la norme $\| \cdot \|_k$ sur $A(k)$ entraîne alors que

$$\|g\|_k = \|u_k(m, h)\|_k = \sum \|m_i \cdot \text{in}(f_i)\|_k + \|h\|_k = \|(m, h)\|_k.$$

Ceci signifie en vertu de la remarque après le lemme 1 que

$$\text{con}(u_k) \geq 1$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Prouvons qu'il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|v\|_k < 1,$$

pour tout $k \geq k_1$: par définition du terme privilégié d'une série, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ dépendant de f_1, \dots, f_p tel que les exposants β des séries $f'_i = f_i - \text{in}(f_i) = f_i - x^{\alpha_i}$ vérifient

$$l(\beta) \geq l(\alpha_i) + \varepsilon.$$

On en déduit que si $k \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini, le nombre

$$\frac{\|f'_i\|_k}{\|x^{\alpha_i}\|_k} = \frac{\sum |f_{i\beta}| \cdot k^{-l(\beta)}}{k^{-l(\alpha_i)}} = k^{-\varepsilon} \cdot \sum |f_{i\beta}| \cdot k^{-(l(\beta) - l(\alpha_i) - \varepsilon)},$$

tend vers zéro pour tout $i = 1, \dots, p$. Par conséquent, il existe un entier k_1 dépendant de f_1, \dots, f_p tel que pour $k \geq k_1$

$$\frac{\|f'_i\|_k}{\|x^{\alpha_i}\|_k} \leq \rho < 1,$$

d'où

$$\|v_k(m, h)\|_k = \left\| \sum m_i \cdot f'_i \right\|_k \leq \rho \sum \|m_i\|_k \cdot \|x^{\alpha_i}\|_k \leq \rho \|(m, h)\|_k.$$

Ceci prouve que $\|v_k\| < 1$ pour $k \geq k_1$. Les applications u_k et v_k satisfont donc pour $k \geq k_1$ aux hypothèses du lemme, ce qui établit la surjectivité de l'application $w_k = u_k + v_k$ et termine la démonstration du théorème.

On complète l'énoncé du théorème par les trois précisions suivantes :

LEMME 2. — (a) Pour toute famille génératrice f_1, \dots, f_p d'un sous-module I_0 de A^q il existe un entier k_1 tel que tout élément g de $A^q(k)$, $k \geq k_1$, s'écrit $g = \sum m_i \cdot f_i + h$ avec $m_i \in A(k)$ et $h \in \Delta(I_0)(k) = \Delta(I_0) \cap A^q(k)$. Autrement dit, la décomposition $A^q = I_0 \oplus \Delta(I_0)$ induit pour $k \geq k_1$ une décomposition $A(k)^q = I_0(k) \oplus \Delta(I_0)(k)$.

(b) Il existe un nombre $c > 0$ dépendant seulement de f_1, \dots, f_p et pour tout $g \in A(k)^q$, $k \geq k_1$, des éléments $m_1, \dots, m_p \in A(k)$ et $h \in \Delta(I_0)(k)$ avec $g = \sum m_i \cdot f_i + h$ tels que

$$\|m_i\|_k + \|h\|_k \leq \frac{1}{c} \cdot \|g\|_k.$$

(c) Supposons que I_0 est invariant par rapport à une \mathbb{C}^* -action μ sur \mathbb{C}^n . Il admet donc des générateurs μ -homogènes f_i de poids $e_i \in \mathbb{Z}$, i. e., tels que pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\lambda \circ f_i = \lambda^{e_i} \cdot f_i$. Alors pour tout $g \in A^q$ μ -homogène de poids d , il existe $m_i \in A$ μ -homogène de poids $d - e_i$ et un unique $h \in \Delta(I_0)$ μ -homogène de poids d tels que $g = \sum m_i \cdot f_i + h$.

L'assertion (a) résulte de la démonstration du théorème, (b) de l'inégalité $\text{con}(w_k) \geq \text{con}(u_k) - \|v_k\| > 0$, et (c) du fait que la graduation de A associée à μ , $A = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} A^{(d)}$, induit une graduation $\Delta(I_0) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \Delta(I_0)^{(d)}$. Comme corollaire de (a) on obtient en particulier :

PROPOSITION 3 (cf. la dém. de la prop. 3, chap. II. 6). — (a) Pour tout A -module de type fini $N = A^q/I$ il existe un entier k_1 tel que pour $k \geq k_1$, l'espace

$$N_k = A(k)^q/I(k),$$

$I(k) = I \cap A(k)^q$, est un $A(k)$ -module de Banach.

(b) Tout homomorphisme $u : N \rightarrow N'$ entre A -modules de type fini est direct et induit pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand des homomorphismes directs d'espaces de Banach $u_k : N_k \rightarrow N'_k$. On a les égalités :

$$\begin{aligned} \text{Im } u_k &= \text{Im } u \cap N'_k, \\ \text{Ker } u_k &= \text{Ker } u \cap N_k. \end{aligned}$$

(c) Une suite de A -modules de type fini $N \xrightarrow{u} N' \xrightarrow{u'} N''$ vérifiant $u' \circ u = 0$ est exacte si et seulement si pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand, les suites induites

$$N_k \xrightarrow{u_k} N'_k \xrightarrow{u'_k} N''_k,$$

\Rightarrow sont exactes.

3. CRITÈRES DE CONSTRUCTIBILITÉ. — Soient f_1, \dots, f_p un système de générateurs de l'idéal I_0 de $A = \mathcal{O}_{U,0}$ et g un élément de A . En général, le calcul complet de la division de g par f_1, \dots, f_p

$$g = \sum m_i \cdot f_i + h,$$

$h \in \Delta(I_0)$, n'est pas possible. Une approximation par degré des séries m_i et h peut être obtenue en substituant itérativement les termes $\text{in}(f_i) = x^{\alpha_i}$ occurant dans le développement de g par les séries $f'_i = f_i - \text{in}(f_i)$: à savoir, on écrit

$$g = \sum m_i^1 \cdot x^{\alpha_i} + h^1 = \sum m_i^1 \cdot f_i + h^1 + g^1,$$

avec $h^1 \in \Delta(I_0)$ et $g^1 = \sum m_i^1 \cdot (x^{\alpha_i} - f_i)$,

puis

$$g^1 = \sum m_i^2 \cdot x^{\alpha_i} + h^2 = \sum m_i^2 \cdot f_i + h^2 + g^2,$$

avec $h^2 \in \Delta(I_0)$ et $g^2 = \sum m_i^2 \cdot (x^{\alpha_i} - f_i)$.

Par itération l'on obtient formellement

$$g + \sum g^j = \sum \sum m_i^j \cdot f_i + \sum h^j + \sum g^j,$$

d'où

$$g = \sum m_i \cdot f_i + h, \quad h \in \Delta(I_0).$$

La convergence des séries $m_i = \sum m_i^j$ et $h = \sum h^j$ est assurée par le théorème de division.

Il est clair que cet algorithme infini s'arrête seulement après un nombre fini d'étapes, si pour un $j \in \mathbb{N}$ l'élément g^j appartient à $\Delta(I_0)$. On dira dans ce cas que la division de g par f_1, \dots, f_p est constructible.

Dans cette section nous indiquerons des hypothèses suffisantes sur les séries f_1, \dots, f_p pour que la division de tout polynôme g de A par f_1, \dots, f_p soit constructible.

LEMME 3. — *Tout idéal I_0 de A admet des générateurs f_1, \dots, f_p tels que $f'_i = f_i - \text{in}(f_i) = f_i - x^{\alpha_i}$ appartient à $\Delta(I_0)$.*

DÉFINITION 3. — On dit qu'une telle famille f_1, \dots, f_p forme une base standard de l'idéal I_0 .

Démonstration. — On divise les termes privilégiés $\text{in}(g_j)$ d'une famille génératrice g_1, \dots, g_p de I_0 par les séries g_i :

$$\text{in}(g_j) = \sum m_{ij} \cdot g_i + h_j,$$

$m_{ij} \in A$, $h_j \in \Delta(I_0)$. Soit J_0 l'idéal de A engendré par les séries $f_j = \text{in}(g_j) - h_j$. Comme $\Delta(J_0) = \Delta(I_0)$, l'inclusion $J_0 \subseteq I_0$ entraîne l'égalité en vertu du théorème de division.

LEMME 4. — *On suppose que l'idéal I_0 vérifie*

$$\dim_{\mathbb{C}} A/I_0 = \dim_{\mathbb{C}} \Delta(I_0) < \infty.$$

Il existe alors des générateurs f_1, \dots, f_p de I_0 dont les termes privilégiés $x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_p}$

vérifient la propriété suivante :

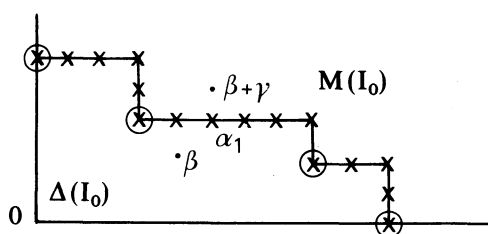
(*) Pour tout $x^\beta \in \Delta(I_0)$ et tout $x^\gamma \in A$ il existe un $x^{\gamma'} \in A$ avec $|\gamma'| < |\gamma|$ tel que

$$x^\beta \cdot x^\gamma = x^{\alpha_i} \cdot x^{\gamma'},$$

pour au moins un $i = 1, \dots, p$.

DÉFINITION 4. — On dit qu'une telle famille f_1, \dots, f_p forme une base complète d'un idéal I_0 satisfaisant $\dim_{\mathbb{C}} A/I_0 < \infty$.

Nous illustrons la propriété (*) pour $n=2$ identifiant les monômes unitaires de A à des couples de \mathbb{N}^2 . On laisse en exercice d'en tirer une démonstration exacte pour le cas général.



Il suffit de choisir un système complet de générateurs f_1, \dots, f_p de I_0 , i.e., un tel que les termes initiaux $\text{in}(f_i) = x^{\alpha_i}$ parcourent tous les points \times sur l'escalier.

COROLLAIRE. — On suppose que l'idéal I_0 vérifie $\dim_{\mathbb{C}} A/I_0 < \infty$. Pour toute base standard complète f_1, \dots, f_p de I_0 et tout polynôme g de A la division de g par f_1, \dots, f_p est constructible.

Démonstration. — On remarque d'abord que les f_i sont automatiquement polynômiaux. Avec les notations du début de la section il résulte du dernier lemme et du fait que $x^{\alpha_i} - f_i \in \Delta(I_0)$ que

$$\sup_i (\deg m_i^j) < \sup_i (\deg m_i^{j-1}),$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. L'assertion est alors immédiate.

PROPOSITION 4 [cf. chap. III. 1, parties B(4) et B(5), et la dém. de la prop. 6, A. II. 4]. — Soit I_0 un idéal de A . On suppose que A/I_0 est un anneau de Cohen-Macaulay de dimension $d \leq n$. Il existe un choix de coordonnées z_1, \dots, z_n dans \mathbb{C}^n et une base standard f_1, \dots, f_p de I_0 tels que pour tout élément g de A polynômial en z_{d+1}, \dots, z_n la division de g par f_1, \dots, f_p est constructible. Un tel choix est décrit dans la démonstration.

Démonstration. — On choisit d'abord suivant la proposition 2, A. II. 1, des coordonnées z_1, \dots, z_n de \mathbb{C}^n telles que $\Delta(I_0)$ forme une réalisation additive ordonnée du quotient A/I_0 :

$$\Delta(I_0) = \bigoplus_{i=0}^n \bigoplus_{\alpha \in \Delta_i} \mathbb{C} \{z_1, \dots, z_i\} (z_{i+1}, \dots, z_n)^\alpha.$$

L'anneau A/I_0 est de Cohen-Macaulay de dimension d , si et seulement si $\Delta(I_0)$ est un $O_{\mathbb{C}^d, 0}$ -module libre de type fini, i. e., si les sous-ensembles Δ_i de \mathbb{N}^{n-i} sont vides pour tout $i \neq d$:

$$\Delta(I_0) = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_d} \mathbb{C} \{z_1, \dots, z_d\} (z_{d+1}, \dots, z_n)^\alpha.$$

Par définition de $\Delta(I_0)$ [déf. 1(b), A. II. 1] il existe donc une base standard f_1, \dots, f_p de I_0 dont les termes privilégiés $\text{in}(f_i) = z^{\alpha_i}$ appartiennent tous à $\mathbb{C} \{z_{d+1}, \dots, z_n\}$. Considérons maintenant l'idéal $I'_0 = (f'_1, \dots, f'_p)$ de $A' = O_{\mathbb{C}^{n-d}, 0}$ obtenu de I_0 en posant $z_1 = \dots = z_d = 0$. On a $\dim_{\mathbb{C}} A'/I'_0 < \infty$ car Δ_d est un ensemble fini,

$$\Delta(I'_0) = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_d} \mathbb{C} \cdot (z_{d+1}, \dots, z_n)^\alpha.$$

Il suffit alors de compléter la base standard f_1, \dots, f_p de I_0 de sorte que f'_1, \dots, f'_p forment une base standard complète de I'_0 pour pouvoir transmettre la démonstration du corollaire du lemme 4 à la situation. Ceci établit l'assertion.

DÉFINITION 5. — On dit qu'une telle famille f_1, \dots, f_p forme une base standard complète de I_0 par rapport aux coordonnées z_1, \dots, z_n .

Remarque. — Il est évident que la longueur de l'algorithme de division dépend de manière essentielle du choix des générateurs f_1, \dots, f_p de l'idéal I_0 et du choix des coordonnées dans \mathbb{C}^n . Il serait très utile de savoir plus sur les réponses aux questions suivantes :

Soient g_1, \dots, g_p une famille génératrice polynômiale de I_0 .

(a) Existe-t-il une base standard f_1, \dots, f_p de I_0 formée de polynômes ?

(b) Est-elle constructible à partir de g_1, \dots, g_p ?

(c) Peut-on construire un changement linéaire de coordonnées dans \mathbb{C}^n et une base standard polynômiale f_1, \dots, f_p de I_0 tels que tout polynôme g de A admet un algorithme fini de division par les f_i ?

4. DIVISION AVEC PARAMÈTRES. — Dans cette section nous généralisons le théorème de division de A. II. 2 au cas de séries convergentes à coefficients dans un anneau de fonctions analytiques sur une variété analytique banachique.

Soient U un ouvert de \mathbb{C}^n , S une variété analytique banachique dans un ouvert V d'un espace de Banach E et écrivons $O_{S, 0} = O_{V, 0}/J$. On utilisera les notations et résultats de A. I. 3 et A. I. 4. En particulier, pour un entier k et un sous-module I de $O_{S \times U, 0}^q$ d'image I_0 dans $O_{U, 0}^q$, on pose

$$O_{S \times U, 0} = \varinjlim_k H_0(S, O_{U, 0}(k)),$$

$$O_{S \times U, 0}(k) = H_0(S, O_{U, 0}(k)),$$

$$\Delta(I) = \varinjlim_k H_0(S, \Delta(I_0)(k)) \subseteq O_{S \times U, 0}^q,$$

$$\Delta(I)(k) = H_0(S, \Delta(I_0)(k)) \subseteq O_{S \times U, 0}(k)^q,$$

$$\Delta(I_0)(k) = \Delta(I_0) \cap O_{U, 0}(k)^q.$$

Notons que si S est lisse à l'origine, un élément H de $O_{S \times U, 0}^q$ appartient à $\Delta(I)$ si et seulement si $H|_{\{s\} \times U}$ appartient à $\Delta(I_0)$ pour tout $s \in (S, 0)$, ou encore, si et seulement si tous les termes homogènes en s de H appartiennent à $\Delta(I)$ (cf. la déf. 1, A. II. 1).

THÉORÈME 2. — Soit I un sous-module de type fini de $O_{S \times U, 0}^q$. La projection naturelle $O_{S \times U, 0}^q \rightarrow O_{S \times U, 0}^q/I$ induit un épimorphisme de $O_{S, 0}$ -modules $\pi : \Delta(I) \rightarrow O_{S \times U, 0}^q/I$.

Énoncés équivalents. — (a) Tout sous-module de type fini I de $O_{S \times U, 0}^q$ admet $\Delta(I)$ comme complémentaire en tant que $O_{S, 0}$ -module :

$$I + \Delta(I) = O_{S \times U, 0}^q.$$

(b) Soient F_1, \dots, F_p des générateurs du sous-module I . Alors, pour tout $G \in O_{S \times U, 0}^q$ il existe $M_1, \dots, M_p \in O_{S \times U, 0}$ et $H \in \Delta(I)$ tels que

$$G = \sum M_i \cdot F_i + H.$$

De plus, l'image h de H dans $\Delta(I_0)$ est unique d'après le théorème 1, A. II. 2.

Démonstration. — Il suffit de prouver pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand la surjectivité de l'application

$$\begin{aligned} W_k : O_{S \times U, 0}(k)^p \times \Delta(I)(k) &\rightarrow O_{S \times U, 0}(k)^q, \\ (M_1, \dots, M_p, H) &\rightarrow \sum M_i \cdot F_i + H. \end{aligned}$$

Selon le théorème 1, A. II. 2, l'application W induit pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand une surjection

$$w_k = W_k(0) : O_{U, 0}(k)^p \times \Delta(I_0)(k) \rightarrow O_{U, 0}(k)^q.$$

L'assertion résulte alors de la remarque après la démonstration de la proposition 6, A. I. 4, en vertu de la proposition 2, A. II. 1.

PROPOSITION 5 [cf. les dém. du th. 1, chap. I. 2, (C) \Rightarrow (D), du lemme 1, chap. I. 3, et du lemme 1, chap. II. 4]. — Soit I un sous-module de type fini de $O_{S \times U, 0}^q$ engendré par F_1, \dots, F_p .

(a) Si $G \in O_{S \times U, 0}^q$ s'annule sur $\{0\} \times U$, il existe $M_i \in O_{S \times U, 0}$ et $H \in \Delta(I)$ s'annulant aussi sur $\{0\} \times U$ tels que $G = \sum M_i \cdot F_i + H$.

(b) Supposons S lisse. Si $G \in O_{S \times U, 0}^q$ est d'ordre $\geq j$ en s (resp. si G est homogène de degré j en s et si $F_i = f_i \in O_{U, 0}^q$), il existe $M_i \in O_{S \times U, 0}$ et $H \in \Delta(I)$ d'ordre $\geq j$ en s (resp. homogène de degré j en s) tels que $G = \sum M_i \cdot F_i + H$.

(c) Supposons S lisse. Il existe un nombre $c > 0$ dépendant seulement de F_1, \dots, F_p et pour tout $G \in O_{S \times U, 0}^q$ des éléments $M_i \in O_{S \times U, 0}$ et $H \in \Delta(I)$ avec $G = \sum M_i \cdot F_i + H$ tels que pour $r > 0$ assez petit

$$\sum \|M_i\|_r + \|H\|_r \leq \frac{1}{c} \cdot \|G\|_r.$$

(d) Soit S arbitraire. Il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ dépendant seulement des images f_1, \dots, f_p de F_1, \dots, F_p dans $O_{U, 0}$ tel que tout $G \in O_{S \times U, 0}(k)^q$, $k \geq k_1$, s'écrit $G = \sum M_i \cdot F_i + H$ avec $M_i \in O_{S \times U, 0}(k)$ et $H \in \Delta(I)(k)$ (cf. les notations au début de la section).

(e) Supposons que S est lisse et que le sous-module I de $O_{S \times U, 0}^q$ est invariant par rapport à une C^* -action $\hat{\mu}$ sur $(S \times U, 0)$. Il admet donc des générateurs $\hat{\mu}$ -homogènes F_1, \dots, F_p de poids $e_i \in \mathbb{Z}$, i. e., tels que pour $\lambda \in C^*$, $\lambda \circ F_i = \lambda^{e_i} \cdot F_i$. Alors pour tout $G \in O_{S \times U, 0}^q$

$\hat{\mu}$ -homogène de poids d il existe $\hat{M}_i \in \mathcal{O}_{S \times U, 0}$ $\hat{\mu}$ -homogène de poids $d - e_i$, et $H \in \Delta(I)$ $\hat{\mu}$ -homogène de poids d tels que $G = \sum M_i \cdot F_i + H$.

Démonstration. — La première assertion se montre facilement en posant $s=0$. La deuxième résulte de l'égalité

$$G = \sum M_i \cdot F_i + H = \sum M_i \cdot f_i + H + \sum M_i \cdot (F_i - f_i)$$

et de $\deg_s f_i = 0$ et $\text{ord}_s(F_i - f_i) > 0$. L'assertion (c) est un corollaire du lemme 2(b), A. II. 2, et (d) découle aussitôt de la démonstration du théorème et du lemme 2(a), A. II. 2. La dernière assertion résulte du lemme 2(d), A. II. 2, et du fait que la graduation $\mathcal{O}_{S \times U, 0} = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{S \times U, 0}^{(d)}$ induit une graduation $\Delta(I) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \Delta(I)^{(d)}$.

On termine le chapitre par un corollaire de la proposition 4, A. II. 3 :

PROPOSITION 6 (cf. le chap. III). — Soit I un idéal de type fini de $\mathcal{O}_{S \times U, 0}$ d'image I_0 dans $\mathcal{O}_{U, 0}$. On suppose que $\mathcal{O}_{U, 0}/I_0$ est un anneau de Cohen-Macaulay de dimension $d \leq n$, que $\Delta(I_0)$ est une réalisation additive ordonnée de $\mathcal{O}_{U, 0}/I_0$ (cf. la déf. 2, A. II. 1) et que les séries f_1, \dots, f_p de I_0 forment une base standard complète de I_0 (cf. la déf. 5, A. II. 3).

Soient F_1, \dots, F_p des générateurs de I d'images f_1, \dots, f_p dans I_0 tels que

$$F_i - \text{in}(f_i) \in \Delta(I).$$

Alors pour tout élément G de $\mathcal{O}_{S \times U, 0}$ polynômial dans les d premières coordonnées de $U \subseteq \mathbb{C}^n$, la division de G par F_1, \dots, F_p admet un algorithme fini.

BIBLIOGRAPHIE

- M. BENSON, Private correspondence.
 N. BOURBAKI, *Variétés différentielles. Fasc. de Résultats* 1-7, Masson, Paris.
 J. BRIANÇON, *Weierstrass préparé à la Hironaka* (Astérisque, vol. 7/8, 1973, p. 67-76).
 J. BRIANÇON et A. GALLIGO, *Déformations de points de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{C}^2* (Astérisque, vol. 7/8, 1973, p. 129-138).
 R. O. BUCHWEITZ, *Contributions à la théorie des singularités* (Thèse, Paris-VII, 1981).
 M. COMMICHAU, *Deformation kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten* (Math. Ann., vol. 213, 1975, p. 43-96).
 I. F. DONIN, *Complete Families of Deformations of Germs of Complex Spaces* (Math. U.R.S.S. Sbornik, vol. 18, n° 3, 1972, p. 397-406).
 A. DOUADY, *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné* (Ann. Inst. Fourier, vol. 16, 1966, p. 1-95).
 A. DOUADY, *Flatness and Privilege. Topics in Several Complex Variables*, (Monographie n° 17 de l'Enseignement Math., Genève, 1971, p. 47-74).
 A. DOUADY, *Le problème des modules locaux pour les espaces \mathbb{C} -analytiques compacts* (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. 7).
 R. ELKIK, *Algébrisation du module des singularités isolées* (Astérisque, vol. 16, 1974, p. 129-138).
 J. FERRER et F. PUERTA, *Deformaciones de germen analíticos equivariantes*, Universidad Politécnica de Barcelona.
 O. FORSTER et K. KNORR, *Konstruktion verseller Familien kompakter komplexer Räume* (Springer Lecture Notes, n° 705).
 A. GALLIGO et C. HOUZEL, *Déformations semi-universelles ...* (Astérisque, vol. 7/8, 1973, p. 139-164).
 A. GALLIGO, *Théorème de division et stabilité en géométrie analytique locale* (Ann. Inst. Fourier, vol. 29, n° 2, 1979, p. 107-184).
 H. GRAUERT, *Über die Deformation isolierter Singularitäten analytischer Mengen* (Inv. Math., vol. 15, 1974, p. 107-142).

- H. HAUSER, *Sur la construction de la déformation semi-universelle d'une singularité isolée* (Thèse, Paris Orsay, 1980).
- H. HAUSER, *An Algorithm of Construction of the Semiuniversal Deformation of an Isolated Singularity* (Proc. Symp. Máth., vol. 40, 1982).
- H. HIRONAKA, *Stratification and Flatness* (Proc. Real and Complex Singularities, Oslo, 1976, p. 199-265).
- H. HIRONAKA, M. LEJEUNE et B. TEISSIER, *Platificateur local ...* (Astérisque, vol. 7/8, 1973, p. 441-463).
- K. KODEIRA, L. NIRENBERG et D. C. SPENCER, *On the Existence of Deformations of Complex Analytic Structures* (Ann. of Math., vol. 11, ser. 68, 1958, p. 450-459).
- J. MARTINET, *Singularités d'applications différentiables* (Springer Lecture Notes, n° 535).
- J. N. MATHER, *Classification of Stable Map Germs by R-Algebras* (Pub. Math. I.H.E.S., vol. 37, 1969, p. 223-248).
- V. P. PALAMADOV, *Deformations of Complex Spaces* (Russian Math. Surveys, vol. 31, n° 3, 1976, p. 129-197).
- H. PINKHAM, *Deformation of Algebraic Varieties with G_m -Action* (Astérisque, vol. 20, 1974).
- G. POURCIN, *Déformations de singularités isolées* (Astérisque, vol. 16, 1974, p. 161-173).
- J.-P. RAMIS, *Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique complexe* (Springer Ergebnisse, vol. 53, 1970).
- G. RUGET, *Déformations de germes d'espaces analytiques* (Astérisque, vol. 16, 1974, p. 133-144).
- M. SCHLESSINGER, *Functors of Artin Rings* (Trans. A.M.S., vol. 130, 1968, p. 208-222).
- H. F. SCHREYER, *Die Berechnungen von Syzygien ... Diplomarbeit, Hamburg, 1980.*
- H. W. SCHUSTER, *Formale Deformationstheorien. Habilitationsschrift, München, 1971.*
- B. TEISSIER, *The Hunting of Invariants in the Geometry of Discriminants* (Proc. Real and Complex Singularities, Oslo, 1976, p. 565-678).
- G. N. TJURINA, *Locally Semiuniversal Flat Deformations of Isolated Singularities of Complex Spaces* (Math. of the U.S.S.R., Izvestija, vol. 3, 1969, p. 967-999).
- G. WASSERMANN, *Stability of Unfoldings* (Springer Lecture Notes, n° 393).

(Manuscrit reçu le 20 décembre 1982,
révisé le 10 janvier 1984.)

Herwig HAUSER,
Institut Für Mathematik
Universität Innsbruck,
A-6020, Autriche.