ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ANTOINE EHRHARD

Inégalités isopérimétriques et intégrales de Dirichlet gaussiennes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 17, nº 2 (1984), p. 317-332
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1984_4_17_2_317_0>

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 17, 1984, p. 317 à 332.

INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES ET INTÉGRALES DE DIRICHLET GAUSSIENNES

PAR ANTOINE EHRHARD

Nous montrons ici que certains résultats classiques de G. Polya et G. Szegö, dans « Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics » s'étendent aux espaces de Gauss : les méthodes variationnelles et de comparaison mettent en évidence les propriétés extrémales des demi-espaces pour la mesure de Gauss. L'outil essentiel est l'inégalité de Brunn-Minkowski de C. Borell [3] exprimée en termes de « symétrisation » (*voir* [4]).

Nous rappelons d'abord brièvement quelques résultats de [3] afin d'introduire et d'étudier une opération de symétrisation des fonctions adaptée à la situation gaussienne. Par une méthode qui généralise celle de G. Polya (*in* [10]), nous montrons ensuite que cette symétrisation diminue l'intégrale de Dirichlet classique (intégrale du carré de la norme euclidienne du gradient) des fonctions lipschitziennes par rapport à la mesure de Gauss. Le cadre des fonctions lipschitziennes est particulièrement bien adapté aux méthodes de comparaison isopérimétriques — pour des remarques à ce sujet on pourra voir par exemple C. Bandle [1], J. Sarvas [12], E. Sperner [13] et P. Bérard et D. Meyer [2]. Nous obtenons ensuite pour ces fonctions un résultat plus général (th. 3.1 ci-dessous). La méthode simple et directe de G. Polya ne permet cependant pas de traiter le cas de « l'égalité isopérimétrique », question qui n'est pas abordée ici. Enfin, nous illustrons ces inégalités par des applications dans divers problèmes liés à l'opérateur « oscillateur harmonique » de la mécanique quantique. En particulier, nous obtenons pour la mesure de Gauss, une inégalité du même type que l'inégalité de Poincaré.

1. Symétrisation gaussienne des fonctions

NOTATIONS. DÉFINITIONS. — Si A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $A+B=\{x+y;\ x\in A,\ y\in B\}$ et $\lambda A=\{\lambda x;\ x\in A\}$. On note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée. Pour tout nombre réel positif r, $B_n(0, r)$ est la boule euclidienne fermée de centre 0 et de rayon r et $S_{n-1}(0, r)$

sa frontière. Pour tout $u \in S_{n-1}(0, 1)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $H(u, \lambda)$ est le « demi-espace » ouvert défini par

$$\begin{aligned} H(u, \lambda) &= \{ x \in \mathbb{R}^n, \langle u, x \rangle > \lambda \} \quad \text{si} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ &= \mathbb{R}^n \quad \text{si} \quad \lambda = -\infty, \\ &= \emptyset \quad \text{si} \quad \lambda = \infty. \end{aligned}$$

On note $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathcal{T} : \mathcal{O} \cup \mathcal{F} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est une transformation d'ensembles, nous disons que $\mathcal{T}$ est *ouverte* si $\mathcal{T}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$, *fermée* si $\mathcal{T}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$, *croissante* si pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{O} \cup \mathcal{F}$ tels que $A \subset B$ on a aussi $\mathcal{T}(A) \subset \mathcal{T}(B)$. Enfin $\mathcal{T}$ est dite *régularisante* si pour tout fermé F et pour tout nombre $r > 0$ on a

$$\mathcal{T}(F + B_n(0, r)) \supset \mathcal{T}(F) + B_n(0, r).$$

C'est cette inclusion qui, lorsque $\mathcal{T}$ est une symétrisation de Steiner, de Schwarz ou de Polya, fournit par intégration une inégalité isopérimétrique de Brunn-Minkowski (*voir*, par exemple, Sarvas [12]). Ici c'est l'essence de l'inégalité de C. Borell [3].

On note γ_n la mesure canonique de Gauss sur $\mathbb{R}^n$; sa densité φ_n par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ est donnée par la formule

$$\varphi_n(dx) = \gamma_n(x)\, dx = (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \|x\|^2 \right) dx.$$

Plus généralement, tout sous-espace affine L de dimension $k \geqq 1$ porte une mesure gaussienne canonique notée γ_k dont la moyenne est la projection orthogonale de l'origine sur L. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2} t^2 \right) dt / \sqrt{2\pi}.$$

Symétrisations gaussiennes, Construction et rappels

Avec ces notations nous définissons une opération de «symétrisation » sur les fermés et les ouverts de $\mathbb{R}^n$ de la façon suivante.

On se donne un sous-espace vectoriel T de dimension $n-k$, avec $k \geqq 1$, et un élément u de $S_{n-1}(0, 1)$ orthogonal à T. Nous notons $S = S(T, u)$ la transformation d'ensembles qui à tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$ ouvert ou fermé associe l'ensemble mesurable $A^* = S(A) \subset \mathbb{R}^n$ qui vérifie

$$\begin{aligned} &\forall x \in T, \qquad A^* \cap (x + T^\perp) = H(u, \lambda) \cap (x + T^\perp) \quad \text{si A est un ouvert}, \\ &\forall x \in T, \qquad A^* \cap (x + T^\perp) = \overline{H(u, \lambda)} \cap (x + T^\perp) \quad \text{si A est un fermé}, \end{aligned}$$

où $\lambda = \lambda(x, A)$ est l'élément de $\overline{\mathbb{R}}$ déterminé par la relation

$$\forall x \in T, \qquad \gamma_k(H(u, \lambda) \cap (x + T^\perp)) = \gamma_k(A \cap (x + T^\perp)).$$

1.1. DÉFINITION. — *L'application* $S=S(T, u)$ *est appelée la k-symétrisation gaussienne dans* $\mathbb{R}^n$ *suivant* T *dans la direction u.*

Nous retiendrons de [4] la proposition suivante.

1.2. PROPOSITION. — *Toutes les symétrisations gaussiennes dans* $\mathbb{R}^n$ *sont des transformations d'ensembles ouvertes, fermées, croissantes et régularisantes.*

Symétrisation des fonctions

1.3. DÉFINITION. — *Soit f une fonction borélienne de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$; *si* $S=S(T, u)$ *est une k-symétrisation dans* $\mathbb{R}^n$ *nous notons* $f^*=S(f)$ *la fonction définie par*

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\qquad f^*(x)=\inf\{a\in\mathbb{R};\ \Phi(\langle x, u\rangle)\leqq\gamma_k(\{f\leqq a\}\cap(x+T^\perp))\}.$$

La fonction $f^*=S(f)$ *s'appelle la symétrisée gaussienne de f* par S.

Remarque (interprétation de H. A. Schwarz d'après W. Blaschke). — Dans le cas continu on peut ramener la symétrisation des fonctions à celles des ensembles. Supposons f continue dans la définition 1.3 et posons $A=\{(x, y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\ y\leqq f(x)\}$. Désignons par Σ la k-symétrisation gaussienne dans $\mathbb{R}^{n+1}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ définie par $\Sigma=S(T\times\mathbb{R}, (u, 0))$. Alors la fonction f est donnée par la formule $f^*(x)=\inf\{y : (x, y)\notin\Sigma(A)\}$.

Les éléments T et u de la définition 1.1 étant donnés on appelle une fois pour toutes S la symétrisation $S(T, u)$ et on adopte la notation $f^*=S(f)$. Voici quelques propriétés immédiates.

1.4. PROPOSITION. — *Soit f une fonction continue; on a*

1.4.1. $\forall a\in\mathbb{R},\quad \{f^*>a\}=S(\{f>a\}),$

1.4.2. $\forall a\in\mathbb{R},\quad \gamma_n(\{f^*\leqq a\})=\gamma_n(\{f\leqq a\})$

(*les fonctions f et* f^* *sont équimesurables*),

1.4.3. $\forall y\in T,\quad \forall a\in\mathbb{R},\ \gamma_k(\{f^*\leqq a\}\cap(y+T^\perp))=\gamma_k(\{f\leqq a\}\cap(y+T^\perp)),$

1.4.4. $\forall s,\quad t\in\mathbb{R},\quad s\leqq t,\quad S((f\wedge t)\vee s)=(f^*\wedge t)\vee s,$

1.4.5. $\forall c\in\mathbb{R}_+,\quad \forall a\in\mathbb{R},\quad S(cf)=cS(f)\quad$ et $\quad S(f+a)=S(f)+a,$

1.4.6. $\forall(x_1, x_2)\in T\times T^\perp,\quad S(-f)(x_1+x_2)=-S(f)(x_1-x_2).$

1.4.7. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}^n$, $f^*(x)$ *ne dépend que des projections orthogonales de x sur* T *et sur* $\mathbb{R}u$. *De plus la restriction de* f^* *à toute droite affine orientée du type* $y+\mathbb{R}u$, *où* $y\in T$, *est une fonction croissante.*

Avec la proposition 1.2 et les points 1.4.1, 1.4.6, on voit que si f est continue, alors f^* l'est aussi.

Inégalité de réarrangement

La proposition 1.4 fait apparaître la symétrisée gaussienne d'une fonction comme sa réarrangée équimesurable, monotone suivant la direction u, par rapport aux mesures γ_k portées par les sous-espaces orthogonaux à T. Il en découle la proposition suivante.

1.5. PROPOSITION. — *Soient f et g deux fonctions continues positives, alors on a*

$$\int fg\,\gamma_n \leqq \int f^* g^* \gamma_n.$$

Démonstration. — Par le théorème de convergence monotone et grâce au point 1.4.4, il suffit de montrer l'inégalité annoncée pour des fonctions f et g bornées, ce que nous supposons. On a alors

$$\int fg\,\gamma_n = \int \left(\int_0^{f(x)} du \right) g(x)\gamma_n(dx) = \int_0^{+\infty} du \int_{\{f \geqq u\}} g\,\gamma_n.$$

Il suffit donc de démontrer le lemme suivant :

1.6. LEMME. — *Si* A *est fermé, alors*

$$\int_{\mathrm{A}} g\,\gamma_n \leqq \int_{\mathrm{A}^*} g^* \gamma_n.$$

Preuve. — On écrit :

$$\int_{\mathrm{A}} g\,\gamma_n = \int_0^{+\infty} \gamma_n(\{g \geqq u\} \cap \mathrm{A})\,dt;$$

on va montrer

$$\gamma_n(\{g \geqq t\} \cap \mathrm{A}) \leqq \gamma_n(\{g^* \geqq t\} \cap \mathrm{A}^*) = \gamma_n(\mathrm{S}(\{g \geqq t\}) \cap \mathrm{S}(\mathrm{A})),$$

ce qui revient à établir que pour tout couple (A, B) de fermés, on a $\gamma_n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \leqq \gamma_n(\mathrm{S}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{S}(\mathrm{B}))$. Or on a

$$\gamma_n(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \int_{\mathrm{T}} \gamma_k(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap (x + \mathrm{T}^\perp))\,\gamma_{n-k}(dx),$$

et pour tout $x \in \mathrm{T}$, $\gamma_k(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap (x + \mathrm{T}^\perp)) \leqq \gamma_k(\mathrm{S}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{S}(\mathrm{B}) \cap (x + \mathrm{T}^\perp))$, car $\mathrm{S}(\mathrm{A}) \cap (x + \mathrm{T}^\perp)$ et $\mathrm{S}(\mathrm{B}) \cap (x + \mathrm{T}^\perp)$ sont deux « demi-espaces » emboîtés de $x + \mathrm{T}^\perp$. Cela prouve le lemme 1.6 et achève la démonstration de la proposition 1.5.

Régularisation

Soient f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$; nous appellerons *module de continuité de f sur* A la fonction c de $\mathbb{R}_+$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, définie par :

$$c(\delta) = \sup\{|f(x)-f(y)|;\ \|x-y\| \leqq \delta,\ x \in \mathrm{A},\ y \in \mathrm{A}\}.$$

On écrira $f \in \mathrm{Lip}(\mathrm{A}, \mathbb{R})$ s'il existe K tel que f soit K-lipschitzienne sur A, c'est-à-dire si $c \leqq \mathrm{K}$.

1.8. Théorème. — *Avec ces notations, on suppose que la fonction continue f admet sur l'ensemble $\{a \leqq f \leqq b\}$ avec $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$, le module de continuité fini c. Soit* S *une symétrisation gaussienne dans $\mathbb{R}^n$; dans ces conditions, la fonction f admet sur l'ensemble $\{a \leqq f^* \leqq b\}$ un module de continuité $c^* \leqq c$.*

Ce théorème généralise un résultat de W. Hayman (*in* [7]) : les symétrisations gaussiennes (comme toutes les symétrisations régularisantes) diminuent le module de continuité des fonctions. La démonstration qui suit est une adaptation de celle de Hayman [7].

On montre d'abord le lemme suivant.

1.9. Lemme. — *Sous les hypothèses du théorème* 1.8 *et pour tout t réel, on pose $\mathrm{D}_t = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \geqq t\}$. Pour tout couple (t_1, t_2) de nombres tels que*

$$a \leqq t_2 < t_1 - c(\delta) \leqq b - c(\delta),$$

on a alors

$$\mathrm{D}_{t_2} \supset \mathrm{D}_{t_1} + \mathrm{B}_n(0, \delta).$$

Démonstration. — Supposons le contraire : il existe $x_1 \in \mathrm{D}_{t_1}$ et $z \in \mathrm{B}_n(0, \delta)$ tels que $f(x_1) \geqq t_1$ et $f(x_1+z) < t_2$. Posons $x_2 = x_1 + z$; sur le segment $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}^n$ on peut alors trouver deux points x'_1 et x'_2 tels que :

$$\|x'_1 - x'_2\| \leqq \delta, \qquad f(x'_1) = t_1 \qquad \text{et} \qquad f(x'_2) = t_2,$$

car f est continue. Comme $t_2 < t_1 - c(\delta)$, cela contredit l'hypothèse du théorème 1.8.

Démonstration du théorème. — Supposons maintenant le théorème 1.8 faux. On peut alors trouver x_1 et x_2 dans $\{a \leqq f^* \leqq b\}$ tels que $\|x_1 - x_2\| \leqq \delta$ et

$$a \leqq f^*(x_2) < f^*(x_1) - c(\delta) \leqq b - c(\delta),$$

puis t_1 et t_2 tels que :

$$f^*(x_2) < t_2 < t_1 - c(\delta) < f(x_1) - c(\delta).$$

Par le lemme 1.9, on a $\{f \geqq t_2\} \supset \{f \geqq t_1\} + \mathrm{B}_n(0, \delta)$. En appliquant S, on déduit de cette inclusion et des propositions 1.2 et 1.4 (1.4.1) la relation

$$\{f^* \geqq t_2\} \supset \{f^* \geqq t_1\} + \mathrm{B}_n(0, \delta).$$

Or $x_1 \in \{f^* > t_1\}$ et $x_2 \in \{f^* < t_2\}$, on a donc $\|x_2 - x_1\| > \delta$, ce qui contredit l'hypothèse de départ et démontre le théorème 1.8.

2. Intégrales de surfaces gaussiennes et inégalités isopérimétriques

De l'inégalité de C. Borell qui est une inégalité du type de celle de Brunn-Minkowski, nous allons déduire une inégalité isopérimétrique. Rappelons d'abord que pour un fermé W de $\mathbb{R}^n$ que l'on suppose $(n-1)$-rectifiable, la mesure de Hausdorff de dimension $n-1$, notée $\mathscr{H}^{n-1}$, s'obtient par la formule du contenu de Minkowski (*cf.* H. Federer [5], 3.3.2); c'est-à-dire que pour toute fonction g continue bornée

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{2r} \int_{W+B_n(0,\, r)} g(x)\, dx = \int_W g\, d\mathscr{H}^{n-1}.$$

En remplaçant g par la densité φ_n de la mesure de Gauss γ_n on obtient la formule suivante (utilisée en dimension infinie par A. Hertele dans [8]) :

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \gamma_n(W+B_n(0,\, r)) = 2 \int_W \varphi_n\, d\mathscr{H}^{n-1}.$$

Cette égalité et l'inégalité de C. Borell ont comme conséquence l'inégalité isopérimétrique qui suit :

2.1. Proposition. — *Si* F *est un fermé de* $\mathbb{R}^n$ *dont le bord* ∂F *est* $(n-1)$-*rectifiable, alors on a*

$$\int_{\partial F} \varphi_n\, d\mathscr{H}^{n-1} \geqq \varphi_1 \circ \Phi^{-1} \circ \gamma_n(F).$$

Pour démontrer la proposition 2.1 nous utiliserons le lemme :

2.2. Lemme. — *Soient* F *un fermé tel que* $\gamma_n(\partial F)=0$ *et* S *une symétrisation gaussienne; pour tout nombre* $r>0$, *on a*

$$\gamma_n(\partial F + B_n(0,\, r)) \geqq \gamma_n(\partial S(F) + B_n(0,\, r)).$$

Preuve. — On a

$$F+B_n(0,\, r) = ([F+B_n(0,\, r)] \setminus F) \cup ([\overline{\complement F} + B_n(0,\, r)] \setminus \overline{\complement F}) \cup \partial F,$$

puisque le membre de droite est une réunion disjointe on en déduit

$$\gamma_n(\partial F + B_n(0,\, r)) = \gamma_n(F+B_n(0,\, r)) - \gamma_n(F) + \gamma_n(\overline{\complement F} + B_n(0,\, r)) - \gamma_n(\overline{\complement F}).$$

Puisque S est croissante on a $\gamma_n(\partial S(F)) \leqq \gamma_n(\partial F)=0$, en utilisant la propriété de régularisation des symétrisations (1.2) on obtient donc

$$\gamma_n(\partial F + B_n(0,\, r)) \geqq \gamma_n(S(F)+B_n(0,\, r)) - \gamma_n(S(F)) + \gamma_n(\overline{\complement S(F)} + B_n(0,\, r)) - \gamma_n(\overline{\complement S(F)}).$$

Ce qui s'écrit aussi $\gamma_n(\partial F + B_n(0,\, r)) \geqq \gamma_n(\partial S(F) + B_n(0,\, r))$ et c'est l'inégalité du lemme.

Démonstration de la proposition 2.1. — On utilise le lemme 2.2 avec pour S une n-symétrisation dans $\mathbb{R}^n$; par hypothèse $\gamma_n(\partial F)$ est nul car F est $(n-1)$-rectifiable. On a donc

$$\int_{\partial F} \gamma_n \, d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{1}{2} \lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \gamma_n(\partial F + B_n(0, r)) \geqq \frac{1}{2} \lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \gamma_n(\partial S(F) + B_n(0, r)).$$

Le calcul fournit

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \gamma_n(\partial S(F) + B_n(0, r)) = 2 \varphi_1 \circ \Phi^{-1} \circ \gamma_n(F),$$

car S(F) est un demi-espace de même mesure que F. La proposition 2.1 est démontrée.

En application de la propriété de régularisation des symétrisations (th. 1.8 et lemme 2.2), nous allons étudier les intégrales de surface gaussiennes sur les ensembles du type

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},\ y = f(x)\}, \qquad \text{avec} \quad f \in \operatorname{Lip}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Ce sont des ensembles rectifiables, leur mesure de Hausdorff de dimension n est donnée en tout point $(x, f(x))$ par l'élément $\sqrt{1 + \|\nabla f(x)\|^2}\, dx$ obtenu à partir du jacobien de l'application $x \mapsto (x, f(x))$ (*voir* par exemple H. Federer [5], 3.2.3). Rappelons que d'après un théorème de H. Rademacher une fonction lipschitzienne est presque partout dérivable et son gradient est une fonction borélienne bornée. Soit $S = S(T, u)$ une symétrisation gaussienne Σ dans $\mathbb{R}^n$; nous construisons une symétrisation gaussienne dans $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ en posant $\sum = S(T \times \mathbb{R}, (u, 0))$. Avec $f^* = S(f)$ et $A^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, y \leqq f^*(x)\}$ de sorte que l'on ait $A^* = \sum(A)$. Remarquons tout d'abord que les fonctions f et f^* sont lipschitziennes (th. 1.8) ce qui implique que leurs graphes sont rectifiables. De plus, d'après le lemme 2.2 on a

$$\forall r > 0, \qquad \gamma_{n+1}(\partial A + B_{n+1}(0, r)) \geqq \gamma_{n+1}(\partial A^* + B_{n+1}(0, r)).$$

On en déduit l'inégalité

$$\int_{\partial A} \varphi_{n+1} \, d\mathcal{H}^n \geqq \int_{\partial A^*} \varphi_{n+1} \, d\mathcal{H}^n,$$

où $\mathcal{H}^n$ est la mesure de Hausdorff de dimension n. Ces intégrales s'expriment à l'aide des jacobiens : on obtient

2.2.1. $$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\{\|x\|^2 + f^2(x)\}\right) . \sqrt{1 + \|\nabla f(x)\|^2}\, dx$$
$$\geqq \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\{\|x\|^2 + (f^*)^2(x)\}\right) . \sqrt{1 + \|\nabla f^*(x)\|^2}\, dx,$$

où $\nabla=(d/dx_1, \ldots, d/dx_n)$ est le gradient. Nous obtenons ainsi par une méthode essentiellement due à G. Polya (*cf.* G. Polya [10], et [11]) l'énoncé typique qui suit.

2.3. Proposition. — *Soit* S *une symétrisation gaussienne dans* $\mathbb{R}^n$; *pour toute fonction lipschitzienne f, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|^2 \gamma_n \geqq \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f^*\|^2 \gamma_n.$$

Démonstration. — Soit $\varepsilon>0$; posons $g_\varepsilon=\varepsilon f$ et appliquons 2.2.1 à g_ε en utilisant la formule 1.4.5. On obtient pour tout $\varepsilon>0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n(x) \left(\frac{e^{-1/2\,\varepsilon^2 f^2(x)}\sqrt{+\varepsilon^2\|\nabla f(x)\|^2}-1}{\varepsilon^2}\right) dx$$
$$\geqq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n(x) \left(\frac{e^{-1/2\,\varepsilon^2 (f^*)^2(x)}\sqrt{+\varepsilon^2\|\nabla(f^*)(x)\|^2}-1}{\varepsilon^2}\right) dx.$$

En faisant tendre ε vers 0, on en déduit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|^2 \gamma_n \geqq \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f^*\|^2 \gamma_n,$$

c'est l'inégalité de la proposition 2.3.

Si f et g sont des fonctions lipschitziennes alors $f \wedge g$ et $f \vee g$ le sont aussi. Nous remplaçons dans la proposition 2.3 la fonction f par $(f \wedge t) \vee s$ où s et t sont des nombres réels tels que $s \leqq t$. Grâce à la proposition 1.4 (1.4.4) nous obtenons ainsi

$$\forall s, \quad t\in\mathbb{R}, \quad s\leqq t, \quad \int_{\{f\in[s,t]\}} \|\nabla f\|^2 \gamma_n \geqq \int_{\{f^*\in[s,t]\}} \|\nabla f^*\|^2 \gamma_n.$$

Et cela implique que pour tout borélien B de $\mathbb{R}$

$$\int_{\{f\in \mathrm{B}\}} \|\nabla f\|^2 \gamma_n \geqq \int_{\{f^*\in \mathrm{B}\}} \|\nabla f^*\|^2 \gamma_n.$$

2.4. Corollaire. — *Sous les hypothèses de la proposition* 2.3 *et pour tout borélien* B *de* $\mathbb{R}$ *on a*

$$\int_{\{f\in \mathrm{B}\}} \sqrt{1+\|\nabla f\|^2}\,\gamma_n \geqq \int_{\{f^*\in \mathrm{B}\}} \sqrt{1+\|\nabla f^*\|^2}\,\gamma_n, \tag{2.4.1}$$

et

$$\int_{\{f\in \mathrm{B}\}} \|\nabla f\| \gamma_n \geqq \int_{\{f^*\in \mathrm{B}\}} \|\nabla f^*\| \gamma_n. \tag{2.4.2}$$

Démonstration. — En remplaçant f par $(f \wedge t) \vee s$ dans l'inégalité 2.2.1 comme ci-dessus on compare deux mesures :

$$\forall \mathrm{B} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), \qquad \int_{\{f \in \mathrm{B}\}} \sqrt{1+\|\nabla f\|^2}\, e^{-1/2\, f^2} \gamma_n \geqq \int_{\{f^* \in \mathrm{B}\}} \sqrt{1+\|\nabla f^*\|^2}\, e^{-1/2 (f^*)^2} \gamma_n.$$

Cette inégalité a pour conséquence immédiate l'inégalité 2.4.1. Pour 2.4.2 on remplace f par cf où c est une constante positive et B par c B dans 2.4.1 en tenant compte de 1.4.5. On obtient alors l'inégalité 2.4.2 en faisant tendre c vers l'infini. Le corollaire est démontré.

Dans le prochain paragraphe nous utilisons ces calculs afin de généraliser ce type d'inégalités. Cependant, pour les applications du paragraphe 4 les propositions 1.5 et 2.3 suffisent.

3. Une inégalité générale

L'objet de ce paragraphe est le théorème suivant.

3.1. THÉORÈME. — *Soient* $\mathrm{S}=\mathrm{S}(\{0\}, u)$ *une* 1-*symétrisation gaussienne dans* $\mathbb{R}^n$ *et* F *une fonction convexe croissante sur* $\mathbb{R}_+$; *pour toute fonction* $f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *on a*

3.1.1. $$\forall \mathrm{B} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), \qquad \int_{\{f \in \mathrm{B}\}} \mathrm{F}(\|\nabla f\|)\gamma_n \geqq \int_{\{f^* \in \mathrm{B}\}} \mathrm{F}(\|\nabla f^*\|)\gamma_n.$$

Démonstration. — On définit une mesure μ sur $\mathbb{R}$ en posant pour tout borélien $\mathrm{B} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$: $\mu(\mathrm{B})=\gamma_n(\{f \in \mathrm{B}\})$. Puisque f et f^* sont équimesurables on a aussi $\mu(\mathrm{B})=\gamma_n(\{f^* \in \mathrm{B}\})$. En utilisant la croissance puis la convexité de F on a grâce à 2.4.2

$$\frac{1}{\mu(\mathrm{B})}\int_{\{f \in \mathrm{B}\}} \mathrm{F}(\|\nabla f\|)\gamma_n \geqq \mathrm{F}\left(\frac{1}{\mu(\mathrm{B})}\int_{\{f^* \in \mathrm{B}\}} \|\nabla f^*\|\gamma_n\right),$$

on en déduit que pour μ-presque tout t dans $\mathbb{R}$:

3.1.2. $$\frac{d}{d\mu(t)}\int_{\{f \leqq t\}} \mathrm{F}(\|\nabla f\|)\gamma_n \geqq \mathrm{F}\left(\frac{d}{d\mu(t)}\int_{\{f^* \leqq t\}} \|\nabla f^*\|\gamma_n\right).$$

On calcule maintenant le membre de droite de cette inégalité : c'est une fonction mesurable définie μ-presque sûrement sur $\mathbb{R}$. On montre à cet effet le

3.2. LEMME. — *Avec les notations et sous les hypothèses du théorème* 3.1, *il existe une fonction* μ-*mesurable* h *positive et bornée sur* $\mathbb{R}$ *telle que* : $\|\nabla f^*\|=h \circ f^*$.

Preuve. — On procède comme E. Sperner [13], Lemma 4 : d'après la proposition 1.4 (1.4.7) la fonction f^* ne dépend que de $\langle x, u\rangle$, elle s'écrit $f^*(x)=g(\langle x, u\rangle)$ où g est une fonction croissante. En un point t tel que $(f^*)^{-1}(t)$ contienne un intervalle de longueur non nulle, on pose $h(t)=0$; ailleurs, si $t=g(s)$, on pose $h(t)=g'(s)$. Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, on a $h^{-1}(\mathrm{A})=g(g'^{-1}(\mathrm{A}))$. Puisque g est lipschitzienne, g' est borélienne; g étant continue, si A est un borélien, $g(g'^{-1}(\mathrm{A}))$ est un ensemble μ-mesurable, d'où le lemme.

Par le lemme 3.2 on a pour μ-presque tout t

$$\frac{d}{d\mu(t)}\left(\int_{\{f^*\leqq t\}}\|\nabla f^*\|\gamma_n\right)=h(t),$$

intégrons les deux membres de l'inégalité 3.1.2 par rapport à μ sur un borélien B de $\mathbb{R}$, on obtient

$$\int_{\{f\in\mathrm{B}\}}\mathrm{F}(\|\nabla f\|)\gamma_n\geqq\int_{\mathrm{B}}\mathrm{F}\circ h\,d\mu.$$

C'est l'inégalité du théorème 3.1 dont la démonstration est achevée.

Le théorème 3.2 et les inégalités de réarrangement équimesurable du paragraphe 1 nous donnent l'énoncé suivant :

3.3. Corollaire. — *Soient* S, F, f *comme dans le théorème* 3.1; *soient de plus* G, H, h *des fonctions sur* $\mathbb{R}$, G, H *boréliennes positives, h croissante positive et g continue de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}_+$; *on a alors l'inégalité*

$$\frac{\int\mathrm{F}(\|\nabla f\|)\mathrm{G}(f)\gamma_n}{h\left(\int\mathrm{H}(f)g\gamma_n\right)}\geqq\frac{\int\mathrm{F}(\|\nabla f^*\|)\mathrm{G}(f^*)\gamma_n}{h\left(\int\mathrm{H}(f^*)g^*\gamma_n\right)}.$$

Remarque. — Tous les résultats de ce paragraphe s'étendent aux k-symétrisations, $k\geqq 1$. L'argument essentiel reste valable : si f est une fonction lipschitzienne alors ∇f^* est f^*-mesurable.

4. Exemples d'applications

Dans la suite, on note L l'opérateur différentiel

$$\sum\left(-\frac{d^2}{dx_i^2}+x_i\frac{d}{dx_i}\right)=-\Delta+\langle x,\nabla\rangle\quad\text{sur } \mathbb{R}^n.$$

Cet opérateur est étroitement lié à l'oscillateur harmonique de la mécanique quantique (*voir* [9] à ce sujet). On a la formule

4.0.1. $$\varphi_n(x)\,\mathrm{L} = \sum -\frac{d}{dx_i}\left(\varphi_n(x)\frac{d}{dx_i}\right).$$

Donc pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ telle que

4.0.2. $$\lim_{\|x\|\to+\infty} (f^2(x)+\|\nabla f(x)\|^2)\,\varphi_n(x)=0 \qquad \text{et} \qquad f,\ \|\nabla f\|\in \mathrm{L}^2(\gamma_n),$$

on a, en intégrant par parties grâce à 4.0.1, la formule

$$\int f\,\mathrm{L}f\,\gamma_n = \int \|\nabla f\|^2\,\gamma_n, \qquad \text{et} \qquad \int g\,\mathrm{L}h\,\gamma_n = \int \langle \nabla g, \nabla h\rangle\,\gamma_n$$

si g et h vérifient les mêmes conditions que f.

Dans le cas d'un ouvert à bord régulier A de $\mathbb{R}^n$ (∂A de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux), on considère la classe $\mathscr{D}(\mathrm{A})$ constituée par l'ensemble des fonctions f sur $\mathbb{R}^n$ qui vérifient la condition 4.0.2, dont la restriction à A est la classe $\mathscr{C}^2$ et dont les dérivées partielles d'ordre 1 admettent un prolongement régulier à ∂A. On désigne par $\mathscr{D}_0(\mathrm{A})$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{D}(\mathrm{A})$ dont le support est inclus dans A de sorte que par la formule de Green on ait

4.0.3. $$\forall f\in\mathscr{D}_0(\mathrm{A}), \qquad \int_{\mathrm{A}} f\,\mathrm{L}\,f\gamma_n = \int \|\nabla f\|^2\,\gamma_n.$$

Soient A et B deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^n$ avec $\overline{\mathrm{B}}\subset\mathrm{A}$; on désigne par $\mathscr{F}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ absolument continues sur les droites (classe de Tonnelli) qui vérifient les conditions suivantes : $0\leqq f\leqq 1$, $\mathrm{Supp}(f)\subset\mathrm{A}$, $f\,\mathrm{I_B}=\mathrm{I_B}$. On remarque que si $f\in\mathscr{F}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ alors ∇f est une fonction mesurables ; on définit le nombre $\mathrm{C}(\mathrm{A},\mathrm{B})$ en posant :

$$\mathrm{C}(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \inf\left\{\int \|\nabla f\|^2\,\gamma_n;\ f\in\mathscr{F}(\mathrm{A},\mathrm{B})\right\}.$$

Il s'agit de la définition variationnelle d'une « capacité », on pourra comparer avec F. W. Gehring [6] ou J. Sarvas [12]. On se propose d'évaluer le nombre $\mathrm{C}(\mathrm{A},\mathrm{B})$. D'après J. Sarvas [12] dans le cas où $\overline{\mathrm{B}}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ on peut se restreindre aux fonctions lipschitziennes pour calculer $\mathrm{C}(\mathrm{A},\mathrm{B})$: en effet si $\overline{\mathrm{B}}$ est compact, on a

$$\mathrm{C}(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \inf\left\{\int \|\nabla f\|^2\,\gamma_n;\ f\in\mathscr{F}(\mathrm{A},\mathrm{B})\cap\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\right\}.$$

De la proposition 2.3 on déduit donc directement le théorème :

4.1. THÉORÈME. — *Soient* A *et* B *deux ouverts non vides de* $\mathbb{R}^n$ *avec* $\overline{B} \subset A$, $\overline{B}$ *compact, et soit* S *une symétrisation gaussienne ; on pose* $A^* = S(A)$ *et* $B^* = S(B)$. *Dans ces conditions, on a*

$$\overline{B^*} \subset A^* \qquad \text{et} \qquad C(A, B) \geqq C(A^*, B^*).$$

4.2. *Remarque.* — *On suppose que* $A \setminus \overline{B}$ *est un ouvert à bord régulier tel que :*

$$C(A, B) = \inf\left\{ \int \|\nabla f\|^2 \gamma_n; \qquad f \in \mathscr{F}(A, B) \cap \operatorname{Lip}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \right\}.$$

Si en outre il existe une fonction f_0 *dans* $\mathscr{D}(A \setminus \overline{B}) \cap \mathscr{F}(A, B)$ *telle que pour tout* $x \in A \setminus \overline{B}$, $L f_0(x) = 0$, *alors on a*

$$C(A, B) = \int \|\nabla f_0\|^2 \gamma_n.$$

En effet, soit $f \in \mathscr{F}(A, B) \cap \operatorname{Lip}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$; on pose $u = f - f_0$. Puisque $L f_0 = 0$ *dans* $A \setminus \overline{B}$, que u vérifie les conditions 4.0.2 et $u = 0$ sur $\partial(A \setminus \overline{B})$, on a, en appliquant 4.0.3

$$\int \langle \nabla f_0, \nabla u \rangle \gamma_n = \int_{A \setminus \overline{B}} u \, L f_0 \, \gamma_n = 0.$$

On a donc

$$\int \|\nabla f\|^2 \gamma_n = \int \|\nabla f_0\|^2 \gamma_n + \int \|\nabla u\|^2 \gamma_n \geqq \int \|\nabla f_0\|^2 \gamma_n.$$

En prenant pour S une 1-symétrisation de $\mathbb{R}^n$ dans le théorème 4.1, le calcul de variation explicite dans $\mathbb{R}$ nous fournit grâce à la remarque 4.2 l'énoncé suivant :

4.3. THÉORÈME. — *Soient* A *et* B *deux ouverts de* $\mathbb{R}^n$ *tels que* $\emptyset \neq \overline{B} \subset A$; *on a*

4.3.1 $$C(A, B) \geqq \left(\sqrt{2\pi} \int_{\Phi^{-1} \circ \gamma_n(B)}^{\Phi^{-1} \circ \gamma_n(A)} \exp\left(\frac{1}{2} t^2\right) dt \right)^{-1}.$$

De plus l'égalité est atteinte dans 4.3.1 *lorsque* A *et* B *sont des demi-espaces emboîtés.*

Démonstration. — On montre d'abord 4.3.1 pour $C(A, B')$ où B' est un ouvert d'adhérence compacte incluse dans B en utilisant le théorème 4.1. On procède ensuite par passage à la limite.

Dans l'application qui suit, on considère un ouvert non vide A de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathscr{F}(A)$ l'ensemble des fonctions positives qui sont dans la classe de Tonnelli et qui sont nulles sur $\complement$ A. Pour toute fonction non identiquement nulle $f \in \mathcal{F}(A, B)$, on pose

$$M_A(f) = \frac{\displaystyle\int \|\nabla f\|^2 \gamma_n}{\left(\displaystyle\int f \gamma_n\right)^2} \in \overline{\mathbb{R}}_+ .$$

On définit ensuite le nombre $M(A)$ en posant

$$M(A) = \inf \{ M_A(f) ; f \in \mathcal{F}(A), f \neq 0 \}$$

et on se propose d'évaluer $M(A)$. On remarque comme précédemment que l'on a d'après J. Sarvas [12]

$$M(A) = \inf \{ M_A(f) ; f \in \mathcal{F}(A) \cap \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), f \neq 0 \},$$

ce qui permet de déduire directement de la proposition 2.3 le

4.4. Théorème. — *Soient* A *un ouvert non vide de* $\mathbb{R}^n$ *et* S *une symétrisation gaussienne dans* $\mathbb{R}^n$; *on pose* $A^* = S(A)$. *On a alors* $M(A) \geqq M(A^*)$.

4.5. *Remarque.* — *Supposons que* A *soit un ouvert à bord régulier et qu'il existe une fonction* f_0 *dans* $\mathcal{D}_0(A)$ *telle que pour tout* $x \in A$, $L f_0(x) = 1$. *Alors on a* $M_A(f_0) = M(A)$.

Preuve. — Soit $f \in \mathcal{F}(A)$: en appliquant 4.0.1 on a

$$\int f \gamma_n = \int_A f \, L f_0 \gamma_n = \int \langle \nabla f, \nabla f_0 \rangle \gamma_n - \int_A \sum \frac{d}{dx_i} \left(f \varphi_n \frac{d}{dx_i} f_0 \right) dx.$$

Sous nos hypothèses sur f, on en déduit

4.5.1. $$\int f \gamma_n = \int \langle \nabla f, \nabla f_0 \rangle \gamma_n .$$

On a donc l'inégalité

$$\left(\int f \gamma_n\right)^2 \leqq \left(\int \|\nabla f\| \cdot \|\nabla f_0\| \gamma_n\right)^2 \leqq \int \|\nabla f\|^2 \gamma_n \cdot \int \|\nabla f_0\|^2 \gamma_n .$$

Ce qui grâce à 4.5.1 appliqué à f_0 s'écrit aussi

$$\frac{\displaystyle\int \|\nabla f\|^2 \gamma_n}{\left(\displaystyle\int f \gamma_n\right)^2} \geqq \frac{1}{\displaystyle\int \|\nabla f_0\|^2 \gamma_n} = \frac{\displaystyle\int \|\nabla f_0\|^2 \gamma_n}{\left(\displaystyle\int f_0 \gamma_n\right)^2},$$

et justifie la remarque 4.5.

Nous utilisons maintenant le théorème 4.4 en prenant pour S une 1-symétrisation gaussienne; la remarque 4.5 permet alors un calcul explicite dans $\mathbb{R}$ et on obtient l'estimation suivante :

y 4.6. THÉORÈME. — *Sous les hypothèses du théorème* 4.4 *et avec les mêmes notations, on a*

$$M(A) \geqq \left(\sqrt{2\pi} \int_{\Phi^{-1} \circ \gamma_n(A)}^{+\infty} (1-\Phi(t))^2 \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right) dt \right)^{-1},$$

avec l'égalité lorsque A *est un demi-espace.*

L'exemple précédent est l'analogue d'un calcul de G. Polya et G. Szegö ([11], p. 87-89) sur les fonctions de contrainte élastique en milieu homogène. Le prochain concerne un calcul de fréquence principale (*voir* aussi [11]).

Soit A un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$; on considère à nouveau la classe $\mathscr{F}(A)$ introduite plus haut. Pour toute fonction f non identiquement nulle dans $\mathscr{F}(A)$, on définit le « quotient de Rayleigh-Ritz » gaussien de f,

$$F_A(f) = \frac{\int_A \|\nabla f\|^2 \gamma_n}{\int_A f^2 \gamma_n} \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

puis le nombre $F(A) = \inf \{ F_A(f); f \in \mathscr{F}(A), f \neq 0 \}$ et on se propose d'évaluer $F(A)$. On déduit tout d'abord de la proposition 2.3 le

4.7. THÉORÈME. — *Pour tout ouvert non vide* $A \subset \mathbb{R}^n$, *et pour toute symétrisation gaussienne* S *dans* $\mathbb{R}^n$, *on a* $F(A) > F(A^*)$.

4.8. *Remarque.* — *On suppose que* A *est un ouvert à bord régulier tel qu'il existe une fonction* f_0 *dans* $\mathscr{D}_0(A)$ *et un nombre réel* $\nu > 0$ *vérifiant*

$$L f_0 = \nu f_0 > 0 \quad \text{dans } A.$$

Dans ces conditions on a $F(A) = \nu = F_A(f_0)$: *plus petite valeur propre de* L *pour le problème de Dirichlet.*

Preuve. — En appliquant 4.0.4 à f_0 on obtient

$$\nu \cdot \int f_0^2 \gamma_n = \int_A f_0 L f_0 \gamma_n = \int \|\nabla f_0\|^2 \gamma_n.$$

En utilisant les arguments classiques de densité (*voir* par exemple P. Bérard et D. Meyer [2] ou J. Sarvas [12]) il suffit donc de montrer que pour toute f dans $\mathscr{F}(A)$ lipschitzienne (ou de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) à support compact inclus dans A, on a

$F_A(f) \geqq \nu$. Par hypothèse f s'écrit $f = uf_0$ où u appartient à $\mathcal{F}(A)$ et les fonctions u et f ont même support. On a donc :

$$\int \|\nabla f\|^2 \gamma_n = \int u^2 \|\nabla f_0\|^2 \gamma_n + 2\int \langle \nabla u, \nabla f_0 \rangle u f_0 \gamma_n + \int \|\nabla u\|^2 f_0^2 \gamma_n$$

$$= \int \langle \nabla (u^2 f_0), \nabla f_0 \rangle \gamma_n + \int f_0^2 \|\nabla u\|^2 \gamma_n.$$

C'est-à-dire

$$\int \|\nabla f\|^2 \gamma_n = \int u^2 f_0 \mathrm{L} f_0 \gamma_n + \int f_0^2 \|\nabla u\|^2 \gamma_n = \nu \int (uf_0)^2 \gamma_n + \int f_0^2 \|\nabla u\|^2 \gamma_n$$

$$\geqq \nu \, . \int f^2 \gamma_n.$$

Ce qui justifie la remarque.

Pour notre application nous sommes amenés par la remarque 4.8 à étudier dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$-y'' + xy' - \nu y = 0 \qquad \text{avec} \quad \nu > 0.$$

En faisant le changement de variable $y(x) = u(x) \exp(x^2/4)$, on se ramène à l'équation de Weber,

4.8.1. $$-u'' + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} - \nu\right) u = 0.$$

Nous nous intéressons ici à la solution particulière de 4.8.1 notée D_ν par F. G. Tricomi dans [14] (p. 72-78) qui est donnée si $\nu > 0$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad D_\nu(x) = \sqrt{\pi}\, 2^{\nu/2} e^{-x^2/4} \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{\nu}{m} \frac{(x/\sqrt{2})^m}{\Gamma(1/2 - \nu/2 + m/2)}$$

où Γ est la fonction d'Euler. Nous retenons de l'étude de F. G. Tricomi (loc. cit.) les résultats rassemblés sous la

4.9. PROPOSITION. — *Pour tout* ν *strictement positif, il existe un nombre réel* $x(\nu)$ *tel que* $D_\nu(x(\nu)) = 0$ *et* $D_\nu(x) > 0$ *si* $x > x(\nu)$; *de plus la fonction qui à* ν *associe* $x(\nu)$ *est une bijection continue croissante de* $]0, +\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$. *En outre la fonction* D_ν *et toutes ses dérivées sont dans* $L^2(\mathbb{R}_+, dx)$.

Par la proposition 4.9 on déduit du théorème 4.7 et de la remarque 4.8 appliquée trivialement dans $\mathbb{R}$, le théorème suivant :

4.10. THÉORÈME. — *Avec les mêmes hypothèses que pour le théorème* 4.7, F(A) *est minoré par*

4.10.1 $$F(A) \geqq \nu(-\Phi^{-1} \circ \gamma_n(A)) > 0,$$

où $\{\nu(x);\ x \in \mathbb{R}\}$ *est la réciproque de la fonction* $x(\,.\,)$ *de la proposition* 4.9. *De plus l'égalité est atteinte dans* 4.10.1 *lorsque* A *est un demi-espace.*

Pour illustrer le théorème 4.10 citons une inégalité qui en résulte immédiatement et qui est l'analogue de l'inégalité de Poincaré :

4.11, COROLLAIRE. — *Soit* A *un ouvert non vide de* $\mathbb{R}^n$; *désignons par* $H_0^1(A)$ *l'ensemble*

$$H_0^1(A) = \{f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),\ \|\nabla f\| \in L^2(\gamma_n),\ \mathrm{Supp}(f) \subset A\}.$$

Dans ces conditions, si $\gamma_n(A) \leqq 1/2$, *on a*

$$\forall f \in H_0^1(A), \qquad \int f^2 \gamma_n \leqq \int \|\nabla f\|^2 \gamma_n.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. BANDLE, *Isoperimetric Inequalities and Applications* (*Monographs and Studies in Math.*, n° 7, Pitman, 1980).

[2] P. BÉRARD et D. MEYER, *Inégalités isopérimétriques et applications* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 15, 1982, p. 513 à 542).

[3] C. BORELL, *The Brunn-Minkowski Inequality in Gauss Space* (*Inv. Math.*, 30, 1974, p. 207-211).

[4] A. EHRHARD, *Symétrisation dans l'espace de Gauss* (*Math. Scand.* à paraître).

[5] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory* (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1969).

[6] F. W. GEHRING, *Symmetrisation of Rings in Space* (*Trans. Amer. Soc.*, 101, 1961, p. 499-519).

[7] W. K. HAYMAN, *Multivalent Functions* (Cambridge University Press, Cambridge, 1958).

[8] A. HERTELE, *Gaussian Plane and Spherical Measures in Separable Hilbert Space* (*Probability in Banach Spaces*, Oberwolfach, 1982, à paraître).

[9] P. A. MEYER, *Note sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck* (*Séminaire de Probabilité XVI*, Springer, 1980-1981).

[10] G. POLYA, *Sur la symétrisation Circulaire* (*C.R. Acad. Sc.*, Paris, 230, 1950, p. 25 à 27).

[11] G. POLYA et G. SZEGÖ, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* (Princeton University Press, Princeton, 1951).

[12] J. SARVAS, *Symmetrisation of Rings in n-Space.* (*Ann. Acad. Sci. Fenn.*, série A, 522, 1971).

[13] E. SPERNER, *Zu Symmetrisierung von Funktionen auf Sphären* (*Math. Z.*, 143, 1973, p. 317-327).

[14] F. G. TRICOMI, *Fonctions Hypergéométriques Confluentes* (Gauthier-Villars, Paris, 1960).

(Manuscrit reçu le 22 mars 1983,
révisé le 9 mai 1983)

A. EHRHARD
Faculté des Sciences Économiques,
Université de Clermont-I,
41, boulevard Gergovia,
63002 Clermont-Ferrand Cedex.