

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

G. GONZALEZ-SPRINBERG

J.-L VERDIER

**Construction géométrique de la correspondance de McKay**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 16, n° 3 (1983), p. 409-449

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1983\\_4\\_16\\_3\\_409\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1983_4_16_3_409_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DE LA CORRESPONDANCE DE MCKAY

PAR G. GONZALEZ-SPRINBERG ET J. L. VERDIER

## SOMMAIRE

0. <i>Introduction et notations</i> .....	409
1. <i>Résultats préliminaires : <math>K(\mathcal{F})</math> et <math>R(G)</math></i> .....	412
2. <i>Construction géométrique de la correspondance</i> .....	415
3. <i>Rappel sur les groupes engendrés par des réflexions; les modules <math>M_p</math></i> .....	419
4. <i>Résolution <math>G</math>-équivariante de <math>A_V</math>; l'opérateur <math>\Theta</math></i> .....	425
5. <i>La série de Poincaré; graduations et matrices</i> .....	426
6. <i>Désingularisations minimales; démonstration du théorème 2.2</i> .....	440
7. <i>Corollaire : Caractérisation de la désingularisation minimale</i> .....	448
<i>Références</i> .....	449

## 0. Introduction et notations

Les objets concernés par cet article sont essentiellement les solides platoniciens, i. e. les polyèdres réguliers de  $\mathbb{R}^3$ . La première démonstration du fait qu'ils sont au nombre de cinq (tétraèdre, octaèdre, cube, dodécaèdre et icosaèdre) est attribuée à Théétète ([P], [E]), qui a aussi prouvé qu'on peut les inscrire dans une sphère. Un groupe de rotations  $R$  qui laisse fixe un tel polyèdre est appelé groupe polyédral pur, et peut être considéré comme sous-groupe

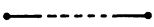
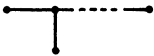


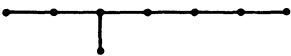
de  $PGL(2, \mathbb{C})$ , moyennant l'identification de la sphère  $S^2$  avec la droite projective complexe  $\mathbb{P}^1$ . Le groupe  $G$ , image inverse de  $R$  par l'homomorphisme canonique de  $SL(2, \mathbb{C})$  sur  $PGL(2, \mathbb{C})$ , est appelé groupe binaire polyédral. On trouve ainsi (à isomorphisme près) trois sous-groupes finis de  $SL(2, \mathbb{C})$ , car le cube et le dodécaèdre sont respectivement duaux de l'octaèdre et de l'icosaèdre par la dualité qui associe à un polyèdre celui dont les sommets sont les centres de ses faces (le tétraèdre est auto-dual), et deux polyèdres duaux ont le même groupe polyédral pur associé. Pour obtenir tous les sous-groupes finis de  $SL(2, \mathbb{C})$  (à conjugaison près) il faut ajouter deux familles dénombrables : les groupes cycliques et les groupes diédraux binaires (voir par exemple [K] ou [D]); pour les groupes diédraux on peut aussi considérer les « groupes diédraux purs » comme étant les groupes de rotations de certains polyèdres appelés dièdres.

Soit  $G$ , donc, un sous-groupe fini de  $SL(2, \mathbb{C})$ ,  $G \neq \{1\}$ ; il agit naturellement sur  $V = \mathbb{C}^2$ ; il a comme seul point fixe l'origine  $0$  et il agit librement sur  $V - \{0\}$ .

Posons  $S = V/G$ ; notons  $p : V \rightarrow S$  le morphisme de passage au quotient. La surface  $S$  a un point singulier isolé qui est un point double rationnel ([A], [Br], [D], [K]) et cette construction permet d'obtenir ainsi tous les points doubles rationnels [Br].

Soit  $q : \tilde{S} \rightarrow S$  une désingularisation minimale de  $S$ ,  $D \subset \tilde{S}$  le diviseur exceptionnel; notons  $Irr(D) = \{d_1, \dots, d_r\}$  l'ensemble des composantes irréductibles de  $D$ .

On peut associer à  $G$  un diagramme de Dynkin  $\Gamma(G)$  en prenant le graphe dual de la résolution  $\tilde{S}$ , graphe dont les sommets sont en bijection avec  $Irr(D)$ , et dont les arêtes joignant deux sommets représentent les points d'intersection des composantes de  $D$  correspondantes. Suivant le cas, le diagramme est donné par le tableau suivant :

$G$	$ G $	$\Gamma(G)$
cyclique	$n + 1$	$A_n$ : 
diédral binaire	$4(n - 2)$	$D_n$ :  <span style="float: right;">(<math>n</math> sommets, <math>n \geq 1</math>)</span>
tétraédral binaire	24	$E_6$ :  <span style="float: right;">(<math>n</math> sommets, <math>n \geq 4</math>)</span>
octaédral binaire	48	$E_7$ : 
icosaédral binaire	120	$E_8$ : 

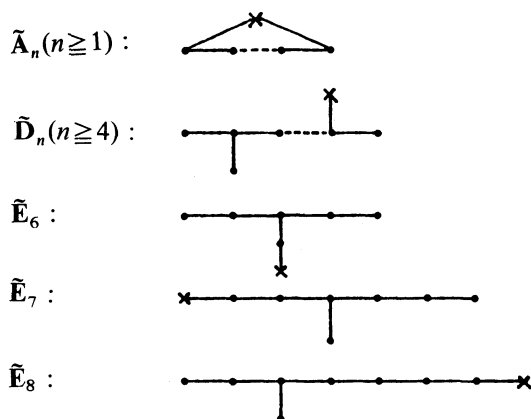
Pour tout sous-groupe fini  $G$  de  $SL(2, \mathbb{C})$  on appelle  $\Gamma(G)$  le type de  $G$ .

Considérons, par ailleurs, l'ensemble des classes d'équivalence de représentations non triviales de  $G$  :  $\text{Irr}(G) = \{\rho_1, \dots, \rho_n\}$ . Notons  $c$  la représentation canonique de  $G$  dans  $\mathbb{C}^2$  donnée par l'inclusion  $G \hookrightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ , et  $\rho_0$  la représentation triviale de degré 1. On définit la  $(r+1) \times (r+1)$  matrice  $C = (a_{ij})$  par la formule de décomposition :

$$c \otimes \rho_i = \sum a_{ij} \rho_j,$$

où  $a_{ij}$  dénote la multiplicité de  $\rho_j$  dans  $c \otimes \rho_i$ .

J. McKay a remarqué que la matrice  $2 \text{Id} - C$  (où  $\text{Id}$  est la matrice d'identité) est la matrice de Cartan du diagramme de Dynkin complété  $\tilde{\Gamma}(G)$  de  $\Gamma(G)$  ([M], Appendix III de [S1]). Du point de vue des représentations de groupes cette propriété a été analysée par J. Steinberg [St]. Ces diagrammes de Dynkin complétés sont donc les suivants :



où on a indiqué par une croix le sommet ajouté.

La remarque de McKay permet de définir de façon purement combinatoire une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de  $G$  et l'ensemble de sommets de  $\tilde{\Gamma}(G)$ , qui induit une bijection entre le graphe de  $\text{Irr}(G)$  et celui de  $\text{Irr}(D)$  (en faisant correspondre à  $\rho_0$  le sommet ajouté), bijection définie à automorphisme de diagramme près.

Cette bijection possède la propriété suivante : les degrés des représentations appartenant à  $\text{Irr}(G)$  coïncident avec les coefficients de la plus grande racine dans le système de racines de  $\Gamma(G)$ . Cette propriété peut être énoncée d'une autre façon, en considérant le cycle fondamental  $\mathcal{L} = \sum n_i d_i$  de  $\tilde{S}$  (voir la définition dans [A]). Le cycle fondamental est (pour les singularités rationnelles) le cycle divisoriel défini par l'idéal (localement principal)  $q^*(\mathcal{M}_S)$ , avec  $\mathcal{M}_S$  l'idéal maximal du point singulier. Soit  $\mathcal{H}$  une section hyperplane générale de  $S$  contenant le point singulier. Alors l'image inverse  $q^*(\mathcal{H})$  s'écrit  $q^*(\mathcal{H}) = \mathcal{L} + \mathcal{T}$ , où  $\mathcal{T}$  est la transformée stricte et  $\mathcal{L}$  la partie de  $q^*(\mathcal{H})$  à support dans  $D$ . On peut faire correspondre à  $\mathcal{T}$  le sommet ajouté dans  $\tilde{\Gamma}(G)$ ; on vérifie que les arêtes ajoutées correspondent aussi aux points d'intersection de  $\mathcal{T}$  avec  $D$ . En ces termes, la bijection mentionnée associe à  $\rho_0$  la transformée stricte  $\mathcal{T}$  et à chaque  $\rho \in \text{Irr}(G)$  une composante  $d \in \text{Irr}(D)$  de telle sorte que le degré de  $\rho$  coïncide avec la multiplicité de  $d$  dans le cycle fondamental  $\mathcal{L}$ .

Nous présentons ici une description géométrique de la correspondance de McKay. Plus précisément, à toute représentation irréductible non triviale  $\rho$  de  $G$ , on associe un fibré vectoriel  $\mathcal{F}_\rho$  sur  $\tilde{\mathcal{S}}$  (où  $\tilde{\mathcal{S}}$  est la désingularisation minimale du germe  $\mathcal{S}$  de la surface  $S$  au point singulier), fibré vectoriel dont la classe de Chern  $c_1(\mathcal{F}_\rho)$  est un élément de la base canonique de  $\text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$  en bijection avec les sommets de  $\text{Irr}(D)$  <sup>(1)</sup>.

### 1. Résultats préliminaires : $K(\tilde{\mathcal{S}})$ et $R(G)$

1.1. Soient  $\mathcal{S}$  le germe de  $S$  au point singulier,  $q : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$  une résolution minimale,  $\text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$  le groupe de Picard de  $\tilde{\mathcal{S}}$  des classes d'isomorphisme de fibrés de rang 1 ou de  $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}$ -modules inversibles, et  $\text{Irr}(D) = \{d_1, \dots, d_r\}$  l'ensemble des composantes irréductibles du diviseur exceptionnel  $D \subset \tilde{\mathcal{S}}$ . Pour chaque  $d \in \text{Irr}(D)$ , notons  $e_d$  la classe de  $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}(d)$  dans  $\text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$ , et  $\text{Pic}_D(\tilde{\mathcal{S}})$  le sous-groupe de  $\text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$  engendré par les  $e_d$ . Soit  $\text{Pic}_D(\tilde{\mathcal{S}})^*$  le dual de  $\text{Pic}_D(\tilde{\mathcal{S}})$ , et notons  $\delta : \text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}}) \rightarrow \text{Pic}_D(\tilde{\mathcal{S}})^*$  l'homomorphisme défini par la forme d'intersection de  $\text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$ . On sait que  $\delta$  est un isomorphisme, car  $\mathcal{S}$  est une singularité rationnelle [A]. Notons  $\{b_d \mid d \in \text{Irr}(D)\}$  la base de  $\text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$  transportée par  $\delta^{-1}$  de la base duale de  $\{e_d \mid d \in \text{Irr}(D)\}$ . La matrice de l'injection canonique  $\text{Pic}_D(\tilde{\mathcal{S}}) \hookrightarrow \text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$  dans les bases  $\{e_d\}$  et  $\{b_d\}$  respectivement, est appelée la matrice d'intersection.

On considère d'autre part l'anneau de Grothendieck  $K(\tilde{\mathcal{S}})$  des classes de  $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}$ -modules cohérents, et on note  $K_D(\tilde{\mathcal{S}})$  le sous-groupe engendré par les classes de  $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}$ -modules à support dans  $D$ ;  $K_D(\tilde{\mathcal{S}})$  est un idéal de  $K(\tilde{\mathcal{S}})$ . Pour tout  $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}$ -module cohérent  $M$  notons  $[M]$  sa classe dans  $K(\tilde{\mathcal{S}})$ , et pour tout  $d \in \text{Irr}(D)$  posons  $[d] = [\mathcal{O}_d]$ . Finalement notons  $rg : K(\tilde{\mathcal{S}}) \rightarrow \mathbb{Z}$  [resp.  $c_1 : K(\tilde{\mathcal{S}}) \rightarrow \text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$ ] l'application induite par celle qui associe à un  $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}$ -module cohérent son rang (resp. sa première classe de Chern).

Avec les notations précédentes on a :

1.2. PROPOSITION. — (i) L'application  $\varphi : K(\tilde{\mathcal{S}}) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$  définie par  $x \mapsto (rg(x), c_1(x))$  est un isomorphisme de groupes commutatifs. Pour tout  $L \in \text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$  on a  $\varphi([L]) = (1, L)$ .

(ii) Le noyau de  $rg : K(\tilde{\mathcal{S}}) \rightarrow \mathbb{Z}$  est un idéal de carré nul.

(iii) L'image par  $\varphi$  de  $K_D(\tilde{\mathcal{S}})$  est  $\text{Pic}_D(\tilde{\mathcal{S}})$ . Pour tout  $d \in \text{Irr}(D)$  on a  $\varphi([d]) = (0, e_d)$ .

Démonstration. — Si  $L \in \text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$ , l'égalité  $\varphi([L]) = (1, L)$  résulte de la définition de  $\varphi$ ; par suite, si  $n \in \mathbb{Z}$  on a :

$$\varphi((n-1)\mathbf{1} + [L]) = (n, L),$$

d'où la surjectivité de  $\varphi$ .

L'injectivité résulte du fait que le noyau est le sous-groupe  $K_2(\tilde{\mathcal{S}}) \subset K(\tilde{\mathcal{S}})$  des classes de modules à support de codimension  $\geq 2$  dont on vérifie immédiatement qu'il est nul; ceci

<sup>(1)</sup> Ces résultats ont été annoncés en [G-V]. H. Knörrer nous a fait parvenir une lettre en décembre 1981, où il propose une démonstration différente, trouvée indépendamment.

montre aussi (ii). Finalement, soit  $d \in \text{Irr}(d)$ . On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}}(-d) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{O}_d \rightarrow 0,$$

d'où (iii).

1.3. Soit  $R(G)$  l'anneau des représentations de  $G$ . Si  $\rho$  est une représentation de  $G$ , on note  $\tilde{\rho}$  la représentation duale ou contragrédiente de  $\rho$ .

Notons  $\mathcal{V}$  le germe de  $V$  à l'origine  $0$ .

On considère l'anneau de Grothendieck  $K^G(\mathcal{V})$  des classes de  $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ -modules cohérents  $G$ -équivariants, et le sous-groupe  $K^G(0)$  de  $K^G(\mathcal{V})$  de classes de  $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ -modules à support dans  $0$ .

1.4. PROPOSITION. — (i) L'application qui à une représentation  $\rho$  de  $G$  dans un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E_{\rho}$  associe le  $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ -module  $G$ -équivariant  $\mathcal{O}_{\mathcal{V}} \otimes_{\mathbb{C}} E_{\rho}$  induit un isomorphisme d'anneaux  $R(G) \cong K^G(\mathcal{V})$  qui permet d'identifier ces anneaux.

(ii) Soit  $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}$  l'idéal maximal en l'origine  $0$  de  $\mathcal{V}$ . La classe  $[\mathcal{O}_{\mathcal{V}}/\mathcal{M}_{\mathcal{V}}]$  dans  $K^G(\mathcal{V}) = R(G)$  est  $2-c$ . L'image de  $K^G(0)$  dans  $K^G(\mathcal{V}) = R(G)$  est l'idéal engendré par  $2-c$ .

(iii) L'idéal  $(2-c)R(G)$  est un  $\mathbb{Z}$ -module libre engendré par  $(2-c)\rho$ ,  $\rho \in \text{Irr}(G)$ . On a la relation :

$$2-c = \sum_{\rho \in \text{Irr}(G)} (\deg \rho) \cdot (c-2)\rho.$$

*Démonstration.* — L'affirmation de (i) résulte du fait que l'homomorphisme inverse est celui induit par l'application qui à un  $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ -module  $G$ -équivariant  $M$  associe l'élément de  $R(G)$  défini par  $\sum_i (-1)^i [\text{Tor}_i^{\mathcal{O}_{\mathcal{V}}}(M, \mathcal{O}_{\mathcal{V}}/\mathcal{M}_{\mathcal{V}})]$ .

Pour démontrer l'égalité  $[\mathcal{O}_{\mathcal{V}}/\mathcal{M}_{\mathcal{V}}] = 2-c$ , on considère la suite exacte de Koszul de  $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ -modules  $G$ -équivariants :

$$0 \rightarrow \Lambda^2 T_{\mathcal{V}} \rightarrow T_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}}/\mathcal{M}_{\mathcal{V}} \rightarrow 0,$$

où  $T_{\mathcal{V}}$  est le faisceau tangent de  $\mathcal{V}$ .

Or  $T_{\mathcal{V}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \otimes_{\mathbb{C}} E_c$  car  $c$  est par définition la représentation canonique de  $G$ , représentation qui est auto-duale (i.e.  $c = \tilde{c}$ ); et d'autre part  $\Lambda^2 T_{\mathcal{V}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{V}}$  car on a  $G \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$ . Par conséquent la suite exacte précédente fournit une résolution  $G$ -équivariante de  $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ -modules qu'on peut écrire :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \otimes_{\mathbb{C}} E_c \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}}/\mathcal{M}_{\mathcal{V}} \rightarrow 0,$$

d'où l'égalité qu'on voulait démontrer.

En considérant l'isomorphisme de  $R(G)$  sur  $K^G(0)$  [analogue à celui de  $R(G)$  sur  $K^G(\mathcal{V})$ ] induit par l'application qui à  $\rho$  associe  $(\mathcal{O}_{\mathcal{V}}/\mathcal{M}_{\mathcal{V}}) \otimes_{\mathbb{C}} E_{\tilde{\rho}}$ , on a le diagramme suivant dont la

commutativité résulte de la résolution précédente de  $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}/\mathcal{M}_{\mathcal{Y}}$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}(G) & \xrightarrow{2-c} & \mathbf{R}(G) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathbf{K}^G(0) & \longrightarrow & \mathbf{K}^G(\mathcal{Y}) \end{array}$$

Par suite l'image de  $\mathbf{K}^G(0)$  dans  $\mathbf{K}^G(\mathcal{Y}) = \mathbf{R}(G)$  est l'idéal engendré par  $(2-c)$ .

Pour démontrer (iii), on utilise le fait que la matrice  $C - 2\text{Id}$  [où  $C = ((a_{ij}))$ ] est définie par  $c \otimes \rho_i = \sum a_{ij} \rho_j$  restreinte au sous-groupe de  $\mathbf{R}(G)$  engendré par les éléments de  $\text{Irr}(G)$  est définie négative, donc en particulier est non singulière. Par conséquent  $(2-c)\mathbf{R}(G)$  est un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang au moins égal à  $r = \text{card}(\text{Irr}(G))$  et au plus égal à  $r+1$ , rang de  $\mathbf{R}(G)$ .

D'autre part, ainsi qu'on le voit en considérant les caractères correspondants, on a la relation  $c \text{reg}(G) = 2 \text{reg}(G)$ , où  $\text{reg}(G) = \sum_{i=0}^r (\text{deg } \rho_i) \rho_i$  est la représentation régulière de  $G$ , car  $c$  est de degré 2. Comme  $\text{reg}(G)$  est un élément primitif de  $\mathbf{R}(G)$ , on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \cdot \text{reg}(G) \rightarrow \mathbf{R}(G) \xrightarrow{(2-c)} \mathbf{R}(G),$$

et par suite  $(2-c)\mathbf{R}(G)$  est de rang égal à  $r$ , et coïncide avec le  $\mathbb{Z}$ -module engendré par  $(2-c)\rho$ ,  $\rho \in \text{Irr}(G)$ . De la relation précédente on obtient :

$$2-c = \sum_{\rho \in \text{Irr}(G)} (\text{deg } \rho)(c-2)\rho,$$

car  $\rho_0$  est la représentation triviale de degré 1; ce qui achève la démonstration de la proposition 1.4.

1.5. REMARQUE. — Le diagramme commutatif considéré dans la démonstration précédente se prolonge en le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{R}(G) & \longrightarrow & \mathbf{R}(G) & \longrightarrow & \mathbf{R}(G)/(2-c)\mathbf{R}(G) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ \mathbf{K}^G(0) & \longrightarrow & \mathbf{K}^G(\mathcal{Y}) & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{K}}^G(\mathcal{Y} - \{0\}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes et où  $\tilde{\mathbf{K}}^G(\mathcal{Y} - \{0\})$  est le sous-groupe de Grothendieck construit à l'aide des faisceaux cohérents qui se prolongent à  $\mathcal{Y}$ .

Ce diagramme permet de calculer  $\tilde{\mathbf{K}}^G(\mathcal{Y} - \{0\})$  : il est somme directe de son sous-groupe de torsion et de son sous-groupe cyclique infini engendré par son élément unité.

On obtient les résultats suivants :

Type de G :	$\tilde{K}^G(\mathcal{V} - \{0\}) \cong :$
$A_n (n \geq 1)$	$\mathbb{Z} \cdot 1 \oplus \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$
$D_n (n \geq 4)$	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{si } n \text{ pair} & \mathbb{Z} \cdot 1 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \text{si } n \text{ impair} & \mathbb{Z} \cdot 1 \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \end{array} \right.$
$E_6$	$\mathbb{Z} \cdot 1 \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$E_7$	$\mathbb{Z} \cdot 1 \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
$E_8$	$\mathbb{Z} \cdot 1$

## 2. Construction géométrique de la correspondance

2.1. On utilise les notations des paragraphes précédents.

Soit  $\tilde{\mathcal{V}} = (\mathcal{V} \times_{\mathcal{S}} \tilde{\mathcal{F}})_{\text{réduit}}$  le produit fibré réduit de  $\mathcal{V}$  et  $\tilde{\mathcal{F}}$  au-dessus de  $\mathcal{S}$ . On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{V}} & \xrightarrow{\text{pr}_2} & \tilde{\mathcal{F}} \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow q \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{p} & \mathcal{S} \end{array}$$

où  $\text{pr}_1$  et  $\text{pr}_2$  dénotent les projections canoniques.

2.2. THÉORÈME. — Soit  $\pi : R(G) = K^G(\mathcal{V}) \rightarrow K(\tilde{\mathcal{F}})$  l'application induite par la composition  $\text{Inv} \circ \text{pr}_{2*} \circ \text{pr}_1^*$ , où  $\text{pr}_1^*$  et  $\text{pr}_{2*}$  sont les morphismes canoniques et où  $\text{Inv}$  est l'application qui associe à un  $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{F}}}$ -module  $G$ -équivariant  $M$  le sous-module  $M^G$  des invariants pour l'action de  $G$ . Alors on a :

(i) Pour tout  $\rho \in \text{Irr}(G)$  il existe un unique  $d_\rho \in \text{Irr}(D)$  tel que  $\pi(\rho) = (\deg \rho, b_\rho)$ . L'application  $\rho \rightarrow d_\rho$  de  $\text{Irr}(G)$  dans  $\text{Irr}(D)$  est bijective. Pour  $\rho_i \neq \rho_j$  on a  $(d_{\rho_i}, d_{\rho_j}) = a_{ij}$  (où  $a_{ij}$  est la multiplicité de  $\rho_j$  dans  $c \otimes \rho_i$ ).

(ii)  $\pi(2-c)$  est la classe  $[\mathcal{L}]$  du cycle fondamental, et pour tout  $\rho \in \text{Irr}(G)$  on a  $\pi((c-2)\rho) = [d_\rho]$ .

(iii) L'application  $\pi$  est un isomorphisme de  $\mathbb{Z}$ -modules.

(iv)  $\pi((2-c)R(G)) = \text{Pic}_D(\tilde{\mathcal{F}})$ .

(v) Par passage au quotient  $\pi$  induit un isomorphisme d'anneaux :

$$R(G)/(2-c)R(G) \cong K(\tilde{\mathcal{F}})/K_D(\tilde{\mathcal{F}}).$$

2.3. COROLLAIRE. — On a :

$$[\mathcal{L}] = \sum_{\rho \in \text{Irr}(G)} (\deg \rho) [d_\rho].$$



Démonstration du corollaire 2.3. — En appliquant  $\pi$  aux deux membres de l'égalité :

$$2 - c = \sum_{\rho \in \text{Irr}(G)} (\deg \rho)(c - 2) \rho$$

[prop. 1.2 (iii)], on obtient l'égalité cherchée comme conséquence du théorème 2.2 (ii).

La proposition suivante est un résultat préliminaire pour la démonstration du théorème 2.2; ses hypothèses sont un peu moins restrictives que celles satisfaites par la surface  $\mathcal{S}$  de ce théorème.

2.4. PROPOSITION. — Soit  $p : (\mathcal{V}, 0) \rightarrow (\mathcal{S}, \bar{0})$  un morphisme fini dominant où  $(\mathcal{V}, 0)$  est un germe de surface normale, et où  $(\mathcal{S}, \bar{0})$  est un germe de singularité rationnelle de surface.

Soit  $q : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$  une désingularisation de  $\mathcal{S}$ ; notons  $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \times_{\mathcal{S}} \tilde{\mathcal{S}}$  le produit fibré de  $\mathcal{V}$  et  $\tilde{\mathcal{S}}$  au-dessus de  $\mathcal{S}$  et  $\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V}'_{\text{red}}$  le réduit de  $\mathcal{V}'$ . Alors on a :

(i) L'homomorphisme canonique (de  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -complexes)  $\mathcal{O}_{\mathcal{V}} \rightarrow q_* \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{V}}}$  est un isomorphisme et on a de plus  $R^1 q_* \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{V}}} = 0$ .

(ii) Le  $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}$ -module  $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{V}}}$  est localement libre.

Montrons d'abord un lemme :

2.5. LEMME. — Soit  $A$  un anneau commutatif noetherien et intègre, et  $B$  une  $A$ -algèbre finie irréductible, dominante, et génériquement réduite. Notons  $\mathcal{N}$  l'idéal des éléments nilpotents de l'anneau  $B$  et  $\text{Tors}_A B$  la  $A$ -torsion de  $B$ . Alors on a :

$$\mathcal{N} = \text{Tors}_A B.$$

Démonstration du lemme 2.5. — En effet  $\mathcal{N}$  est un  $A$ -module de type fini génériquement nul donc  $\mathcal{N} \subset \text{Tors}_A B$ . L'algèbre  $B_{\text{red}}$  est intègre donc sans  $A$ -torsion, car dominante, d'où  $\text{Tors}_A B \subset \mathcal{N}$ .

Démonstration de la proposition 2.4. — Donc on a par la formule de projection pour les morphismes non nécessairement plats [Gr] :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{V}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}^{\mathbb{L}} Rq_* (\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}) = Rq_* \left( \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \right)$$

où le  $\otimes^{\mathbb{L}}$  dénote le produit tensoriel dans la catégorie dérivée.

Étant donné que  $\mathcal{S}$  est une singularité rationnelle, on a :

$$Rq_* (\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}) = \mathcal{O}_{\mathcal{S}},$$

et par suite :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{V}} = Rq_* \left( \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \right).$$

Donc on a une suite spectrale, dont le terme  $E_2^{r,s}$  est  $R^r q_* \left( \mathcal{H}^s \left( \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \right) \right)$ , qui aboutit à  $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ .

Comme  $R^r q_* = 0$  pour  $r \neq 0, 1$ , on a la suite exacte de  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -module :

$$0 \rightarrow R^1 q_* (\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}(\mathcal{O}_{\mathcal{S}}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}})) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \rightarrow q_* (\mathcal{O}_{\mathcal{V}'}) \rightarrow 0,$$

et :

$$R^1 q_* \mathcal{O}_{\mathcal{V}'} = 0.$$

Or le support de  $R^1 q_* (\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}(\mathcal{O}_{\mathcal{S}}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}}))$  est de codimension positive, donc  $R^1 q_* (\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}(\mathcal{O}_{\mathcal{S}}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}})) = 0$ , car  $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$  est intègre, et par suite  $\mathcal{O}_{\mathcal{V}} \rightarrow q_* (\mathcal{O}_{\mathcal{V}'})$  est un isomorphisme.

Par ailleurs,  $\text{Tors}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}} \mathcal{O}_{\mathcal{V}'}$  est l'idéal des éléments nilpotents de  $\mathcal{O}_{\mathcal{V}'}$  (lemme 2.5) car  $\mathcal{V}'$  est irréductible et génériquement étale sur  $\mathcal{S}$ . Donc on a la suite exacte de  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -modules :

$$0 \rightarrow \text{Tors}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}} \mathcal{O}_{\mathcal{V}'} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}'} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{S}} \rightarrow 0.$$

Or  $q_* \text{Tors}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}} \mathcal{O}_{\mathcal{V}'} = 0$  car  $q_* \mathcal{O}_{\mathcal{V}'} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{V}}$  est intègre.

En vertu de ce qui précède on en déduit  $R^1 q_* \mathcal{O}_{\mathcal{S}} = 0$ , et la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \rightarrow q_* \mathcal{O}_{\mathcal{S}} \rightarrow R^1 q_* \text{Tor}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}} \mathcal{O}_{\mathcal{V}'} \rightarrow 0$ .

L'algèbre  $q_* \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$  est intègre et  $R^1 q_* \text{Tors}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}} \mathcal{O}_{\mathcal{V}'}$  est à support ponctuel. Comme  $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$  est normal, on a  $R^1 q_* \text{Tors}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}} \mathcal{O}_{\mathcal{V}'} = 0$ .

Finalement, le  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -module  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$  est localement libre si et seulement si  $\text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}^1(\mathcal{O}_{\mathcal{S}}, \omega_{\mathcal{S}}) = 0$ , où  $\omega_{\mathcal{S}}$  est le faisceau dualisant de  $\mathcal{S}$ , et la dualité relative pour  $q$  donne un isomorphisme :

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}^1(\mathcal{O}_{\mathcal{S}}, \omega_{\mathcal{S}}) = \text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}^1(\mathbf{R}q_* \mathcal{O}_{\mathcal{S}}, \mathbf{K}_{\mathcal{S}}[-2]),$$

où  $\mathbf{K}_{\mathcal{S}}$  est le complexe dualisant de  $\mathcal{S}$ . Mais on a  $\mathbf{R}q_* \mathcal{O}_{\mathcal{S}} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ , d'où un isomorphisme :

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}^1(\mathcal{O}_{\mathcal{S}}, \omega_{\mathcal{S}}) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathcal{V}}}^1(\mathcal{O}_{\mathcal{V}}, \mathbf{K}_{\mathcal{S}}[-2]).$$

La dualité relative pour  $p$  donne un isomorphisme :

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathcal{V}}}^1(\mathcal{O}_{\mathcal{V}}, \mathbf{K}_{\mathcal{S}}) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathcal{V}}}^1(\mathcal{O}_{\mathcal{V}}, \mathbf{K}_{\mathcal{V}}[-2]),$$

mais comme  $\mathcal{V}$  est normale,  $\mathcal{V}$  est de Cohen-Macaulay, donc  $\mathbf{K}_{\mathcal{V}}[-2]$  n'a qu'un seul module de cohomologie non nul en degré 0. Par suite  $\text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathcal{V}}}^1(\mathcal{O}_{\mathcal{V}}, \mathbf{K}_{\mathcal{V}}[-2]) = 0$ , donc  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$  est localement libre, ce qui achève la démonstration de la proposition 2.4.

2.6. REMARQUE. — La proposition 2.4 montre que  $\mathcal{S}$  est un platificateur de  $\mathcal{V}$  sur  $\mathcal{S}$ . Nous verrons plus loin que, sous les hypothèses du théorème 2.2 (i.e.  $\mathcal{V}$  lisse,  $\mathcal{S}$  point double rationnel et  $\mathcal{S}$  désingularisation minimale de  $\mathcal{S}$ )  $\mathcal{S}$  est le platificateur normal de  $\mathcal{V}$  sur  $\mathcal{S}$ .

2.7. L'application  $\pi : \mathbf{R}(G) \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{S})$  du théorème 2.2 est  $\mathbb{Z}$ -linéaire, donc il suffit, pour déterminer  $\pi$ , de calculer  $\pi(\rho)$  pour chaque représentation irréductible  $\rho$  de  $G$ .

Soit  $\mathcal{M}_{\rho}$  le  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -module défini par :

$$\mathcal{M}_{\rho} = \text{Hom}_{\mathbf{C}[G]}(\mathbf{E}_{\rho}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}}).$$

On pose  $\mathcal{F}_\rho = (\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}} \mathcal{M}_\rho) / \text{Tors}_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}$ , où  $\text{Tors}_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}$  dénote la  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ -torsion de  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}} \mathcal{M}_\rho$ .

Avec les notations précédentes on a :

2.8. PROPOSITION. — Les  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ -modules  $(\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}} (\mathcal{O}_{\mathcal{V}} \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho^-))^G$  et  $\mathcal{F}_\rho$  sont isomorphes.

*Démonstration.* — Notons  $\mathcal{N}$  l'idéal des éléments nilpotents d'un anneau et  $T_A$  la torsion d'un A-module.

On a :

$$\begin{aligned} & (\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}} (\mathcal{O}_{\mathcal{V}} \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho^-))^G \\ & \simeq (\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho^-)^G \text{ (par simplification du produit tensoriel)} \\ & = ((\mathcal{O}_{\mathcal{V}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}} \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) / \mathcal{N}) \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho^-)^G \text{ (définition de } \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \text{)} \\ & = ((\mathcal{O}_{\mathcal{V}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}} \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) / T_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}) \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho^-)^G \text{ (lemme 2.5)} \\ & \simeq ((\mathcal{O}_{\mathcal{V}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}} \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho^-) / T_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}})^G \\ & \text{(commutativité de la torsion avec la somme directe)} \\ & \simeq (\mathcal{O}_{\mathcal{V}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}} \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho^-)^G / T_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}^G \\ & \text{(commutativité de l'action de G avec la torsion)} \\ & \simeq (\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}} (\mathcal{O}_{\mathcal{V}} \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho^-))^G / T_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}^G \\ & \text{(car } \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \text{ et } \mathcal{O}_{\mathcal{V}} \text{ sont invariants par G).} \\ & \simeq \mathcal{F}_\rho \text{ car on a un isomorphisme canonique :} \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_\rho = \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(E_\rho, \mathcal{O}_{\mathcal{V}}) \cong (\mathcal{O}_{\mathcal{V}} \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho^-)^G.$$

En vue de la définition de l'application  $\pi$  du théorème 2.2, on a :

2.9. COROLLAIRE (prop. 2.8). — L'application  $\pi : R(G) \rightarrow K(\mathcal{F})$  est induite aussi par celle qui associe à chaque représentation irréductible  $\rho$  de G le  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ -module  $\mathcal{F}_\rho$ .

2.10. COROLLAIRE. — (i) On a  $q_* \mathcal{F}_\rho = \mathcal{M}_\rho$ ,  $R^1 q_* \mathcal{F}_\rho = 0$ .

(ii) Le  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ -module  $\mathcal{F}_\rho$  est localement libre de rang égal au degré de  $\rho$ .

*Démonstration.* — Notons  $\text{Irr}(G) := \text{Irr}(G) \cup \{\rho_0\}$ . Si  $A$  est un anneau,  $A[G]$  dénote la  $A$ -algèbre du groupe  $G$ .

Il résulte de la proposition 2.8 et de la décomposition canonique des  $G$ -modules qu'on a un isomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$   $[G]$ -modules :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \simeq \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} \mathcal{F}_{\rho} \otimes_{\mathbb{C}} E_{\rho}$$

et par suite :

$$q_* \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \simeq \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} q_* \mathcal{F}_{\rho} \otimes_{\mathbb{C}} E_{\rho},$$

$$R^1 q_* \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \simeq \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} R^1 q_* \mathcal{F}_{\rho} \otimes_{\mathbb{C}} E_{\rho}.$$

De même, on a un isomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$   $[G]$ -modules :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \simeq \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} \mathcal{M}_{\rho} \otimes_{\mathbb{C}} E_{\rho}$$

d'où (i) d'après la proposition 2.4 et le fait que  $\mathcal{F}_{\rho}$ , facteur direct d'un module localement libre, est localement libre.

Localement, en dehors du diviseur  $D$ ,  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}[G]$ , et (ii) résulte alors de la structure de la représentation régulière.

### 3. Rappel sur les groupes engendrés par des réflexions; les modules $M_{\rho}$

3.1. Pour chaque sous-groupe fini  $G$  de  $SL(2, \mathbb{C})$ , il existe un produit scalaire hilbertien de  $V = \mathbb{C}^2$  invariant par  $G$  et dans la suite on supposera donc que  $G$  est un sous-groupe fini de  $SU(2, \mathbb{C})$ ; on sait par ailleurs que deux sous-groupes de  $SU(2, \mathbb{C})$  sont conjugués si et seulement si ils le sont dans  $SL(2, \mathbb{C})$ .

Pour la démonstration du théorème 2.2 on utilisera le fait que chaque groupe polyédral binaire  $G$  est un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe  $G' \subset U(2, \mathbb{C})$  engendré par des réflexions complexes d'ordre 2 (voir [S-T], [Co]). Ceci est dû essentiellement au fait que déjà les groupes polyédraux purs sont des sous-groupes d'indice 2 de groupes engendrés par des réflexions de  $\mathbb{R}^3$ ; ces derniers sont obtenus en considérant, en plus des rotations, les réflexions qui laissent fixe un polyèdre (voir [K], chap. 1, § 11 ou [D], § 12). Nous utiliserons le fait que  $G'/G$  opère sur les représentations de  $G$  en associant à chaque représentation  $\rho$ , sa contragrédiente  $\check{\rho}$ .

3.2. Notons  $S' = V/G'$  la surface obtenue comme quotient de  $V$  par  $G'$ ,  $A_V$  l'anneau de polynômes à deux variables à coefficients dans  $\mathbb{C}$ ,  $A_S$  (resp.  $A_{S'}$ ) l'anneau de fonctions régulières globales sur  $S$  (resp. sur  $S'$ ). Dans la suite on identifie l'anneau  $A_S$  (resp.  $A_{S'}$ ) au sous-anneau de  $A_V$  des invariants de  $A_V$  par  $G$  (resp.  $G'$ ).

On sait que  $A_V$  est un  $A_S$ -module libre, et que  $A_S$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre (graduée) de polynômes ([Ch], [Bo], chap. V, § 5).

Notons  $Y, Z$  deux invariants homogènes de  $G'$  qui engendrent  $A_S$  comme  $\mathbb{C}$ -algèbre; et considérons  $X = J(Y, Z)$  le déterminant jacobien de  $Y$  et  $Z$ .

Alors  $X$  est un semi-invariant de  $G'$  (cf. [Bo]), dont le carré est invariant par  $G'$  car les réflexions de  $G'$  sont d'ordre 2; et  $X, Y, Z$  sont trois invariants homogènes de  $G$  qui engendrent  $A_S$  comme  $\mathbb{C}$ -algèbre ([K], chap. 2).

Pour fixer les notations, soient  $Y$  et  $Z$  choisis de telle façon que  $\deg(Z) \leq \deg(Y)$ ; cette convention détermine  $X$  à un facteur constant près (sauf si  $G$  est de type  $A_1$ ), de même pour  $Y$  (sauf si  $G$  est de type  $A_n$  avec  $n$  impair ou  $D_n$  avec  $n$  pair), de même pour  $Z$  (sauf si  $G$  est de type  $A_1$  ou  $D_4$ ).

Dans le tableau suivant on donne les degrés de  $X, Y, Z$  dans chaque cas :

Type de $G$	$\deg(X)$	$\deg(Y)$	$\deg(Z)$
$A_n (n \geq 1)$	$n+1$	$n+1$	2
$D_n (n \geq 4)$	$2(n-1)$	$2(n-2)$	4
$E_6$	12	8	6
$E_7$	18	12	8
$E_8$	30	20	12

3.3. Notons  $\varepsilon$  la représentation de degré 1 de  $G'$  définie par l'action de  $G'$  sur  $\mathbb{C}X$ , où  $X$  est le semi-invariant considéré au paragraphe précédent.

Soit  $\rho$  (resp.  $\rho'$ ) une représentation de  $G$  (resp.  $G'$ ). Par abus de notation on écrira  $\varepsilon\rho'$  au lieu de  $\varepsilon \otimes \rho$ ,  $\text{Ind } \rho$  au lieu de  $\text{Ind}_G^G \rho$  (i. e. la représentation induite sur  $G'$  par  $\rho$  [Se], § 7.1) et  $\text{Res } \rho'$  au lieu de  $\text{Res}_G \rho'$  (i. e. la représentation restreinte à  $G$  de  $\rho'$ ).

3.4. PROPOSITION. — Soit  $\rho$  une représentation irréductible de  $G$ . Alors on a :

- (i)  $\varepsilon \text{Ind } \rho = \text{Ind } \rho = \text{Ind } \rho^\sim$ .
- (ii)  $\rho \neq \rho^\sim$  si et seulement si  $\text{Ind } \rho$  est irréductible.
- (iii)  $\rho = \rho^\sim$  si et seulement si  $\text{Ind } \rho = \rho' \oplus \varepsilon\rho'$ , où  $\rho'$  est une représentation irréductible de  $G'$ .

Soit  $\rho'$  une représentation irréductible de  $G'$ . Alors on a :

- (i')  $\text{Res } \rho' = \text{Res } \varepsilon\rho' = (\text{Res } \rho')^\sim$ .
- (ii')  $\rho' \neq \varepsilon\rho'$  si et seulement si  $\text{Res } \rho'$  est irréductible.
- (iii')  $\rho' = \varepsilon\rho'$  si et seulement si  $\text{Res } \rho' = \rho \oplus \rho^\sim$ , où  $\rho$  est une représentation irréductible de  $G$ .

Démonstration. — Quelque soit  $\rho'$  représentation de  $G'$  on a :

$$(1) \quad (\text{Ind } \rho) \otimes \rho' = \text{Ind}(\rho \otimes \text{Res } \rho'),$$

donc, si  $\rho' = \varepsilon$  on a :

$$(2) \quad \varepsilon \text{Ind } \rho = \text{Ind } \rho,$$

car  $\text{Res } \varepsilon = \rho_0$ , où  $\rho_0$  est la représentation triviale de rang 1 de  $G$ ; et si  $\rho = \rho_0$  dans (1), alors :

$$(3) \quad \text{Ind } \text{Res } \rho' = \rho' \oplus \varepsilon\rho',$$

car  $\text{Ind } \rho_0 = \rho'_0 \oplus \varepsilon$ , où  $\rho'_0$  est la représentation triviale de rang 1 de  $G'$ . Par ailleurs, le groupe quotient  $G'/G$  agit sur les représentations de  $G$  en associant à chaque représentation  $\rho$  la contragrédiente  $\rho^\sim$ . Par suite on a :

$$(4) \quad \text{Res Ind } \rho = \rho \oplus \rho^\sim.$$

En appliquant  $\text{Ind}$  aux deux membres de (4), on a, par (3) :

$$\text{Ind } \rho \oplus \varepsilon \text{ Ind } \rho = \text{Ind } \rho \oplus \text{Ind } \rho^\sim,$$

par suite  $\varepsilon \text{ Ind } \rho = \text{Ind } \rho^\sim$ , d'où (i), par (2).

Par le critère d'irréductibilité de Mackey ([Se], § 7.5), on a que  $\text{Ind } \rho$  est irréductible si et seulement si  $\rho \neq \rho^\sim$ , d'où (ii), et on a  $\rho = \rho^\sim$  si et seulement si  $\text{Ind } \rho = \bigoplus_{i=1}^m \rho'_i$ , avec  $m > 1$  et  $\rho'_i$  irréductible pour tout  $i$ . Or en appliquant  $\text{Res}$  aux deux membres on a, par (4), une somme de deux représentations irréductibles, donc  $m \leq 2$  et par suite  $m = 2$ . Si  $\rho = \rho^\sim$  on a donc

$$\text{Res}(\rho'_1 \oplus \rho'_2) = \rho \oplus \rho,$$

par suite

$$\text{Res } \rho'_1 = \text{Res } \rho'_2 = \rho, \quad \text{d'où} \quad \rho'_1 \oplus \rho'_2 = \text{Ind } \rho = \text{Ind Res } \rho'_1 = \rho'_1 \oplus \varepsilon \rho'_1,$$

la dernière égalité par (3), d'où  $\varepsilon \rho'_1 = \rho'_2$ , ce qui montre (iii).

Par ailleurs on a  $\text{Res } \varepsilon \rho' = (\text{Res } \varepsilon) \otimes (\text{Res } \rho') = \text{Res } \rho'$ , car  $\text{Res } \varepsilon = \rho_0$ ; et par (4) on a :

$$(\text{Res } \rho') \oplus (\text{Res } \rho')^\sim = \text{Res Ind Res } \rho' = \text{Res}(\rho' \oplus \varepsilon \rho') = (\text{Res } \rho') \oplus (\text{Res } \rho')$$

par suite  $\text{Res } \rho' = (\text{Res } \rho')^\sim$ , d'où (i').

Soit  $\text{Res } \rho' = \bigoplus_{i=1}^m \rho_i$  la décomposition en somme de représentation irréductibles de  $\text{Res } \rho'$ ; alors, par (3), on a  $m \leq 2$ .

Si  $\text{Res } \rho' = \rho_1 \oplus \rho_2$ , alors  $\rho' \oplus \varepsilon \rho' = \text{Ind Res } \rho' = (\text{Ind } \rho_1) \oplus (\text{Ind } \rho_2)$  et par suite  $\text{Ind } \rho_i$  est irréductible ( $i = 1, 2$ ), et on peut supposer  $\text{Ind } \rho_1 = \rho'$ ,  $\text{Ind } \rho_2 = \varepsilon \rho'$ . En ce cas on a, par (4),  $\rho_1 \oplus \rho_1^\sim = \text{Res Ind } \rho_1 = \text{Res } \rho' = \rho_1 \oplus \rho_2$ , d'où  $\rho_1^\sim = \rho_2$  et par (i) on a  $\rho' = \varepsilon \rho'$ .

Finalement, si  $\text{Res } \rho' = \rho$ , alors par (3) on a  $\text{Ind } \rho = \rho' \oplus \varepsilon \rho'$ . Or par la formule de réciprocity de Frobenius on a :

$$1 = (\chi_\rho | \chi_{\text{Res } \rho'})_G = (\chi_{\text{Ind } \rho} | \chi_{\rho'})_{G'},$$

où  $\chi$  dénote le caractère, et par conséquent  $\rho' \neq \varepsilon \rho'$ , ce qui achève la démonstration.

3.5. Soit  $\rho$  (resp.  $\rho'$ ) une représentation irréductible de  $G$  (resp. de  $G'$ ). On considère le  $A_S$ -module gradué (resp. le  $A_{S'}$ -module gradué)  $M_\rho$  (resp.  $M_{\rho'}$ ) défini par :

$$M_\rho = \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(E_\rho, A_V) \quad [\text{resp. } M_{\rho'} = \text{Hom}_{\mathbb{C}[G']} (E_{\rho'}, A_{V'})].$$

On pose  $U_\rho = M_\rho / \mathcal{M}_S \cdot M_\rho$  et  $U_{\rho'} = M_{\rho'} / \mathcal{M}_S \cdot M_{\rho'}$ , où  $\mathcal{M}_S$  est l'idéal maximal de  $A_S$  des éléments de degré strictement positif [i. e.  $\mathcal{M}_S = (Y, Z)$ ];  $U_\rho$  (resp.  $U_{\rho'}$ ) est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel muni de la graduation canonique induite par celle de  $M_\rho$  (resp.  $M_{\rho'}$ ). Il résulte de la proposition 3.4 le corollaire suivant :

3.6. COROLLAIRE. — (i) Si  $\rho \neq \rho^\vee$ , soit  $\rho' = \text{Ind } \rho$ . On a des  $A_S$ -isomorphismes (resp. des  $\mathbb{C}$ -isomorphismes) homogènes de degré 0 :

$$M_\rho = M_{\rho'} = M_{\rho'} \quad (\text{resp. } U_\rho = U_{\rho'} = U_{\rho'})$$

(ii) Si  $\rho = \rho^\vee$ , soit  $\text{Ind } \rho = \rho' \oplus \varepsilon \rho'$  la décomposition en représentations irréductibles de  $\text{Ind } \rho$ . On a un  $A_S$ -isomorphisme (resp. un  $\mathbb{C}$ -isomorphisme) homogène de degré 0 :

$$M_\rho = M_{\rho'} \oplus M_{\varepsilon \rho'} \quad (\text{resp. } U_\rho = U_{\rho'} \oplus U_{\varepsilon \rho'})$$

3.7. Notons  $c'$  la représentation canonique de  $G'$  définie par l'inclusion  $G' \subset U(2, \mathbb{C})$ . On peut définir un diagramme  $\tilde{\Gamma}(G')$ , de façon analogue à celle qui définit  $\tilde{\Gamma}(G)$ , en considérant maintenant le produit tensoriel par la représentation  $c'$ . Or, étant donné qu'on a en général  $c' \neq \varepsilon c'$  (en fait on a égalité seulement si  $G$  est de type  $A_n$ ), on introduit lorsque  $c' \neq \varepsilon c'$  des arêtes orientées : si  $\rho'_1$  et  $\rho'_2$  sont deux représentations irréductibles de  $G'$ , on joint les deux sommets correspondants par une arête orientée de source  $\rho'_1$  et de but  $\rho'_2$  si  $\rho'_2$  apparaît dans la décomposition de  $c' \otimes \rho'_1$  en représentations irréductibles.

Dans la liste suivante on donne les diagrammes qu'on obtient. On utilise les notations de la proposition 3.4, et on fixe une numérotation des sommets qui sera maintenue dans la suite. Le sommet correspondant à la représentation triviale est indiqué par une croix.

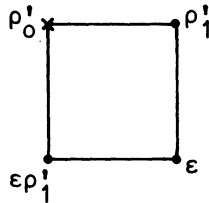
3.7.1. Type  $A_n$  ( $n \geq 1$ )

(a)  $n = 1$  :

$\tilde{A}_1$  :  
( $c = 2\rho_1$ )

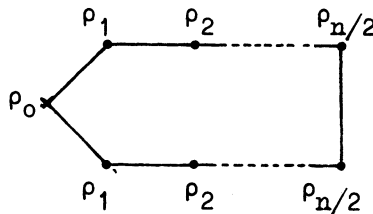


$\tilde{A}'_1$  :  
( $c' = \rho'_1 \oplus \varepsilon \rho'_1$ )

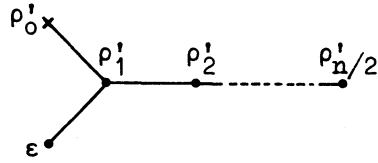


(b)  $n$  pair :

$\tilde{A}_n$  :  
( $c = \rho_1 \oplus \rho_1$ )

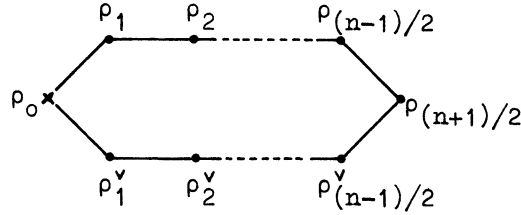


$\tilde{A}'_n$  :  
( $c' = \rho'_1$ )

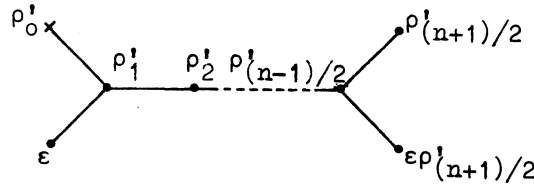


(c)  $n$  impair,  $n > 1$  :

$\tilde{A}_n$  :  
( $c = \rho_1 \oplus \rho_1$ )



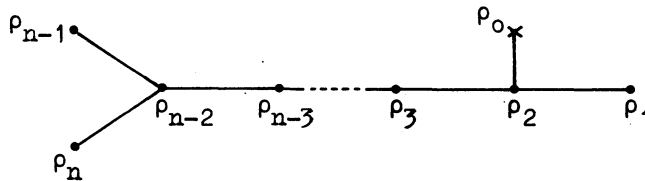
$\tilde{A}'_n$  :  
( $c' = \rho'_1$ )



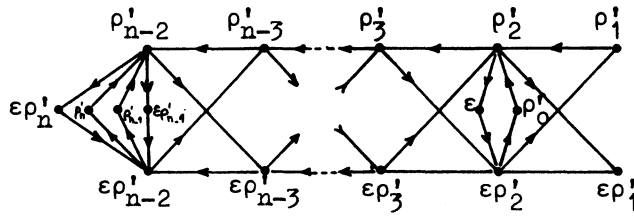
3.7.2. Type  $D_n$  ( $n \geq 4$ )

(a)  $n$  pair :

$\tilde{D}_n$  :  
( $c = \rho_2$ )

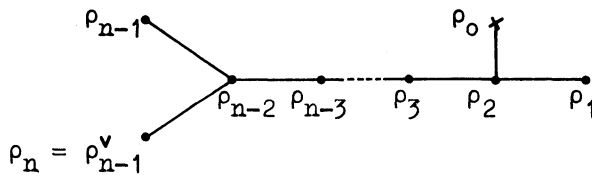


$\tilde{D}'_n$  :  
( $c' = \rho'_2$ )

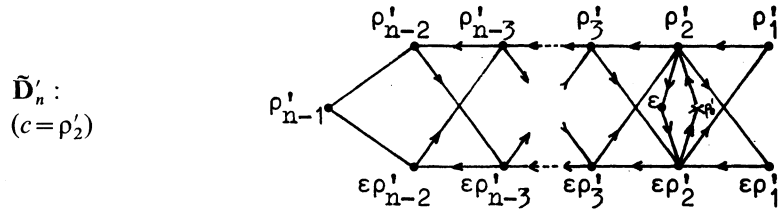


(b)  $n$  impair :

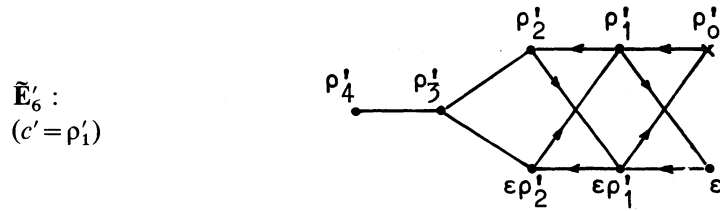
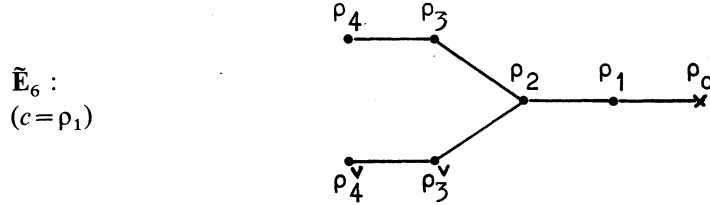
$\tilde{D}_n$  :  
( $c = \rho_2$ )



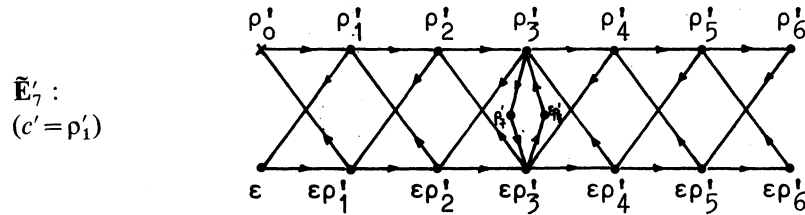
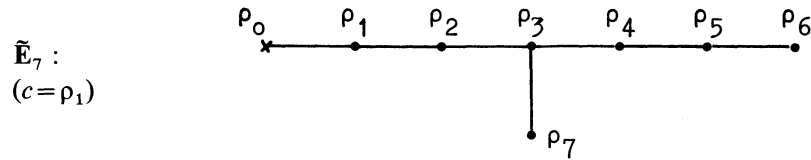




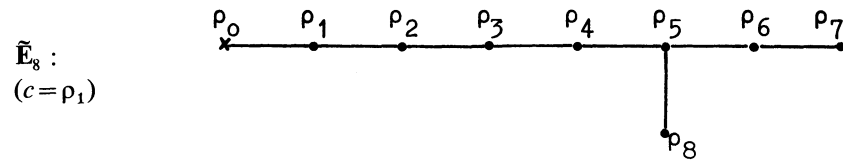
3.7.3. Type  $E_6$

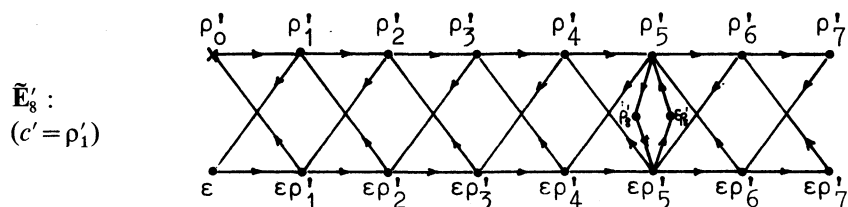


3.7.4. Type  $E_7$



3.7.5. Type  $E_8$





#### 4. Résolution G-équivariante de $A_V$ ; l'opérateur $\Theta$

4.1. On utilise les notations du paragraphe précédent. L'anneau  $A_V$  est muni d'une structure de  $A_S[G]$ -module gradué (resp. de  $A_{S'}[G']$ -module gradué, resp. de  $A_{S'}[G]$ -module gradué).

Soit  $\Theta : A_V \rightarrow A_V$  l'opérateur  $A_{S'}[G]$ -linéaire défini par  $\Theta f = Xf$  pour  $f \in A_V$ ; il est homogène de degré égal au degré de  $X$  et il est aussi  $A_S[G]$ -linéaire.

Notons  $\sigma : A_S \rightarrow A_S$  l'automorphisme d'ordre 2 de  $A_S$ -algèbre tel que  $\sigma(X) = -X$ . Pour tout  $f \in A_V$  et  $h \in A_S$  posons  $h \cdot_{\sigma} f = \sigma(h)f$ . On obtient ainsi une nouvelle structure de  $A_{S'}$ -module sur  $A_V$ ; cet  $A_{S'}$ -module est noté  $A_V^{\sigma}$ .

Considérons le  $A_{S'}[G']$ -module  $A_V \otimes_{A_{S'}} A_S$ ; il est aussi muni d'une structure de  $A_S[G]$ -module, et il est libre en tant que  $A_S$ -module.

4.2. LEMME. — (i) Le rang de  $A_V \otimes_{A_{S'}} A_S$  comme  $A_{S'}$ -module est égal à  $2|G'| -$  où  $|G'|$  dénote l'ordre de  $G'$  —; et son rang comme  $A_S$ -module est  $2|G|$ .

(ii) On a deux suites exactes de  $A_S[G]$ -modules :

$$0 \rightarrow A_V^{\sigma} \xrightarrow{i^-} A_V \otimes_{A_{S'}} A_S \xrightarrow{j^+} A_V \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow A_V \xrightarrow{i^+} A_V \otimes_{A_{S'}} A_S \xrightarrow{j^-} A_V^{\sigma} \rightarrow 0$$

avec  $i^+(f) = i^-(f) = f \otimes X - \Theta f \otimes 1$  :

$$j^+(f \otimes h) = fh, \quad j^-(f \otimes h) = h \cdot_{\sigma} f, \\ \forall f \in A_V, \quad \forall h \in A_S.$$

*Démonstration.* — On a un isomorphisme de  $A_{S'}[G']$ -modules  $A_V \simeq A_{S'} \otimes_{\mathbb{C}} A_V / \mathcal{M}_S A_V$ , où  $\mathcal{M}_S$  dénote l'idéal maximal de  $A_{S'}$  engendré par  $Y$  et  $Z$  [Bo]; et d'autre part le  $\mathbb{C}[G]$ -module gradué  $A_V / \mathcal{M}_S A_V$  fournit une représentation régulière de  $G'$ , d'où (i). La vérification de l'exactitude des suites de (ii) est immédiate.

4.3. Considérons par ailleurs l'opérateur  $A_{S'}[G]$ -linéaire homogène de  $A_S$  dans lui-même défini par la multiplication par  $X$ ; on le notera aussi  $X$ . Il est aussi  $A_S[G]$ -linéaire.

4.4. PROPOSITION. — (i) On a l'égalité  $\Theta^2 = X^2 \text{Id}_{A_V}$  où  $X^2 \text{Id}_{A_V}$  désigne la multiplication par  $X^2 \in A_S$ .

(ii) Soient  $T^+$  (resp.  $T^-$ ) :  $A_V \otimes_{A_S} A_S \rightarrow A_V \otimes_{A_S} A_S$  l'opérateur  $A_S[G]$ -linéaire homogène défini par :

$$T^+ = \Theta \otimes \text{Id}_{A_S} + \text{Id}_{A_V} \otimes X \quad (\text{resp. } T^- = \Theta \otimes \text{Id}_{A_S} - \text{Id}_{A_V} \otimes X).$$

Alors on a la suite exacte de  $A_S[G]$ -modules :

$$\dots \xrightarrow{T^-} A_V \otimes_{A_S} A_S \xrightarrow{T^+} A_V \otimes_{A_S} A_S \xrightarrow{T^-} A_V \otimes_{A_S} A_S \xrightarrow{j^+} A_V \rightarrow 0$$

où  $j^+$  est défini dans le lemme 4.2. On obtient ainsi une résolution du  $A_S[G]$ -module gradué  $A_V$  par des  $A_S[G]$ -modules gradués libres en tant que  $A_S$ -modules.

Démonstration. — L'opérateur  $\Theta$  est défini comme étant la multiplication par  $X$ , or  $X^2 \in A_S$ , d'où (i). D'autre part on a  $T^+ = i^+ \circ j^+$  et  $T^- = i^- \circ j^-$ . L'exactitude de la suite de (ii) est donc conséquence du lemme 4.1 (ii).

4.5. Pour chaque représentation irréductible  $\rho$  de  $G$ , on considère le module  $M_\rho$  comme  $A_S$ -module (§ 3.5).

Soit  $\theta_\rho = M_\rho \rightarrow M_\rho$  (resp.  $j_\rho^+ : M_\rho \otimes_{A_S} A_S \rightarrow M_\rho$ ) l'application  $A_S$ -linéaire obtenue en appliquant  $\text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(E_\rho, -)$  à  $\Theta$  (resp. à  $j^+$ ). Posons :

$$\begin{aligned} T_\rho^+ &= \theta_\rho \otimes \text{Id}_{A_S} + \text{Id}_{M_\rho} \otimes X \\ T_\rho^- &= \theta_\rho \otimes \text{Id}_{A_S} - \text{Id}_{M_\rho} \otimes X. \end{aligned}$$

On définit ainsi des opérateurs  $A_S$ -linéaires (resp.  $A_S$ -linéaires) homogènes de  $M_\rho \otimes_{A_S} A_S$  dans lui-même. On a alors :

4.6. COROLLAIRE. — On a la suite exacte de  $A_S$ -modules gradués :

$$\dots \xrightarrow{T_\rho^-} M_\rho \otimes_{A_S} A_S \xrightarrow{T_\rho^+} M_\rho \otimes_{A_S} A_S \xrightarrow{T_\rho^-} M_\rho \otimes_{A_S} A_S \xrightarrow{j_\rho^+} M_\rho \rightarrow 0.$$

Cette suite exacte fournit une résolution de  $M_\rho$  par des  $A_S$ -modules gradués libres (sur  $A_S$ ) de rang 2 deg  $\rho$ .

4.7. REMARQUE. — Pour  $\rho \neq \rho_0$ , on peut montrer que cette résolution est une résolution minimale.

## 5. La série de Poincaré; graduations et matrices

5.1. Soit  $\rho \in \text{Irr}(G)$  [resp.  $\rho' \in \text{Irr}(G')$ ] une représentation irréductible de  $G$  (resp. de  $G'$ ). On considère le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel gradué  $U_\rho = M_\rho / \mathcal{M}_S M_\rho$  (resp.  $U_{\rho'} = M_{\rho'} / \mathcal{M}_{S'} M_{\rho'}$ ) de

dimension égal à  $2 \deg \rho$  (resp. égale à  $\deg \rho'$ ). Notons  $U_{\rho, n}$  (resp.  $U_{\rho', n}$ ) le sous-espace des éléments homogènes de degré  $n$ .

Posons :

$$P_{\rho}(T) = \sum_n (\dim_{\mathbb{C}} U_{\rho, n}) T^n, \quad P_{\rho'}(T) = \sum_n (\dim_{\mathbb{C}} U_{\rho', n}) T^n;$$

ce sont des polynômes dans  $\mathbb{Z}[T]$ .

Soit  $R(G)[T]$  (resp.  $R(G')[T]$ ) l'anneau des polynômes à une variable à coefficients dans  $R(G)$  [resp. dans  $R(G')$ ].

Soit  $c$  (resp.  $c'$ ) la représentation canonique de  $G$  (resp. de  $G'$ ) et  $\rho_0$  (resp.  $\rho'_0$ ) la représentation triviale de degré 1 de  $G$  (resp. de  $G'$ ).

5.2. PROPOSITION. — Dans l'anneau  $R(G)[T]$  (resp.  $R(G')[T]$ ) on a l'égalité :

$$\left( \sum_{\rho \in \text{Irr}(G)} \rho P_{\rho}(T) \right) (\rho_0(1+T^2) - cT) = \rho_0(1 - T^{\deg Y})(1 - T^{\deg Z})$$

$$[\text{resp. } \left( \sum_{\rho' \in \text{Irr}(G')} \rho' P_{\rho'}(T) \right) (\rho'_0 - c'T + \varepsilon T^2) = \rho'_0(1 - T^{\deg Y})(1 - T^{\deg Z})].$$

*Démonstration.* — Nous ferons la démonstration pour  $G$ , celle pour  $G'$  est analogue. Si  $M$  est un  $\mathbb{C}[G]$ -module, on note  $[M]$  sa classe dans  $R(G)$ . Soit  $A_V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{V, n}$  la décomposition en sous-espaces homogènes de  $A_V$ . On définit la série de Poincaré  $\langle A_V \rangle$  dans l'anneau de séries formelles  $R(G)[[T]]$  par :

$$\langle A_V \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [A_{V, n}] T^n.$$

Étant donnée que  $[A_{V, n}] = [\text{sym}^n(c)]$ , alors on a :

$$\langle A_V \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [\text{sym}^n(c)] T^n = 1 / \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [\Lambda^n(c)] T^n \right).$$

Or  $\Lambda^0(c) = \rho_0$ ,  $\Lambda^1(c) = c$ ,  $\Lambda^2(c) = \rho_0$  car  $G \subset \text{SU}(2, \mathbb{C})$ , et  $\Lambda^n(c) = 0$ ,  $\forall n > 2$ . Par suite on a :

$$(1) \quad \langle A_V \rangle = 1 / (\rho_0(1+T^2) - cT).$$

Considérons par ailleurs la décomposition de  $A_V$  en  $\mathbb{C}[G]$ -sous-modules isotypiques,

$A_V = \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(G)} A_{V, \rho}$ , et soit  $\langle A_{V, \rho} \rangle$  la série de Poincaré de  $A_{V, \rho}$  dans  $R(G)[[T]]$ . Alors on a :

$$(2) \quad \langle A_V \rangle = \sum_{\rho \in \text{Irr}(G)} \langle A_{V, \rho} \rangle.$$

Posons  $S_{\rho}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\dim_{\mathbb{C}} M_{\rho, n}) T^n \in \mathbb{C}[[T]]$ . Par la définition de  $M_{\rho}$  on a un isomorphisme

homogène  $A_{V, \rho} = M_{\rho} \otimes_{\mathbb{C}} E_{\rho}$ . Par suite on a :

$$(3) \quad \langle A_{V, \rho} \rangle = \rho S_{\rho}(T).$$

Finalement on a  $M_{\rho} = U_{\rho} \otimes_{\mathbb{C}} A_{S'}$ , d'où :

$$(4) \quad S_{\rho}(T) = P_{\rho}(T) / (1 - T^{\deg Y})(1 - T^{\deg Z}).$$

La proposition résulte des égalités (1) à (4).

5.3. La proposition précédente fournit une méthode effective pour le calcul de la graduation de  $U_{\rho}$  (resp. de  $U_{\rho'}$ ), qui est donné par le polynôme  $P_{\rho}(T)$  [resp.  $P_{\rho'}(T)$ ]. Par ailleurs, on a (cor. 3.6) :

$$\begin{aligned} P_{\rho}(T) &= P_{\rho'}(T) = P_{\rho'}(T) & \text{si } \rho \neq \rho' \text{ et } \rho' = \text{Ind } \rho, \\ P_{\rho}(T) &= P_{\rho'}(T) + P_{\varepsilon\rho'}(T) & \text{si } \rho = \rho' \text{ et } \text{Ind } \rho = \rho' \oplus \varepsilon\rho'; \end{aligned}$$

par conséquent, il suffit de calculer  $P_{\rho'}(T)$  pour toute représentation irréductible  $\rho'$  de  $G'$  pour déterminer  $P_{\rho}(T)$  pour toute représentation irréductible  $\rho$  de  $G$ .

Dans la table suivante on donne la liste des résultats. Le calcul est réalisé en utilisant le fait que  $P_{\rho_0}(T) = 1$  et  $P_{\varepsilon}(T) = T^{\deg X}$ . Si  $P_{\rho'}(T) = \sum_{i=1}^k a_i T^{n_i}$ , on donne la suite des degrés  $n_i$ , avec chaque entier  $n_i$  répété  $a_i$  fois,  $i = 1, \dots, k$ .

Les notations utilisées pour les représentations sont celles introduites au paragraphe 3.7.

### 5.3.1. Type $A_n (n \geq 1)$

	<i>représentation</i>	<i>degrés</i>
(a) <i>n</i> impair :	$\rho'_j (1 \leq j \leq (n-1)/2)$	$j; (n+1-j)$
	$\rho'_{(n+1)/2}$	$(n+1)/2$
	$\varepsilon\rho'_{(n+1)/2}$	$(n+1)/2$
(b) <i>n</i> pair :	$\rho'_j (1 \leq j \leq n/2)$	$j; (n+1-j)$

### 5.3.2. Type $D_n (n \geq 4)$

(a) <i>n</i> pair :	$\rho'_1$	$(2n-4)$
	$\varepsilon\rho'_1$	2
$2 \leq j \leq n-2$	$\rho'_j (j \text{ pair})$	$(j-1); (2n-j-1)$
	$\varepsilon\rho'_j (j \text{ pair})$	$(j+1); (2n-j-3)$
	$\rho'_j (j \text{ impair})$	$(j-1); (2n-j-3)$
	$\varepsilon\rho'_j (j \text{ impair})$	$(j+1); (2n-j-1)$
	$\rho'_j (j=n-1, n)$	$n$
	$\varepsilon\rho'_j (j=n-1, n)$	$n-2$

(b) *n* impair : Pour  $j \leq n-2$ , mêmes résultats que ceux du cas *n* pair.

$$\rho'_{n-1} \quad n-2; n$$

5.3.3. Type  $E_6$ 

représentation	degrés
$\rho'_1$	1; 11
$\varepsilon\rho'_1$	5; 7
$\rho'_2$	2; 4; 6
$\varepsilon\rho'_2$	6; 8; 10
$\rho'_3$	3; 5; 7; 9
$\rho'_4$	4; 8

5.3.4. Type  $E_7$ 

représentation	degrés	représentation	degrés
$\rho'_1$	1; 17	$\varepsilon\rho'_1$	7; 11
$\rho'_2$	2; 6; 10	$\varepsilon\rho'_2$	8; 12; 16
$\rho'_3$	3; 7; 11; 15	$\varepsilon\rho'_3$	5; 9; 9; 13
$\rho'_4$	4; 8; 12	$\varepsilon\rho'_4$	6; 10; 14
$\rho'_5$	5; 13	$\varepsilon\rho'_5$	7; 11
$\rho'_6$	6	$\varepsilon\rho'_6$	12
$\rho'_7$	4; 8	$\varepsilon\rho'_7$	10; 14

5.3.5. Type  $E_8$ 

représentation	degrés	représentation	degrés
$\rho'_1$	1; 29	$\varepsilon\rho'_1$	11; 19
$\rho'_2$	2; 10; 18	$\varepsilon\rho'_2$	12; 20; 28
$\rho'_3$	3; 11; 19; 27	$\varepsilon\rho'_3$	9; 13; 17; 21
$\rho'_4$	4; 8; 12; 16; 20	$\varepsilon\rho'_4$	10; 14; 18; 22; 26
$\rho'_5$	5; 9; 13; 17; 21; 25	$\varepsilon\rho'_5$	7; 11; 15; 19; 23
$\rho'_6$	6; 14; 18; 22	$\varepsilon\rho'_6$	8; 12; 16; 24
$\rho'_7$	7; 23	$\varepsilon\rho'_7$	13; 17
$\rho'_8$	6; 10; 14	$\varepsilon\rho'_8$	16; 20; 24

5.4. DÉFINITION DES MATRICES  $[\theta_\rho]$ ; QUELQUES REMARQUES UTILES.

5.4.1. Soit  $M$  un  $A_S$ -module gradué libre de type fini. Posons  $U = M/\mathcal{M}_S M$ ;  $U$  est gradué canoniquement par la graduation induite par celle de  $M$ . Notons  $M_n$  (resp.  $U_n$ ) le sous-groupe de  $M$  (resp. de  $U$ ) des éléments homogènes de degré  $n$ . Soit  $n$  un entier tel que  $U_n \neq 0$ . On considère le sous-ensemble  $I_n$  de  $\mathbb{Z}$  défini par :

$$I_n = \{ m \mid m = n + i, \text{ avec } U_m \neq 0, A_{S, i} \neq 0 \}.$$

On dira que  $M$  est bien gradué s'il satisfait la condition suivante : (BGr) : Si  $n$  et  $n'$  sont deux entiers tels que  $n < n'$ ,  $U_n \neq 0$ ,  $U_{n'} \neq 0$ , alors :

$$\begin{aligned} n' \in I_n &\Rightarrow I_n \subset I_{n'} \\ n' \notin I_n &\Rightarrow I_n \cap I_{n'} = \emptyset. \end{aligned}$$

Soient  $I(1), \dots, I(h)$  les éléments maximaux (pour l'inclusion) de la famille  $\{I_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Avec les notations précédentes on a :

5.4.2. PROPOSITION. — *Supposons que  $M$  soit bien gradué.*

(i) *On a une décomposition canonique de  $U$  en somme directe :*

$$U = \bigoplus_{k=1}^h U^{(k)} \quad \text{avec} \quad U^{(k)} = \bigoplus_{l \in I_k} U_l, \quad 1 \leq k \leq h.$$

(ii) *Il existe une décomposition unique de  $M$  en somme directe de sous-modules gradués  $M = \bigoplus_{k=1}^h M^{(k)}$ , qui induit, modulo  $\mathcal{M}_S$ , la décomposition de  $U$  précédente.*

*Démonstration.* — Puisque  $M$  satisfait la condition (BGr), la famille  $\{I(k) \mid 1 \leq k \leq h\}$  est une partition de l'ensemble  $\{n \mid U_n \neq 0\}$ , d'où (i).

Par ailleurs, si  $M = \bigoplus_k M^{(k)}$  est une décomposition de  $M$  en somme directe telle que  $M^{(k)}/\mathcal{M}_S M^{(k)} = U^{(k)}$ , alors  $M^{(k)}$  est le  $A_S$ -sous-module de  $M$  engendré par les sous-groupes  $M_l$  avec  $l \in I(k)$ ; et il est clair que la famille des sous-modules  $M^{(k)}$  ainsi définie donne une décomposition de  $M$  en somme directe, d'où (ii).

5.4.3. Par inspection de la table 5.3, on vérifie que le module  $M_{\rho'}$  est bien gradué pour toute représentation irréductible  $\rho'$  de  $G'$ , à la seule exception de  $\rho'_3$  du type  $E_7$  et  $\rho'_5$  de  $E_8$ . Or le type  $E_7$  est traité facilement à partir du type  $E_6$  (comme on verra dans le paragraphe 5.5) et le cas  $\rho'_5$  de  $E_8$  sera traité à part; donc, sauf indication contraire, on exclue dans la suite les cas exceptionnels. En conséquence de la proposition précédente, il y a une décomposition canonique de  $M_{\rho'}$  en somme directe de sous-modules  $M_{\rho'}^{(k)}$ , avec  $1 \leq k \leq h = h(\rho')$ .

Supposons maintenant que  $\rho'$  apparaisse dans la décomposition en représentations irréductibles de  $\text{Ind } \rho$  où  $\rho$  est une représentation irréductible de  $G$ . Étant donné que l'opérateur  $\theta_{\rho}$  est défini par la multiplication par le semi-invariant  $X$  de  $G'$ , on a l'inclusion :  $\theta_{\rho}(M_{\rho'}) \subset M_{\varepsilon\rho'}$ .

Notons  $\theta_{\rho'} : M_{\rho'} \rightarrow M_{\varepsilon\rho'}$  la restriction de  $\theta_{\rho}$  à  $M_{\rho'}$ . On appelle *matrice*  $[\theta_{\rho'}]$  associée à l'opérateur  $\theta_{\rho'}$  le tableau indexé par  $\{(k, \bar{k}), 1 \leq k \leq h(\rho'), 1 \leq \bar{k} \leq h(\varepsilon\rho')\}$  formé des blocks  $[\theta_{\rho'}^{(k, \bar{k})}] : M_{\rho'}^{(k)} \rightarrow M_{\varepsilon\rho'}^{(\bar{k})}$ .

5.4.4. *Remarques.* — (1) Notons  $I_{\rho'}$  l'ensemble de degrés  $\{l \mid U_{\rho', l} \neq 0\}$ , et  $\{I_{\rho'}(k) \mid 1 \leq k \leq h\}$  la partition canonique de  $I_{\rho'}$  définie en 5.4.1. La table 5.3 montre que  $\dim_{\mathbb{C}} U_{\rho'}^{(k)}$  est égal à 1 ou 2 (et par suite  $\text{rang}_{A_S} M_{\rho'}^{(k)}$  est égal à 1 ou 2).

De fait on trouve trois cas possibles :

(a)  $I_{\rho'}(k) = \{l\}$  et  $\dim_{\mathbb{C}} U_{\rho', l} = 1$ ;

(b)  $I_{\rho'}(k) = \{l\}$  et  $\dim_{\mathbb{C}} U_{\rho', l} = 2$ ;

(c)  $I_{\rho'}(k) = \{l_1, l_2\}$  avec  $l_1 < l_2$

et  $\dim_{\mathbb{C}} U_{\rho', l_1} = \dim_{\mathbb{C}} U_{\rho', l_2} = 1$ .

Dans le dernier cas on a une filtration de  $M_{\rho'}(k)$ ,  $N_{\rho'}^{(k)} \subset M_{\rho'}^{(k)}$ , où  $N_{\rho'}^{(k)}$  est le  $A_S$ -sous-module de  $M_{\rho'}^{(k)}$  engendré par le sous-groupe  $M_{\rho', l_1}$ .

(2) En considérant les différents cas possibles [(a), (b) ou (c) de la remarque précédente] pour  $k$  et  $\bar{k}$ , on constate le fait suivant : Soit  $B_{\rho'}^{(k)}$  une base, formée d'éléments homogènes, de  $M_{\rho'}^{(k)}$ . Alors il existe une base  $B_{\varepsilon\rho'}^{(k)}$ , formée d'éléments homogènes, de  $M_{\varepsilon\rho'}^{(k)}$  telle que la matrice de  $[\theta_{\rho'}^{(k, \bar{k})}]$  soit du type indiqué suivant le cas :

$\text{rang}_{A_{S'}} M_{\rho'}^{(k)}$	$\text{rang}_{A_{S'}} M_{\varepsilon\rho'}^{(k)}$	matrice de $[\theta_{\rho'}^{(k, \bar{k})}]$
1	1	$[f]$
1	2	$\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$
2	1	$[f \ 0]$
2	2	$\begin{bmatrix} f & h \\ 0 & g \end{bmatrix}$

où  $f$  (resp.  $g$ , resp.  $h$ ) est un élément de  $A_{S'}$  déterminé à un facteur scalaire près, ou nul.

(3) Posons  $I_{S'} = \{i \mid A_{S', i} \neq 0\}$ . Soit  $l \in I_{\rho'}(k)$ , et  $\bar{l} \in I_{\rho'}(\bar{k})$ . Considérons un élément  $m$  (resp.  $\bar{m}$ ) homogène de degré  $l$  (resp.  $\bar{l}$ ) appartenant à une base homogène  $B_{\rho'}^{(k)}$  (resp.  $B_{\varepsilon\rho'}^{(\bar{k})}$ ) de  $M_{\rho'}^{(k)}$  (resp. de  $M_{\varepsilon\rho'}^{(\bar{k})}$ ).

Alors, la composante de  $\theta_{\rho'}(m)$  suivant  $\bar{m}$  est un polynôme de la forme  $\sum_{(a, b)} \alpha_{a, b} Y^a Z^b$ , où  $a, b$  est un couple d'entiers positifs ou nuls parcourant l'ensemble :

$$\{(a, b) \mid a \deg Y + b \deg Z = l - \bar{l} + \deg X\},$$

et où les  $\alpha_{a, b}$  sont des constantes.

On en déduit donc, que si  $(l - \bar{l} + \deg X) \notin I_{S'}$ , alors ce polynôme est nul. De plus, sauf pour quelques représentations dans les cas  $D_n$  et  $E_7$ , les polynômes en question sont des monômes.

(4) Soit  $\rho$  une représentation autoduale de  $G$ , et  $\rho' \oplus \varepsilon\rho' = \text{Ind } \rho$  la décomposition de  $\text{Ind } \rho$  en représentations irréductibles de  $G'$  (prop. 3.4). Alors la décomposition  $M_{\rho} = M_{\rho} \oplus M_{\varepsilon\rho'}$  (cor. 3.6) induit une décomposition antidiagonale de  $\theta_{\rho}$ , i. e. de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & [\theta_{\varepsilon\rho'}] \\ [\theta_{\rho}] & 0 \end{bmatrix}$$

(5) Soient  $\rho$  une représentation irréductible de  $G$  et  $(x_i)_{i \in I}$  une famille finie d'éléments homogènes de  $A_V$  tels que pour tout  $i$ ,  $\mathbb{C}[G]x_i$  soit un sous- $G$ -module simple de  $A_V$  de type  $\rho$  et tels que pour tout couple  $(i, j)$  il existe un  $\mathbb{C}[G]$ -isomorphisme  $u_{i, j} : \mathbb{C}[G]x_i \rightarrow \mathbb{C}[G]x_j$  qui envoie  $x_i$  sur  $x_j$ . Alors il existe une famille  $\langle x_i \rangle$ ,  $i \in I$ , d'éléments homogènes de  $M_{\rho} = \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(E_{\rho}, A_V)$  tels que :

(a)  $\langle x_i \rangle(E_{\rho}) = \mathbb{C}[G]x_i$ .



(b) Le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbb{C}[G] x_i \\
 & \nearrow \langle x_i \rangle & \downarrow u_{i,j} \\
 E_\rho & & \mathbb{C}[G] x_j \\
 & \searrow \langle x_j \rangle & 
 \end{array}$$

Une telle famille est déterminée au choix d'un scalaire non nul près. La même remarque est valable si on remplace  $G$  par  $G'$ .

(6) Étant donné que  $X^2$  est un invariant du groupe  $G'$ , on a une relation de la forme :

$$(\star) \quad X^2 = f(Y, Z)$$

où  $f$  est un polynôme à coefficients constants. On retrouve ainsi le fait que les points singuliers considérés sont des points doubles. Soient  $\langle 1 \rangle, \langle X \rangle$  les éléments de la base de  $M_{\rho_0}$  (comme  $A_S$ -module) déterminés par le polynôme constant 1 et par  $X$  respectivement. Avec cette base, la matrice de  $\theta_{\rho_0}$  est la suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & f(Y, Z) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(7) Comme conséquence de la proposition 4.4 (i), on a l'égalité :

$$(\theta_\rho)^2 = f(Y, Z) \cdot \text{Id}_{M_\rho},$$

où  $f(Y, Z)$  provient de l'équation  $(\star)$  de la remarque précédente. En particulier, si  $\rho$  est autoduale [voir remarque (4)], on a :

$$\begin{aligned}
 [\theta_{\rho'}][\theta_{\varepsilon\rho}] &= f(Y, Z) \text{Id}_{M_{\varepsilon\rho}}, \\
 [\theta_{\varepsilon\rho'}][\theta_\rho] &= f(Y, Z) \text{Id}_{M_{\rho'}}.
 \end{aligned}$$

(8) Soient  $\rho_i, \rho_j$  et  $\rho_k$  trois représentations de  $G$  telles qu'on ait  $\rho_i \otimes \rho_j = \rho_k$ . Alors on a l'inclusion  $M_{\rho_i} \cdot M_{\rho_j} \subset M_{\rho_k}$ , où  $M_{\rho_i} \cdot M_{\rho_j}$  désigne le produit symétrique de  $M_{\rho_i}$  avec  $M_{\rho_j}$ . Par suite, si  $m_i$  (resp.  $m_j$ ) est un élément de  $M_{\rho_i}$  (resp. de  $M_{\rho_j}$ ) on a les égalités :

$$\theta_{\rho_k}(m_i \cdot m_j) = (\theta_{\rho_i}(m_i)) \cdot m_j = m_i \cdot (\theta_{\rho_j}(m_j)).$$

5.5. CALCUL DE LA RÉOLUTION  $G$ -ÉQUIVARIANTE DE  $A_V$  (PROP. 4.4). — On utilisera la notation du paragraphe 3.7 pour les représentations. Les matrices données dans la liste suivante sont associées à des bases dont les éléments sont ordonnés par degrés croissants (voir table 5.3), pour chaque module  $M_\rho$ . Les calculs sont effectués en utilisant les remarques 5.4.4. Pour chaque matrice on donne ses coordonnées en précisant la valeur du facteur constant seulement dans les cas où cette information est utile pour la suite, i. e. si la coordonnée en question n'est pas un monôme, ou si la représentation n'est pas autoduale; dans les autres cas on indique par  $\star$  un coefficient constant non nul.

5.5.1. *Type  $A_n$  ( $n \geq 1$ ).* — Dans ce cas il est plus facile de faire un calcul explicite.

Soit  $G$  le sous-groupe de  $SL(2, \mathbb{C})$  engendré par  $g = \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{bmatrix}$ , où  $\xi = e^{2i\pi/(n+1)}$ .

Dans l'algèbre  $A_V = \mathbb{C}[x, y]$  les polynômes  $Y = x^{n+1} + y^{n+1}$  et  $Z = xy$  engendrent  $A_{S'}$ , et le jacobien de  $Y$  et  $Z$  est égal (à un facteur scalaire près) à  $(x^{n+1} - y^{n+1})$ .

Pour simplifier les calculs, on considère les invariants de  $A_V$  pour l'action de  $G$ , définis par :

$$\bar{X} = x^{n+1}, \quad \bar{Y} = y^{n+1}, \quad \bar{Z} = Z = xy.$$

On notera que  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  ne sont pas des invariants sous  $G'$  et qu'on a  $X = \bar{X} - \bar{Y}$  à un facteur près.

Notons  $\rho_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) la représentation irréductible (à isomorphisme près) dont le caractère en  $g$  vaut :

$$\chi_{\rho_j}(g) = \xi^j.$$

Posons  $s_1(j) = \langle x^j \rangle$ ,  $s_2(j) = \langle y^{n+1-j} \rangle$ ; ils forment une base de  $M_{\rho_j}$  [cf. remarque (5) de 5.4.4],  $1 \leq j \leq n$ .

Alors on a les relations :

$$(R) \quad \begin{cases} \bar{Y} s_1(j) = \bar{Z}^j s_2(j) \\ \bar{Z}^{(n+1-j)} s_1(j) = \bar{X} s_2(j) \end{cases} \quad (1 \leq j \leq n).$$

La relation  $\bar{X}\bar{Y} = \bar{Z}^{(n+1)}$ , qui n'est autre chose que l'équation, en termes de  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$ , de la singularité quotient, détermine avec les relations (R) la résolution de  $A_V$  (comme  $A_S[G]$ -module) de la proposition 4.4.

5.5.2. *Type  $D_n$  ( $n \geq 4$ ).* — Dans ce cas aussi on peut faire les calculs explicitement, en considérant le groupe diédral binaire  $G$  engendré par :

$$g = \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \xi = e^{2i\pi/2(n-2)} \quad \text{et par} \quad \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Soient  $Y = x^{2(n-2)} + (-1)^n y^{2(n-2)}$ ,  $Z = x^2 y^2$  deux générateurs de  $A_{S'}$ , et notons  $X$  le polynôme  $xy(x^{2(n-2)} + (-1)^{n-1} y^{2(n-2)})$ , qui est égal au jacobien de  $Y$  et  $Z$  à un facteur scalaire près. On détermine une base de  $M_{\rho}$ ,  $\rho \in \text{Irr}(G)$ , en utilisant le cas cyclique (5.5.1) et le fait que  $G$  contient le sous-groupe distingué cyclique d'ordre  $2(n-2)$  engendré par  $g$ . Avec les notations du paragraphe 3.7 pour les représentations de  $G$  on trouve :

(a)  $\rho_1$  :

$$[\theta_{\rho_1}] = \begin{bmatrix} 0 & Y^2 + 4(-1)^{(n-1)} Z^{(n-2)} \\ Z & 0 \end{bmatrix}.$$

[Avec les bases de  $M_{\rho_1}$  et  $M_{\rho_1}$  respectivement :  $\langle xy \rangle$ ,  $\langle x^{2n-4} + (-1)^{n-1} y^{2n-4} \rangle$ ].

(b)  $\rho_j, 2 \leq j \leq n-2$  : $j$  pair :

$$[\theta_{\rho_j}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \star YZ & \star Z^{(n-1-j/2)} \\ 0 & 0 & \star Z^{j/2} & \star Y \\ \star Y & \star Z^{n-1-j/2} & 0 & 0 \\ \star Z^{j-2} & \star YZ & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Avec les bases :

de  $M_{\rho_j} : \langle x^{j-1} \rangle, \langle xy^{2n-j-2} \rangle$ ;de  $M_{\text{ep}_j} : \langle x^j y \rangle, \langle y^{2n-j-3} \rangle$ ). $j$  impair :

$$[\theta_{\rho_j}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \star YZ & \star Z^{(n-1-(j-1)/2)} \\ 0 & 0 & \star Z^{(j+1)/2} & \star YZ \\ \star Y & \star Z^{(n-2-(j-1)/2)} & 0 & 0 \\ \star Z^{(j-1)/2} & \star Y & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Avec les bases :

de  $M_{\rho_j} : \langle x^{j-1} \rangle, \langle y^{2n-j-3} \rangle$ ;de  $M_{\text{ep}_j} : \langle x^j y \rangle, \langle xy^{2n-j-2} \rangle$ ).(c)  $\rho_{n-1}$  : $n$  pair :

$$[\theta_{\rho_{n-1}}] = \begin{bmatrix} 0 & Y + 2Z^{(n-2)/2} \\ YZ - 2Z^{n/2} & 0 \end{bmatrix}$$

[Avec les bases :

de  $M_{\rho_{n-1}} : \langle xy(x^{n-2} + (-1)^{n-1}y^{n-2}) \rangle$ ;de  $M_{\text{ep}_{n-1}} : \langle x^{n-2} + (-1)^j y^{n-2} \rangle$ ]. $n$  impair :

$$[\theta_{\rho_{n-1}}] = \begin{bmatrix} YZ & -2Z^{(n-1)/2} \\ 2Z^{(n-1)/2} & Y \end{bmatrix}$$

(même base).

(d)  $\rho_n$  : $n$  pair :

$$[\theta_{\rho_n}] = \begin{bmatrix} 0 & Y - 2Z^{(n-2)/2} \\ YZ + 2Z^{n/2} & 0 \end{bmatrix}$$

[Avec les bases :

de  $M_{\rho_n} : \langle xy(x^{n+2} + (-1)^n y^{n-2}) \rangle$ ;de  $M_{\text{ep}_n} : \langle x^{n-2} + (-1)^{n-1} y^{n-2} \rangle$ ].

$n$  impair :

$$[\theta_{\rho_n}] = \begin{bmatrix} YZ & 2Z^{(n-1)/2} \\ -2Z^{(n-1)/2} & Y \end{bmatrix}$$

(même base).

### 5.5.3. Type $E_6$

Quitte à multiplier  $X, Y, Z$  par des facteurs scalaires, on peut normaliser l'équation de  $S$  de sorte qu'on ait :

$$X^2 = Y^3 + Z^4.$$

Les représentations  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont autoduales. On peut choisir des bases ordonnées par ordre ascendant des degrés telles que les matrices soient :

$$\begin{aligned} [\theta_{\rho_1}] &= \begin{bmatrix} \star Y & \star Z^3 \\ \star Z & \star Y^2 \end{bmatrix}, & [\theta_{\text{sp}_1}] &= \begin{bmatrix} \star Y^2 & \star Z^3 \\ \star Z & \star Y \end{bmatrix}, \\ [\theta_{\rho_2}] &= \begin{bmatrix} \star Y & 0 & \star Z^2 \\ \star Z & \star Y & 0 \\ 0 & \star Z & \star Y \end{bmatrix}, & [\theta_{\text{sp}_2}] &= \begin{bmatrix} \star Y^2 & \star Z^3 & \star YZ^2 \\ \star YZ & \star Y^2 & \star Z^3 \\ \star Z^2 & \star YZ & \star Y^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Pour les représentations  $\rho_3, \rho_3, \rho_4, \rho_4$  on trouve :

$$\begin{aligned} [\theta_{\rho_3}] &= \begin{bmatrix} \alpha Z^2 & 0 & Y^2 & 0 \\ 0 & \alpha Z^2 & \beta YZ & Y^2 \\ Y & 0 & -\alpha Z^2 & 0 \\ -\beta Z & Y & 0 & -\alpha Z^2 \end{bmatrix}, \\ [\theta_{\rho_3}] &= \begin{bmatrix} -\alpha Z^2 & 0 & Y^2 & 0 \\ 0 & -\alpha Z^2 & \beta YZ & Y^2 \\ Y & 0 & \alpha Z^2 & 0 \\ -\beta Z & Y & 0 & \alpha Z^2 \end{bmatrix}, \\ [\theta_{\rho_4}] &= \begin{bmatrix} \alpha Z^2 & Y^2 \\ Y & -\alpha Z^2 \end{bmatrix}, & [\theta_{\rho_4}] &= \begin{bmatrix} -\alpha Z^2 & Y^2 \\ Y & \alpha Z^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes non nulles,  $\alpha^2 = 1$  (on peut déterminer la valeur de  $\beta$ , mais c'est inutile pour la suite).

En fait le choix  $\alpha = 1$  (ou  $\alpha = -1$ ) précise la représentation de  $G$  notée  $\rho_3$  (et par suite détermine les trois autres).

On a utilisé en particulier le fait qu'on a les égalités :

$$\rho_1 \otimes \rho_4 = \rho_3 \quad \text{et} \quad \rho_4 \otimes \rho_4 = \rho_0$$

et la remarque (8) de 5.4.4.

A titre d'exemple, on montre comment on détermine les matrices dans le cas  $\rho_1$  :

Notons  $\{(1), (11)\}$  [resp.  $\{(5), (7)\}$ ] une base de  $M_{\rho_1}$  (resp. de  $M_{\epsilon\rho_1}$ ) dont les éléments sont de degré égal au chiffre indiqué (voir table 5.3.3).

Par des considérations de degrés [remarque (3) de 5.4.4], en considérant les degrés de  $X, Y, Z$  (voir § 3.2), les matrices associées aux opérateurs  $\theta_{\rho_1} : M_{\rho_1} \rightarrow M_{\epsilon\rho_1}$  et  $\theta_{\epsilon\rho_1} : M_{\epsilon\rho_1} \rightarrow M_{\rho_1}$  avec ces bases, sont de la forme :

$$[\theta_{\rho_1}] = \begin{bmatrix} \theta(1) & \theta(11) \\ aY & bZ^3 \\ cZ & dY^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (5) \\ (7) \end{matrix}, \quad [\theta_{\epsilon\rho_1}] = \begin{bmatrix} \theta(5) & \theta(7) \\ eY^2 & fZ^3 \\ gZ & hY \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (11) \end{matrix}$$

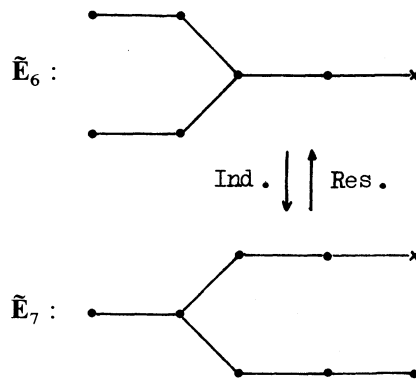
où  $a, b, \dots, h$  sont des coefficients constants. Or ces matrices doivent satisfaire les égalités :

$$[\theta_{\rho_1}][\theta_{\epsilon\rho_1}] = (Y^3 + Z^4) \text{Id}_{M_{\epsilon\rho_1}} \quad \text{et} \quad [\theta_{\epsilon\rho_1}][\theta_{\rho_1}] = (Y^3 + Z^4) \text{Id}_{M_{\rho_1}}$$

[remarque (7) de 5.4.4], d'où en particulier :  $ae = bg = ef = dh = 1$ , et par suite tous les coefficients sont non nuls. En fait on peut être plus précis, car en faisant des homothéties sur les éléments des bases, on peut supposer  $a = b = c = 1$ , d'où  $e = f = g = 1$ . D'autre part on a aussi  $1 + h = af + bh = 0$ , d'où  $h = -1$  et par suite  $d = -1$  :

$$\begin{bmatrix} Y & Z^3 \\ Z & -Y^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} Y^2 & Z^3 \\ Z & -Y \end{bmatrix}$$

5.5.4. Type  $E_7$ . — Un groupe  $G$  de type  $E_7$  contient un sous-groupe distingué d'indice 2 de type  $E_6$  (ceci est dû essentiellement au fait que la réunion des sommets d'un tétraèdre et du tétraèdre dual est l'ensemble de sommets d'un cube). La relation (par induction ou restriction) entre les représentations irréductibles de l'un et de l'autre est exprimée schématiquement par la correspondance de diagrammes suivante :



de sorte que la restriction (resp. l'induction) d'une représentation irréductible du groupe de type  $\tilde{E}_7$  (resp. de type  $\tilde{E}_6$ ) correspondante à un sommet du diagramme  $\tilde{E}_7$  (resp. de  $\tilde{E}_6$ ) est la somme de représentations correspondantes aux sommets du diagramme  $\tilde{E}_6$  (resp.  $\tilde{E}_7$ ) qui se trouvent sur la même verticale.

D'autre part, si on note  $Y_6, Z_6$  (resp.  $Y_7, Z_7$ ) des générateurs de  $A_5$  et  $X_6$  (resp.  $X_7$ ) leur jacobien dans le cas  $E_6$  (resp.  $E_7$ ), on a les égalités (à un facteur constant non nul près) suivantes :

$$X_7 = X_6 Z_6, \quad Y_7 = Z_6^2, \quad Z_7 = Y_6.$$

Ces deux remarques permettent de déduire la résolution équivariante de  $A_V$  pour le type  $E_7$  à partir de celle de type  $E_6$ .

Quitte à multiplier  $X = X_7$ ,  $Y = Y_7$  et  $Z = Z_7$  par des constantes, on a la relation :

$$X^2 = Y(Y^2 + Z^3).$$

Les matrices trouvées sont les suivantes :

$$\begin{aligned} [\theta_{\rho_1}] &= \begin{bmatrix} \star Y & \star YZ^2 \\ \star Z & \star Y^2 \end{bmatrix}, & [\theta_{\varepsilon\rho_1}] &= \begin{bmatrix} \star Y^2 & \star YZ^2 \\ \star Z & \star Y \end{bmatrix}, \\ [\theta_{\rho_2}] &= \begin{bmatrix} \star Y & 0 & \star YZ \\ \star Z & \star Y & 0 \\ 0 & \star Z & \star Y \end{bmatrix}, & [\theta_{\varepsilon\rho_2}] &= \begin{bmatrix} \star Y^2 & \star YZ^2 & \star Y^2 Z \\ \star YZ & \star Y^2 & \star YZ^2 \\ \star Z^2 & \star YZ & \star Y^2 \end{bmatrix}, \\ [\theta_{\rho_3}] &= \begin{bmatrix} 0 & \star YZ & \star Y^2 & \star YZ^2 \\ \star Y & 0 & \star YZ & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^2 & 0 & 0 \\ \star Z & \star Y & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ [\theta_{\varepsilon\rho_3}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \star Y^2 & \star YZ^2 \\ 0 & 0 & \star YZ & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^2 & 0 & \star YZ \\ \star Z & \star Y & \star Y & 0 \end{bmatrix}, \\ [\theta_{\rho_4}] &= \begin{bmatrix} 0 & \star YZ & \star Y^2 \\ \star Y & 0 & \star YZ \\ \star Z & \star Y & 0 \end{bmatrix}, & [\theta_{\varepsilon\rho_4}] &= \begin{bmatrix} \star YZ & \star Y^2 & \star YZ^2 \\ \star Z^2 & \star YZ & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^2 & \star YZ \end{bmatrix}, \\ [\theta_{\rho_5}] &= \begin{bmatrix} \star Z^2 & \star Y \\ \star Y & \star YZ \end{bmatrix}, & [\theta_{\varepsilon\rho_5}] &= \begin{bmatrix} \star YZ & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^2 \end{bmatrix}, \\ [\theta_{\rho_6}] &= [Y], & [\theta_{\varepsilon\rho_6}] &= [Y^2 + Z^3], \\ [\theta_{\rho_7}] &= \begin{bmatrix} \star Y & \star Z^2 \\ \star Z & \star Y \end{bmatrix}, & [\theta_{\varepsilon\rho_7}] &= \begin{bmatrix} \star Y^2 & \star YZ^2 \\ \star YZ & \star Y^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

5.5.5. *Type E<sub>8</sub>*. — Quitte à multiplier X, Y, Z par des facteurs constants, on a la relation :

$$X^2 = Y^3 + Z^5$$

Les matrices trouvées sont les suivantes :

$$[\theta_{\rho_1}] = \begin{bmatrix} \star Y & \star Z^4 \\ \star Z & \star Y^2 \end{bmatrix}, \quad [\theta_{\varepsilon \rho_1}] = \begin{bmatrix} \star Y^2 & \star Z^4 \\ \star Z & \star Y \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{\rho_2}] = \begin{bmatrix} \star Y & 0 & \star Z^3 \\ \star Z & \star Y & 0 \\ 0 & \star Z & \star Y \end{bmatrix}, \quad [\theta_{\varepsilon \rho_2}] = \begin{bmatrix} \star Y^2 & \star Z^4 & \star YZ^3 \\ \star YZ & \star Y^2 & \star Z^4 \\ \star Z^2 & \star YZ & \star Y^2 \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{\rho_3}] = \begin{bmatrix} \star Z^2 & 0 & \star Y^2 & \star Z^4 \\ \star Y & 0 & \star Z^3 & \star YZ^2 \\ 0 & \star Z^2 & \star YZ & \star Y^2 \\ \star Z & \star Y & 0 & \star Z^3 \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{\varepsilon \rho_3}] = \begin{bmatrix} \star Z^3 & \star Y^2 & \star YZ^2 & \star Z^4 \\ 0 & \star YZ & \star Z^3 & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^2 & 0 & 0 \\ \star Z & 0 & \star Y & \star Z^2 \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{\rho_4}] = \begin{bmatrix} \star Z^2 & 0 & 0 & 0 & \star Y^2 \\ \star Y & 0 & 0 & 0 & \star Z^3 \\ 0 & \star Y & \star Z^2 & 0 & 0 \\ \star Z & 0 & \star Y & \star Z^2 & 0 \\ 0 & \star Z & 0 & \star Y & \star Z^2 \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{\varepsilon \rho_4}] = \begin{bmatrix} \star Z^3 & \star Y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \star Z^3 & \star Y^2 & \star YZ^2 & \star Z^4 \\ 0 & \star YZ & \star Z^3 & \star Y^2 & \star YZ^2 \\ \star Z^2 & 0 & \star YZ & \star Z^3 & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{\rho_5}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \star Z^3 & \star Y^2 & \star YZ^2 & \star Z^4 \\ \star Z^2 & 0 & 0 & \star Z^3 & \star Y^2 & \star YZ^2 \\ 0 & \star Z^2 & 0 & \star YZ & \star Z^3 & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \star Y & \star Z^2 & 0 & 0 & 0 \\ \star Z & 0 & \star Y & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{\varepsilon\rho_5}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \star Y^2 & \star YZ^2 & \star Z^4 \\ 0 & 0 & 0 & \star Z^3 & \star Y^2 & \star YZ^2 \\ 0 & 0 & 0 & \star YZ & \star Z^3 & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^2 & 0 & 0 & 0 & \star Z^3 \\ 0 & \star Y & \star Z^2 & \star Z^2 & 0 & 0 \\ \star Z & 0 & \star Y & 0 & \star Z^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{\rho_6}] = \begin{bmatrix} 0 & \star Z^3 & \star Y^2 & \star YZ \\ \star Z^2 & 0 & 0 & \star Y^2 \\ \star Y & 0 & 0 & \star Z^3 \\ \star Z & \star Y & \star Z & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{\varepsilon\rho_6}] = \begin{bmatrix} 0 & \star Z^3 & \star Y^2 & 0 \\ \star Z^2 & 0 & \star YZ & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^2 & 0 & \star Z^3 \\ 0 & \star Y & \star Z^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{\rho_7}] = \begin{bmatrix} \star Z^2 & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^3 \end{bmatrix}, \quad [\theta_{\varepsilon\rho_7}] = \begin{bmatrix} \star Z^3 & \star Y^2 \\ \star Y & \star Z^2 \end{bmatrix},$$

$$[\theta_{\rho_8}] = \begin{bmatrix} \star Y & \star Z^2 & 0 \\ 0 & \star Y & \star Z^2 \\ \star Z & \star Z^2 & \star Y^2 \end{bmatrix}, \quad [\theta_{\varepsilon\rho_8}] = \begin{bmatrix} \star Y^2 & \star YZ^2 & \star Z^4 \\ \star Z^3 & \star Y^2 & \star YZ^2 \\ \star YZ & \star Z^3 & \star Y^2 \end{bmatrix},$$

Les matrices correspondantes aux indices 1, 2, 7 et 8 sont déterminées par des considérations de degrés [remarque (3), § 5.4.4] et par la condition de la remarque (7), § 5.4.4. La même méthode détermine les autres matrices, à quelques coefficients près; et ces derniers sont déterminés par la connaissance des matrices d'indices 1, 2, 7, 8 et la remarque (8) appliquée (par exemple) aux égalités :

$$\rho_1 \otimes \rho_8 = \rho_5, \quad \rho_1 \otimes \rho_7 = \rho_6, \quad \rho_1 \otimes \rho_2 = \rho_1 \oplus \rho_3, \quad \rho_1 \otimes \rho_3 = \rho_2 \oplus \rho_4.$$



## 6. Désingularisations minimales; démonstration du théorème 2.2

6.1. On dispose de désingularisations minimales explicites  $q : \tilde{S} \rightarrow S$  qui sont construites par une procédure de « soudure » à partir de plusieurs copies de  $\mathbb{C}^2$  ([G], voir aussi [H], [L]). Le morphisme  $q$  qui contracte le diviseur exceptionnel  $D = \bigcup_k d_k$  de  $\tilde{S}$  est déterminé essentiellement par la donnée des cycles (à support dans  $D$ ) de la forme  $\sum_n n_k d_k$ , qui seront représentés par des diagrammes analogues au graphe dual associé à  $D$ , où on remplace le sommet correspondant à une composante irréductible  $d_k$  par la multiplicité  $n_k$ .

6.1.1. *Type  $A_n$  ( $n \geq 1$ ).* — Pour chaque entier  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , soit  $\mathcal{U}_k$  une copie de  $\mathbb{C}^2$  de coordonnées  $(u_k, v_k)$ . Soit  $\tilde{S}$  la surface (lisse) obtenue en identifiant les ouverts  $\mathcal{U}_{k-1} - \{u_{k-1} = 0\}$  et  $\mathcal{U}_k - \{v_k = 0\}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , par les recollements :

$$u_{k-1} = 1/v_k, \quad v_{k-1} = u_k v_k^2.$$

Soit  $d_k$  la courbe rationnelle lisse définie par  $v_{k-1} = 0$  dans  $\mathcal{U}_{k-1}$  et par  $u_k = 0$  dans  $\mathcal{U}_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Alors chaque  $d_k$  a une auto-intersection  $-2$  et le graphe dual associé à  $D = \bigcup_k d_k$  est  $A_n$ . Notons  $C(\bar{X})$ ,  $C(\bar{Y})$ ,  $C(\bar{Z})$  les cycles à support dans  $D$  définis par les diagrammes :

$$\begin{aligned} C(\bar{X}) : n(n-1) \dots 1 & \left[ \text{i. e. } C(\bar{X}) = \sum_{k=1}^n (n+1-k) d_k \right] \\ C(\bar{Y}) : 1 \ 2 \dots n & \left[ \text{i. e. } C(\bar{Y}) = \sum_{k=1}^n k d_k \right] \\ C(\bar{Z}) : 1 \ 1 \dots 1 & \left[ \text{i. e. } C(\bar{Z}) = \sum_{k=1}^n d_k \right]. \end{aligned}$$

A l'aide de ces cycles on définit une application  $q : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{C}^3$  par :

$$q|_{\mathcal{U}_k}(u_k, v_k) = (u_k^{(n+1-k)} v_k^{(n-k)}, u_k^k v_k^{+1}, u_k v_k), \quad 0 \leq k \leq n.$$

Notons  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$  les coordonnées de  $\mathbb{C}^3$ . On vérifie que l'application  $q$  est une désingularisation minimale de la surface  $S$  (plongée dans  $\mathbb{C}^3$ ) d'équation :  $\bar{X}\bar{Y} = \bar{Z}^{(n+1)}$ .

6.1.2. *Type  $D_n$  ( $n \geq 4$ ).* — Pour chaque entier  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , soit  $\mathcal{U}_k$  une copie de  $\mathbb{C}^2$  de coordonnées  $(u_k, v_k)$ . Soit  $\tilde{S}$  la surface (lisse) obtenue en identifiant :

les ouverts  $\mathcal{U}_{k-1} - \{u_{k-1} = 0\}$  et  $\mathcal{U}_k - \{v_k = 0\}$ ,  $1 \leq k \leq n-2$  par les recollements :

$$u_{k-1} = 1/v_k \quad \text{et} \quad v_{k-1} = u_k v_k^2,$$

les ouverts  $\mathcal{U}_{n-2} - \{u_{n-2} = 0\}$  et  $\mathcal{U}_{n-1} - \{v_{n-1} = 0\}$  par les recollements :

$$u_{n-2} = 1/v_{n-1} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_{n-2} + i = u_{n-1} v_{n-1}^2 & \text{si } n \text{ pair,} \\ v_{n-2} + 1 = u_{n-1} v_{n-1}^2 & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases}$$

les ouverts  $\mathcal{U}_{n-2} - \{u_{n-2}=0\}$  et  $\mathcal{U}_n - \{v_n=0\}$  par les recollements :

$$u_{n-2}=1/v_n \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_{n-2}-i=u_n v_n^2 & \text{si } n \text{ pair,} \\ v_{n-2}-1=u_n v_n^2 & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases}$$

Soit  $d_k$  la courbe rationnelle lisse définie par  $v_{k-1}=u_k=0$ , avec  $1 \leq k \leq n-2$ ;

$d_{n-1}$  définie par :

$$u_{n-1}=0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_{n-2}+i=0 & \text{si } n \text{ pair,} \\ v_{n-2}+1=0 & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases}$$

$d_n$  définie par :

$$u_n=0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_{n-2}-i=0 & \text{si } n \text{ pair,} \\ v_{n-2}-1=0 & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases}$$

Alors chaque  $d_k$  a une auto-intersection  $-2$  et le graphe dual associé à  $D = \bigcup_k d_k$  est  $D_n$ .

Avec les cycles  $C(X)$ ,  $C(Y)$ ,  $C(Z)$  définis par :

$n \text{ pair}$	$n \text{ impair}$
$C(X) : 2 \ 3 \ \dots (n-1) \begin{matrix} n/2 \\ n/2 \end{matrix}$	$2 \ 3 \ \dots (n-1) \begin{matrix} (n-1)/2 \\ (n-1)/2 \end{matrix}$
$C(Y) : 1 \ 2 \ \dots (n-2) \begin{matrix} n/2-1 \\ n/2-1 \end{matrix}$	$1 \ 2 \ \dots (n-2) \begin{matrix} (n-1)/2 \\ (n-1)/2 \end{matrix}$
$C(Z) : 2 \ 2 \ \dots 2_1^1$	$2 \ 2 \ \dots 2_1^1$

On définit une application  $q : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{C}^3$ , dont les restrictions aux ouverts précédents sont données par :

si  $0 \leq k \leq n-3$  :

$$X = u_k^{k+1} v_k^{k+2} (1 + (-1)^n u_k^{2(n-k-2)} v_k^{2(n-k-3)})^{a_k},$$

$$\text{avec } a_k = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ pair,} \\ (n-1)/2 & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases}$$

$$Y = u_v^k v_k^{k+1} (1 + (-1)^n u_k^{2(n-k-2)} v_k^{2(n-k-3)})^{b_k},$$

$$\text{avec } b_k = \begin{cases} n/2-1 & \text{si } n \text{ pair,} \\ (n-1)/2 & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases}$$

$$Z = u_k^2 v_k^2 (1 + (-1)^n u_k^{2(n-k-2)} v_k^{2(n-k-3)}).$$

$$X = \begin{cases} u_{n-2}^{n-1} (1 + v_{n-2}^2)^{n/2} & (\text{si } n \text{ pair}), \\ u_{n-2}^{n-1} v_{n-2} (v_{n-2}^2 - 1)^{(n-1)/2} & (\text{si } n \text{ impair}), \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} u_{n-2}^{n-2} v_{n-2} (1 + v_{n-2}^2)^{n/2-1} & (\text{si } n \text{ pair}), \\ u_{n-2}^{n-2} (v_{n-2}^2 - 1)^{(n-1)/2} & (\text{si } n \text{ impair}), \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} u_{n-2}^2 (1 + v_{n-2}^2) & (\text{si } n \text{ pair}), \\ u_{n-2}^2 (v_{n-2}^2 - 1) & (\text{si } n \text{ impair}), \end{cases}$$

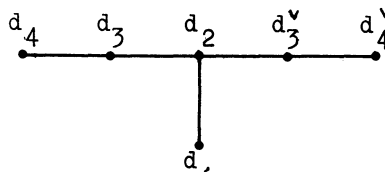
$$\begin{aligned}
 X &= \begin{cases} [u_{n-1}(u_{n-1}v_{n-1}^2 - 2i)]^{n/2} v_{n-1} & \text{si } n \text{ pair,} \\ [u_{n-1}(u_{n-1}v_{n-1}^2 - 2)]^{(n-1)/2} (u_{n-1}v_{n-1}^2 - 1) & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases} \\
 Y &= \begin{cases} [u_{n-1}(u_{n-1}v_{n-1}^2 - 2i)]^{n/2-1} (u_{n-1}v_{n-1}^2 - i) & \text{si } n \text{ pair,} \\ [u_{n-1}(u_{n-1}v_{n-1}^2 - 2)]^{(n-1)/2} v_{n-1} & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases} \\
 Z &= \begin{cases} u_{n-1}(u_{n-1}v_{n-1}^2 - 2i) & \text{si } n \text{ pair,} \\ u_{n-1}(u_{n-1}v_{n-1}^2 - 2) & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases} \\
 \hline
 X &= \begin{cases} [u_n(u_n v_n^2 + 2i)]^{n/2} v_n & \text{si } n \text{ pair,} \\ [u_n(u_n v_n^2 + 2)]^{(n-1)/2} (u_n v_n^2 + 1) & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases} \\
 Y &= \begin{cases} [u_n(u_n v_n^2 + 2i)]^{n/2-1} (u_n v_n^2 + i) & \text{si } n \text{ pair,} \\ [u_n(u_n v_n^2 + 2)]^{(n-1)/2} & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases} \\
 Z &= \begin{cases} u_n(u_n v_n^2 + 2i) & \text{si } n \text{ pair,} \\ u_n(u_n v_n^2 + 2) & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'application  $q$  est une désingularisation minimale de la surface  $S$  (plongée dans  $\mathbb{C}^3$ ) d'équation  $X^2 = Z(Y^2 + Z^{n-2})$ .

6.1.3. Type  $E_6$ . — Soient  $\mathcal{U}_k, 0 \leq k \leq 4, \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_4$  des copies de  $\mathbb{C}^2$  de coordonnée  $(u_k, v_k), 0 \leq k \leq 4, (u_3, v_3), (u_4, v_4)$ , respectivement. On considère la surface  $\tilde{S}$  (lisse) (resp. la famille des courbes rationnelles lisses  $d$  de  $\tilde{S}$ ) définie par les recollements (resp. par les équations) :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_0^2 v_0, & v_1 &= 1/u_0, & d_1 &: u_1 = v_0 = 0, \\
 u_2 &= u_0 v_0^2, & v_2 &= 1/v_0, & d_2 &: u_2 = u_0 = 0, \\
 u_3 &= u_0^2 (v_0 + 1), & v_3 &= 1/u_0, & d_3 &: u_3 = v_0 + 1 = 0, \\
 \tilde{u}_3 &= u_0^2 (v_0 - 1), & \tilde{v}_3 &= 1/u_0, & \tilde{d}_3 &: \tilde{u}_3 = v_0 - 1 = 0, \\
 u_4 &= u_3^2 v_3, & v_4 &= 1/u_3, & d_4 &: u_4 = v_3 = 0, \\
 \tilde{u}_4 &= \tilde{u}_3^2 \tilde{v}_3, & \tilde{v}_4 &= 1/\tilde{u}_3, & \tilde{d}_4 &: \tilde{u}_4 = \tilde{v}_3 = 0.
 \end{aligned}$$

Chacune de ces courbes rationnelles a une auto-intersection  $-2$ , et le graphe dual associé à leur réunion est  $E_6$  :



A l'aide des cycles définis par les diagrammes suivants :

$$\begin{aligned}
 C(X) : & \quad 2 \ 4 \ 6 \ 4 \ 2, & C(Y) : & \quad 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2, & C(Z) : & \quad 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \\
 & \quad \quad \quad 3 & & \quad \quad \quad 2 & & \quad \quad \quad 2
 \end{aligned}$$

on définit une application  $q : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{C}^3$  dont les restrictions aux ouverts précédents sont

données par :

$$\begin{aligned} X &= u_0^6 v_0^3 (v_0^2 - 1)^4 = u_1^3 (u_1^2 v_1^4 - 1)^4 \\ &= u_2^6 v_2 (v_2^2 - 1)^4 = u_3^4 v_3^2 (u_3 v_3^2 + 1)^3 (u_3 v_3^2 + 2)^4 = u_4^2 (u_4^2 v_4^3 + 1)^3 (u_4^2 v_4^3 + 2)^4 \\ Y &= -u_0^4 v_0^2 (v_0^2 - 1)^3 = -u_1^2 (u_1^2 v_1^4 - 1)^3 \\ &= u_2^4 (v_2^2 - 1)^3 = -u_3^3 v_3^2 (u_3 v_3^2 + 1)^2 (u_3 v_3^2 + 2)^3 = -u_4^2 v_4 (u_4^2 v_4^3 + 1)^2 (u_4^2 v_4^3 + 2)^2 \\ Z &= u_0^3 v_0^2 (v_0^2 - 1)^2 = u_1^2 v_1 (u_1^2 v_1^4 - 1)^2 \\ &= u_2^3 (v_2^2 - 1)^2 = u_3^2 v_3 (u_3 v_3^2 + 1)^2 (u_3 v_3^2 + 2)^2 = u_4 (u_4^2 v_4^3 + 1)^2 (u_4^2 v_4^3 + 2)^2. \end{aligned}$$

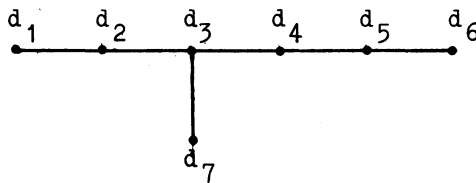
Pour l'ouvert  $\mathcal{U}_3$  (resp.  $\mathcal{U}_4$ ) on remplace  $u_3, v_3, +1, +2$  (resp.  $u_4, v_4, +1, +2$ ) dans l'expression correspondante à  $\mathcal{U}_3$  (resp. à  $\mathcal{U}_4$ ) par  $u_3, v_3, -1, -2$  (resp. par  $u_4, v_4, -1, -2$ ).

L'application  $q$  est une désingularisation minimale de la surface  $S$  (plongée dans  $\mathbb{C}^3$ ) d'équation  $X^2 = Y^3 + Z^4$ .

6.1.4. *Type E<sub>7</sub>*. — Soient  $\mathcal{U}_k$ ,  $0 \leq k \leq 7$ , des copies de  $\mathbb{C}^2$  de coordonnées  $(u_k, v_k)$ . On considère la surface  $\tilde{S}$  (lisse) (resp. la famille des courbes rationnelles lisses  $d$  de  $\tilde{S}$ ) définie par les recollements (resp. par les équations) :

$$\begin{aligned} u_k &= v_{k-1} u_{k-1}^2, & v_k &= 1/u_{k-1} & (1 \leq k \leq 6), & d_k &: u_k = v_{k-1} = 0 \\ u_7 &= (v_3 + 1) u_3^2, & v_7 &= 1/u_3, & & d_7 &: u_7 = v_3 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Chacune de ces courbes rationnelles a une auto-intersection  $-2$ , et le graphe dual associé à leur réunion est  $E_7$  :



A l'aide des cycles définis par les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{c} C(X) : 3 \ 6 \ 9 \ 7 \ 5 \ 3, \\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{c} C(Y) : 2 \ 4 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3, \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} C(Z) : 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1, \\ 2 \end{array}$$

On définit une application  $q : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{C}^3$  dont les restrictions aux ouverts précédents sont données par :

$$\begin{aligned} X &= v_0^3 (u_0^3 v_0^2 + 1)^5 = u_1^3 v_1^6 (u_1^2 v_1 + 1)^5 \\ &= u_2^6 v_2^9 (u_2 + 1)^5 = u_3^9 v_3^7 (1 + v_3)^5 = u_4^7 v_4^5 (u_4 v_4^2 + 1)^5 \\ &= u_5^5 v_5^3 (u_5^2 v_5^3 + 1)^5 = u_6^3 v_6 (u_6^3 v_6^4 + 1)^5 = u_7^5 v_7 (u_7 v_7^2 - 1)^7, \end{aligned}$$

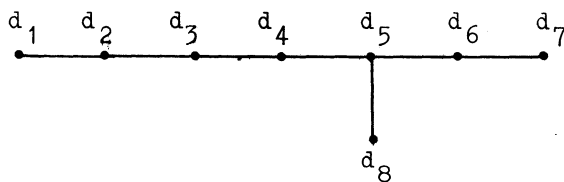
$$\begin{aligned}
Y &= v_0^2 (u_0^3 v_0^2 + 1)^3 = u_1^2 v_1^4 (u_1^2 v_1 + 1)^3 \\
&= u_2^4 v_2^6 (u_2 + 1)^3 = u_3^6 v_3^5 (1 + v_3)^3 = u_4^5 v_4^4 (u_4 v_4^2 + 1)^3 \\
&= u_5^4 v_5^3 (u_5^2 v_5^3 + 1)^3 = u_6^3 v_6^2 (u_6^3 v_6^4 + 1)^3 = u_7^3 (u_7 v_7^2 - 1)^5, \\
Z &= u_0 v_0^2 (u_0^3 v_0^2 + 1)^2 = u_1^2 v_1^3 (u_1^2 v_1 + 1)^2 \\
&= u_2^3 v_2^4 (u_2 + 1)^2 = u_3^4 v_3^3 (1 + v_3)^2 = u_4^3 v_4^2 (u_4 v_4^2 + 1)^2 \\
&= u_5^2 v_5 (u_5^2 v_5^3 + 1)^2 = u_6 (u_6^3 v_6^4 + 1)^2 = u_7^2 (u_7 v_7^2 - 1)^3.
\end{aligned}$$

L'application  $q$  donne une résolution minimale de la surface  $S$  (plongée dans  $\mathbb{C}^3$ ) d'équation  $X^2 = Y(Y^2 + Z^3)$ .

6.1.5. *Type  $E_8$ .* — Soient  $\mathcal{U}_k$ ,  $0 \leq k \leq 8$ , des copies de  $\mathbb{C}^2$  de coordonnées  $(u_k, v_k)$ . On considère la surface  $\tilde{S}$  (lisse) (resp. la famille des courbes rationnelles lisses  $d$  de  $\tilde{S}$ ) définie par les recollements (resp. par les équations) :

$$\begin{aligned}
u_k &= v_{k-1} u_{k-1}^2, & v_k &= 1/u_{k-1} & (1 \leq k \leq 7), & d_k &: u_k = v_{k-1} = 0, \\
v_8 &= (v_5 + 1) u_5^2, & v_8 &= 1/u_5, & & d_8 &: u_8 = v_5 + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Chacune de ces courbes rationnelles a une auto-intersection  $-2$ , et le graphe dual associé à leur réunion est  $E_8$  :



A l'aide des cycles définis par les diagrammes suivants :

$$C(X) : \begin{array}{cccccccc} 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 10 & 5, & \\ & & & & 8 & & & \end{array} \quad C(Y) : \begin{array}{cccccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 7 & 4 \\ & & & & 5 & & & \end{array}$$

$$C(Z) : \begin{array}{cccccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 \\ & & & & 3 & & & \end{array}$$

on définit une application  $q : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{C}^3$  dont les restrictions aux ouverts précédents sont données par :

$$\begin{aligned}
X &= v_0^3 (u_0^5 v_0^4 + 1)^8 = u_1^3 v_1^6 (u_1^4 v_1^3 + 1)^8 = u_2^6 v_2^9 (u_2^3 v_2^2 + 1)^8 = u_3^9 v_3^{12} (u_3^2 v_3 + 1)^8 \\
&= u_4^{12} v_4^{15} (u_4 + 1)^8 = u_5^{15} v_5^{10} (v_5 + 1)^8 = u_6^{10} v_6^5 (u_6 v_6^2 + 1)^8 = u_7^5 (u_7^2 v_7^3 + 1)^8 \\
&= u_8^8 v_8 (u_8 v_8^2 - 1)^{10}, \\
Y &= v_0^2 (u_0^5 v_0^4 + 1)^5 = u_1^2 v_1^4 (u_1^4 v_1^3 + 1)^5 = u_2^4 v_2^6 (u_2^3 v_2^2 + 1)^5 = u_3^6 v_3^8 (u_3^2 v_3 + 1)^5 \\
&= u_4^8 v_4^{10} (u_4 + 1)^5 = u_5^{10} v_5^7 (v_5 + 1)^5 = u_6^7 v_6^4 (u_6 v_6^2 + 1)^5 = u_7^4 v_7 (u_7^2 v_7^3 + 1)^5 \\
&= u_8^5 (u_8 v_8^2 - 1)^7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= u_0 v_0^2 (u_0^5 v_0^4 + 1)^3 = u_1^2 v_1^3 (u_1^4 v_1^3 + 1)^3 = u_2^3 v_2^4 (u_2^3 v_2^2 + 1)^3 = u_3^4 v_3^5 (u_3^2 v_3 + 1)^3 \\ &= u_4^5 v_4^6 (u_4 + 1)^3 = u_5^6 v_5^4 (v_5 + 1)^3 = u_6^4 v_6^2 (u_6 v_6 + 1)^3 = u_7^2 (u_7^2 v_7^3 + 1)^3 \\ &= u_8^3 (u_8 v_8 - 1)^4. \end{aligned}$$

L'application  $q$  est une désingularisation minimale de la surface  $S$  (plongée dans  $\mathbb{C}^3$ ) d'équation  $X^2 = Y^3 + Z^5$ .

## 6.2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.2

6.2.1. *Démonstration de (i) : plan de la démonstration.* — Pour tout  $\rho \in \text{Irr}(G)$ , considérons le fibré  $\mathcal{F}_\rho$  (défini en paragraphe 2.7). On a  $(\text{rg } \mathcal{F}_\rho, c_1(\mathcal{F}_\rho)) = \pi(\rho)$  (prop. 1.2, cor. 2.9).

Nous allons montrer, cas par cas, qu'il existe un et un seul  $d_\rho \in \text{Irr}(D)$  tel que  $\deg(\mathcal{F}_\rho|_{d_\rho}) = 1$  et  $\deg(\mathcal{F}_\rho|_d) = 0$  pour  $d \neq d_\rho$ ,  $d \in \text{Irr}(D)$ . Par inspection on vérifiera que  $\rho \mapsto d_\rho$  est bijective et que  $(d_{\rho_i}, d_{\rho_j}) = a_{ij}$  pour  $\rho_i \neq \rho_j$ . On aura donc  $c_1(\mathcal{F}_\rho) = b_{d_\rho}$  ce qui achèvera la démonstration de (i).

Le fibré  $\mathcal{F}_\rho$  s'obtient en annulant la torsion de  $q^* \mathcal{M}_\rho$ , torsion qui est à support dans  $D$ . On a une résolution (induite par celle de 4.6) :

$$\mathcal{M}_\rho \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}'}} \mathcal{O}_{\mathcal{S}'} \xrightarrow{T_\rho^-} \mathcal{M}_\rho \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}'}} \mathcal{O}_{\mathcal{S}'} \rightarrow \mathcal{M}_\rho \rightarrow 0$$

d'où une suite exacte sur  $\tilde{\mathcal{S}}$  :

$$\mathcal{M}_\rho \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}'}} \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}} \xrightarrow{\tilde{T}_\rho^-} \mathcal{M}_\rho \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}'}} \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}} \rightarrow q^* \mathcal{M}_\rho \rightarrow 0$$

et par suite un homomorphisme surjectif :

$$\mathcal{M}_\rho \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}'}} \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}} \xrightarrow{\tilde{\omega}_\rho} \mathcal{F}_\rho \rightarrow 0.$$

Les modules  $\mathcal{M}_\rho$  sont des  $\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}$ -modules libres, et les homomorphismes  $T_\rho^- = \theta_\rho \otimes \text{Id}_{\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}}} - \text{Id}_{\mathcal{M}_\rho} \otimes X$  ont été décrits par des matrices (§ 5.5).

Sur chaque ouvert  $\mathcal{U}_k$  de  $\tilde{\mathcal{S}}$  on va décrire un sous-module libre  $L_k$  de  $(\mathcal{M}_\rho \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}'}} \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{S}}})|_{\mathcal{U}_k}$  tel que la projection  $\tilde{\omega}_\rho|_{\mathcal{U}_k}$  induise un isomorphisme de  $L_k$  sur  $L_k$  sur  $\mathcal{F}_\rho|_{\mathcal{U}_k}$ .

Le  $c_1(\mathcal{F}_\rho)$  s'obtient alors en examinant les diviseurs sur  $D$  des matrices de changement de base de  $L_k$  à  $L_{k'}$ , sur  $\mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}_{k'}$ . Comme on connaît explicitement les matrices décrivant  $T_\rho^-$  et l'application  $q|_{\mathcal{U}_k} : \mathcal{U}_k \rightarrow \mathcal{S}$ , le calcul est purement mécanique. On se bornera donc à traiter l'exemple de  $\mathbf{A}_n$  et l'exemple de la représentation  $\rho_5$  de  $\mathbf{E}_8$  (correspondant au sommet central de  $\mathbf{E}_8$ ).

6.2.2. *Démonstration de (i), type  $\mathbf{A}_n$  ( $n \geq 1$ ).* — Soit  $j$  un entier,  $1 \leq j \leq n$ . En vue de la définition de  $q|_{\mathcal{U}_k}$  (voir § 6.1.1) on a  $q^* \bar{Z}^j|_{\mathcal{U}_k} = u_k^j v_k^j$ ,  $q^* \bar{Y}|_{\mathcal{U}_k} = u_k^k v_k^{k+1}$ ,  $0 \leq k \leq n$ . Par

conséquent, si  $k \geq j$ ,  $q^* \bar{Z}^j|_{\mathcal{U}_k}$  divise  $q^* \bar{Y}|_{\mathcal{U}_k}$ , et si  $k < j$ ,  $q^* \bar{Y}|_{\mathcal{U}_k}$  divise  $q^* \bar{Z}^j|_{\mathcal{U}_k}$ ; et par suite le  $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_k}$ -module  $\mathcal{F}_{\rho_j}|_{\mathcal{U}_k}$  est isomorphe au module libre de rang 1,  $L_k$ , engendré par :

$$\begin{aligned} s_1(j) & \text{ si } k \geq j, \\ s_2(j) & \text{ si } k < j \end{aligned}$$

(voir § 5.5.1).

On a donc  $\deg \mathcal{F}_{\rho_j}|_{\mathcal{U}_k} = 0$  si  $k \neq j$ ,  $1 \leq k \leq n$ , car les changements de base sur  $\mathcal{U}_{k-1} \cap \mathcal{U}_k$  sont triviaux, et  $\deg \mathcal{F}_{\rho_j}|_{\mathcal{U}_j} = 1$ , car le changement de base sur  $\mathcal{U}_{j-1} \cap \mathcal{U}_j$  est :  $s_2(j) = v_j s_1(j)$ . Par suite  $d_{\rho_j} = d_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , et  $(d_i, d_j) = a_{ij}$ ,  $1 \leq i \neq j \leq n$ , d'où (i).

6.2.3. Cas  $\rho_5$ , type  $E_8$ . — Avec la décomposition  $M_{\rho_5} = M_{\rho_5} \oplus M_{\epsilon\rho_5}$ , l'homomorphisme  $T_{\rho_5}^-$  est de la forme :

$$\begin{bmatrix} [-X \text{Id}_{M_{\rho_5}}] & [\theta_{\epsilon\rho_5}] \\ [\theta_{\rho_5}] & [-X \text{Id}_{M_{\epsilon\rho_5}}] \end{bmatrix}$$

où  $[\theta_{\rho_5}]$  et  $[\theta_{\epsilon\rho_5}]$  ont été décrites en paragraphe 5.5.5 avec des bases qu'on notera de la façon suivante :  $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$  pour  $M_{\rho_5}$  et  $(s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12})$  pour  $M_{\epsilon\rho_5}$  où les  $s_i$ ,  $1 \leq i \leq 12$ , sont homogènes de degrés  $(5, 9, 13, 17, 21, 25)$  et  $(7, 11, 15, 15, 19, 23)$  respectivement (§ 5.3.5).

Nous allons montrer que le  $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_k}$ -module  $\mathcal{F}_{\rho_5}|_{\mathcal{U}_k}$  est isomorphe au module libre de rang 6,  $L_k$ , engendré par :

$$\begin{aligned} s_1, s_2, s_3, s_7, s_8, s_9 & \text{ si } 0 \leq k \leq 4, \\ s_1, s_2, s_3, s_7, s_8, s_{10} & \text{ si } 5 \leq k \leq 8. \end{aligned}$$

Notons  $c_i$  la colonne correspondante à  $T_{\rho_5}^-(s_i)$ ,  $1 \leq i \leq 12$ , de la matrice associée à  $T_{\rho_5}^-$  avec les bases précédentes. Par abus de notation on écrira, dans ce paragraphe,  $X, Y, Z$ , à la place de  $q^* X, q^* Y, q^* Z$ , respectivement. En vue de la définition du morphisme de désingularisation  $q$  (§ 6.1.5) on a :

Sur  $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$  :  $X$  divise  $c_4, c_5, c_6, c_{10}$ , et  $Y$  divise  $c_2, c_3$ , d'où on peut éliminer  $s_4, s_5, s_6, s_{10}$  et  $s_{11}, s_{12}$  respectivement.

Sur  $\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_4$  :  $X$  divise  $c_4, c_5, c_6$ , et  $Y$  divise  $c_2, c_3$ ; d'où on peut éliminer  $s_4, s_5, s_6$  et  $s_{11}, s_{12}$  respectivement. Par ailleurs  $Z^2$  divise  $c_{10}$ , donc on peut former une combinaison linéaire de la forme  $c_{10}/Z^2 + \star c_5/X$  qui soit divisible par  $X/Z^2$ , d'où on peut éliminer  $s_{10}$ .

Sur  $\mathcal{U}_5, \mathcal{U}_6$  : par les mêmes propriétés de divisibilité que pour  $\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_4$ , on peut éliminer  $s_4, s_5, s_6, s_{11}, s_{12}$ . Or la combinaison linéaire  $c_1/Z^2 + \star c_5/X$  précédente est divisible par  $Z^3/X$ , d'où on peut éliminer  $s_9$ .

Sur  $\mathcal{U}_7$  :  $Z$  divise  $c_1, c_7$  et  $Z^2$  divise  $c_2, c_3, c_8, c_9$ ; d'où on peut éliminer  $s_{12}, s_6$  et  $s_9, s_{11}, s_4, s_5$  respectivement.

Sur  $\mathcal{U}_8$  :  $Y$  divise  $c_2, c_3, c_8, c_9$  et  $YZ$  divise  $c_4$ , d'où on peut éliminer  $s_{11}, s_{12}, s_5, s_6$  et  $s_9$  respectivement. Par ailleurs  $Z^2$  divise  $c_{10}$ , donc on peut former une combinaison linéaire de la forme  $c_{10}/Z^2 + \star c_8/Y$  qui soit divisible par  $Z^2/Y$ , d'où on peut éliminer  $s_9$ .

La discussion précédente montre que la projection  $\varpi_{\rho_5}|_{\mathcal{U}_5}$  induit un homomorphisme surjectif de  $L_k$  sur  $\mathcal{F}_{\rho_5}|_{\mathcal{U}_k}$ ; l'injectivité résulte du corollaire 2.10(ii).

Finalement, on a  $\deg \mathcal{F}_{\rho_5}|_{d_k} = 0$  si  $k \neq 5$ ,  $1 \leq k \leq 8$ , car les changements de base sur  $\mathcal{U}_{k-1} \cap \mathcal{U}_k$  ( $k \neq 5$ ,  $1 \leq k \leq 7$ ) et sur  $\mathcal{U}_8 \cap \mathcal{U}_5$  sont triviaux; et  $\deg \mathcal{F}_{\rho_5}|_{d_5} = 1$ , parce que sur  $\mathcal{U}_4 \cap \mathcal{U}_5$  on a la relation :

$$s_9 = \star(v_5 + 1)s_{10} + f(s_1, s_2, s_3, s_7, s_8)$$

où  $f$  est une combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_5}$ , et où  $(v_5 + 1)$  provient de la restriction à  $\mathcal{U}_5$  du quotient  $X^2/Z^5$ .

6.2.4. *Fin de la démonstration.* — La représentation canonique  $c$  est (avec les notations de paragraphe 3.7)  $\rho_1 \oplus \rho_n$  pour le type  $A_n$  ( $n \geq 1$ ),  $\rho_2$  pour le type  $D_n$  ( $n \geq 4$ ), et  $\rho_1$  pour les types  $E_6, E_7, E_8$ . Avec les notations de paragraphe 6.1 pour les composantes irréductibles du diviseur  $D$  on trouve dans la démonstration de (i) :

$$\pi(c) = \begin{cases} (2, b_{d_1} + b_{d_n}) \text{ pour le type } A_n & (n \geq 1), \\ (2, b_{d_2}) \text{ pour le type } D_n & (n \geq 4), \\ (2, b_{d_1}) \text{ pour les types } E_6, E_7, E_8. \end{cases}$$

Par ailleurs, le cycle fondamental  $\mathcal{Z}$  est égal à  $\sum_{k=1}^n d_k$  pour le type  $A_n$ , et il est représenté par les diagrammes suivants pour les autres types :

Type	$\mathcal{Z}$
$D_n(n \geq 4)$	1 2 ... 2 1 1
$E_6$	1 2 3 2 1 2
$E_7$	2 3 4 3 2 1 2
$E_8$	2 3 4 5 6 4 2 3

On vérifie donc, avec les conventions de paragraphe 1.1, les égalités dans  $K(\mathcal{F})$  :

$$(\mathcal{Z}) = \begin{cases} (0, -b_{d_1} - b_{d_n}) \text{ pour le type } A_n & (n \geq 1), \\ (0, -b_{d_2}) \text{ pour le type } D_n & (n \geq 4), \\ (0, -b_{d_1}) \text{ pour les types } E_6, E_7, E_8. \end{cases}$$

Par conséquent on a (dans tous les cas) l'égalité :

$$\pi(2 - c) = [\mathcal{Z}].$$

Par ailleurs, on a, pour  $i \neq 0$  :

$$(c - 2)\rho_i = \sum_j a_{ij}\rho_j - 2\rho_i$$



d'où :

$$\pi((c-2)\rho_i) = (0, \sum_{j>0} a_{ij}\rho_j - 2\rho_i).$$

Or l'élément  $e_{d_i}$  de  $\text{Pic}_D(\tilde{\mathcal{S}})$  s'exprime dans la base  $\{b_d\}$  de  $\text{Pic}(\tilde{\mathcal{S}})$  de la façon suivante :

$$e_{d_i} = \sum_{j>0} a_{ij}b_{d_j} - 2b_{d_i}$$

où on a  $d_i$  à la place de  $d_{\rho_i}$ . Par suite de ce qui précède et de la proposition 1.2(iii), on a :

$$\pi((c-2)\rho_i) = [d_{\rho_i}], \quad \forall i > 0,$$

d'où l'assertion (ii).

L'assertion (i) et le fait que  $\pi(\rho_0) = (1, 0)$  impliquent (iii). L'assertion (iv) résulte immédiatement de la dernière partie de (ii). L'assertion (v) est conséquence du fait que  $R(G)/(2-c)R(G)$  est isomorphe à  $\tilde{K}^G(\mathcal{V} - \{0\})$  (voir § 1.5), et du fait que

$$q^{-1} \circ p|_{\mathcal{V} - \{0\}} : \mathcal{V} - \{0\} \rightarrow \tilde{\mathcal{S}} - D$$

est un morphisme étale, ce qui achève la démonstration du théorème.

### 7. Corollaire : Caractérisation de la désingularisation minimale

Soit  $\mathcal{V}$  le germe de  $\mathbb{C}^2$  à l'origine,  $G$  un sous-groupe fini de  $SL(2, \mathbb{C})$  qui agit librement sur  $\mathcal{V} - \{0\}$ ;  $p : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{S} = \mathcal{V}/G$  le morphisme quotient. Alors la désingularisation minimale  $q : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$  est le platificateur normal minimal de  $\mathcal{V}$  sur  $\mathcal{S}$ .

*Démonstration.* — Soit  $\bar{q} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S}$  le platificateur normal minimal de  $\mathcal{V}$  sur  $\mathcal{S}$ . En vertu de la proposition 2.4 on sait que  $q : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$  est un platificateur de  $\mathcal{V}$  sur  $\mathcal{S}$ , qui de plus est normal car  $\tilde{\mathcal{S}}$  est lisse. Par suite, le morphisme  $q$  se factorise par  $\mathcal{P}$ , i. e. on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{S}} & & \\ \downarrow q & \searrow \sigma & \\ \mathcal{S} & & \mathcal{P} \\ & \nearrow \bar{q} & \end{array}$$

Par minimalité, le morphisme  $\sigma$  est un isomorphisme en dehors du diviseur exceptionnel  $D \subset \tilde{\mathcal{S}}$ . Nous allons montrer que, en fait,  $\sigma$  est un isomorphisme. S'il ne l'est pas, alors, en vertu de la normalité de  $\mathcal{P}$  il contracte un sous-diviseur  $D^c \subset D$ , i. e.  $\sigma(D^c)$  est de dimension zéro. Soit  $\rho$  une représentation irréductible de  $G$  dans un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E_\rho$ . Posons  $\overline{\mathcal{F}}_\rho = \bar{q}^* \mathcal{M}_\rho / \text{Tors}_{\mathcal{P}}$  où  $\mathcal{M}_\rho = \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(E_\rho, \mathcal{O}_{\mathcal{V}})$ ; on a :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{V}} = \bigoplus_{\rho} (\mathcal{M}_\rho \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho) \quad \text{d'où} \quad \bar{q}^* \mathcal{O}_{\mathcal{V}} / \text{Tors}_{\mathcal{P}} = \bigoplus_{\rho} (\overline{\mathcal{F}}_\rho \otimes_{\mathbb{C}} E_\rho).$$

Par conséquent,  $\overline{\mathcal{F}}_\rho$  est localement libre car  $\mathcal{P}$  est un platificateur de  $\mathcal{V}$  sur  $\mathcal{S}$ . De même, le  $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ -module  $\mathcal{F}_\rho = q^* \mathcal{M}_\rho / \text{Tors}_{\mathcal{S}}$  est localement libre, et par la commutativité du diagramme précédent on a :

$$\sigma^* \overline{\mathcal{F}}_\rho = \mathcal{F}_\rho.$$

Soit  $\rho$  telle que la composante irréductible  $d_\rho$  de  $D$  (th. 2.2) soit contractée par  $\sigma$ , i. e. telle que  $d_\rho \subset D^c$ . Alors on a une contradiction, car d'une part la restriction de  $\mathcal{F}_\rho$  à  $d_\rho$  est non triviale [ $\text{car}(c_1(\mathcal{F}_\rho) \cdot d_\rho) = 1$ ], et d'autre part  $\overline{\mathcal{F}}_\rho$  est libre au voisinage du point  $\sigma(d_\rho) \in \mathcal{P}$ , et par suite  $\sigma^* \overline{\mathcal{F}}_\rho$  est trivial au voisinage de  $d_\rho$ . Par conséquent  $D^c$  est vide et  $\sigma$  est un isomorphisme.

#### RÉFÉRENCES

- [A] M. ARTIN, *On Isolated Rational Singularities of Surfaces* (Amer. J. Math., 88, 1966, p. 129-136).
- [Bo] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. IV, V, VI, Hermann, Paris, 1968.
- [Br] E. BRIESKORN, *Rationale Singularitäten Komplexer Flächen* (Inv. Math., 4, 1968, p. 336-358).
- [Ch] C. CHEVALLEY, *Invariants of Finite Groups Generated by Reflections* (Amer. J. Math., Vol. 77, 1955, p. 778-782).
- [Co] A. M. COHEN, *Finite Complex Reflection Groups* (Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 1976, p. 379-436).
- [D] P. DUVAL, *Homographies, Quaternions and Rotations*, Oxford Clarendon Press, 1964.
- [E] EUCLIDE, *Éléments*, Livre XIII, § 18.A, Dover, 1956.
- [G] G. GONZALEZ-SPRINBERG, *Résolution de Nash des points doubles rationnels* (Ann. de l'Inst. Fourier, vol. 32, n° 2, 1982, p. 111-178).
- [G-V] G. GONZALEZ-SPRINBERG et J. L. VERDIER, *Points doubles rationnels et représentations de groupes* (C.R. Acad. Sc., Paris, t. 293, 1981, p. 111-113).
- [Gr] A. GROTHENDIECK, *Éléments de géométrie algébrique IV*, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.
- [H] F. HIRZEBRUCH, *Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen* (Math. Ann., vol. 126, 1953, p. 1-22).
- [K] F. KLEIN, *The Icosahedron and the General 5th Degree Equation*, 1884, Dover reprint 1956.
- [Kn] H. KNORRER, *Lettre* (décembre 1981).
- [L] H. LAUFER, *Normal Two-Dimensional Singularities* (Annals of Math. Studies, n° 71, Princeton, 1971).
- [M] J. MCKAY, *Graphs, Singularities and Finite Groups* (Proc. of Symp. in Pure Math., vol. 37, 1980, p. 183-186).
- [P] PLATON, *Timée*.
- [Se] J.-P. SERRE, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris, 1967.
- [Sl] P. SLODOWY, *Simple Singularities and Simple Algebraic Groups* (Springer Lecture Notes, n° 815, 1980).
- [St] J. STEINBERG, *Subgroups of  $SU_2$  and Dynkin Diagrams*, preprint.
- [S-T] G. C. SHEPHARD et J. A. TODD, *Finite Unitary Reflection Groups* (Canad. J. Math., vol. 5, 1953, p. 364-383).

(Manuscrit reçu le 30 avril 1982,  
révisé le 25 mars 1983)

G. GONZALEZ-SPRINBERG  
Faculté des Sciences de Tours,  
Département de Mathématiques  
et  
École Normale Supérieure,  
Centre de Mathématiques,  
E.R.A. 589.  
J. L. VERDIER  
École Normale Supérieure,  
Centre de Mathématiques,  
E.R.A. 589.