

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CHRISTIAN KASSEL

Stabilisation de la K -théorie algébrique des espaces topologiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 16, n° 1 (1983), p. 123-149

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1983_4_16_1_123_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

STABILISATION DE LA K-THÉORIE ALGÈBRIQUE DES ESPACES TOPOLOGIQUES

CHRISTIAN KASSEL

Dans ce travail, on se place dans le cadre de la K-théorie algébrique des espaces topologiques. Défini par F. Waldhausen ([27], [28]) pour résoudre des problèmes de topologie géométrique, le foncteur $A(X)$ qui associe à tout espace topologique pointé X son espace de K-théorie algébrique, se « stabilise » en une théorie d'homologie $A^s(X)$ au moyen d'un procédé analogue à celui qui permet d'obtenir l'homotopie stable à partir du foncteur identité (voir aussi [17]). Le résultat principal de [28] est que l'homotopie stable est en facteur direct dans $A^s(X)$.

Notre contribution à cette théorie consiste à établir, lorsque X est un point $*$, l'existence d'une suite spectrale (th. 2.4) dont l'aboutissement est l'homotopie $\pi_* A^s(*)/\pi_*^s$ du facteur complémentaire et dont les termes E_{pq}^2 sont en relation étroite avec l'homologie $H_*(GL_n(\mathbb{Z}), M'_n(\mathbb{Z}))$ du groupe linéaire général $GL_n(\mathbb{Z})$ opérant par conjugaison sur le groupe $M'_n(\mathbb{Z})$ des matrices carrées (d'ordre n) de trace nulle à coefficients entiers.

Les résultats topologiques connus sur l'aboutissement de la suite spectrale nous permettent d'obtenir des informations nouvelles sur ces groupes d'homologie (dont on sait qu'ils sont finis [4], [5]). On a notamment le résultat suivant (th. 3.4) :

THÉORÈME. — Soit n assez grand. Alors :

- (a) $H_1(GL_n(\mathbb{Z}), M'_n(\mathbb{Z})) = H_2(GL_n(\mathbb{Z}), M'_n(\mathbb{Z})) = 0$;
- (b) $H_3(GL_n(\mathbb{Z}), M'_n(\mathbb{Z}))$ n'est pas nul : il est d'ordre 2 ou 4.

On utilise cet énoncé dans ([10], [11]) pour faire des calculs sur l'homologie du groupe $SL_n(\mathbb{Z}[\varepsilon])$ et sur la K-théorie algébrique de l'anneau $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ des nombres duaux entiers ($\varepsilon^2 = 0$). On montre ainsi que $K_3(\mathbb{Z}[\varepsilon])$ n'a pas de p -torsion pour $p \neq 2$ et 3.

La construction de la suite spectrale se fait en deux temps. Dans le paragraphe 1 consacré à la première étape, nous montrons qu'elle est conséquence d'un formalisme très général qui consiste à définir une K-théorie algébrique à partir d'une catégorie d'espaces topologiques, appelés ici \mathcal{A} -espaces, englobant notamment les anneaux topologiques et l'espace $Q = \Omega^\infty S^\infty$ de l'homotopie stable. Comme on sait ([27], [18]), l'espace $A(*)$ de Waldhausen est la K-théorie algébrique de Q . Le procédé de stabilisation s'applique ici également et permet d'obtenir un espace $K^s(R)$ de K-théorie stable pour tout \mathcal{A} -espace R . Ces définitions étant posées, on construit alors la suite spectrale :

$$E_{pq}^2 = H_p(F(R), M(\pi_q R)) \Rightarrow \pi_{p+q} K^s(R)$$

qui converge vers l'homotopie de la K-théorie stable de R . Dans le terme E_{pq}^2 , le groupe fondamental de l'espace acyclique $F(R)$, isomorphe au groupe de Steinberg $St(\pi_0 R)$, opère par conjugaison sur les matrices à coefficients dans les groupes d'homotopie de R .

On étudie le cas particulier du \mathcal{A} -espace $Q = \Omega^\infty S^\infty$ au paragraphe 2. Pour mettre la suite spectrale obtenue au paragraphe 1 sous la forme définitive énoncée dans le théorème 2.4, on utilise les résultats de Waldhausen [28] sur la décomposition de $A^s(X)$ ainsi qu'une propriété homologique du groupe symétrique (démontrée à part au paragraphe 4). La fin du paragraphe 2 est consacrée à l'étude de certains espaces liés à A^* .

Au paragraphe 3, les théorèmes 3.2 et 3.4 concernant la K-théorie stable de l'anneau \mathbb{Z} et l'homologie $H_*(GL_n(\mathbb{Z}), M'_n(\mathbb{Z}))$ sont des applications (*via* le formalisme de la K-théorie stable [12], [14]) des résultats du paragraphe 2. On en déduit des informations sur l'homotopie de la fibre F de l'application naturelle de A^* vers la K-théorie algébrique de \mathbb{Z} .

Les travaux de Waldhausen sont à l'origine des recherches présentées ici : je me suis servi essentiellement de deux articles ([27], [28]) que leur auteur m'a longuement expliqués. Je le remercie ainsi que J. L. Loday pour les échanges fréquents que nous avons eus sur ce sujet.

NOTATIONS. — Étant donné un anneau A , pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $M_n(A)$ l'anneau des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans A et par $GL_n(A)$ le groupe des éléments inversibles de $M_n(A)$. Les inclusions usuelles permettent de définir les limites inductives :

$$GL(A) = \varinjlim_n GL_n(A) \quad \text{et} \quad M(A) = \varinjlim_n M_n(A).$$

Le groupe $E(A)$ des matrices élémentaires de $GL(A)$ a pour extension centrale universelle le groupe de Steinberg $St(A)$.

L'homomorphisme Tr qui à toute matrice $(m_{ij})_{ij}$ de $M_n(A)$ associe la classe de $\sum_i m_{ii}$ dans le quotient de A par le sous-groupe $[A, A]$ engendré par les éléments de la forme $ab - ba$ ($a, b \in A$), est invariant par conjugaison. Son noyau est noté $M'_n(A)$. On pose $M'(A) = \varinjlim_n M'_n(A)$.

Les groupes de K-théorie algébrique et de K-théorie stable de l'anneau A sont respectivement notés $K_i(A)$ et $K_i^s(A)$. Rappelons ([8], [12], [14]) que $K_0^s(A) \cong A/[A, A]$ et que $K_1^s(A) \cong H_1(A, A)$ (ce groupe d'homologie de Hochschild est isomorphe à $\Omega_{A/\mathbb{Z}}^1$ lorsque A est commutatif).

Enfin \mathbb{Z} désigne comme d'habitude l'anneau des entiers relatifs; \mathbb{Q} est son corps de fractions. Pour tout nombre premier p , $\mathbb{Z}_{(p)}$ est le p -localisé de \mathbb{Z} : c'est le sous-anneau local de \mathbb{Q} dont l'idéal maximal est engendré par p .

1. K-théorie stable et suite spectrale

Dans ce paragraphe, nous montrons que les notions de K-théorie algébrique et de K-théorie stable d'un anneau se généralisent à certains espaces topologiques. L'étude de la K-théorie stable ainsi généralisée mène à la suite spectrale annoncée dans l'introduction.

DÉFINITION 1.1. — Un espace topologique pointé R est appelé un \mathcal{A} -espace s'il vérifie les quatre conditions suivantes :

(a) Il existe un foncteur $X \mapsto R[X]$ de la catégorie des espaces topologiques dans elle-même, qui est une théorie d'homologie dont les coefficients sont les groupes d'homotopie de l'espace R . En d'autres termes, les foncteurs $X \mapsto \pi_n R[X]$ vérifient les axiomes d'une théorie d'homologie généralisée et, lorsque X est un point $*$, alors $\pi_n R[*] \cong \pi_n R$.

(b) Pour tout groupe topologique G , l'ensemble $\pi_0 R[G]$ des composantes connexes par arcs de $R[G]$ possède (naturellement en G) une structure d'anneau avec unité. De même, les autres groupes $\pi_i(R[G])$ sont des $\pi_0(R[G])$ -bimodules.

(c) A tout groupe topologique G , on peut associer fonctoriellement un espace connexe $B\mathcal{G}l(R[G])$ et une fibration homotopique :

$$\mathcal{M}(R[G]) \rightarrow B\mathcal{G}l(R[G]) \rightarrow BGL(\pi_0 R[G]).$$

dont la base est le classifiant du groupe discret $GL(\pi_0 R[G])$. La fibre $\mathcal{M}(R[G])$ est connexe et simplement connexe et on a :

$$\pi_i \mathcal{M}(R[G]) = M(\pi_{i-1} R[G]) \quad (i \geq 2).$$

(d) L'action de $\pi_1 BGL(\pi_0 R[G])$ sur l'homotopie de $\mathcal{M}(R[G])$ se déduit de l'action de $\pi_0 R[G]$ donnée en (b) via la conjugaison des matrices.

Ces quatre axiomes constituent les conditions minimales nécessaires à l'élaboration des notions de K-théorie algébrique et de K-théorie stable d'un \mathcal{A} -espace. C'est l'abstraction d'un certain nombre de situations, parfois très différentes, étudiées dans ([18], [24], [27]). Donnons maintenant les exemples fondamentaux de \mathcal{A} -espaces.

1.2. EXEMPLES. — (a) L'exemple le plus simple de \mathcal{A} -espace est un espace topologique discret R qui possède une structure d'anneau. De tels espaces seront appelés par la suite *anneaux discrets*.

Il s'agit de définir $R[X]$ pour tout espace topologique X . Soit K un ensemble quelconque. On pose :

$$C_R(K) = \bigoplus_{x \in K} R_x \quad \text{avec} \quad R_x = R.$$

Le foncteur C_R s'étend aux ensembles simpliciaux de la manière suivante : pour tout ensemble simplicial K , $C_R(K)$ est la réalisation du groupe abélien simplicial $[n] \mapsto C_R(K_n)$. Pour obtenir $R[X]$, on applique C_R à l'ensemble simplicial $\text{Sing}(X)$ des simplexes singuliers de X :

$$R[X] = C_R(\text{Sing}(X)).$$

Il est bien connu (cf. [1]) que $R[X]$ est une théorie d'homologie et que ses groupes d'homotopie sont les groupes d'homologie singulière de X à coefficients dans R :

$$\pi_n R[X] = H_n(X, R).$$

Lorsque G est un groupe topologique, $R[G]$ possède une structure d'anneau topologique. Pour vérifier la condition (c) de 1.1, il faut introduire la deuxième série d'exemples de \mathcal{A} -espaces.

(b) Il s'agit des anneaux topologiques (ou simpliciaux). Lorsque R est un tel espace, la définition de $B\mathcal{G}l(R)$ est due à Waldhausen ([27], §1) : on identifie $B\mathcal{G}l(R)$ à la limite inductive des classifiants des monoïdes $\widehat{Gl}_n(R)$ des matrices carrées à coefficients dans R , dont l'image dans $M_n(\pi_0 R)$ est inversible. La définition de $R[X]$ donnée plus haut s'étend trivialement au cas où R est un anneau topologique et si de plus G est un groupe topologique, alors $R[G]$ est également un anneau topologique. *Les anneaux topologiques* (discrets ou non) sont donc bien des \mathcal{A} -espaces.

(c) Le \mathcal{A} -espace fondamental en vue duquel la terminologie a été créée est l'espace de lacets infinis $Q = \Omega^\infty S^\infty$. On doit aussi à Waldhausen ([27], [28]) (voir aussi [18], [24]) la démonstration du fait que Q est un \mathcal{A} -espace.

La théorie d'homologie associée est l'homotopie stable :

$$Q[X] = \Omega^\infty S^\infty(X_+)$$

(X_+ étant la réunion disjointe de X et d'un point) et les groupes d'homotopie du \mathcal{A} -espace Q sont les groupes d'homotopie stable des sphères :

$$\pi_n Q = \pi_n^s.$$

Au paragraphe 2, on donnera une description de $B\mathcal{G}l(Q[G])$.

(d) L'espace Q ainsi que les anneaux topologiques sont des cas particuliers de ce qu'on appelle dans ([18], [24], [25]) des « grouplike A_∞ -ring spaces ». Ceux-ci sont également des \mathcal{A} -espaces.

Nous sommes maintenant en mesure de définir la K -théorie algébrique d'un \mathcal{A} -espace R . En effet, d'après l'axiome (c) de 1.1, $\mathcal{M}(R)$ est simplement connexe. Par conséquent :

$$\pi_1 B\mathcal{G}l(R) \cong \pi_1 BGL(\pi_0 R) \cong GL(\pi_0 R).$$

Or le sous-groupe $E(\pi_0 R)$ des commutateurs de $GL(\pi_0 R)$ est parfait. On peut donc appliquer la construction $+$ de Quillen relativement à $E(\pi_0 R)$. On obtient ainsi l'espace $B\mathcal{G}l(R)^+$.

DÉFINITION 1.3. — *L'espace de K -théorie algébrique du \mathcal{A} -espace R est :*

$$K(R) = K_0(\pi_0 R) \times B\mathcal{G}l(R)^+.$$

Les groupes d'homotopie sont notés $K_i(R)$.

On retrouve, bien entendu, la définition de Quillen lorsque R est un anneau discret. En basses dimensions, on a :

$$\begin{aligned} K_0(R) &\cong K_0(\pi_0 R), \\ K_1(R) &\cong \pi_1 B\mathcal{G}l(R)^+ \cong GL(\pi_0 R)/E(\pi_0 R), \\ &\cong K_1(\pi_0 R). \end{aligned}$$

En dimensions supérieures, la K-théorie algébrique de R est généralement différente de celle de $\pi_0 R$ (voir [12], prop. 9.1.5 ou [14], 1.11).

Avec les définitions 1.1 et 1.3, on étend sans peine à la K-théorie algébrique des \mathcal{A} -espaces les résultats généraux concernant les anneaux topologiques ou les « A_∞ -ring spaces » énoncés dans les propositions 1.2, 1.3, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 de [27] et 9.1, 9.5 de [18].

Pour simplifier les démonstrations ultérieures, nous introduisons maintenant l'espace $B\mathcal{E}(R)$. Par définition, c'est le produit fibré homotopique de $B\mathcal{G}l(R)$ avec le classifiant $BE(\pi_0 R)$ au-dessus de $BGL(\pi_0 R)$, en sorte qu'on a le diagramme commutatif de fibrations :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}(R) & \rightarrow & B\mathcal{E}(R) & \rightarrow & BE(\pi_0 R) \\ & & \downarrow = & & \downarrow \\ \mathcal{M}(R) & \rightarrow & B\mathcal{G}l(R) & \rightarrow & BGL(\pi_0 R) \end{array}$$

[l'application verticale de droite étant induite par l'inclusion de $E(\pi_0 R)$ dans $GL(\pi_0 R)$]. Comme $\mathcal{M}(R)$ est simplement connexe, le groupe fondamental de $B\mathcal{E}(R)$ est isomorphe au groupe $E(\pi_0 R)$ qui est parfait. En appliquant la construction $+$ de Quillen à $B\mathcal{E}(R)$, on obtient l'espace $B\mathcal{E}(R)^+$ qui est simplement connexe.

LEMME 1.4. — $B\mathcal{E}(R)^+$ est le revêtement universel de $B\mathcal{G}l(R)^+$.

Preuve. — Analogie à celle de la proposition 1.1.15 de [16]. \square

Avant d'aller plus loin, étudions l'espace topologique $F(R)$ qui, par définition, est la fibre homotopique de l'application $B\mathcal{G}l(R) \rightarrow B\mathcal{G}l(R)^+$ fournie par la construction $+$. Les propriétés de $F(R)$ se résument ainsi :

PROPOSITION 1.5. — $F(R)$ est un espace acyclique dont le groupe fondamental est isomorphe au groupe de Steinberg $St(\pi_0 R)$ de l'anneau $\pi_0 R$. C'est aussi la fibre homotopique de l'application $B\mathcal{E}(R) \rightarrow B\mathcal{E}(R)^+$.

Preuve. — Elle se démontre comme la proposition 4.1. \square

Introduisons aussi la fibre théorique $\Phi(R)$ de l'application $F(R) \rightarrow F(\pi_0 R)$ induite par la projection $p : R \rightarrow \pi_0 R$. Alors l'isomorphisme :

$$\pi_1 F(R) \cong \pi_1 F(\pi_0 R) \cong St(\pi_0 R)$$

est également une conséquence du :

LEMME 1.6. — $\Phi(R)$ est simplement connexe.

Démonstration du lemme. — De la suite spectrale associée à la fibration $\Phi(R) \rightarrow F(R) \rightarrow F(\pi_0 R)$, on tire la suite exacte :

$$H_2(F(\pi_0 R)) \rightarrow H_0(F(\pi_0 R)), H_1(\Phi(R)) \rightarrow H_1(F(R)).$$

Par définition de la construction $+$, $F(R)$ et $F(\pi_0 R)$ sont acycliques. Les groupes de gauche et de droite sont nuls et par conséquent, $H_0(F(\pi_0 R)), H_1(\Phi(R)) = 0$.

Considérons maintenant le diagramme suivant dont toutes les lignes et colonnes sont par définition des fibrations :

$$(1.7) \quad \begin{array}{ccccc} \Phi(\mathbb{R}) & \rightarrow & F(\mathbb{R}) & \rightarrow & F(\pi_0 \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}(\mathbb{R}) & \rightarrow & B\mathcal{E}(\mathbb{R}) & \rightarrow & BE(\pi_0 \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F & \rightarrow & B\mathcal{E}(\mathbb{R})^+ & \rightarrow & BE(\pi_0 \mathbb{R})^+ \end{array}$$

Comme $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ est simplement connexe, la fibration verticale de gauche induit une surjection $\pi_2 F \rightarrow \pi_1 \Phi(\mathbb{R})$ de $\pi_1 F(\mathbb{R})$ -modules. Or $\pi_1 F(\mathbb{R})$ opère sur la fibre F via $\pi_1 B\mathcal{E}(\mathbb{R})^+$ qui est nul (lemme 1.4). Par conséquent $\pi_1 \Phi(\mathbb{R})$ est un $\pi_1 F(\mathbb{R})$ -module trivial, et donc :

$$\pi_1 \Phi(\mathbb{R}) \cong H_1(\Phi(\mathbb{R})) \cong H_0(F(\pi_0 \mathbb{R}), H_1(\Phi(\mathbb{R}))) = 0. \quad \square$$

1.8. STABILISATION DE LA K-THEORIE ALGEBRIQUE. — On montre maintenant que le procédé de stabilisation de la K-théorie algébrique tel qu'on le trouve dans [27], § 1, s'applique à la K-théorie algébrique des \mathcal{A} -espaces.

On utilise le fait que pour tout espace connexe X , il existe un groupe topologique $G(X)$ qui a le type d'homotopie de l'espace des lacets de X [7]. Le groupe $G(X)$ est fonctoriel en X .

Soit n un entier ≥ 2 . Considérons le carré cocartésien d'espaces :

$$\begin{array}{ccc} S^n & \longrightarrow & D_{n+1}^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{n+1}^- & \longrightarrow & S^{n+1} \end{array}$$

qui décompose la sphère S^{n+1} en ses deux hémisphères D_{n+1}^+ et D_{n+1}^- . En adoptant la terminologie définie dans [27], § 1 et dans [18], § 9, on voit que le carré précédent est (n, n) -connexe. D'après le théorème d'excision en homotopie [29], VII.7, le carré est $2n$ -homotopiquement cartésien. On lui applique maintenant le foncteur G , puis la théorie d'homologie associée à \mathbb{R} . On obtient ainsi un carré :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[GS^n] & \longrightarrow & \mathbb{R}[GD_{n+1}^+] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}[GD_{n+1}^-] & \longrightarrow & \mathbb{R}[GS^{n+1}] \end{array}$$

qui est $(n-1, n-1)$ -connexe et $(2n-1)$ -homotopiquement cartésien.

Comme on l'a noté plus haut, la proposition 1.3 de [27] (dans la version corrigée de [18], prop. 9.5) s'étend aux \mathcal{A} -espaces. Par conséquent, l'application du foncteur K de K-théorie algébrique livre un carré :

$$\begin{array}{ccc} K(\mathbb{R}[GS^n]) & \longrightarrow & K(\mathbb{R}[GD_{n+1}^+]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(\mathbb{R}[GD_{n+1}^-]) & \longrightarrow & K(\mathbb{R}[GS^{n+1}]) \end{array}$$

qui est (n, n) -connexe et $2n$ -homotopiquement cartésien. En d'autres termes, l'application induite entre les fibres des applications horizontales est $(2n+1)$ -connexe [29], VII.7. Or

D_{n+1}^+ et D_{n+1}^- sont contractiles. D'après 1.1(b), $R[GD_{n+1}^+]$ et $R[GD_{n-1}^+]$ ont le type d'homotopie de R . La fibre de l'application horizontale du haut a donc le type d'homotopie de la fibre $\tilde{K}(R[GS^n])$ de l'application $K(R[GS^n]) \rightarrow K(R)$. Quant à la fibre de la flèche horizontale du bas, elle a le type d'homotopie de l'espace des lacets $\Omega \tilde{K}(R[GS^{n+1}])$ (voir [18], appendice pour plus de détails).

On a obtenu ainsi une application $(2n+1)$ -connexe de $\tilde{K}(R[GS^n])$ dans $\Omega \tilde{K}(R[GS^{n+1}])$. Par application itérée du foncteur Ω , on obtient une application $(n+1)$ -connexe :

$$\Omega^n \tilde{K}(R[GS^n]) \rightarrow \Omega^{n+1} \tilde{K}(R[GS^{n+1}]).$$

En prenant le télescope de ces applications, on a la :

DÉFINITION 1.9. — L'espace de K-théorie stable du \mathcal{A} -espace R est défini par :

$$K^s(R) = \varinjlim_n \Omega^n \tilde{K}(R[GS^n]).$$

Ses groupes d'homotopie sont notés $K_i^s(R)$.

Du raisonnement précédent, on tire le résultat de stabilité suivant :

PROPOSITION 1.10. — Pour tout \mathcal{A} -espace R , la stabilisation induit les isomorphismes :

$$K_k^s(R) \cong \pi_{n+k} \tilde{K}(A[GS^n]) \quad \text{pour } n \geq k \quad \text{et } n \geq 2.$$

Remarque 1.11. — En suivant le procédé de [27], § 1, on peut en fait, construire une théorie d'homologie dont la valeur en un point est la K-théorie stable de R . Waldhausen a montré qu'il en est ainsi pour le \mathcal{A} -espace Q . Le cas général se traite de la même façon.

La K-théorie stable ayant été définie, il nous est maintenant possible d'énoncer le résultat fondamental de ce paragraphe. Il s'écrit en termes de l'homologie de l'espace acyclique $F(R)$ défini plus haut.

THÉORÈME 1.12. — Pour tout \mathcal{A} -espace R , il existe une suite spectrale (du premier quadrant) convergeant vers les groupes $K_i^s(R)$:

$$E_{pq}^2 = H_p(F(R), M(\pi_q R)) \Rightarrow K_{p+q}^s(R).$$

Dans les termes E_{pq}^2 , le groupe $\pi_1 F(R) \cong \text{St}(\pi_0 R)$ opère par conjugaison sur le groupe des matrices $M(\pi_q R)$ à coefficients dans l'homotopie de R .

Lorsque R est un anneau discret, $\pi_i R = 0$ pour $i \geq 1$. La suite spectrale dégénère et on retrouve un résultat de Waldhausen ([28], § 6) :

$$K_n^s(R) \cong H_n(F(R), M(R)).$$

Par ailleurs de la suite spectrale précédente, on tire également l'isomorphisme :

$$K_0^s(R) \cong K_0^s(\pi_0 R),$$

ce dernier groupe étant isomorphe au groupe d'homologie de Hochschild :

$$\cong \pi_0 R / \{xy - yx\} \quad ([14], \text{cor. 3.2}).$$

Le reste du paragraphe est consacré à la démonstration du théorème.

On choisit un entier $n \geq 2$. Le diagramme commutatif de fibrations.

$$(1.13) \quad \begin{array}{ccccc} N_n & \xrightarrow{=} & N_n & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ U_n & \longrightarrow & B\mathcal{E}(\mathbb{R}[GS^n]) & \longrightarrow & B\mathcal{E}(\mathbb{R})^+ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ F(\mathbb{R}) & \longrightarrow & B\mathcal{E}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & B\mathcal{E}(\mathbb{R})^+ \end{array}$$

définit deux espaces N_n et U_n . La suite spectrale du théorème est une réinterprétation de la suite spectrale d'homotopie stable de la fibration verticale :

$$N_n \rightarrow U_n \rightarrow F(\mathbb{R}).$$

Il convient donc d'étudier N_n et U_n . Le premier résultat dans ce sens est le suivant :

LEMME 1.14. — N_n est $(n-1)$ -connexe et, de plus :

$$\pi_i N_n = M(\pi_{i-n}(\mathbb{R})) \quad \text{pour } n \leq i \leq 2n-3.$$

Preuve. — Comme $n \geq 2$, $\pi_0 \mathbb{R}[GS^n] \simeq \pi_0 \mathbb{R}$. D'après 1.1 (c), N_n est la fibre de $\mathcal{M}(\mathbb{R}[GS^n]) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R})$ obtenue en envoyant GS^n sur un point. Comme cette application est scindée par celle qui est induite par l'inclusion de $*$ dans GS^n , on a, d'après 1.1 (c) :

$$\pi_i N_n = M(\pi_{i-1} \mathbb{R}[GS^n] / \pi_{i-1} \mathbb{R}).$$

Or $\mathbb{R}[X]$ est une théorie d'homologie. Les groupes d'homotopie de $\mathbb{R}[X]$ sont donc l'aboutissement d'une suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch de la forme :

$$H_p(X, \pi_q \mathbb{R}) \Rightarrow \pi_{p+q} \mathbb{R}[X].$$

En utilisant cette suite spectrale pour $X = GS^n \cong \Omega S^n$ dont l'homologie entière est bien connue, on obtient :

$$\begin{aligned} \pi_i N_n &= 0 & \text{si } i \leq n-1, \\ \pi_i N_n &= M(\tilde{H}_{n-1}(\Omega S^n, \pi_{i-n} \mathbb{R})), \\ &= M(\pi_{i-n} \mathbb{R}) & \text{si } n \leq i \leq 2n-3. \quad \square \end{aligned}$$

Comme N_n est simplement connexe, $\pi_1 U_n \cong \pi_1 F(\mathbb{R}) \cong \text{St}(\pi_0 \mathbb{R})$ qui est un groupe parfait. On peut donc appliquer la construction $+$ à U_n .

LEMME 1.15. — L'espace U_n^+ a le type d'homotopie de la fibre de l'application $B\mathcal{E}(\mathbb{R}[GS^n])^+ \rightarrow B\mathcal{E}(\mathbb{R})^+$, et donc de $\tilde{K}(\mathbb{R}[GS^n])$.

Preuve. — On considère le diagramme commutatif de fibrations :

$$\begin{array}{ccccc} U_n & \longrightarrow & B\mathcal{E}(\mathbb{R}[GS^n]) & \longrightarrow & B\mathcal{E}(\mathbb{R})^+ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ (\text{fibre}) & \longrightarrow & B\mathcal{E}(\mathbb{R}[GS^n])^+ & \longrightarrow & B\mathcal{E}(\mathbb{R})^+. \end{array}$$

Dans les deux suites spectrales de Serre associées, le groupe $\pi_1 B\mathcal{E}(\mathbb{R})^+ = 0$ opère trivialement sur l'homologie de la fibre. D'après le théorème de comparaison de Zeeman, les

deux applications verticales de droite étant des équivalences d'homologie, il en est de même de $U_n \rightarrow (\text{fibre})$. Comme (fibre) est simplement connexe, l'application précédente se factorise par U_n^+ . L'application $U_n^+ \rightarrow (\text{fibre})$ est une équivalence d'homologie entre deux espaces simplement connexes : c'est donc une équivalence d'homotopie faible. \square

Par définition de la K-théorie stable de \mathbb{R} et d'après la proposition 1.10 :

$$\pi_i(U_n^+) = \pi_i \tilde{K}(\mathbb{R}[\text{GS}^n]) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq n-1, \\ K_{i-n}^s(\mathbb{R}) & \text{si } n \leq i \leq 2n. \end{cases}$$

A toute théorie d'homologie h_* , la fibration $N_n \rightarrow U_n \rightarrow F(\mathbb{R})$ associe une suite spectrale de la forme :

$$E_{pq}^2 = H_p(F(\mathbb{R}), h_q(N_n)) \Rightarrow h_{p+q}(U_n).$$

Or par définition de la construction $+$, $h_{p+q}(U_n^+)$ est isomorphe à $h_{p+q}(U_n)$. Prenons maintenant pour h_* l'homotopie stable. Comme N_n et U_n^+ sont $(n-1)$ -connexes, en vertu du théorème de Freudenthal, on a :

$$h_i(N_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq n-1, \\ M(\pi_{i-n} \mathbb{R}) & \text{si } n \leq i \leq 2n-3, \end{cases}$$

et :

$$h_i(U_n^+) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq n-1, \\ K_{i-n}^s(\mathbb{R}) & \text{si } n \leq i \leq 2n-2. \end{cases}$$

On a ainsi une suite spectrale dont les termes E_{pq}^2 sont nuls pour $q \leq n-1$ et isomorphes à $H_p(F(\mathbb{R}), M(\pi_{i-n}(\mathbb{R})))$ pour $n \leq q \leq 2n-3$. En prenant n assez grand et en réindexant la suite spectrale, on obtient le résultat désiré.

2. K-théorie algébrique des espaces topologiques

Ce que Waldhausen ([27], [28]) appelle la K-théorie algébrique de l'espace topologique X est, en fait, la K-théorie algébrique (au sens du paragraphe 1) du \mathcal{A} -espace $Q[G(X)] = \Omega^\infty S^\infty(G(X)_+)$ (cf. aussi [24]). En reprenant les notations du paragraphe 1 et de [27], on a :

$$A(X) = K(Q[G(X)]).$$

Dans ce paragraphe, nous étudions la suite spectrale du théorème 1.12 dans le cas particulier du \mathcal{A} -espace Q . Les résultats de Waldhausen concernant le foncteur $A(X)$ vont nous permettre de la réécrire sous une forme plus intéressante.

Enfin, le paragraphe s'achève sur l'étude de l'espace $\Phi(Q)$ (défini dans le cas général au paragraphe 1) et de la fibre F de l'application $A(*) \rightarrow K(\mathbb{Z})$.

2.1. RAPPELS SUR $A(X)$. — Rappelons que pour tout X connexe, $G(X)$ est le groupe topologique qui a le type d'homotopie de l'espace des lacets de X . Posons $G = G(X)$ et G_+ l'union disjointe de G et d'un point. Soit $V^k S^n$ un bouquet de k -sphères de dimension n . Waldhausen ([28], § 1) note :

$$H_k^n(G) = \text{Aut}_G(V^k S^n \wedge G_+)$$

le monoïde de toutes les G -équivalences faibles d'homotopie préservant le point-base de $V^k S^n \wedge G_+$. Ce monoïde a un classifiant. On pose :

$$B\mathcal{G}l(Q[G(X)]) = \varinjlim_{n, k} BH_k^n(G),$$

la limite étant prise d'une part par suspension, d'autre part par addition de sphères dans le bouquet.

Les résultats de [18], rem. 7.3, [24], [27], montrent que Q est un \mathcal{A} -espace et qu'on a donc la :

PROPOSITION 2.2. — *Il existe une application $l(X) : B\mathcal{G}l(Q[G(X)]) \rightarrow BGL(\mathbb{Z}[\pi_1 X])$, fonctorielle en X , dont la fibre théorique $\mathcal{M}(Q[G(X)])$ est simplement connexe. Ses autres groupes d'homotopie sont donnés par :*

$$\pi_i \mathcal{M}(Q[G(X)]) = M(\pi_{i-1}(G(X)_+)) \quad \text{pour } i \geq 2.$$

La K -théorie résultante est le foncteur $A(X)$:

$$A(X) = K(Q[G(X)]) = K_0(\mathbb{Z}[\pi_1 X]) \times B\mathcal{G}l(Q[G(X)])^+.$$

Dans [27], § 2 et [28], § 4 (voir aussi [18], appendice), Waldhausen décrit un procédé qui permet de « stabiliser » $A(X)$. Il pose :

$$A^s(X) = \varinjlim_m \Omega^m \tilde{A}(S^m \wedge X_+),$$

$\tilde{A}(X)$ étant la fibre théorique de l'application $A(X) \rightarrow A(*)$ induite par la projection de X sur le point $*$.

Le foncteur $A^s(X)$ est une théorie d'homologie en X , dont les coefficients sont la K -théorie stable (au sens du paragraphe 1) du \mathcal{A} -espace Q :

$$A^s(*) = K^s(Q).$$

Il existe une application de « stabilisation » de $A(X)$ dans $A^s(X)$. Waldhausen démontre qu'elle est scindée et qu'elle donne naissance à une décomposition de $A(X)$ sous la forme :

$$A(X) \cong A^s(X) \times Wh_{\text{Diff}}(X),$$

où $Wh_{\text{Diff}}(X)$ est l'espace de Whitehead différentiable de X ([27], § 3 et [17], th. 2).

Il existe également une application (décrite plus loin) de $\Omega^\infty S^\infty(X_+)$ dans $A(X)$. La composée $\Omega^\infty S^\infty(X_+) \rightarrow A(X) \rightarrow A^s(X)$ est une transformation naturelle de théories d'homologie.

Le théorème 5.1 de [28] affirme qu'il existe une application $A^s(X) \rightarrow \Omega^\infty S^\infty(X_+)$ telle que la composée :

$$\Omega^\infty S^\infty(X_+) \rightarrow A(X) \rightarrow A^s(X) \rightarrow \Omega^\infty S^\infty(X_+)$$

soit l'identité à homotopie faible près. $A^s(X)$ contient donc l'homotopie stable en facteur direct. Waldhausen pose la conjecture suivante.

CONJECTURE 2.3. — $A^s(X)$ a le type d'homotopie de $\Omega^\infty S^\infty(X_+)$.

Comme il s'agit de théories d'homologies, il serait équivalent de démontrer que $A^s(*)$ a le type d'homotopie faible de $\Omega^\infty S^\infty$ ou encore l'isomorphisme de $\pi_i A^s(*)$ et de π_i^s pour tout $i \geq 0$. L'hypothèse 2.3 repose notamment sur les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} \pi_0^s &\cong \pi_0 A^s(*) \cong \pi_0 A(*) \cong \mathbb{Z}, \\ \pi_i^s &\cong \pi_i A^s(*) \cong \pi_i A(*) \cong \mathbb{Z}/2 \quad \text{pour } i=1 \text{ et } 2, \\ \pi_i^s \otimes \mathbb{Q} &\cong \pi_i A^s(*) \otimes \mathbb{Q} \cong 0 \quad \text{pour } i \geq 3. \end{aligned}$$

Les rappels précédents vont nous permettre de réécrire la suite spectrale du théorème 1.12 (dans le cas où $R = \mathbb{Q}$) sous la forme suivante.

THÉORÈME 2.4. — Il existe une suite spectrale convergeant vers l'homotopie du facteur complémentaire de $\Omega^\infty S^\infty$ dans $A^s(*)$. Elle est de la forme :

$$E_{pq}^2 = \begin{cases} H_p(F(Q), M(\pi_q^s)) & \text{si } p \neq 0 \\ 0 & \text{si } p = 0 \end{cases} \Rightarrow \pi_{p+q} A^s(*) / \pi_{p+q}^s.$$

L'espace acyclique $F(Q)$ a été défini dans le cas général au paragraphe 1. Son groupe fondamental, isomorphe au groupe de Steinberg $St(\mathbb{Z})$ opère par conjugaison sur les groupes $M(\pi_q^s)$ des matrices finies à coefficients dans l'homotopie stable des sphères.

Le théorème a pour corollaire :

COROLLAIRE 2.5. — (a) Les groupes d'homologie $H_i(F(Q), M(\mathbb{Z}))$ sont finis pour $i \geq 1$. De plus $H_1(F(Q), M(\mathbb{Z})) = H_2(F(Q), M(\mathbb{Z})) = 0$.

(b) Soit \mathcal{C} une classe de Serre de groupes abéliens et n un entier ≥ 1 . Alors $\pi_i A^s(*) / \pi_i^s \in \mathcal{C}$ pour tout $0 \leq i \leq n$ si et seulement si $H_i(F(Q), M(\mathbb{Z})) \in \mathcal{C}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

(c) La conjecture 2.3 est vraie si et seulement si $H_i(F(Q), M(\mathbb{Z})) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Pour démontrer le corollaire, nous avons besoin du :

LEMME 2.6. — Soit \mathcal{C} une classe de Serre de groupes abéliens et n un entier ≥ 1 . Alors $H_i(F(Q), M(A)) \in \mathcal{C}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et pour tout groupe abélien A de type fini si et seulement si $H_i(F(Q), M(\mathbb{Z})) \in \mathcal{C}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Preuve. — L'implication est évidente dans un sens. Dans l'autre, supposons que $H_i(F(Q), M(\mathbb{Z})) \in \mathcal{C}$ pour $1 \leq i \leq n$. Par conséquent

$$H_i(F(Q), M(\mathbb{Z}^r)) = H_i(F(Q), M(\mathbb{Z}))^r \in \mathcal{C} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

Tout groupe abélien A de type fini s'insère dans une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^s \rightarrow \mathbb{Z}^r \rightarrow A \rightarrow 0.$$

La suite de $St(\mathbb{Z})$ -modules $0 \rightarrow M(\mathbb{Z}^s) \rightarrow M(\mathbb{Z}^r) \rightarrow M(A) \rightarrow 0$ est, elle aussi, exacte et induit une longue suite exacte d'homologie :

$$\dots \rightarrow H_i(F(Q), M(\mathbb{Z}^r)) \rightarrow H_i(F(Q), M(A)) \rightarrow H_{i-1}(F(Q), M(\mathbb{Z}^s)) \rightarrow \dots$$

qui établit que $H_i(F(Q), M(A)) \in \mathcal{C}$ lorsque $2 \leq i \leq n$. Il ne reste plus qu'à considérer le cas $i=1$. Rappelons que la trace induit un isomorphisme (fonctoriel en A) de

$H_0(F(Q), M(A)) = H_0(\text{St}(\mathbb{Z}), M(A))$ sur A . Par conséquent l'homomorphisme induit de $H_0(F(Q), M(\mathbb{Z}^s))$ dans $H_0(F(Q), M(\mathbb{Z}^r))$ est isomorphe à l'injection de \mathbb{Z}^s dans \mathbb{Z}^r . Il en résulte que $H_1(F(Q), M(\mathbb{Z}^r)) \rightarrow H_1(F(Q), M(A))$ est surjectif, ce qui montre que ce dernier groupe appartient à \mathcal{C} . \square

Démonstration du corollaire 2.5. — Le point (b) se déduit élémentairement de la suite spectrale 2.4 et du lemme précédent.

Le point (c) est le cas particulier où $n = \infty$ et où \mathcal{C} est la classe nulle.

En ce qui concerne (a), la nullité des deux premiers groupes vient du fait (signalé en 2.1) que $\pi_i A^s(*) = \pi_i^s$ pour $i = 0, 1$ et 2. Pour démontrer la finitude des groupes $H_i(F(Q), M(\mathbb{Z}))$ pour $i \geq 1$, il suffit en vertu de (b) de démontrer celle des groupes $\pi_i A^s(*)$ pour $i \geq 1$. Nous avons déjà dit qu'ils sont rationnellement isomorphes aux groupes d'homotopie stable des sphères, qui, eux, sont finis. Les groupes d'homotopie de $A^s(*)$ sont donc rationnellement nuls (sauf π_0). Reste à voir qu'ils sont de type fini. Cela provient du fait qu'en raison de la décomposition $A^s(*) \cong A^s(*) \times \text{Wh}_{\text{Diff}}(*)$, ils sont en facteur direct dans $\pi_i A^s(*)$ dont Dwyer [4] a montré qu'ils sont de type fini. \square

2.7. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.4. — Au paragraphe 1 nous avons construit la suite spectrale :

$$E_{pq}^2 = H_p(F(Q), M(\pi_q^s)) \Rightarrow \pi_* A^s(*)$$

Considérons « l'edge-homomorphism » $E_{0q}^2 \rightarrow \pi_q A^s(*)$: le groupe E_{0q}^2 est isomorphe à $H_0(F(Q), M(\pi_q^s)) \cong H_0(E(\mathbb{Z}), M(\pi_q^s)) \cong \pi_q^s$. Nous avons rappelé plus haut (2.1) que $A^s(*)$ contient $\Omega^\infty S^\infty$ en facteur direct. Si nous arrivons à établir que l'« edge-homomorphism » précédent est induit par l'inclusion de $\Omega^\infty S^\infty$ dans $A^s(*)$, alors $E_{0q}^2 \cong E_{0q}^\infty$ et les différentielles de la suite spectrale à valeurs dans E_{0q}^2 sont toutes nulles. Alors il est clair qu'on peut mettre la suite spectrale sous la forme énoncée au théorème 2.4.

La démonstration consiste donc à montrer que « l'edge-homomorphism » est injectif. Pour y arriver, nous analysons maintenant l'inclusion de $\Omega^\infty S^\infty$ dans $A^s(*)$, telle qu'elle est explicitée dans [28].

Reprenons les notations de 2.1. Pour $n = 0$, $H_1^0(G) \cong G$ et :

$$H_k^0(G) \cong \Sigma_k \int G,$$

le produit en couronne du groupe topologique G avec le groupe symétrique Σ_k . Le théorème de Barratt-Priddy-Quillen-Segal [21] donne l'équivalence d'homotopie :

$$\mathbb{Z} \times \varinjlim_k H_k^0(G) \cong \Omega^\infty S^\infty(BG_+) = \Omega^\infty S^\infty(X_+).$$

L'application $\Omega^\infty S^\infty(X_+) \rightarrow A(X)$ considérée par Waldhausen ([27], [28]) est induite par :

$$H_k^0(G) \rightarrow \varinjlim_n H_k^n(G).$$

Par stabilisation, on obtient l'application $\Omega^\infty S^\infty (X_+) \rightarrow A^s(X)$ pour laquelle Waldhausen [28] construit une rétraction à homotopie faible près. En effet le procédé de stabilisation donne à chaque cran le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{fibre } (\Omega^\infty S^\infty (S^n \wedge X_+) \rightarrow \Omega^\infty S^\infty) & \longrightarrow & \tilde{A}(S^n \wedge X_+) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega \text{ fibre } (\Omega^\infty S^\infty (S^{n+1} \wedge X_+) \rightarrow \Omega^\infty S^\infty) & \longrightarrow & \Omega \tilde{A}(S^{n+1} \wedge X_+) \end{array}$$

et par passage à la limite :

$$\varinjlim_n \Omega^n \text{ fibre } (\Omega^\infty S^\infty (S^n \wedge X_+) \rightarrow \Omega^\infty S^\infty) \rightarrow \varinjlim_n \Omega^n \tilde{A}(S^n \wedge X_+) = A^s(X).$$

Or l'espace de gauche a manifestement le type d'homotopie de $\Omega^\infty S^\infty (X_+)$.

Nous posons maintenant $b(X) = \varinjlim_k BH_k^0(G)$. L'équivalent de la proposition 2.2 est alors le :

LEMME 2.8. — Il existe un diagramme commutatif de fibrations (fonctoriel en X) :

$$\begin{array}{ccccc} m(X) & \longrightarrow & b(X) & \longrightarrow & B\left(\Sigma_\infty \int \pi_1 X\right) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}(Q[G(X)]) & \longrightarrow & B\mathcal{G}l(Q[G(X)]) & \xrightarrow{i(X)} & BGL(\mathbb{Z}[\pi_1 X]). \end{array}$$

L'espace $m(X)$ est simplement connexe et (si pour tout groupe abélien C, on note C^∞ la limite inductive $\varinjlim_n C^n$ des produits cartésiens finis C^n) ses groupes d'homotopie sont donnés par :

$$\pi_i m(X) = (\pi_{i-1} G)^\infty = (\pi_i X)^\infty \quad \text{pour } i \geq 2.$$

Le lemme se démontre comme la proposition 2.2. De plus on observe que l'application verticale de gauche identifie, au niveau des groupes d'homotopie, $(\pi_{i-1} G)^\infty$ avec la diagonale de $M(\pi_{i-1} G)$. L'application verticale de droite est induite par l'inclusion dans $GL(\mathbb{Z}[\pi_1 X])$ de $\Sigma_\infty \int \pi_1 X$ comme sous-groupe des matrices monômiales (i. e. produits d'une matrice de permutation et d'une matrice diagonale).

Reprenons maintenant les étapes de la démonstration du théorème 1.12 avec les espaces $b(X)$ et $m(X)$.

Soit n un entier ≥ 2 . Le diagramme commutatif de fibrations :

$$\begin{array}{ccccc} n_n & \xrightarrow{=} & n_n & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ u_n & \rightarrow & b(S^n) & \rightarrow & b(\star)^+ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ F_0 & \rightarrow & b(\star) & \rightarrow & b(\star)^+ \end{array}$$

définit les espaces F_0 , u_n et n_n . On montrera au paragraphe 4 que l'espace acyclique F_0 a pour groupe fondamental l'extension centrale universelle du groupe alterné infini \mathcal{A}_∞ . En procédant comme au paragraphe 1, on montre que :

$$(i) \quad \text{si } n \geq 2, \quad \pi_i(n_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq n-1, \\ (\pi_{i-n}^s)^\infty & \text{si } n \leq i \leq 2n-2. \end{cases}$$

(ii) $\pi_1(u_n)$ est parfait ($n \geq 2$). L'espace u_n^+ a le type d'homotopie de la fibre de $b(S^n)^+ \rightarrow b(*)^+$, c'est-à-dire de la fibre de $\Omega^\infty S^\infty (S_+^n) \rightarrow \Omega^\infty S^\infty$. L'espace des lacets $\Omega^n u_n^+$ a le type d'homotopie de $\Omega^\infty S^\infty$.

(iii) Le diagramme commutatif de fibrations :

$$\begin{array}{ccccc} n_n & \longrightarrow & u_n & \longrightarrow & F_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ N_n & \longrightarrow & U_n & \longrightarrow & F(Q) \end{array}$$

donne naissance à une application entre les deux suites spectrales associées :

$$\begin{array}{ccc} H_p(F_0, h_q(n_n)) & \Longrightarrow & h_{p+q}(u_n) \cong h_{p+q}(u_n^+) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_p(F(Q), h_q(N_n)) & \Longrightarrow & h_{p+q}(U_n) \cong h_{p+q}(U_n^+). \end{array}$$

Après passage à la limite sur n et réindexation, on a le diagramme de suites spectrales :

$$\begin{array}{ccc} e_{pq}^2 = H_p(F_0, (\pi_q^s)^\infty) & \Longrightarrow & \pi_*(\Omega^\infty S^\infty) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_{pq}^2 = H_p(F(Q), M(\pi_q^s)) & \Longrightarrow & \pi_* A^s(*). \end{array}$$

le groupe fondamental de F_0 opérant par permutation sur les coefficients de e_{pq}^2 .

Il s'ensuit que les « edge-homomorphisms » donnent lieu au carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} e_{0q}^2 \rightarrow \pi_q(\Omega^\infty S^\infty) & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_{0q}^2 \rightarrow \pi_q A^s(*) & & \end{array}$$

D'après la proposition 4.2, $e_{pq}^2 = 0$ pour tout $q \geq 0$ et tout $p \geq 1$. « L'edge-homomorphism » du haut est donc un isomorphisme. Par construction, l'application verticale de droite est induite par l'application $\Omega^\infty S^\infty \rightarrow A^s(*)$ de Waldhausen (et qui possède une rétraction). Par conséquent, elle est injective. Quant à l'homomorphisme vertical de gauche, il est induit par l'inclusion « diagonale » de $(\pi_q^s)^\infty$ dans $M(\pi_q^s)$. C'est un isomorphisme d'après [13], prop. 1.3 et 4.2. « L'edge-homomorphism » du bas est donc injectif scindé : ce qu'il fallait démontrer.

2.9. ÉTUDE DE LA FIBRE DE $A(*) \rightarrow K(\mathbb{Z})$. — On note F la fibre théorique de $l(*)^+ : A(*) \rightarrow K(\mathbb{Z})$ ou, pour reprendre les notations du paragraphe 1, la fibre de $K(Q) \rightarrow K(\mathbb{Z})$. Avant d'énoncer les résultats obtenus sur F , rappelons quelques conventions tirées de la K -théorie stable des anneaux. Comme conséquence de la suite spectrale du

théorème 1.12, il existe un isomorphisme entre la K-théorie stable $K_*^s(\mathbb{Z})$ de l'anneau des entiers et l'homologie $H_*(F(\mathbb{Z}), M(\mathbb{Z}))$. Ceci nous permet de poser plus généralement pour tout groupe abélien P :

$$K_n^s(\mathbb{Z}, P) = H_n(F(\mathbb{Z}), M(P)).$$

Par conséquent, on a : $K_n^s(\mathbb{Z}) = K_n^s(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. (Les propriétés de ces groupes de K-théorie stable sont donnés dans [12], § 8 et [14]).

PROPOSITION 2.10. — (a) La fibre F est simplement connexe et ses groupes d'homotopie sont finis. Pour le second, on a :

$$\pi_2 F \cong \mathbb{Z}/2.$$

(b) Soit p un nombre premier impair. On note F_p la $\mathbb{Z}_{(p)}$ -localisation de F (définie dans [2]). Alors F_p est $(2p-3)$ -connexe et on a :

$$\pi_i(F_p) = K_{i-2p+2}^s(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p) \quad \text{pour } 2p-2 \leq i \leq 4p-6.$$

Preuve. — D'après [27], § 2, nous savons que F est simplement connexe et que $l(*)^+$ est une équivalence d'homotopie rationnelle. Les groupes d'homotopie de F sont donc rationnellement nuls.

Quillen et Dwyer [4] ont montré respectivement que les groupes d'homotopie de $K(\mathbb{Z})$ et de $A(*)$ sont de type fini. Il en est donc de même de ceux de la fibre F. Les groupes $\pi_i F$ sont finis et $\pi_i(F_p) = \pi_i(F) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ est la composante p-primaire de $\pi_i F$.

Posons $M = \mathcal{M}(Q)$. On a le diagramme commutatif dont les lignes et les colonnes sont des fibrations :

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{=} & M & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ U & \longrightarrow & B\mathcal{G}l(Q) & \longrightarrow & BGL(\mathbb{Z})^+ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & BGL(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & BGL(\mathbb{Z})^+. \end{array}$$

L'espace M est simplement connexe. Par conséquent le groupe $\pi_1 U = \pi_1 F(\mathbb{Z}) = St(\mathbb{Z})$ est parfait. Formons U^+ .

LEMME 2.11. — L'espace U^+ a le type d'homotopie de F. Il se démontre comme le lemme 1.15. \square

En prenant pour théorie d'homologie h_* l'homologie stable, on obtient, à partir de la fibration $M \rightarrow U \rightarrow F(\mathbb{Z})$, la suite spectrale d'homologie :

$$(2.12) \quad E_{ij}^2 = H_i(F(\mathbb{Z}), h_j M) \Rightarrow h_{i+j}(U) \cong h_{i+j}(U^+) \cong h_{i+j}(F).$$

Comme M est simplement connexe, $h_1 M = 0$ et $h_2 M = \pi_2 M = M(\pi_1^s)$ d'après la proposition 2.2. Par conséquent $h_1(F) = 0$ et :

$$\pi_2 F = h_2(F) = H_0(F(\mathbb{Z}), M(\pi_1^s)) = K_0^s(\mathbb{Z}, \pi_1^s) = \pi_1^s = \mathbb{Z}/2.$$

Nous localisons en p la suite spectrale (2.12); en d'autres termes, nous la considérons modulo la classe de Serre des groupes abéliens n'ayant pas de p -torsion. Elle s'écrit :

$$H_i(F(\mathbb{Z}), h_j(M) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}) \Rightarrow h_{i+j}(F) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}.$$

Or si nous désignons par M_p la $\mathbb{Z}_{(p)}$ -localisation de M , on a :

$$h_i(M) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = h_i(M_p) \quad \text{et} \quad h_i(F) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = h_i(F_p).$$

La suite spectrale se réécrit sous la forme :

$${}_p E_{ij}^2 = H_i(F(\mathbb{Z}), h_j(M_p)) \Rightarrow h_{i+j}(F_p).$$

D'après la proposition 11.1.3, $\pi_i M_p = M(\pi_{i-1}^s \otimes \mathbb{Z}_{(p)})$. Or Toda ([26], th. 4.15) a calculé la composante p -primaire des groupes d'homotopie stable des sphères. Nous en déduisons le :

LEMME 2.13. — *Pour tout nombre premier impair p , les groupes d'homotopie de M_p sont donnés par :*

$$\pi_i(M_p) = \begin{cases} M(\mathbb{Z}/p) & \text{pour } i = 2k(p-1) \text{ avec } 1 \leq k \leq p-1, \\ 0 & \text{pour les autres entiers } i \leq 2p(p-1) - 2. \end{cases}$$

L'espace M_p étant $(2p-3)$ -connexe, le théorème de la suspension de Freudenthal énonce que $h_i(M_p) = \pi_i(M_p)$ pour $i \leq 4p-6$. Par conséquent ${}_p E_{ij}^2 = 0$ pour $j \neq 2p-2$ et $j \leq 4p-6$:

$${}_p E_{i, 2p-2}^2 = H_i(F(\mathbb{Z}), M(\mathbb{Z}/p)) = K_i^s(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p).$$

Il en résulte que $h_i(F_p) = 0$ pour $i \leq 2p-3$ et que :

$$\pi_i(F_p) = h_i(F_p) = {}_p E_{i-2, 2p-2}^2 = K_{i-2p+2}^s(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p)$$

pour $2p-2 \leq i \leq 4p-6$. \square

2.14. ÉTUDE DE L'ESPACE $\Phi(Q)$. — Au paragraphe 1, on a défini, pour tout \mathcal{A} -espace R , l'espace $\Phi(R)$ comme la fibre théorique de l'application $F(R) \rightarrow F(\pi_0 R)$. Lorsque $R = Q$, nous notons $\Phi = \Phi(Q)$. Rappelons qu'on a le diagramme commutatif de fibrations :

$$\begin{array}{ccccc} \Phi & \rightarrow & F(Q) & \longrightarrow & F(\mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M & \rightarrow & B\mathcal{G}l(Q) & \longrightarrow & BGL(\mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F & \rightarrow & B\mathcal{G}l(Q)^+ & \longrightarrow & BGL(\mathbb{Z})^+. \end{array}$$

Des informations que nous possédons sur l'homotopie de M et de F , nous allons déduire le résultat suivant.

PROPOSITION 2.15. — (a) *L'espace Φ est simplement connexe et $\pi_2 \Phi \cong M'(\pi_1^s)$ (matrices de trace nulle).*

(b) Si p est un nombre premier impair et Φ_p la $\mathbb{Z}_{(p)}$ -localisation de Φ , alors Φ_p est $(2p-3)$ -connexe et :

$$\pi_{i+2} \pi_{p-2} \Phi_p = \begin{cases} M'(\mathbb{Z}/p) & \text{si } i=0, \\ K_{i+1}^s(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p) & \text{si } 1 \leq i \leq 2p-4. \end{cases}$$

Démonstration. — Remarquons d'abord que la simple-connexité de Φ a été démontrée dans le lemme 1.6.

Montrons maintenant que $\pi_2 \Phi$ est isomorphe au noyau $M'(\pi_1^s)$ de la trace sur $M(\pi_1^s)$. En effet du diagramme précédent on tire la suite exacte :

$$\pi_3 F \rightarrow \pi_2 \Phi \rightarrow \pi_2 M \rightarrow \pi_2 F \rightarrow 0.$$

Au vu des propositions 2.2 et 2.10, elle s'écrit encore :

$$\pi_3 F \rightarrow \pi_2 \Phi \rightarrow M(\mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0.$$

C'est une suite exacte de $\pi_1 F(\mathbb{Z})$ -modules. Or le seul épimorphisme $\text{St}(\mathbb{Z})$ -équivariant de $M(\mathbb{Z}/2)$ sur $\mathbb{Z}/2$ est nécessairement la trace, d'où on tire la suite exacte :

$$0 \rightarrow L \rightarrow \pi_2 \Phi \rightarrow M'(\mathbb{Z}/2) \rightarrow 0,$$

dans laquelle L est un quotient du $\text{St}(\mathbb{Z})$ -module trivial $\pi_3 F$. Il est trivial pour les mêmes raisons que dans la démonstration du lemme 1.6. Appliquons le foncteur $H_0(F(\mathbb{Z}), ?)$ à la suite précédente, On obtient la suite exacte :

$$H_1(F(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}/2)) \rightarrow H_0(F(\mathbb{Z}), L) \rightarrow H_0(F(\mathbb{Z}), \pi_2 \Phi) \rightarrow H_0(F(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}/2)).$$

Or :

$$H_0(F(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}/2)) = H_0(E(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}/2)) = 0$$

([13], Prop. 1.3)

$$H_1(F(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}/2)) = K_1^s(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2) = 0$$

([8], cor. 1.4. et [14], prop. 3.4 et 3.5).

Comme L est trivial, on a :

$$L = H_0(F(\mathbb{Z}), L) = H_0(F(\mathbb{Z}), \pi_2 \Phi) = H_0(F(\mathbb{Z}), H_2 \Phi).$$

Considérons la suite spectrale d'homologie de la fibration $\Phi \rightarrow F(Q) \rightarrow F(\mathbb{Z})$:

$$E_{pq}^2 = H_p(F(\mathbb{Z}), H_q \Phi) \Rightarrow H_{p+q}(F(Q))$$

$E_{p0}^2 = 0$ car $F(\mathbb{Z})$ est acyclique; $E_{p1}^2 = 0$ car Φ est simplement connexe. Par conséquent :

$$L = H_0(F(\mathbb{Z}), H_2 \Phi) = E_{02}^2 = H_2(F(Q)) = 0$$

car $F(Q)$ est acyclique également.

Remarque 2.16. — Le raisonnement précédent permet de démontrer qu'on a :

$$\pi_3 F = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbb{Z}/2.$$

En effet, puisque L est nul, on a une surjection $\pi_3 M \rightarrow \pi_3 F$ de $\text{St}(\mathbb{Z})$ -modules. En prenant les coinvariants, on obtient la surjection :

$$H_0(\text{St}(\mathbb{Z}), \pi_3 M) = H_0(\text{St}(\mathbb{Z}), M(\pi_2^s)) \cong \pi_2^s \rightarrow H_0(\text{St}(\mathbb{Z}), \pi_3 F) = \pi_3 F.$$

Rappelons que $\pi_2^s = \mathbb{Z}/2$.

Démontrons maintenant la partie (b) de la proposition 2.15. En localisant, on obtient la fibration :

$$\Phi_p \rightarrow M_p \rightarrow F_p.$$

La suite exacte d'homotopie qui en résulte et les propositions 2.10 et 2.13 entraînent aussitôt que Φ_p est $(2p-4)$ -connexe lorsque p est un nombre premier impair (cas auquel nous nous restreignons). De cette manière, on a aussi :

$$\pi_{i+2p-2} \Phi_p \cong \pi_{i+2p-1} F_p \cong K_{i+1}^s(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p)$$

pour $1 \leq i \leq 2p-4$. De la longue suite exacte d'homotopie, il ne reste plus à étudier que la suite exacte :

$$0 \rightarrow \pi_{2p-1} F_p \rightarrow \pi_{2p-2} \Phi_p \rightarrow \pi_{2p-2} M_p \rightarrow \pi_{2p-2} F_p \rightarrow \pi_{2p-3} \Phi_p \rightarrow 0.$$

Or :

$$\pi_{2p-2} F_p = K_0^s(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p) = \mathbb{Z}/p,$$

$$\pi_{2p-1} F_p = K_1^s(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p) = 0$$

([8], cor. 1.4 et [14], prop. 3.4 et 3.5).

Il ne nous reste plus que la suite exacte :

$$0 \rightarrow \pi_{2p-2} \Phi_p \rightarrow M(\mathbb{Z}/p) \rightarrow \mathbb{Z}/p \rightarrow \pi_{2p-3} \Phi_p \rightarrow 0.$$

Une fois de plus, nous utilisons la suite spectrale de Serre (à coefficients $\mathbb{Z}_{(p)}$) associée à la fibration $\Phi \rightarrow F(Q) \rightarrow F(\mathbb{Z})$. Elle converge vers $H_i(F(Q), \mathbb{Z}_{(p)})$ qui est nul pour $i \geq 1$, en raison de l'acyclicité de $F(Q)$. Le terme E^2 est donné par :

$$E_{ij}^2 = H_i(F(\mathbb{Z}), H_j(\Phi, \mathbb{Z}_{(p)})) = H_i(F(\mathbb{Z}), H_j(\Phi_p, \mathbb{Z}_{(p)})).$$

Comme $F(\mathbb{Z})$ est acyclique et que Φ_p est $(2p-4)$ -connexe, $E_{ij}^2 = 0$ pour $0 \leq j \leq 2p-4$ et tout $i \geq 0$. Par conséquent le terme $E_{0,2p-3}^2$ est nul. Or :

$$E_{0,2p-3}^2 = H_0(F(\mathbb{Z}), H_{2p-3} \Phi_p) = H_0(F(\mathbb{Z}), \pi_{2p-3} \Phi_p) = \pi_{2p-3} \Phi_p$$

car $\pi_{2p-3} \Phi_p$ est quotient du $\text{St}(\mathbb{Z})$ -module trivial $\pi_{2p-2} F_p$. L'espace Φ_p est donc $(2p-3)$ -connexe et on a le résultat cherché. \square

3. Applications

Dans ce paragraphe nous utilisons les résultats du paragraphe 2 pour obtenir, d'une part, des calculs sur la K-théorie stable de \mathbb{Z} et par conséquent sur l'homologie $H_*(GL_n(\mathbb{Z}), M'_n(\mathbb{Z}))$; d'autre part, des informations supplémentaires sur l'homotopie de la fibre F de $A(*) \rightarrow K(\mathbb{Z})$.

3.1. K-THÉORIE STABLE DE \mathbb{Z} ET HOMOLOGIE DE $GL_n(\mathbb{Z})$. — Le résultat principal s'énonce ainsi :

THÉORÈME 3.2. — *Les groupes de K-théorie stable de \mathbb{Z} vérifient :*

(a) $K_1^s(\mathbb{Z}) = K_2^s(\mathbb{Z}) = 0$.

(b) $K_3^s(\mathbb{Z})$ n'est pas nul, car on a la suite exacte :

$$\pi_3 A^s(*) / \pi_3^s \rightarrow K_3^s(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0.$$

(c) Soit p un nombre premier impair, alors :

$$K_i^s(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}(p)} = (\pi_i A^s(*) / \pi_i^s) \otimes_{\mathbb{Z}(p)} \quad \text{pour } i \leq 2p-3,$$

et la suite :

$$\pi_{2p-1} A^s(*) / \pi_{2p-1}^s \rightarrow K_{2p-1}^s(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/p \rightarrow \pi_{2p-2} A^s(*) / \pi_{2p-2}^s \rightarrow K_{2p-2}^s(\mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

est exacte après tensorisation par $\mathbb{Z}(p)$.

On en déduit immédiatement le corollaire.

COROLLAIRE 3.3. — *Si la conjecture $A^s(*) \cong \Omega^\infty S^\infty$ est vérifiée, alors :*

(a) $K_3^s(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$.

(b) pour tout $n \geq 3$, le groupe fini $K_n^s(\mathbb{Z})$ n'a pas de p -torsion pour $n < 2p-1$.

(c) l'inégalité précédente est la meilleure possible, car si $n = 2p-1$, le groupe $K_{2p-1}^s(\mathbb{Z})$ n'est pas nul et sa composante p -primaire est exactement isomorphe à \mathbb{Z}/p .

Remarquons que si $A^s(*) \cong \Omega^\infty S^\infty$, on retrouve la nullité de $K_i^s(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ ($i \geq 1$) indépendamment de [5].

Les techniques de [12], § 8 ou [14] montrent que ces résultats peuvent se traduire en calculs sur l'homologie de $GL_n(\mathbb{Z})$ ou $SL_n(\mathbb{Z})$.

THÉORÈME 3.4. — (a) $H_2(SL_n(\mathbb{Z}), M'_n(\mathbb{Z})) = H_2(GL_n(\mathbb{Z}), M'_n(\mathbb{Z})) = 0$ pour $n \geq 9$.

(b) $H_3(SL_n(\mathbb{Z}), M'_n(\mathbb{Z})) = H_3(GL_n(\mathbb{Z}), M'_n(\mathbb{Z}))$ n'est pas nul pour $n \geq 11$.

C'est un groupe d'ordre 2 ou 4.

(c) Si $A^s(*) \cong \Omega^\infty S^\infty$, alors les groupes $H_k(SL_n(\mathbb{Z}), M'_n(\mathbb{Z}))$ et $H_k(GL_n(\mathbb{Z}), M'_n(\mathbb{Z}))$ n'ont pas de p -torsion si $k < 2p-1$ ($n \geq 2k+5$). De plus, la composante p -primaire de $H_{2p-1}(SL_n(\mathbb{Z}), M'_n(\mathbb{Z}))$ et de $H_{2p-1}(GL_n(\mathbb{Z}), M'_n(\mathbb{Z}))$ est exactement isomorphe à \mathbb{Z}/p ($n \geq 4p+3$).

Preuve. — On utilise la suite spectrale $'E_{pq}^2$ de la démonstration du corollaire 8.2.2 de [12] :

$$'E_{pq}^2 = \begin{cases} H_p(S, K_q^s(\mathbb{Z})) & \text{si } q \geq 1 \\ 0 & \text{si } q = 0 \end{cases} \Rightarrow H_{p+q}(S, M'(\mathbb{Z})),$$

où S représente $GL(\mathbb{Z})$ ou $SL(\mathbb{Z})$ opérant par conjugaison sur $M'(\mathbb{Z})$, mais trivialement sur $K_q^s(\mathbb{Z})$. Comme on sait que $K_1^s(\mathbb{Z}) = 0$ ([8], cor. 1.4) et que $\pi_3 A^s(*)/\pi_3^s \subset \pi_3 A(*)/\pi_3^s \subset \mathbb{Z}/2$ ([28]; voir aussi cor. 3.10), alors la suite spectrale transcrit automatiquement les résultats sur la K -théorie stable de \mathbb{Z} en informations sur l'homologie $H_*(GL(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}))$ ou $H_*(SL(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}))$. Pour passer aux matrices d'ordre fini, on utilise le théorème 5.6 de [6], en vertu duquel :

$$H_k(SL_n(\mathbb{Z}), M'_n(\mathbb{Z})) \rightarrow H_k(SL(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}))$$

est un isomorphisme lorsque $n \geq 2k + 5$ (même conclusion pour GL_n). \square

Démonstration du théorème 3.2. — Au paragraphe 2 nous avons défini la fibration $\Phi \rightarrow F(Q) \rightarrow F(\mathbb{Z})$. Considérons la suite spectrale de Serre [à coefficients locaux $M(\mathbb{Z})$] associée. Elle converge vers $H_*(F(Q), M(\mathbb{Z}))$ et a pour termes E^2 :

$$E_{ij}^2 = H_i(F(\mathbb{Z}), H_j(\Phi, M(\mathbb{Z}))).$$

La ligne $j=0$ représente la K -théorie stable de \mathbb{Z} :

$$E_{i0}^2 = H_i(F(\mathbb{Z}), M(\mathbb{Z})) = K_i^s(\mathbb{Z}).$$

La ligne $j=1$ est nulle, car Φ est simplement connexe (lemme 1.6). En basses dimensions on obtient alors :

- (a) l'isomorphisme $H_1(F(Q), M(\mathbb{Z})) = E_{10}^2 = K_1^s(\mathbb{Z})$;
- (b) la suite exacte :

$$H_3(F(Q), M(\mathbb{Z})) \rightarrow E_{30}^2 \rightarrow E_{02}^2 \rightarrow H_2(F(Q), M(\mathbb{Z})) \rightarrow E_{20}^2 \rightarrow 0.$$

Or d'après les théorème 2.4 et corollaire 2.5 :

$$H_i(F(Q), M(\mathbb{Z})) = 0 \quad \text{si } i = 1 \text{ et } 2$$

$$H_3(F(Q), M(\mathbb{Z})) = \pi_3 A^s(*)/\pi_3^s.$$

Les parties (a) et (b) du théorème sont donc démontrées dès qu'on a identifié E_{02}^2 à $\mathbb{Z}/2$. Tensorisons la suite exacte de $St(\mathbb{Z})$ -modules $0 \rightarrow M'(\mathbb{Z}) \rightarrow M(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ par le module $M'(\mathbb{Z}/2)$. On obtient la suite exacte de $St(\mathbb{Z})$ -modules (avec action diagonale) :

$$0 \rightarrow M'(\mathbb{Z}/2) \otimes M'(\mathbb{Z}) \rightarrow M'(\mathbb{Z}/2) \otimes M(\mathbb{Z}) \rightarrow M'(\mathbb{Z}/2) \rightarrow 0.$$

Elle induit en homologie la longue suite exacte :

$$H_1(F(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}/2)) \rightarrow H_0(F(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}/2) \otimes M'(\mathbb{Z}))$$

$$\rightarrow H_0(F(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}/2) \otimes M(\mathbb{Z})) \rightarrow H_0(F(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}/2)).$$

Or d'après [12],

$$H_0(F(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}/2)) = 0$$

et

$$H_1(F(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}/2)) \cong K_1^s(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2) = \Omega_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z}/2 = 0.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} H_0(F(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}/2) \otimes M(\mathbb{Z})) &\cong H_0(F(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}/2) \otimes M'(\mathbb{Z})) \\ &\cong \mathbb{Z}/2 \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2 \quad ([13], \text{ th. 3.4}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{0,2}^2 &= H_0(F(\mathbb{Z}), H_2(\Phi, M(\mathbb{Z})) = H_0(F(\mathbb{Z}), H_2(\Phi) \otimes M(\mathbb{Z})) \\ &= H_0(F(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}/2) \otimes M(\mathbb{Z})) \quad (\text{prop. 2.15}). \end{aligned}$$

Passons maintenant au point (c) du théorème : p est un nombre premier différent de 2. Soit \mathcal{C}_p la classe de Serre des groupes abéliens de torsion dont les composantes q -primaires sont nulles pour tout nombre premier $q \neq p$. C'est une classe qui vérifie l'axiome Π_B de [22], à savoir : si $A \in \mathcal{C}_p$, alors $A \otimes B \in \mathcal{C}_p$ pour tout groupe abélien B .

D'après [26], $\pi_i^s \in \mathcal{C}_p$ si $1 \leq i \leq 2p-4$ et $2p-2 \leq i \leq 4p-6$; et π_{2p-3}^s est \mathcal{C}_p -isomorphe à \mathbb{Z}/p . Considérons la suite spectrale du théorème 2.4 modulo \mathcal{C}_p . Ses termes E^2 vérifient les relations :

$$\begin{aligned} E_{i,j}^2 &\in \mathcal{C}_p \quad \text{si } 1 \leq j \leq 2p-4 \quad \text{et } 2p-2 \leq j \leq 4p-6, \\ E_{0,j}^2 &= E_{1,j}^2 = E_{2,j}^2 = 0 \quad (\text{cor. 2.5}). \end{aligned}$$

Ce qui entraîne le :

LEMME 3.5. — $H_i(F(Q), M(\mathbb{Z}))$ est \mathcal{C}_p -isomorphe à $\pi_i A^s(*)/\pi_i^s$ pour $1 \leq i \leq 2p-1$.

Comme précédemment, nous étudions (modulo \mathcal{C}_p) la suite spectrale de la fibration $\Phi \rightarrow F(Q) \rightarrow F(\mathbb{Z})$. Puisque la $\mathbb{Z}_{(p)}$ -localisation Φ_p est $(2p-3)$ -connexe (prop. 2.15), $H_j(\Phi_p)$ et par conséquent $H_i(F(\mathbb{Z}), H_j(\Phi, M(\mathbb{Z})))$ appartiennent à \mathcal{C}_p lorsque $1 \leq j \leq 2p-3$.

Quant à $H_0(F(\mathbb{Z}), H_{2p-2}(\Phi, M(\mathbb{Z})))$, il est \mathcal{C}_p -isomorphe à :

$$H_0(E(\mathbb{Z}), \pi_{2p-2} \Phi_p \otimes M(\mathbb{Z})) \cong H_0(E(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}/p) \otimes M(\mathbb{Z})) \quad (\text{prop. 2.15}).$$

Or :

$$\begin{aligned} H_0(E(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}/p) \otimes M(\mathbb{Z})) &\cong H_0(E(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}/p) \otimes M'(\mathbb{Z})) \quad (\text{comme avant}) \\ &\cong \mathbb{Z}/p \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p \quad ([13], \text{ th. 3.4}). \end{aligned}$$

En résumé, on a le :

LEMME 3.6. — $H_i(F(\mathbb{Z}), M(\mathbb{Z})) = K_i^s(\mathbb{Z})$ est \mathcal{C}_p -isomorphe à $H_i(F(Q), M(\mathbb{Z}))$ lorsque $0 \leq i \leq 2p-3$. La suite :

$$\begin{aligned} H_{2p-1}(F(Q), M(\mathbb{Z})) &\rightarrow H_{2p-1}(F(\mathbb{Z}), M(\mathbb{Z})) \rightarrow \mathbb{Z}/p \\ &\rightarrow H_{2p-2}(F(Q), M(\mathbb{Z})) \rightarrow H_{2p-2}(F(\mathbb{Z}), M(\mathbb{Z})) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

est \mathcal{C}_p -exacte.

Le point (c) du théorème 3.2 découle alors des deux lemmes précédents. \square

Remarque 3.7. — Nous avons ainsi mis en évidence le phénomène suivant : lorsque $A^s(*) \cong \Omega^\infty S^\infty$, et si $C_{(p)}$ désigne la composante p -primaire du groupe abélien de type fini C , alors :

$$K_i^s(\mathbb{Z})_{(p)} \cong (\pi_{i-2}^s)_{(p)} \quad \text{pour tout } i \leq 2p-1 \text{ et } i \geq 3.$$

Il est possible que ce résultat qui apparaît, comme on vient de le voir, après étude de diverses suites spectrales, soit susceptible d'une interprétation plus directe.

3.8. *RETOUR À A(*)*. — A la lumière de ce qui vient d'être démontré sur la K -théorie stable de \mathbb{Z} , nous obtenons quelques informations supplémentaires sur $A(*)$ et sur la fibre F de $A(*) \rightarrow K(\mathbb{Z})$.

L'énoncé qui suit complète la proposition 2.10.

PROPOSITION 3.9. — (a) *Le groupe $\pi_3 F$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$.*

(b) *Il existe une application $\pi_3^s = \mathbb{Z}/24 \rightarrow \pi_4 F$ dont l'image est un sous-groupe d'indice 2 au plus. Elle induit un isomorphisme sur la 3-torsion et si on écrit $\pi_4 F \cong \mathbb{Z}/3 \oplus V$, on a la suite exacte :*

$$\mathbb{Z}/8 \rightarrow V \rightarrow \mathbb{Z}/2.$$

On en déduit le :

COROLLAIRE 3.10. — $\pi_3(A(*)) = \mathbb{Z}/24$ ou $\mathbb{Z}/24 \oplus \mathbb{Z}/2$. Si $\pi_3 A(*) = \mathbb{Z}/24$, alors $K_4(\mathbb{Z})$ a un élément non trivial d'ordre 2.

On ne sait pas pour l'instant si $K_4(\mathbb{Z})$ est nul ou non. Soulé [23] a montré que le groupe fini $K_4(\mathbb{Z})$ n'a que de la 2- et de la 3-torsion et que cette dernière est au plus d'ordre 3.

Preuve du corollaire. — La première partie est due à Waldhausen. Examinons la suite exacte d'homotopie :

$$K_4(\mathbb{Z}) \rightarrow \pi_3 F \rightarrow \pi_3 A(*) \rightarrow K_3(\mathbb{Z}) \rightarrow \pi_2 F \rightarrow \pi_2 A(*) \rightarrow K_2(\mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

et le triangle commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_3^s & \xrightarrow{j} & \pi_3 A(*) \\ & \searrow i & \swarrow \\ & & K_3(\mathbb{Z}) \end{array}$$

D'après [15] et [20], i est l'injection de $\mathbb{Z}/24$ dans $\mathbb{Z}/48$. L'homomorphisme j est scindé d'après [28]. Posons $\pi_3 A(*) = \pi_3^s \oplus T$. En comptant les ordres et en sachant que $\pi_2 F = \pi_3 F = \mathbb{Z}/2$ (prop. 2.10 et 3.9), on voit que T ne peut avoir plus de 4 éléments. Le groupe $\pi_3 A(*)$ ne peut donc avoir un élément d'ordre 48 : il ne peut donc se projeter sur $K_3(\mathbb{Z})$. Il en résulte que $K_3(\mathbb{Z}) \rightarrow \pi_2 F = \mathbb{Z}/2$ est surjectif et que $\pi_2 A(*) \rightarrow K_2(\mathbb{Z})$ est un isomorphisme. La suite exacte d'homotopie se transforme alors en la suite exacte :

$$K_4(\mathbb{Z}) \rightarrow \pi_3 F \rightarrow \pi_3^s \oplus T \rightarrow \pi_3^s \rightarrow 0$$

ou encore en la suite exacte :

$$K_4(\mathbb{Z}) \rightarrow \pi_3 F \rightarrow T \rightarrow 0,$$

ce qui démontre le corollaire. \square

Démonstration de la proposition 3.9. — La fibration $\Phi \rightarrow M \rightarrow F$ de 2.14 donne naissance à la suite exacte :

$$\pi_4 M \rightarrow \pi_4 F \rightarrow \pi_3 \Phi \rightarrow \pi_3 M \rightarrow \pi_3 F \rightarrow 0.$$

Nous la réécrivons sous la forme de trois suites exactes courtes de $\text{St}(\mathbb{Z})$ -modules :

$$0 \rightarrow P \rightarrow \pi_3 M \rightarrow \pi_3 F \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow Q \rightarrow \pi_3 \Phi \rightarrow P \rightarrow 0$$

$$\pi_4 M \rightarrow \pi_4 F \rightarrow Q \rightarrow 0.$$

Nous leur appliquons le foncteur $H_0(F(\mathbb{Z}), ?)$ en tenant compte du fait que $F(\mathbb{Z})$ est acyclique et que $\pi_3 F, \pi_4 F$ et donc son quotient Q sont des $\text{St}(\mathbb{Z})$ -modules triviaux. On obtient les suites exactes :

$$0 \rightarrow H_0(F(\mathbb{Z}), P) \rightarrow H_0(F(\mathbb{Z}), \pi_3 M) \rightarrow H_0(F(\mathbb{Z}), \pi_3 F) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow H_1(F(\mathbb{Z}), P) \rightarrow H_1(F(\mathbb{Z}), \pi_3 M) \rightarrow 0,$$

$$H_1(F(\mathbb{Z}), P) \rightarrow Q \rightarrow H_0(F(\mathbb{Z}), \pi_3 \Phi) \rightarrow H_0(F(\mathbb{Z}), P) \rightarrow 0,$$

$$H_0(F(\mathbb{Z}), \pi_4 M) \rightarrow \pi_4 F \rightarrow Q \rightarrow 0.$$

On sait que :

$$H_0(F(\mathbb{Z}), \pi_3 M) = H_0(F(\mathbb{Z}), M(\pi_2^s)) = \pi_2^s \quad (2.2),$$

$$H_1(F(\mathbb{Z}), \pi_3 M) = H_1(F(\mathbb{Z}), M(\pi_2^s)) = K_1^s(\mathbb{Z}, \pi_2^s) = 0 \quad (3.2),$$

$$H_0(F(\mathbb{Z}), \pi_4 M) = H_0(F(\mathbb{Z}), M(\pi_3^s)) = \pi_3^s.$$

Par conséquent, la suite :

$$(3.11) \quad \pi_3^s \rightarrow \pi_4 F \rightarrow H_0(F(\mathbb{Z}), \pi_3 \Phi) \rightarrow \pi_2^s \rightarrow \pi_3 F \rightarrow 0$$

est exacte. La proposition 2.10 montre que $\pi_4 F$ n'a que de la 2-et de la 3-torsion et que cette dernière est $\mathbb{Z}/3$, c'est-à-dire la composante 3-primaire de $\pi_3^s = \mathbb{Z}/24$. La partie (b) de la proposition 3.9 est donc démontrée dès qu'on a établi le :

LEMME 3.12. — $H_0(F(\mathbb{Z}), \pi_3 \Phi) = 0$ ou $\mathbb{Z}/2$.

Preuve. — Φ est simplement connexe. D'après [30], il existe une suite exacte de la forme :

$$\Gamma(\pi_2 \Phi) \rightarrow \pi_3 \Phi \rightarrow H_3(\Phi) \rightarrow 0$$

et partant, la suite :

$$H_0(F(\mathbb{Z}), \Gamma(M'(\mathbb{Z}/2))) \rightarrow H_0(F(\mathbb{Z}), \pi_3 \Phi) \rightarrow H_0(F(\mathbb{Z}), H_3(\Phi)) \rightarrow 0$$

est exacte. D'après [13], th. 3.8, $H_0(F(\mathbb{Z}), \Gamma(M'(\mathbb{Z}/2)))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$. Le groupe $H_0(F(\mathbb{Z}), H_3(\Phi))$ est nul : sa nullité dépend de celle de $K_2^s(\mathbb{Z})$. En effet, en étudiant une fois de plus la suite spectrale de Serre de la fibration $\Phi \rightarrow F(Q) \rightarrow F(\mathbb{Z})$, on constate que la différentielle $d_2 : H_2(F(\mathbb{Z}), H_2(\Phi)) \rightarrow H_0(F(\mathbb{Z}), H_3(\Phi))$ est surjective. Or :

$$H_2(F(\mathbb{Z}), H_2(\Phi)) = H_2(F(\mathbb{Z}), M'(\mathbb{Z}/2)) = K_2^s(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2) = 0 \quad (\text{th. 3.2}). \quad \square$$

La partie (a) de la proposition 3.9 est une conséquence de la suite exacte (3.11) et du :

LEMME 3.13. — L'application $H_0(F(\mathbb{Z}), \pi_3 \Phi) \rightarrow H_0(F(\mathbb{Z}), \pi_3 M^*) \cong \pi_2^s$ de la suite exacte (3.11) est nulle.

Preuve. — Par functorialité de la suite exacte de J. H. C. Whitehead [30], le carré :

$$\begin{array}{ccc} H_0(F(\mathbb{Z}), \Gamma(\pi_2 \Phi)) & \xrightarrow{u} & H_0(F(\mathbb{Z}), \Gamma(\pi_2 M)) \\ \downarrow & & \downarrow v \\ H_0(F(\mathbb{Z}), \pi_3 \Phi) & \longrightarrow & H_0(F(\mathbb{Z}), \pi_3 M) \end{array}$$

est commutatif. Comme d'après la démonstration du lemme 3.12, l'application verticale de gauche est surjective, il suffit de démontrer que la composée $v \circ u$ est nulle. L'homomorphisme u est induit par l'inclusion naturelle de $\pi_2 \Phi \cong M'(\mathbb{Z}/2)$ dans $\pi_2 M \cong M(\mathbb{Z}/2)$ (prop. 2.2). Quant à v , en vertu de la propriété universelle de Γ , (voir [13], 3.7), il est associé à une application quadratique $q : \pi_2 M \rightarrow \pi_3 M$ qui est décrite dans [30]. Par définition de M , q correspond à des applications quadratiques $q_{ij} : \pi_1^s \rightarrow \pi_2^s$ telles que $q : M(\pi_1^s) \rightarrow M(\pi_2^s)$ est donnée par :

$$q(E_{ij}(p)) = E_{ij}(q_{ij}(p)), \quad p \in \pi_1^s \quad (\text{voir [13], 3.5}).$$

L'homomorphisme v est donc induit par :

$$\gamma\left(\sum_{i,j} E_{ij}(p)\right) \mapsto \sum_{i,j} E_{ij}(q_{ij}(p)).$$

D'après [13], th. 3.8, l'application $1 \mapsto [E_{12}(1), E_{21}(1)]$ de π_1^s sur $H_0(E(\mathbb{Z}), \Gamma(M'(\pi_1^s)))$ est un isomorphisme. Il ne reste plus qu'à calculer $v \circ u$ sur $[E_{12}(1), E_{21}(1)]$:

$$\begin{aligned} v \circ u[E_{12}(1), E_{21}(1)] &= v[E_{12}(1), E_{21}(1)] \\ &= v\gamma(E_{12}(1) + E_{21}(1)) - v\gamma(E_{12}(1)) - v\gamma(E_{21}(1)) \\ &= E_{12}(q_{12}(1)) + E_{21}(q_{21}(1)) - E_{12}(q_{12}(1)) - E_{21}(q_{21}(1)) \\ &= 0 \quad \text{dans } H_0(F(\mathbb{Z}), M(\pi_2^s)). \quad \square \end{aligned}$$

4. Complément sur l'homologie du groupe symétrique

On établit une propriété homologique du groupe symétrique, qui est l'analogue facile pour ce groupe du calcul de l'homologie $H_*(GL(\mathbb{Z}), M(\mathbb{Z}))$ du groupe linéaire général. Ce résultat sert à la démonstration du théorème 2.4.

Soit Σ_n (resp. \mathcal{A}_n) le groupe symétrique (resp. alterné) d'ordre n et $\Sigma_\infty = \varinjlim_n \Sigma_n$ (resp. $\mathcal{A}_\infty = \varinjlim_n \mathcal{A}_n$). Pour $n \geq 5$, on sait que \mathcal{A}_n est simple et donc parfait. On note $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$ l'extension centrale universelle de \mathcal{A}_∞ . Puisque \mathcal{A}_∞ et $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$ sont parfaits ([19], th. 5.3), on peut appliquer la construction + de Quillen aux classifiants de Σ_∞ , \mathcal{A}_∞ et $\tilde{\mathcal{A}}_\infty$. On a la :

PROPOSITION 4.1. — $B\mathcal{A}_\infty^+$ est le revêtement universel de $B\Sigma_\infty^+$. $B\tilde{\mathcal{A}}_\infty^+$ est 2-connexe. Soit F_0 la fibre théorique de $B\Sigma_\infty \rightarrow B\Sigma_\infty^+$. Alors $\pi_1 F_0 \cong \tilde{\mathcal{A}}_\infty$.

Preuve. — La proposition résulte du fait suivant bien connu. Soit X un espace connexe, N un sous-groupe normal parfait de $\pi_1 X$. Si on désigne par Y le revêtement de X de groupe fondamental N , alors Y^+ est le revêtement universel de X^+ (les deux constructions $+$ étant prises par rapport à N). De plus, $X \rightarrow X^+$ et $Y \rightarrow Y^+$ ont même fibre F et le groupe fondamental de F est l'extension centrale universelle de N .

Dans le cas qui nous intéresse, $X = B\Sigma_\infty$ et $N = \mathcal{A}_\infty$. \square

Considérons maintenant un groupe abélien quelconque C . Les groupes Σ_n et \mathcal{A}_n opèrent par permutation sur le produit cartésien C^n . L'homomorphisme de C^n dans C^{n+1} donné par $(c_1, \dots, c_n) \mapsto (c_1, \dots, c_n, 0)$ permet de définir la limite $C^\infty = \varinjlim_n C^n$, sur laquelle Σ_∞ et \mathcal{A}_∞ opèrent par permutation. Nous voulons calculer les groupes d'homologie $H_i(F_0, C^\infty)$ à coefficients locaux, le groupe fondamental $\pi_1 F_0 = \mathcal{A}_\infty$ opérant par permutation sur C^∞ .

PROPOSITION 4.2. — (a) L'homomorphisme Σ_∞ -équivariant de C^∞ sur C donné par :

$$T : (c_1, c_2, \dots) \mapsto \sum_i c_i$$

induit l'isomorphisme :

$$H_0(F_0, C^\infty) \xrightarrow{\cong} C.$$

(b) Les autres groupes $H_i(F_0, C^\infty)$ sont nuls pour tout $i \geq 1$.

Soit C_0^∞ le noyau de T . C'est un Σ_∞ -module. La proposition précédente résulte du

LEMME 4.3. — $H_i(\Sigma_\infty, C_0^\infty) = 0$ pour tout $i \geq 0$.

Avant de démontrer le lemme, montrons qu'il entraîne la proposition. On considère la suite spectrale (avec coefficients C_0^∞) de la fibration $F_0 \rightarrow B\Sigma_\infty \rightarrow B\Sigma_\infty^+$:

$$E_{pq}^2 = H_p(B\Sigma_\infty^+, H_q(F_0, C_0^\infty)) \Rightarrow H_{p+q}(B\Sigma_\infty, C_0^\infty).$$

On voit facilement que $\pi_1 B\Sigma_\infty^+ = \mathbb{Z}/2$ opère trivialement sur $H_q(F_0, C_0^\infty)$. La suite spectrale s'écrit :

$$E_{pq}^2 = H_p(\Sigma_\infty, H_q(F_0, C_0^\infty)) \Rightarrow H_{p+q}(\Sigma_\infty, C_0^\infty),$$

l'opération étant triviale à gauche et par permutation à droite :

$$H_0(F_0, C_0^\infty) = E_{00}^2 = H_0(\Sigma_\infty, C_0^\infty) = 0.$$

Par conséquent $E_{p0}^2 = 0$ pour tout $p \geq 0$.

Comme l'aboutissement est trivial, $E_{01}^2 = H_1(F_0, C_0^\infty) = 0$. Par conséquent $E_{p1}^2 = 0$ pour tout $p \geq 0$. En continuant de la sorte, on établit que $H_i(F_0, C_0^\infty) = 0$ pour tout $i \geq 0$.

La suite exacte $0 \rightarrow C_0^\infty \rightarrow C^\infty \xrightarrow{T} C \rightarrow 0$ induit une longue suite exacte :

$$\dots \rightarrow H_i(F_0, C_0^\infty) \rightarrow H_i(F_0, C^\infty) \rightarrow H_i(F_0, C) \rightarrow H_{i-1}(F_0, C_0^\infty) \rightarrow \dots$$

Par conséquent, $H_0(F_0, C^\infty) \cong H_0(F_0, C) \cong C$ et $H_i(F_0, C^\infty) \cong H_i(F_0, C) = 0$ pour $i \geq 1$, car F_0 est acyclique. \square

Démonstration du lemme 4.3. — Considérons l'inclusion de Σ_{n-1} dans Σ_n . Elle induit un homomorphisme $H_i(\Sigma_{n-1}, C) \xrightarrow{i_n} H_i(\Sigma_n, C)$. L'homomorphisme i_n est composé des homomorphismes :

$$j_n : H_i(\Sigma_{n-1}, C) \rightarrow H_i(\Sigma_n, \text{Ind}(C))$$

et de :

$$k_n : H_i(\Sigma_n, \text{Ind}(C)) \rightarrow H_i(\Sigma_n, C).$$

Le Σ_n -module $\text{Ind}(C)$ est le module induit de C par l'inclusion $\Sigma_{n-1} \subset \Sigma_n$. Par conséquent :

$$\text{Ind}(C) = \mathbb{Z}[\Sigma_n] \otimes_{\mathbb{Z}[\Sigma_{n-1}]} C = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_n / \Sigma_{n-1}} \sigma C = C^n.$$

Le module induit $\text{Ind}(C)$ est donc le Σ_n -module de permutation C^n . Le lemme de Shapiro énonce que j_n est un isomorphisme pour tout $i \geq 0$. Par ailleurs, k_n est induit par l'application $(c_i)_{i \in C^n} \mapsto \sum_i c_i \in C$, c'est-à-dire par l'application T définie dans l'énoncé de la proposition 4.2. Lorsque $n = \infty$, alors i_∞ est un isomorphisme. Par conséquent k_∞ est également un isomorphisme. De la longue suite exacte :

$$\dots \rightarrow H_i(\Sigma_\infty, C_0^\infty) \rightarrow H_i(\Sigma_\infty, C^\infty) \xrightarrow{k_\infty} H_i(\Sigma_\infty, C) \rightarrow H_{i-1}(\Sigma_\infty, C_0^\infty) \rightarrow \dots$$

on déduit alors la nullité de tous les groupes $H_i(\Sigma_\infty, C_0^\infty)$ ($i \geq 0$). \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. W. ANDERSON, *Chain Functors and Homology Theories, Symp. Alg. Top.*, 1971, Springer (*Lecture Notes in Math.*, n° 249, p. 1-12).
- [2] A. K. BOUSFIELD et D. M. KAN, *Homotopy Limits, Completions and Localizations*, Springer (*Lecture Notes in Math.*, n° 304).
- [3] E. DROR, *A Generalization of Whitehead Theorem, Symp. Alg. Top.*, 1971, Springer (*Lecture Notes in Math.*, n° 249, p. 13-22).
- [4] W. DWYER, *Twisted Homological Stability for General Linear Groups (Ann. of Math.*, vol. 111, 1980, p. 239-251).
- [5] T. FARRELL et W. C. HSIANG, *On the Rational Homotopy Groups of the Diffeomorphism Groups of Spheres, Discs and Aspherical Manifolds (Proc. Symp. Pure Math.*, vol. 32, 1978, I, p. 325-338).
- [6] W. VAN DER KALLEN, *Homology Stability for Linear Groups (Inv. Math.*, vol. 60, 1980, p. 269-295).
- [7] D. M. KAN, *A Combinatorial Definition of Homotopy Groups (Ann. of Math.*, vol. 67, 1958, p. 282-312).
- [8] C. KASSEL, *Un calcul d'homologie du groupe linéaire général (C.R. Acad. Sc., Paris, t. 288, 1979, p. 481-483).*
- [9] C. KASSEL, *Homologie du groupe linéaire général et K-théorie stable (C.R. Acad., Sc., Paris, t. 290, 1980, p. 1041-1044).*
- [10] C. KASSEL, *K-théorie relative d'un idéal bilatère de carré nul [Conf. Evanston, 1980, Springer (Lecture Notes in Math.*, n° 854, p. 249-261)].
- [11] C. KASSEL, *Le groupe $K_3(\mathbb{Z}[\varepsilon])$ n'a pas de p-torsion pour $p \neq 2$ et 3 [Conf. Oberwolfach 1980, Springer (Lecture Notes in Math.)].*
- [12] C. KASSEL, *Homologie du groupe linéaire général et K-théorie stable (Thèse d'État, Université Louis-Pasteur, Strasbourg, 1981).*

- [13] C. KASSEL, *Calcul algébrique de l'homologie de certains groupes de matrices* (*J. of Algebra*, 1982, vol. 80, n° 1).
- [14] C. KASSEL, *La K-théorie stable* (*Bull. S.M.F.*, vol. 110, 1982).
- [15] R. LEE et R. H. SZCZARBA, *The Group $K_3(\mathbb{Z})$ is Cyclic or Order 48* (*Ann. of Math.*, vol. 104, 1976, p. 31-60).
- [16] J.-L. LODAY, *K-théorie algébrique et représentations de groupes* (*Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, vol. 9, 1976, p. 309-377).
- [17] J.-L. LODAY, *Homotopie des espaces de concordances* [*Séminaire Bourbaki*, n° 516, 1978, Springer (*Lecture Notes*, n° 710)].
- [18] J.-P. MAY, *A_∞ -Ring Spaces and Algebraic K-Theory*, Springer (*Lect. Notes in Math.*, n° 658, II, p. 240-315).
- [19] J. MILNOR, *Introduction to Algebraic K-theory* (*Ann. of Math.*, Studies n° 72, Princeton University Press, 1971).
- [20] D. QUILLEN, *Letter to J. Milnor*, (July, 1972), Springer (*Lecture Notes in Math.*, n° 551, p. 182-188).
- [21] G. SEGAL, *Categories and Cohomology Theories* (*Topology*, vol. 13, 1974, p. 293-312).
- [22] J.-P. SERRE, *Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens* (*Ann. of Math.*, vol. 58, 1953, p. 258-294).
- [23] C. SOULÉ, *Addendum à l'article « On the Torsion in $K_4(\mathbb{Z})$ and $K_5(\mathbb{Z})$ »* (*Duke J.*, 1978, p. 131-132).
- [24] M. STEINBERGER, *On the Equivalence of the Two Definitions of the Algebraic K-Theory of a Topological Space*, Springer (*Lecture Notes in Math.*, n° 763).
- [25] R. STEINER, *Infinite Loop Structures on the Algebraic K-Theory of Spaces* (*Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 90, 1981, p. 85-111).
- [26] H. TODA, *p -Primary Components of Homotopy Groups IV: Composition and Toric Constructions* (*Memoirs, Univ. of Kyoto*, vol. 32, 1959, p. 297-332).
- [27] F. WALDHAUSEN, *Algebraic K-Theory of Topological Spaces I* (*Proc. Symp. Pure Math.*, vol. 32, 1978, p. 35-60).
- [28] F. WALDHAUSEN, *Algebraic K-Theory of Topological Spaces II*, Springer (*Lecture Notes in Math.*, n° 763, p. 356-394).
- [29] G. W. WHITEHEAD, *Elements of Homotopy Theory*, Springer-Verlag, 1978.
- [30] J. H. C. WHITEHEAD, *A Certain Exact Sequence* (*Ann. of Math.*, vol. 52, 1951, p. 51-110).

(Manuscrit reçu le 12 mars 1982,
révisé le 23 juillet 1982.)

Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Laboratoire associé au C.N.R.S.,
Université Louis-Pasteur,
7, rue René-Descartes,
67084 Strasbourg Cedex.