GILLES GODEFROY

Parties admissibles d'un espace de Banach. Applications

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 16, nº 1 (1983), p. 109-122
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1983_4_16_1_109_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 16, 1983, p. 109 à 122.

PARTIES ADMISSIBLES D'UN ESPACE DE BANACH. APPLICATIONS

PAR GILLES GODEFROY

Le but de cet article est l'étude des sous-ensembles bornés d'un espace de Banach dont l'adhérence préfaible, dans le bidual, est formée de formes linéaires « régulières ». Cette étude permet d'étudier les espaces faiblement séquentiellement complets; on montre par exemple que s'il existe une bijection isométrique J de E″ avec $\operatorname{Ker}(J-\mathrm{Id})=E$, alors E est f. s. c. On obtient surtout, par des méthodes abstraites simples, tous les résultats connus d'unicité isométrique du prédual ([1], [4], [6], [7], [10], [13]).

NOTATIONS. — La boule unité d'un espace de Banach E sera notée E_1. La topologie faible sur un Banach sera notée $\underline{\omega}$, la topologie préfaible sur un espace dual $\underline{\omega}^*$. Si A est un sous-ensemble d'un espace E, son adhérence dans (E'', ω^*) sera notée $\tilde{A}$. Les espaces de Banach considérés sont réels ou complexes; le corps de base sera désigné par $\mathbb{K}$. La boule fermée de centre x et de rayon ρ sera désigné par $B(x;\ \rho)$. Un espace E sera dit *prédual* d'un espace F si le dual E′ de E est *isométrique* à F. L'espace E sera dit *unique prédual* de E′ si tout prédual de E′ est isométrique à E. Un espace de Banach sera identifié, sans notation particulière, à un sous-espace de son bidual E″ par l'injection canonique. On désigne par π_E la projection de E‴ sur E′ parallèlement à $E^\perp$; on a $\|\pi_E\|=1$.

1. Parties admissibles par un espace de Banach

Commençons par définir les objets que nous allons étudier :

DÉFINITION 1. — Soit E un espace de Banach. On note $\mathscr{B}_E$ le sous-ensemble de E″ défini par :

$$\mathscr{B}_E=\{\, x\in E'' \mid \bigcap_{u\in E} B(u,\, \|x-u\|)\cap E \text{ a au plus un point}\,\},$$

une partie bornée A de E sera dite admissible si $\tilde{A}$ est contenu dans $\mathscr{B}_E$.

Remarque. — L'ensemble $\mathscr{B}_E$ dépend de la norme dont est muni l'espace E. Il est immédiat que $\mathscr{B}_E$ est un cône, l'exemple $E=\mathscr{C}([0,\ 1])$ muni de sa norme usuelle montre que ce cône n'est pas un espace vectoriel, et n'est pas fortement fermé en général.

Le lemme suivant nous sera utile.

LEMME 2. — *Soit* E *un Banach, et x dans* E'' *tel que l'ensemble* $\mathscr{C}(x)$ *des points de continuité de :*

$$x : (E'_1, \omega^*) \to \mathbb{K},$$

soit dense dans (E'_1, ω^*). *Alors* $\bigcap_{u \in E} B(u, \|x-u\|) \cap E$ *contient au plus un point.*

Démonstration. — Soient $u_1, u_2 \in \bigcap_{u \in E} B(u, \|x-u\|) \cap E$.

On a :

$$\|u-u_i\| \leqq \|x-u\|, \qquad \forall u \in E \quad (i=1, 2),$$

en posant $v=u-u_i$, on a :

$$\|v\| \leqq \|(x-u_i)-v\|, \qquad \forall v \in E \quad (i=1,2).$$

Fixons i. D'après le théorème de Hahn-Banach, pour tout $y \in E$, il existe $\tilde{y} \in E''$ tel que :

$$\begin{cases} \tilde{y}=y \quad \text{sur } \operatorname{Ker}(x-u_i), \\ \|\tilde{y}\| = \|y_{|\operatorname{Ker}(x-u_i)}\|. \end{cases}$$

On a $(\tilde{y}-y)=\lambda(x-u_i)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a donc :

$$\|(\tilde{y}-y)-v\| \geqq \|v\|, \qquad \forall v \in E$$

et par conséquent

$$\|(\tilde{y}-y)+y\| = \|\tilde{y}\| \geqq \|-y\| = \|y\|.$$

On en déduit facilement que $\operatorname{Ker}(x-u_i) \cap E'_1$ est dense dans (E'_1, ω^*) $(i=1, 2)$. Mais $(x-u_i)$ est continu en tout point de $\mathscr{C}(x)$; donc

$$\operatorname{Ker}(x-u_i) \cap E'_1 \supseteqq \mathscr{C}(x).$$

Or, on a :

$$u_1-u_2=(x-u_2)-(x-u_1);$$

donc :

$$\operatorname{Ker}(u_1-u_2) \supseteqq \operatorname{Ker}(x-u_1) \cap \operatorname{Ker}(x-u_2) \supseteqq \mathscr{C}(x).$$

$\mathscr{C}(x)$ étant dense dans (E'_1, ω^*) et (u_1-u_2) continu sur cet espace, on a :

$$u_1-u_2=0.$$

C.Q.F.D.

Déduisons de ce lemme une condition suffisante assurant l'admissibilité.

PROPOSITION 3. — *Soit* E *un espace de Banach. Soit* A *un sous-ensemble borné de* E *qui ne contient pas de suite équivalente à la base canonique de* $l^1(\mathbb{N})$. *Alors* A *est admissible.*

Démonstration. — Si A vérifie les hypothèses de la proposition, alors d'après [11], pour tout $x \in \tilde{A}$ et tout compact L de (E', ω^*), la fonction $x : (L, \omega^*) \to \mathbb{K}$ a un point de continuité. Il est standard d'en déduire que tout $x \in \tilde{A}$ vérifie l'hypothèse du lemme 2, par le théorème de Baire.

C.Q.F.D.

Remarque. — Bien que l'hypothèse de la proposition 3 soit de nature isomorphique, la conclusion est isométrique : la partie A est admissible pour toute norme équivalente sur E.

EXEMPLES DE PARTIES ADMISSIBLES :

— toute partie faiblement relativement compacte de E est admissible;

— toute suite de Cauchy faible est admissible;

— toute famille $\{x_i\}_{i \in I}$ telle que $\sum_{i \in I} |x(x_i)| < \infty$ pour tout $x \in E'$ est admissible;

— si la norme de E est Frechet-différentiable sur un ensemble dense, la boule unité E_1 de E est admissible d'après [15]. Dans ce cas, E_1 n'est pas, en général, admissible pour toute norme. Par exemple, soit $\| \ \|$ une norme localement uniformément convexe sur $c_0(\mathbb{N})$; la boule unité de $l^1(\mathbb{N})$ muni de la norme duale $\| \ \|'$ est admissible pour $\| \ \|'$ mais pas pour la norme usuelle de $l^1(\mathbb{N})$.

Appliquons les résultats ci-dessus aux espaces faiblement séquentiellement complets. Rappelons qu'un espace E est dit un L-facteur dans son bidual E'' s'il existe une projection $\pi : E'' \to E$ telle que :

$$\|x\| = \|\pi(x)\| + \|x - \pi(x)\| \quad \text{pour tout } x \in E''$$

(*voir* [2]). Le résultat suivant est naturel.

THÉORÈME 4. — *Soit* E *un espace de Banach*, L-*facteur dans son bidual* E''. *Alors* E *est faiblement séquentiellement complet.*

Démonstration. — Soient $x \in E'' \setminus E$, et $u \in B(\pi(x), \|x - \pi(x)\|) \cap E$.

On a :

$$\|v - u\| \leqq \|v - x\|, \qquad \forall v \in E.$$

En effet :

$$\|v - u\| \leqq \|v - \pi(x)\| + \|\pi(x) - u\| \leqq \|v - \pi(x)\| + \|x - \pi(x)\| \leqq \|v - x\|.$$

On a donc :

$$B(\pi(x), \|x - \pi(x)\|) \cap E \subseteqq \bigcap_{v \in E} B(v, \|x - v\|) \cap E.$$

Par conséquent, si A est admissible, $\tilde{A}$ ne contient pas x; on en déduit que toute partie admissible, et en particulier toute suite de Cauchy faible, est ω-relativement compacte.

C.Q.F.D.

Exemples d'espaces L-facteurs dans leur bidual : espaces L^1, préduaux d'algèbres de von Neumann, duaux d'espaces M-idéaux dans leur bidual (*voir* [2]), espace L^1/H_1, dual A' de l'algèbre du disque A.

Remarques. — Ce résultat sera placé dans un cadre plus général dans la suite de ce travail.

— Il existe des espaces faiblement séquentiellement complets qui ne peuvent pas être renormés de façon à devenir L-facteurs dans leur bidual, par exemple l'espace $\mathscr{L}^\infty$ de Bourgain qui possède la propriété de Schur [3]. En effet, toute isométrie bijective du bidual de cet espace est la bitransposée d'une isométrie de l'espace (*voir* § III ci-après).

Le résultat suivant montre que si les préduaux de E sont « nombreux », alors E est f. s. c.

PROPOSITION 5. — *Soit* E *un espace de Banach. Si la réunion des préduaux de* E *est totale dans* E', *alors* E *est faiblement séquentiellement complet.*

Démonstration. — Soit $(E_i)_{i \in I}$ l'ensemble des préduaux de E. Pour tout $i \in I$, on a $E'' = E \oplus (E_i)^\perp$, et la projection π_i de E'' sur E parallèlement à $(E_i)^\perp$ est de norme 1. Par hypothèse, l'espace engendré par $(\bigcup_{i \in I} E_i)$ est fortement dense dans E'. On a donc $\bigcap_{i \in I} (E_i)^\perp = \{0\}$. Soit $x \in E'' \setminus E$, et $i_0 \in I$. On a $\|\pi_{i_0}\| = 1$, donc :

$$\pi_{i_0}(x) \in \bigcap_{u \in E} B(u, \|x-u\|) \cap E.$$

Comme $\bigcap_{i \in I} (E_i)^\perp = \{0\}$, il existe $i_1 \in I$ tel que $(x - \pi_{i_0}(x)) \notin (E_{i_1})^\perp = \operatorname{Ker} \pi_{i_1}$, et donc :

$$\pi_{i_1}(x) \neq \pi_{i_0}(x).$$

Comme $\|\pi_{i_1}\| = 1$, on a :

$$\pi_{i_0}(x) \neq \pi_{i_1}(x) \in \bigcap_{u \in E} B(u, \|x-u\|) \cap E.$$

Par conséquent, toute partie admissible de A, en particulier toute suite de Cauchy faible, est ω-relativement compacte.

Exemples. — L'espace $l^1(I)$ avec sa norme usuelle, ou le produit de $l^1(I)$ avec un reflexif $(R, \|\ \|)$ muni de la norme sup $(\|\ \|_1, \|\ \|)$.

Cette proposition exprime le fait que s'il y a « beaucoup » de préduaux de E, il y a « peu » de parties admissibles dans E. Inversement, nous allons voir que l'existence de nombreuses parties admissibles dans E entraîne l'unicité du prédual de E. Nous allons pour cela introduire quelques notions nouvelles.

DÉFINITION 6. — On appelle cadre de E dans E'', et on note $\gamma(E)$, l'orthogonal dans E'' du sous-ensemble $\mathscr{B}_{E'} \cap E^\perp$ de E'''.

$\gamma(E)$ est un sous-espace fortement fermé de E'' qui contient E. La proposition suivante explique son intérêt.

PROPOSITION 7. — *Soit* E *un espace de Banach. Soit* π *une projection de norme* 1 *de* E''' *sur* E'. *Alors* Ker π *contient* $\mathscr{B}_{E'} \cap E^{\perp}$. *En particulier, tout prédual de* E' *est contenu dans* $\gamma(E)$.

Démonstration. — Soit $x \in \mathscr{B}_{E'} \cap E^{\perp}$. Désignons par π_E la projection de E''' sur E' parallèlement à $E^{\perp}$. On a :

$$\| u \| = \| \pi_E(u) - \pi_E(x) \| \leqq \| u - x \|, \qquad \forall u \in E'$$

et donc

$$0 \in \bigcap_{u \in E'} B(u, \| x - u \|) \cap E',$$

d'où puisque $x \in \mathscr{B}_{E'}$:

$$\bigcap_{u \in E'} B(u, \| x - u \|) \cap E' = \{ 0 \}.$$

Donc, pour toute projection π de norme 1 de E''' sur E', on a $\pi(x) = 0$, et $\mathscr{B}_{E'} \cap E^{\perp} \subseteqq \mathrm{Ker}\ \pi$. Si X est un prédual de E', on a :

$$X^{\perp} = \mathrm{Ker}\ \pi_X \supseteqq \mathscr{B}_{E'} \cap E^{\perp}$$

et donc :

$$X \subseteqq (\mathscr{B}_{E'} \cap E^{\perp})_{\perp} = \gamma(E).$$

C.Q.F.D.

La « localisation » des préduaux de E' est liée naturellement au caractère plus ou moins $(\omega^* - \omega^*)$-continu des isométries de E'.

PROPOSITION 8. — *On note* $\chi(E', E)$ *la topologie, définie sur* E', *de la convergence simple sur* $\gamma(E)$. *Toute bijection isométrique* I *de* E' *sur* E' *est continue pour la topologie* $\chi(E', E)$. *De plus, si* $\overline{A}$ *désigne l'adhérence dans* (E', ω^*) *d'une partie admissible* A, I *est continue de* $(\overline{A}, \omega^*)$ *sur* $(\overline{I(A)}, \omega^*)$.

Démonstration. — Soit $I : E' \to E'$ une bijection isométrique. L'application $\pi_1 = I'' \circ \pi_E \circ I''^{-1}$ est une projection de norme 1 de E''' sur E'. On a (prop. 7) Ker $\pi_1 \supseteqq \mathscr{B}_E \cap E^{\perp}$; mais on a $\mathrm{Ker}\ \pi_1 = I''(\mathrm{Ker}\ \pi_E) = I''(E^{\perp})$; d'autre part il est clair que $I''(\mathscr{B}_{E'}) \supseteqq \mathscr{B}_{E'}$. On a donc :

$$I''(\mathscr{B}_{E'} \cap E^{\perp}) \supseteqq \mathscr{B}_{E'} \cap E^{\perp}.$$

Et en appliquant le même raisonnement à I^{-1} :

$$I''(\mathscr{B}_{E'} \cap E^{\perp}) = \mathscr{B}_{E'} \cap E^{\perp},$$

d'où :

$$I'(\gamma(E)) = \gamma(E),$$

ce qui montre que I est continue pour $\chi(E', E)$.

Soit maintenant A admissible dans E'; montrons que $I=(\overline{A}, \omega^*) \to (E', \omega^*)$ est continue. Il suffit de montrer que pour tout ultrafiltre $\mathscr{U}$, et toute famille (x_α) dans A, on a :

$$x_\alpha \underset{\mathscr{U}}{\to} x \quad \text{dans } (\overline{A}, \omega^*) \quad \Rightarrow \quad I(x_\alpha) \underset{\mathscr{U}}{\to} I(x) \quad \text{dans } (E', \omega^*).$$

On a $\lim\limits_{\mathscr{U}} x_\alpha = x'$ dans (E''', ω^*). On a $x' \in \tilde{A}$, donc $(x'-x) \in \mathscr{B}_{E'} \cap E^\perp$. On a :

$$I(x_\alpha) = I''(x_\alpha) \underset{\mathscr{U}}{\to} I''(x') \quad \text{dans } (E''', \omega^*).$$

D'autre part $I''(x'-x) \in \mathscr{B}_{E'} \cap E^\perp$, donc :

$$I''(x') - I''(x) = I''(x') - I(x) \in E^\perp.$$

On en déduit que :

$$\varphi(I''(x_\alpha)) \underset{\mathscr{U}}{\to} \varphi(I(x)), \qquad \forall \varphi \in E$$

donc que $I(x_\alpha) \underset{\mathscr{U}}{\to} I(x)$ dans (E', ω^*).

On a enfin $I(\overline{A}) \subseteq \overline{I(A)}$ par continuité, d'où $I(\overline{A}) = \overline{I(A)}$ en considérant I^{-1}.

C.Q.F.D.

Remarques. — Les notions définies ci-dessus dépendent en général de la norme dont E est muni. Par exemple, le cadre de $c_0(\mathbb{N})$ muni de sa norme usuelle est $l^\infty(\mathbb{N})$, et le cadre de $c_0(\mathbb{N})$ muni d'une norme l. u. c. est $c_0(\mathbb{N})$. Nous verrons aux paragraphe II et III des exemples où on a indépendance de la norme choisie.

— Une notion de cadre, et de topologie $\chi(E', E)$ associée est définie dans [6]. Le cadre défini ci-dessus est plus petit, ce qui améliore les résultats obtenus, comme on le verra.

— Définissons sur E' la topologie $\alpha(E', E)$ par : $0 \subseteq E'$ est ouvert pour $\alpha(E', E)$ ssi pour toute A admissible dans E', $0 \cap \overline{A}$ est ouvert dans $(\overline{A}, \omega^*)$. D'après la proposition 8, on peut énoncer : toute bijection isométrique de E' est continue de $(E', \alpha(E', E))$ dans $(E', \alpha(E', E))$.

Déduisons de la proposition 8 le :

THÉORÈME 9. — *Soit* E *un espace de Banach. Soit* $\overline{E}_s$ *l'adhérence* séquentielle *de* E *dans* (E'', ω^*). *Toute bijection isométrique* I *de* E'' *telle que* $I(E)=E$ *est un homéomorphisme de* $(\overline{E}_s, \omega^*)$ *sur* $(\overline{E}_s, \omega^*)$.

Démonstration. — Appelons J la restriction de I à E. Soit $J''=E'' \to E''$ la bitransposée de J. Soit $x \in \overline{E}_s$. Il existe une suite $\{x_n\}$ dans E telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ dans (E'', ω^*), et on a :

$$J''(x) = \lim_{n\to\infty} I(x_n) \quad \text{dans } (E'', \omega^*).$$

Or, la suite $\{x_n\}$ est de Cauchy faible, donc est une partie admissible de E″. D'après la proposition 8, on a donc $\mathrm{I}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{I}(x_n)$, et donc I et J″ coïncident sur $\overline{\mathrm{E}}_s$, ce qui montre que I est $(\omega^{*\prime} - \omega^*)$, continue sur $\overline{\mathrm{E}}_s$; on voit que c'est un homéomorphisme en considérant I^{-1}.

C.Q.F.D.

On en déduit la généralisation annoncée du théorème 4.

PROPOSITION 10. — *Soient* E *un espace de Banach, et* $\mathrm{I} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ *une bijection isométrique. Tous les prolongements de* I *en une bijection isométrique* $\tilde{\mathrm{I}}$ *de* E″ *coïncident sur* $\overline{\mathrm{E}}_s$. *En particulier, s'il existe une bijection isométrique* J *de* E″ *telle que* $\mathrm{Ker}(\mathrm{J}-\mathrm{Id}) = \mathrm{E}$, *l'espace* E *est faiblement séquentiellement complet.*

Démonstration. — D'après le théorème 9, $\tilde{\mathrm{I}}$ coïncide avec I″ sur $\overline{\mathrm{E}}_s$ pour tout $\tilde{\mathrm{I}}$. S'il existe J telle que $\mathrm{Ker}(\mathrm{J}-\mathrm{Id}) = \mathrm{E}$, alors J est un prolongement de Id_E qui ne coïncide avec $(\mathrm{Id}_\mathrm{E})'' = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}''}$ que sur E, ce qui montre que $\mathrm{E} = \overline{\mathrm{E}}_\mathrm{S}$.

C.Q.F.D.

Si π est une L-projection de E″ sur E, l'application $2\pi - \mathrm{Id}$ est une telle bijection isométrique, d'où le théorème 4.

Dans le cadre des espaces réticulés, on obtient ainsi une caractérisation des espaces faiblement sequentiellement complets.

PROPOSITION 11. — *Soit* E *un espace de Banach réticulé. Les énoncés suivants sont équivalents.*

(1) E *est faiblement séquentiellement complet.*

(2) *Il existe une symétrie isométrique* $\mathscr{S}$ *de* E″ *telle que* $\mathrm{Ker}(\mathscr{S} - \mathrm{Id}) = \mathrm{E}$.

Démonstration. — $(2) \Rightarrow (1)$ se déduit immédiatement de la proposition 10, puisque toute symétrie est bijective.

$(1) \Rightarrow (2)$ si E est faiblement séquentiellement complet, E est une bande de son bidual E″ ([14], p. 133). Soit E_e la bande étrangère à E dans E″; on a $\mathrm{E}' = \mathrm{E} \oplus \mathrm{E}_e$. Soit $\mathscr{S}$ la symétrie définie par $\mathscr{S}(x) = x_1 - x_2$, où $x = x_1 + x_2$ est la décomposition de $x \in \mathrm{E}''$ sur E et E_e. On a $\| \mathscr{S}(x) \| = \| x \|$ car E″ est réticulé et $x_1 \wedge x_2 = 0$ dans E″.

C.Q.F.D.

Remarques. — L'implication $(1) \Rightarrow (2)$ n'est pas vraie en général pour les espaces non réticulés. Par exemple $\mathscr{L}^\infty$ + Schur + RNP de Bourgain [3] ne peut être renormé de façon à ce qu'il existe une telle symétrie (*voir* les théorèmes 15 et 18).

— Si on ne suppose plus que $\mathrm{I}(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$ dans le théorème 9, on montre, sous l'hypothèse E séparable, que I est séquentiellement continue de $(\overline{\mathrm{E}}_s, \omega^*)$ dans $(\mathrm{I}(\overline{\mathrm{E}}_s), \omega^*)$.

Revenons à présent à une application un peu plus centrale des propositions 7 et 8.

THÉORÈME 12. — *Soit* E *un espace de Banach. Si* $\mathscr{B}_{\mathrm{E}'} \cap \mathrm{E}^\perp$ *est* ω^*-*dense dans* $\mathrm{E}^\perp$, *alors* E *est l'unique prédual de son dual, et toute bijection isométrique de* E′ *est* $(\omega^* - \omega^*)$-*continue. Si de* *plus* $\mathscr{B}_{E'} \cap E^{\perp}$ *est fortement dense dans* $E^{\perp}$, *il existe une unique projection de norme* 1 *de* E''' *sur* E'.

Démonstration. — Si $\mathscr{B}_{E'} \cap E^{\perp}$ est ω^*-dense dans $E^{\perp}$, on a $\gamma(E)=E$ et d'après la proposition 7 E est l'unique prédual de E'. De plus, on a dans ce cas $\chi(E', E)=\omega^*$, donc d'après la proposition 8 toutes les isométries de E' sont $(\omega^*-\omega^*)$ continues. Supposons maintenant que $\mathscr{B}_{E'} \cap E^{\perp}$ soit $\| \ \|$-dense dans $E^{\perp}$. Si $\pi : E''' \to E'$ est une projection de norme 1, on a $\operatorname{Ker} \pi \supseteq \mathscr{B}_{E'} \cap E^{\perp}$ par la proposition 7 donc $\operatorname{Ker} \pi \supseteq E^{\perp}$ puisque $\operatorname{Ker} \pi$ est fortement fermé, donc $\operatorname{Ker} \pi = E^{\perp}$ et $\pi = \pi_E$.

C.Q.F.D.

Exemples. — Les exemples les plus nombreux d'application de ce théorème se présentent dans un cadre plus restreint où l'on a indépendance vis-à-vis de la norme (*voir* paragraphe II et III ci-après, en particulier le théorème 18).

— Si la norme de E est l. u. c. ou si la norme de E' est Fréchet-différentiable sur un ensemble dense, on a $\mathscr{B}_{E'} \cap E^{\perp} = E^{\perp}$ (par [15] et le lemme 2).

— Si E est un espace $L^1(\mu)$, ou μ est diffuse, on montre que $\mathscr{B}_{E'} \cap E^{\perp}$ est ω^*-dense dans $E^{\perp}$ (voir théorème 18 ci-dessous). Par ailleurs, il existe [9] plusieurs projections de norme 1 de E''' sur E' et donc $\mathscr{B}_{E'} \cap E^{\perp}$ n'est pas fortement dense dans $E^{\perp}$.

La propriété $\mathscr{B}_{E'} \cap E^{\perp}$ ω^*-dense dans $E^{\perp}$ n'est ni isomorphique, ni héréditaire. En effet, il existe [8] une norme $\| \ \|$ sur $c_0(\mathbb{N})$ telle que $\gamma(c_0(\mathbb{N}), \| \ \|)=c_0(\mathbb{N})$, et telle que $(c_0(\mathbb{N}), \| \ \|)$ contienne isométriquement $(c_0(\mathbb{N}), \| \ \|_{\infty})$; or il est clair que $\gamma(c_0(\mathbb{N}), \| \ \|_{\infty})=l^{\infty}(\mathbb{N})$. Par ailleurs, l'ensemble $\mathscr{B}_{E'}$ n'est pas un espace vectoriel et n'est pas fortement fermé en général. Il est donc interessant de charcher à définir un sous-ensemble de $\mathscr{B}_{E'}$ qui soit un espace vectoriel fortement fermé, et qui permette de définir une propriété isomorphique et héréditaire qui assure l'unicité du prédual de E'. C'est l'objet des paragraphes II et III de ce travail.

2. Parties ⋆-admissibles dans un espace dual

Introduisons une définition :

Définition. Lemme 13. — On note $\mathscr{B}_u$ le sous-espace vectoriel fortement fermé de E''' formé des éléments x de E''' qui vérifient : $\forall$ C convexe fermé borné de E, $x : (\tilde{C}, \omega^*) \to \mathbb{K}$ a au moins un point de continuité.

On dit qu'une partie bornée A de E' est ⋆-admissible si $\tilde{A} \subset \mathscr{B}_u$.

Démonstration. — Une application facile de théorème de Baire montre que si $x \in \mathscr{B}_u$, on a $\forall$ C convexe fermé borné de E, $x : (\tilde{C}, \omega^*) \to \mathbb{K}$ est continu en tout point d'un $\mathscr{G}\delta$-dense de $(\tilde{C}, \omega^*)$. Soit $G(x)$ ce $\mathscr{G}\delta$-dense. Si $x, y \in \mathscr{B}_u$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$G(\lambda x+\mu y) \supseteq G(x) \cap G(y)$$

et comme $G(x) \cap G(y)$ est dense, on a $\lambda x+\mu y \in \mathscr{B}_u$. Si $\{x_n\}$ est une suite dans $\mathscr{B}_u$ et si

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$, on a :

$$G(x) \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G(x_n)$$

et donc $\mathscr{B}_u$ est fortement fermé.

C.Q.F.D.

Remarques. — Il est immédiat que l'espace $\mathscr{B}_u$ est indépendant de la norme équivalente dont est muni l'espace E.

— Par le lemme 2, on a $\mathscr{B}_u \subseteq \mathscr{B}_{E'}$, et par conséquent toute partie $\star$-admissible de E′ est admissible pour toute norme sur E′ duale d'une norme de E.

Introduisons une dernière définition.

DÉFINITION 14. — On appelle cadre universel de E dans E″, et on note $\gamma_u(E)$, l'orthogonal dans E″ de $\mathscr{B}_u \cap E^\perp$. On dit que E est *bien encadré* si $E = \gamma_u(E)$, i. e. si $\mathscr{B}_u \cap E^\perp$ est ω^*-dense dans $E^\perp$. On dit que E est *très bien encadré* si $\mathscr{B}_u = E'''$.

Remarques. — Puisque $\mathscr{B}_u \subseteq \mathscr{B}_{E'}$, le cadre universel $\gamma_u(E)$ contient $\gamma(E)$ pour toute norme équivalente sur E. Notons de plus que puisque $\mathscr{B}_u$ est un espace vectoriel fermé en norme, on a $\mathscr{B}_u = E'''$ ssi $\mathscr{B}_u \cap E^\perp$ est dense en norme dans $E^\perp$. Enfin, on pourrait définir et étudier les topologies $\chi_u(E', E)$ et $\alpha_u(E', E)$ sur E′; nous ne le ferons pas par souci de concision.

Exemple. — Si E est un espace réticulé, alors $\gamma_u(E)$ est la bande engendrée par E dans E″ (*voir* [6] et la proposition 17 ci-dessous). La topologie $\chi_u(E', E)$ est la topologie faible σ la plus fine telle que : $\{x_\alpha\} \subseteq E'$ ensemble filtrant, $\{x_\alpha\}$ converge vers x en ordre $\Rightarrow \{x_a\}$ converge vers x pour σ.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 12.

THÉORÈME 15. — *Soit* E *un espace de Banach. Tout prédual de* E′ *est contenu dans* $\gamma_u(E)$. *Si* E *est bien encadré*, E *est l'unique prédual de son dual, et toute bijection isométrique de* E′ *est* $(\omega^* - \omega^*)$ *continue. Si de plus* E *est très bien encadré, il existe une unique projection de norme* 1 *de* E‴ *sur* E′.

Il nous reste à présent à étudier la classe des espaces bien encadrés, et à montrer qu'elle contient de nombreuses classes usuelles d'espaces de Banach.

3. Les espaces bien encadrés

Montrons tout d'abord que les classes des espaces bien encadrés, ou très bien encadrés, ont de bonnes propriétés de stabilité.

THÉORÈME 16. — *La classe des espaces bien encadrés — respectivement très bien encadrés — est stable par isomorphie, héréditaire, et stable par somme directe.*

Démonstration. — La stabilité des classes par isomorphie et somme directe est évidente. Montrons l'hérédité.

Si E est un banach, et F un sous-espace fermé, soit $r_F : E' \to F'$ l'application de restriction à F, et $r_F'' : E''' \to F'''$ sa bitransposée. On a $r_F''(E^\perp) = F^\perp$; en effet il est clair que $r_F''(E^\perp) \subseteqq F^\perp$; soit $x \in F^\perp$, et $\tilde{x} \in E'''$ tel que $r_F''(\tilde{x}) = x$. Décomposons $\tilde{x} = x_1 + x_2$ sur $E' \oplus E^\perp$; on a $r_F''(x_1) \in F'$, $r_F''(x_2) \in F^\perp$ et $r_F''(x_1) + r_F''(x_2) = x$, d'où $r_F''(x_2) = x$, et $x \in r_F''(E^\perp)$. On a de plus, avec des notations évidentes $r_F''(\mathscr{B}_u(E)) \subseteqq \mathscr{B}_u(F)$, et donc $r_F''(E^\perp \cap \mathscr{B}_u(E)) \subseteqq F^\perp \cap \mathscr{B}_u(F)$. L'application r_F'' étant $(\omega^* - \omega^*)$ continue et surjective de $E^\perp$ sur $F^\perp$, on a : $E^\perp \cap \mathscr{B}_u(E)$ ω^*-dense dans $E^\perp \Rightarrow F^\perp \cap \mathscr{B}_u(F)$ ω^*-dense dans $F^\perp$.

Tout sous-espace d'un espace bien encadré est donc bien encadré. De même, si $E^\perp \cap \mathscr{B}_u(E) = E^\perp$, on a :

$$r_F''(E^\perp) = F^\perp \subseteqq F^\perp \cap \mathscr{B}_u(F)$$

d'où $F^\perp \subseteqq \mathscr{B}_u(F)$; donc tout sous-espace d'un espace très bien encadré est très bien encadré.

C.Q.F.D.

Remarque. — Le pré-ordre suivant a été introduit par G. A. Edgar [5]; soit E, F deux espaces de Banach. On dit que $E \prec F$ si :

$$E = \cap \{ T''^{-1}(F) \mid T : E \to F \text{ linéaire continu} \}.$$

Le pré-ordre $\prec$ généralise l'inclusion. On montre comme dans le théorème 16 que si F est bien encadré et si $E \prec F$, alors E est bien encadré.

Le résultat suivant fournit un critère permettant d'affirmer qu'un espace est bien encadré.

PROPOSITION 17. — *Soit* E *un espace de Banach. Si pour tout* $x \in E'' \setminus E$, *il existe une partie* A $\star$*-admissible de* E' *telle que* $x : (A, \omega^*) \to \mathbb{K}$ *ne soit pas uniformément continu, alors* E *est bien encadré. Si* E_1' *est* $\star$*-admissible, alors* E *est très bien encadré.*

Démonstration. — Supposons que E ne soit pas bien encadré; il existe alors $\varphi \in E''$ tel que :

$$\begin{cases} \varphi = 0 & \text{sur } \mathscr{B}_u \cap E^\perp, \\ \varphi \neq 0 & \text{sur } E^\perp, \end{cases}$$

on a donc $\varphi \in E'' \setminus E$ et $\varphi = 0$ sur $\mathscr{B}_u \cap E^\perp$. Soit $A \subseteqq E'$ une partie $\star$-admissible; soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre et $\{x_\alpha\} \subset A$. Soient :

$$\begin{cases} x = \lim_{\mathscr{U}} x_\alpha & \text{dans } (E', \omega^*), \\ x' = \lim_{\mathscr{U}} x_\alpha & \text{dans } (E''', \omega^*). \end{cases}$$

On a $x' \in \tilde{A} \subseteqq \mathscr{B}_u$, et $x' - x \in E^\perp$, d'où $(x' - x) \in \mathscr{B}_u \cap E^\perp$. On a donc $\varphi(x) = \varphi(x') = \lim_{\mathscr{U}} \varphi(x_\alpha)$ puisque φ est continue sur (E''', ω^*). On en déduit que φ est continue sur $(\overline{A}, \omega^*)$, ceci pour toute partie $\star$-admissible A, ce qui est absurde.

Si E'_1 est $\star$-admissible, alors $E'''_1 = \hat{E}'_1$ est contenu dans $\mathscr{B}_u$ donc $\mathscr{B}_u = E'''$.

C.Q.F.D.

Remarque. — Pour tout espace de Banach E, notons $\hat{E}$ le complété de E pour la structure de la convergence uniforme sur les parties $\star$-admissibles de E'. La démonstration de la proposition 17 montre qu'on a toujours $\gamma_u(E) \subseteqq \hat{E} \cap E''$. L'hypothèse la proposition 17 est $E = \hat{E} \cap E''$.

Nous sommes maintenant prêts à décrire des classes concrètes d'espaces bien encadrés.

THÉORÈME 18. — *Les espaces appartenant aux classes suivantes sont bien encadrés :*

(1) *Espaces faiblement séquentiellement complets, sous-espaces d'un Banach réticulé avec une norme continue en ordre. En particulier :*

(1 *a*) *espaces* f. s. c., *facteur direct dans un Banach réticulé;*

(1 *b*) *espaces* $\mathscr{L}^1$;

(1 *c*) *espaces à structure locale inconditionnelle qui ne contiennent pas* l_n^∞ *uniformément.*

(2) *Préduaux d'algèbres de von Neumann.*

(3) *Espace* L^1/H_1.

(4) *Espace* A', *dual de l'algèbre du disque* A.

Les espaces appartenant aux classes suivantes sont très bien encadrés.

(5) *Sous-espaces d'espaces duaux ayant la propriété de Radon-Nikodym faible. En particulier :*

(5 *a*) *espaces ne contenant pas* l_n^1 *uniformément.*

(6) *Espaces ayant la propriété de Radon-Nikodym.*

Tous les espaces ci-dessus sont donc, héréditairement et isomorphiquement, unique prédual de leur dual.

Démonstration. — (1) Soit V un espace de Banach réticulé. Il est classique que la bande V_1 engendrée par V dans V'' est l'espace des formes linéaires continues en ordre sur V' ([14], p. 80). Une méthode classique permet de voir que $\varphi \in V_1$ si et seulement si on a $\lim_{\alpha \to \infty} \varphi(x_\alpha) = 0$ pour toute famille $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ d'éléments disjoints bornée en ordre, avec $\lim_{\alpha \to \infty} x_\alpha = 0$ dans (V', ω^*). Une telle famille est un ensemble admissible par la proposition 3; on a donc comme dans la proposition 17 $\gamma_u(V) \subseteqq V_1$. Si la norme de V est continue en ordre, alors tout élément de V_1 est différence de deux fonctions s. c. i. sur (V', ω^*) (*voir* par exemple [14]). Soit F un sous-espace f. s. c. de V; on voit comme dans le théorème 16 que $\gamma_u(F) \subseteqq \gamma_u(V) \cap F''$, donc tout élément de $\gamma_u(F)$ est borélien sur (F', ω^*); mais sous ces hypothèses, toute forme linéaire borélienne sur (F', ω^*) appartient à F ([6] ou [17]), donc $\gamma_u(F) = F$.

(1 *a*) est un cas particulier de (1) d'après [12]. Tout espace $\mathscr{L}^1$ est sous-espace d'un espace L^1, d'où (1 *b*).

Enfin, si E a une structure locale inconditionnelle et en contient pas l_n^∞ uniformément, alors E'' est facteur direct dans un réticulé, d'où le résultat par [12].

(2) Soit A une algèbre de von Neumann, et A_* son prédual. On a [16] : une forme linéaire φ sur une algèbre de von Neumann A agissant sur un Hilbert H appartient à A_* si et seulement si $\sum_{\lambda\in\Lambda} \varphi(P_\lambda)=\varphi(\mathrm{Id}_H)$ pour toute famille orthogonale de projections $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans A telle que $\sum_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda=\mathrm{Id}_H$ pour la topologie faible des opérateurs. Par la proposition 3, la famille $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est admissible; la proposition 17 termine la démonstration.

(3) Le lemme suivant est énoncé dans [1] : Soit $\hat{m}$ la mesure sur le spectre Ω de $L^\infty(\pi; dx)$ qui correspond à la mesure de Lebesgue. Une mesure ν sur Ω est étrangère à $\hat{m}$ si et seulement si il existe un compact A de Ω et une suite (g_n) dans $H^\infty(\pi)$ tels que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\varphi(g_n)|<\infty, \qquad \forall \varphi\in H^{\infty\prime}, \tag{1}$$

$$|\nu|(\Omega\setminus A)=0, \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \hat{g}_n(\omega)=\chi_A(\omega) \qquad (\omega\in\Omega), \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(\xi)=0, \tag{4}$$

pour presque tout $\xi\in\pi$, où $\hat{g}_n\in\mathscr{C}(\Omega)$ est la transformée de Guel'fand de g_n. La suite (g_n) est une partie admissible de dual H^∞ de L^1/H_1 par la proposition 3; la proposition 17 termine la démonstration.

(4) Il est bien connu que $A'=L^1/H_1^0\oplus\mathscr{M}_s(\pi)$, où $\mathscr{M}_s(\pi)$ désigne l'espace des mesures sur π étrangères à la mesure de Lebesgue. Le résultat se déduit alors de (1) et (3), et du théorème 16.

(5) Soit X′ un dual jouissant de la propriété de Radon-Nikodym faible et contenant E; l'espace X ne contient pas $l^1(\mathbb{N})$. On montre alors ([8], démonstration du théorème 1) que pour tout C convexe fermé borné de E, et tout $x\in E'''$, $x:(\tilde{C}, \omega^*)\to\mathbb{K}$ est continu sur un $\mathscr{G}_\delta$-dense de $(\tilde{C}, \omega^*)$, d'où $\mathscr{B}_u=E'''$. Si ne contient pas l_n^1 uniformément, il est bien connu que E′ ne contient pas l_n^1 uniformément et en particulier que E′ ne contient pas $l^1(\mathbb{N})$. L'espace E″ a alors la propriété de Radon-Nikodym faible.

(6) Si E a la propriété de Radon-Nikodym, pour tout C convexe fermé borné de E, l'application $\mathrm{Id}:(C, \omega)\to(C, \|\ \|)$ a un point de continuité; donc $\mathrm{Id}:(\tilde{C}, \omega^*)\to(\tilde{C}, \|\ \|)$ a un point de continuité; tout élément $x\in E'''$ est continu sur $(\tilde{C}, \|\ \|)$, donc a un point de continuité sur $(\tilde{C}, \omega^*)$.

C.Q.F.D.

Remarques. — (1) On déduit de [9] qu'un espace $L^1(\mu)$ est très bien encadré si et seulement si la mesure μ est atomique. En effet, dans le cas contraire, il existe plusieurs projections de norme 1 de E‴ sur E′ [9].

(2) Les espaces de Lindenstrauss de dimension infinie ne sont jamais bien encadrés. En effet, on voit comme dans le théorème 4 que si E est de Lindenstrauss, on a $\mathscr{B}_u=E'$, et donc $\gamma_u(E)=E''$.

(3) On pourrait étudier une propriété moins générale que la propriété « être bien encadré » en ne considérant comme parties admissibles que les suites de Cauchy faibles. La théorie ainsi développée est plus élégante : par exemple la topologie $\chi(E', E)$ est la topologie faible associée à $\alpha(E', E)$ (*voir* prop. 8), et le cadre associé est exactement $\hat{E} \cap E''$ (*voir* prop. 17). Malheureusement, le « théorème 18 » correspondant est moins puissant; par exemple, les sous-espaces de duaux séparables sont bien encadrés en ce sens, mais l'espace $\mathscr{L}^\infty + \mathrm{RNP} + \mathrm{Schur}$ de Bourgain ne l'est pas. Cette propriété différentie les sous-espaces de duaux séparables et les espaces séparables ayant la propriété de Radon-Nikodym généraux.

(4) La moralité du théorème 18 est que s'il y a « beaucoup » de sous-espaces de E' qui ne contiennent pas $l^1(\mathbb{N})$, E est unique prédual. Dans cet ordre d'idées, appelons (Z) la propriété suivante : E est unique prédual et a au plus un prédual. On peut alors montrer :

– si E ne contient pas l_n^1 uniformément, E a (Z);
– si E est un dual et ne contient pas $l^1(\mathbb{N})$, E a (Z);
– si E est un bidual et ne contient pas $l^1(c)$, E a (Z).

On n'ose pas se demander si un tridual qui ne contient pas $l^1(2^c)$ a la propriété (Z)...

(5) Au vu de la proposition 5 et du théorème 18, on peut se demander quels sont les propriétés des espaces qui ont plusieurs préduaux. Afin de limiter les espoirs dans cette direction notons qu'on peut montrer que si E est séparable, $(E \times \mathscr{C}([0, 1]), \mathrm{Sup})$ n'est jamais unique prédual; de même, si E est à dual séparable, $(E \times c_0(\mathbb{N}), \mathrm{Sup})$ n'est jamais unique prédual. Il est clair par le théorème 18 (5) que si E a plusieurs préduaux, alors E contient $l^1(\mathbb{N})$. Mais a-t-on : Si E a plusieurs préduaux, E contient $l^1(\mathbb{N})$ complémenté ? *A fortiori*, on ne sait pas si un espace qui ne contient pas $c_0(\mathbb{N})$ est unique prédual. Le réponse a ces deux questions est sans doute négative (*voir* [6]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. ANDO, *On the Predual of* H^∞ (*Commentationes Mathematicae Special*, I, Warsaw, 1978).

[2] E. BEHRENDS, M-*Structure and the Banach-Stone Theorem* (*Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag).

[3] J. BOURGAIN, *Un espace* $\mathscr{L}^\infty$ *jouissant de la propriété de Schur et de la propriété de Radon-Nikodym* (*Séminaire d'Analyse fonctionnelle de l'École Polytechnique*, exposé n° 4, 1978/1979).

[4] L. BROWN et T. ITO, *Classes of Banach Spaces with Unique Isometric Preduals* (*Pacific J. Math.*, vol. 90, n° 2, 1980).

[5] G. A. EDGAR, *Séminaire d'initiation à l'analyse*, Université Paris-VI, 1980-1981.

[6] G. GODEFROY et M. TALAGRAND, *Nouvelles classes d'espaces de Banach à prédual unique*, *Séminaire d'Analyse fonctionnelle de l'École Polytechnique*, exposé n° 6, 1980-1981.

[7] G. GODEFROY, *Points de Namioka, espaces normants, applications à la théorie isométrique de la dualité* (*Israël J. Math.*, vol. 38, n° 3, 1981).

[8] G. GODEFROY, *Propriétés de la classe des espaces de Banach qui sont l'unique prédual de leur dual* (à paraître).

[9] G. GODEFROY, *Étude des projections de norme* 1 *de* E'' *sur* E. *Unicité de certains préduaux. Applications* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 29, fasc. 4, 1979).

[10] A. GROTHENDIECK, *Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces* L^1, (*Canadian Math. J.*, vol. 7, 1955).

[11] R. HAYDON, *Some More Characterization of Banach Spaces Containing* l^1, (*Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 80, 1976, p. 269-276).

[12] W. B. JOHNSON et L. TZAFRIRI, *Some More Banach Spaces which do Not Have Local Inconditionnal Structure* (*Mouston J. Math.*, vol. 3, 1977).

[13] S. SAKAI, *A Characterization of* W*-*algebras* (*Pacific J. Math.*, vol. 6, 1956, p. 763-773).
[14] M. M. SCHAEFER, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer-Verlag, n° 215, 1974.
[15] V. L. SMULYAN, *Sur la dérivabilité de la norme dans l'espace de Banach* (*Dokl-Acad. Nauk S.S.S.R.*, vol. 27, 1940, p. 643-648).
[16] M. TAKESAKI, *On the Conjugate Space of an Operator Algebra* (*Tohoku Math. J.*, vol. 10, 1958).
[17] A. W. WICKSTEAD, *A Characterization of Weakly Sequentially Complete Banach Lattices* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 26, fasc. 2, 1976).

(Manuscrit reçu le 25 janvier 1982.)

G. GODEFROY
Équipe d'analyse,
Université Paris-VI,
4, place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05.