ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GÉRARD LAUMON

Majoration de sommes exponentielles attachées aux hypersurfaces diagonales

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 16, nº 1 (1983), p. 1-58

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1983_4_16_1_1_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 16, 1983, p. 1 à 58.

MAJORATION DE SOMMES EXPONENTIELLES ATTACHÉES AUX HYPERSURFACES DIAGONALES

PAR GÉRARD LAUMON (*)

0. Introduction

Ce travail, dont l'idée m'a été suggérée par N. M. Katz, a pour origine un article de C. Hooley sur les nombres qui sont représentables comme somme de deux cubes [4]. Hooley étudie la somme exponentielle :

$$S_1(p;\alpha,\beta)=\sum_{\xi^3+\eta^3=1+\zeta^2} e^{2\pi i(\alpha\xi+\beta\eta)/p} \qquad (\xi,\eta,\zeta\in\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}),$$

pour α, $\beta\in\mathbb{Z}$. Il montre que, pour $\alpha\not\equiv 0$, $\alpha\not\equiv\beta \pmod p$ et pour $p\equiv 2 \pmod 3$, on a :

$$S_1(p;\alpha,\beta)=O(p).$$

Nous étudierons ici, plus généralement, les sommes exponentielles de la forme :

$$S(p)=\sum_{1+c_1y_1^{d_1}+\ldots+c_my_m^{d_m}=0} e^{2\pi i(a_1y_1+\ldots+a_my_m)/p} \qquad (y_i\in\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}),$$

où m, $d_1,\ldots,d_m$ sont des entiers strictement positifs, $c_1,\ldots,c_m$, $a_1,\ldots,a_m\in\mathbb{Z}$ et p est un nombre premier. Notre résultat principal est que, si les a_i et c_i $(i=1,\ldots,m)$ sont suffisamment généraux, on a, pour presque tout p :

$$|S(p)|\leqq A(\sqrt{p})^{m-1}, \tag{0.1}$$

où A est une constante indépendante de p, qui est un polynôme en les d_i [*voir* (4.1) et (4.2) pour des énoncés précis].

Nous établissons ce théorème par voie l-adique, en suivant la méthode exposée par P. Deligne dans SGA 4 1/2 [Sommes trig.]. Pour résoudre la difficulté posée par la compactification des hypersurfaces diagonales, on exploite, selon une suggestion de N. M. Katz, le fait qu'une hypersurface diagonale est quotient d'une hypersurface de Fermat

(*) Équipe de recherche associée au C.N.R.S. n° 653.

et les relations qui en découlent entre les sommes $S(p)$ et d'autres sommes attachées aux hypersurfaces de Fermat.

Voici, brièvement, le contenu de cet article. Les numéros 1, 2 et 3 rappellent les résultats généraux de P. Deligne [1]. Le numéro 4 contient les énoncés précis de majorations des sommes $S(p)$. Aux numéros 5, 6, 7 et 8, on établit la « pureté » des sommes $S(p)$, et en particulier le fait que l'on a $S(p)=O((\sqrt{p})^{m-1})$ en s'inspirant de certains calculs de P. Deligne [8]. Signalons que le numéro 8 consiste essentiellement en une traduction cohomologique de résultats de A. Weil [11], à l'aide du « produit de convolution » de P. Deligne [2]. La constante A de (0.1) est calculée aux numéros 9 et 10, par la méthode de fibration du cours de N. M. Katz [7].

Je tiens à remercier en premier lieu L. Illusie qui m'a initié à la recherche, qui a patiemment dirigé ce travail et qui a apporté de nombreuses améliorations à la rédaction finale de cet article. Je tiens à remercier N. M. Katz de m'avoir posé ce problème et P. Deligne de m'avoir accordé de fructueux entretiens. Je voudrais remercier aussi M. Giusti, M. Merle et B. Tessier qui m'ont aidé à démontrer l'énoncé 9.2. Je remercie enfin M[me] Bonnardel qui a réalisé avec diligence et avec beaucoup de soin la frappe du manuscrit.

1. Notations (*cf.* [1]).

Soient p un nombre premier, q une puissance de p, $\mathbb{F}$ une clôture algébrique du corps premier $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{F}_{q^n}$ le corps fini à q^n éléments dans $\mathbb{F}$.

Soient l un nombre premier distinct de p, E_λ une extension finie de $\mathbb{Q}_l$. Si $\psi : \mathbb{F}_q \to E_\lambda^*$ (resp. $\chi : \mathbb{F}_q^* \to E_\lambda^*$) est un caractère additif (resp. multiplicatif), on notera :

$$\psi_n : \quad \mathbb{F}_{q^n} \to E_\lambda^* \qquad (\text{resp. } \chi_n : \mathbb{F}_{q^n}^* \to E_\lambda^*)$$

le composé de ψ (resp. χ) et de la trace (resp. la norme) de $\mathbb{F}_{q^n}$ à $\mathbb{F}_q$.

On désignera par un symbole affecté d'un indice 0 un objet (schéma, morphisme, faisceau, ...) sur $\mathbb{F}_q$; le même symbole sans 0 désigne alors l'objet qui s'en déduit par extension des scalaires à $\mathbb{F}$.

Si X_0 est un schéma sur $\mathbb{F}_q$, le morphisme de Frobenius F_0 de X_0 est l'identité sur l'espace topologique sous-jacent et l'élévation à la puissance q-ième sur le faisceau structural. Alors F agit sur $X(\mathbb{F})$ comme $\varphi \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$ défini par $\varphi(x)=x^q$ $(\forall\, x \in \mathbb{F})$; en particulier $X^{F^n}=X_0(\mathbb{F}_{q^n})$.

Si X_0 est un schéma séparé et de type fini sur $\mathbb{F}_q$ et si $\mathscr{F}_0$ est un E_λ-faisceau sur X_0, on dispose de la correspondance de Frobenius :

$$F_0^* : \quad F_0^* \mathscr{F}_0 \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_0,$$

d'où résulte une action de F sur $H_c^*(X, \mathscr{F})$, que l'on notera F^*.

2. Torseurs de Lang et de Kummer (*cf.* [1]).

2.0. Soient A un groupe fini et X un schéma. Soit :

$$(2.0.1) \qquad \begin{array}{c} T \\ \pi \downarrow \;) \, A \\ X \end{array}$$

un A-*torseur* sur X, i. e. un X-schéma étale T muni d'une action à droite de A tel que le morphisme $(t, a) \mapsto (t, ta)$ de $T \times A$ dans $T \times_X T$ soit un isomorphisme. Soit $\mathscr{I}$ le faisceau pour la topologie étale sur X représenté par T; $\mathscr{I}$ est muni d'une action à droite de A et, localement pour la topologie étale sur X, $\mathscr{I}$ est isomorphe au faisceau constant A sur lequel A agit par translation à droite.

Pour un A-torseur (2.0.1) et une représentation linéaire $\rho : A \to GL(V)$ où V est un vectoriel de dimension finie sur E_λ, il existe à isomorphisme unique près un seul E_λ-faisceau, lisse de rang $\dim(V)$, noté $\rho(\mathscr{I})$, muni d'un morphisme de faisceaux :

(2.0.2) $$\rho : \quad \mathscr{I} \to \underline{\mathrm{Isom}}\,(V_X, \rho(\mathscr{I})),$$

tel que $\rho(ta) = \rho(t) \circ \rho(a)$ pour toute section t de $\mathscr{I}$ et tout $a \in A$.

Dans le cas particulier où $V = E_\lambda[A]$ et où ρ est la représentation régulière de A (A agit par translation à droite sur A), le E_λ-faisceau $\rho(\mathscr{I})$ n'est autre que $\pi_* E_\lambda$ où $\pi : T \to X$ est la projection du A-torseur.

Nous supposerons E_λ assez gros pour que toute représentation linéaire de A soit réalisable sur E_λ (*cf.* [10], 12.3) et alors nous noterons $\hat{A}$ l'ensemble des caractères des représentations irréductibles de A sur des E_λ-espaces vectoriels de dimension finie. Toute représentation ρ de A sur un E_λ-espace vectoriel de dimension finie V admet une décomposition canonique (*cf.* [10], 2.6) :

(2.0.3) $$\rho = \bigoplus_{\chi \in \hat{A}} \rho_\chi, \qquad V = \bigoplus_{\chi \in \hat{A}} V_\chi.$$

et le projecteur p_χ de V sur V_χ associé à cette décomposition est donné par la formule :

(2.0.4) $$p_\chi = \frac{n_\chi}{|A|} \sum_{a \in A} \chi(a^{-1})\, \rho(a),$$

où n_χ est le degré de χ et $|A|$ est le cardinal de A. Il en résulte aussitôt une décomposition canonique :

(2.0.5) $$\rho(\mathscr{I}) = \bigoplus_{\chi \in \hat{A}} \rho_\chi(\mathscr{I}).$$

Dans le cas particulier de la représentation régulière $\rho : A \to GL(E_\lambda[A])$, le rang de chaque E_λ-faisceau $\rho_\chi(\mathscr{I})$ est alors $\dim(V_\chi) = n_\chi^2$.

Supposons maintenant A commutatif, alors $\hat{A}$ est aussi le groupe des homomorphismes $\chi : A \to E_\lambda^*$, i. e. des représentations de degré 1 de A, et dans la décomposition (2.0.5) pour la représentation régulière $\rho : A \to GL(E_\lambda[A])$, on a $\rho_\chi(\mathscr{I}) = \chi(\mathscr{I})$. Par suite, on a une décomposition canonique :

(2.0.6) $$\pi_* E_\lambda = \bigoplus_{\chi \in \hat{A}} \chi(\mathscr{I}).$$

2.1. Soit G_0 un groupe algébrique commutatif connexe sur $\mathbb{F}_q$, le *torseur de Lang* est le $G_0(\mathbb{F}_q)$-torseur sur G_0 défini par la suite exacte :

$$0 \to G_0(\mathbb{F}_q) \to G_0 \xrightarrow{L} G_0 \to 0,$$

où $L : x \mapsto Fx - x$ est l'isogénie de Lang (la loi de groupe de G_0 est notée additivement). Pour $G_0 = \mathbb{G}_a$ le torseur de Lang est le $\mathbb{F}_q$-torseur défini par la suite exacte :

$$0 \to \mathbb{F}_q \to \mathbb{G}_a \xrightarrow{x \mapsto x^q - x} \mathbb{G}_a \to 0.$$

On notera $\mathscr{L}_0$ le faisceau pour la topologie étale sur G_0 représenté par le torseur de Lang.

Si $\psi : G_0(\mathbb{F}_q) \to E_\lambda^*$ est un caractère et si $f_0 : X_0 \to G_0$ est un morphisme de schémas sur $\mathbb{F}_q$ (X_0 séparé, de type fini sur $\mathbb{F}_q$), on note :

(2.1.1) $$\mathscr{L}(\psi, f_0),$$

le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur X_0 image réciproque par f_0 du E_λ-faisceau, $\psi^{-1}(\mathscr{L}_0)$, lisse de rang 1 sur G_0.

Le E_λ-faisceau $\mathscr{L}(\psi, f_0)$ est caractérisé par le fait que, pour tout $n \geqq 1$ et tout $x \in X^{F^n}$, $F_{0,x}^*$ agit sur $\mathscr{L}(\psi, f_0)$ comme l'homothétie de rapport $\psi_n(f_0(x))$, où ψ_n est le composé de ψ et de la norme $G_0(\mathbb{F}_{q^n}) \to G_0(\mathbb{F}_q)$.

Si $g_0 : Y_0 \to X_0$ est un morphisme entre $\mathbb{F}_q$-schémas séparés de type fini, on a :

(2.1.2) $$\mathscr{L}(\psi, f_0 \circ g_0) = g_0^* \mathscr{L}(\psi, f_0).$$

Si f_0, $g_0 : X_0 \to G_0$ sont deux morphismes de schémas sur $\mathbb{F}_q$, on a :

(2.1.3) $$\mathscr{L}(\psi, f_0 + g_0) = \mathscr{L}(\psi, f_0) \otimes \mathscr{L}(\psi, g_0).$$

Pour $G_0 = \prod_{i \in I} G_0^i$, ψ de coordonnées ψ_i $(i \in I)$, $X_0 = \prod_{i \in I} X_0^i$ et $f_0 = \prod_{i \in I} f_0^i$, on a :

(2.1.4) $$\mathscr{L}(\psi, f_0) = \boxtimes_{i \in I} \mathscr{L}(\psi_i, f_0^i).$$

On a aussi, pour tout $\mathbb{F}_q$-morphisme $f_0 : X_0 \to G_0$:

(2.1.5) $$\mathscr{L}(\psi, f_0)^{\vee} = \mathscr{L}(\psi^{-1}, f_0).$$

On notera $\mathscr{L}(\psi, f)$ l'image réciproque de $\mathscr{L}(\psi, f_0)$ sur $X = X_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$.

2.2. Soient k un corps algébriquement clos, n un entier inversible dans k et G un groupe algébrique commutatif connexe sur k (noté multiplicativement). Notons G_n le noyau de l'élévation à la puissance n-ième dans G, $[n] : G \xrightarrow{x \mapsto x^n} G$. La suite :

$$1 \to G_n(k) \to G \xrightarrow{[n]} G \to 1$$

est exacte, donc définit un $G_n(k)$-torseur sur G, dit *torseur de Kummer*. Pour $G=\mathbb{G}_{m,k}$, le torseur de Kummer est le $\boldsymbol{\mu}_n(k)$-torseur défini par la suite exacte :

$$1 \to \boldsymbol{\mu}_n(k) \to \mathbb{G}_{m,k} \xrightarrow{(n)} \mathbb{G}_{m,k} \to 1.$$

On notera $\mathscr{K}_n$ le faisceau pour la topologie étale représenté par le torseur de Kummer.

Si $\chi : G_n(k) \to E_\lambda^*$ est un caractère et si $f : X \to G$ est un k-morphisme, on note :

$$\mathscr{K}_n(\chi, f), \tag{2.2.1}$$

le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur X image réciproque par f du E_λ-faisceau $\chi^{-1}(\mathscr{K}_n)$, lisse de rang 1 sur G.

Si $g : Y \to X$ est un k-morphisme, on a :

$$\mathscr{K}_n(\chi, f \circ g) = g^* \mathscr{K}_n(\chi, f). \tag{2.2.2}$$

Si f, $g : X \to G$ sont deux k-morphismes, on a :

$$\mathscr{K}_n(\chi, f.g) = \mathscr{K}_n(\chi, f) \otimes \mathscr{K}_n(\chi, g). \tag{2.2.3}$$

Pour tout entier d inversible dans k, on a :

$$\mathscr{K}_n(\chi, f^d) = \mathscr{K}_n(\chi^d, f) \tag{2.2.4}$$

et, si $\chi^{(d)} : G_{nd}(k) \to E_\lambda^*$ est le composé de χ et de l'élévation à la puissance d-ième qui envoie $G_{nd}(k)$ dans $G_n(k)$, on a :

$$\mathscr{K}_{nd}(\chi^{(d)}, f) = \mathscr{K}_n(\chi, f). \tag{2.2.5}$$

Pour deux caractères $\chi_1, \chi_2 : \boldsymbol{\mu}_n(k) \to E_\lambda^*$ et pour tout k-morphisme $f : X \to G$, on a :

$$\mathscr{K}_n(\chi_1 \cdot \chi_2, f) = \mathscr{K}_n(\chi_1, f) \otimes \mathscr{K}_n(\chi_2, f). \tag{2.2.6}$$

Pour $G = \prod_{i \in I} G^i$, n un multiple commun des n_i $(i \in I)$, i. e. $n = n_i d_i$ (pour tout $i \in I$), χ de coordonnées $\chi_i^{(d_i)}$ $(i \in I)$ où :

$$\chi_i : \quad G_{n_i}^i(k) \to E_\lambda^*, \quad X = \prod_{i \in I} X^i \qquad \text{et} \qquad f = \prod_{i \in I} f^i,$$

on a :

$$\mathscr{K}_n(\chi, f) = \boxtimes_{i \in I} \mathscr{K}_{n_i}(\chi_i, f_i). \tag{2.2.7}$$

Pour tout k-morphisme $f : X \to G$, on a aussi :

$$\mathscr{K}_n(\chi, f)^{\vee} = \mathscr{K}_n(\chi^{-1}, f). \tag{2.2.8}$$

Pour tout carré cartésien de k-morphismes :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "{[n]}"] \\ Y \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

la décomposition (2.0.6) de $[n]_* E_\lambda$ fournit par image réciproque sur Y, une décomposition canonique :

(2.2.9) $$\pi_* E_\lambda = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G_n(k)}} \mathscr{K}_n(\chi, g).$$

Remarque 2.2.10. — Soit $k_0 \subset k$ un sous-corps sur lequel G est défini, i. e. tel que $G = G_0 \otimes_{k_0} k$ pour un groupe algébrique G_0 sur k_0. On suppose que :

(2.2.10.1) $$(G_0)_n(k_0) = (G_0)_n(k) = G_n(k).$$

Alors, pour tout caractère $\chi : G_n(k) \to E_\lambda^*$ et pour tout k_0-morphisme $f_0 : X_0 \to G_0$, le E_λ-faisceau $\mathscr{K}_n(\chi, f)$, où $f : X \to G$ est le morphisme déduit de f_0 par extension des scalaires de k_0 à k, est l'image réciproque sur X d'un E_λ-faisceau sur X_0, noté :

(2.2.10.2) $$\mathscr{K}_n(\chi, f_0).$$

Pour tout carré cartésien de k_0-morphismes :

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\pi_0"'] & G_0 \arrow[d, "{[n]}"] \\ Y_0 \arrow[r, "g_0"] & G_0 \end{tikzcd}$$

on a une décomposition canonique :

(2.2.10.3) $$(\pi_0)_* E_\lambda = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G_n(k)}} \mathscr{K}_n(\chi, g_0),$$

dont l'image réciproque sur $Y = Y_0 \otimes_{k_0} k$ n'est autre que (2.2.9).

Pour $k = \mathbb{F}$, $k_0 = \mathbb{F}_q$ et $G = \mathbb{G}_m$, la condition (2.2.10.1) équivaut à la condition :

(2.2.10.4) L'entier n divise $q-1$.

3. Rappels sur les sommes trigonométriques (*cf.* [1])

3.0. Soient $G_0, f_0 : X_0 \to G_0$, $\theta : G_0(\mathbb{F}_q) \to E_\lambda^*$ comme en 2.1. La formule des traces pour la correspondance de Frobenius du couple $(X_0, \mathscr{L}(\theta, f_0))$ montre que, pour tout entier $n \geqq 1$, on a (avec les notations de 2.1) :

(3.0.1) $$\sum_{x \in X_0(\mathbb{F}_{q^n})} \theta_n(f_0(x)) = \mathrm{Tr}((F^*)^n, H_c^*(X, \mathscr{L}(\theta, f))).$$

Rappelons qu'un nombre $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_l$ est dit *pur de poids* w ($w \in \mathbb{Z}$) si α est un nombre algébrique (i. e. appartient à la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$) et si pour toute valeur absolue $|\ |$ archimédienne sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, on a :

$$\log_{\sqrt{q}} |\alpha| = w.$$

DEFINITION 3.1. — *Soit w un entier $\geqq 0$, les sommes trigonométriques :*

$$\sum_{x \in X_0(\mathbb{F}_{q^n})} \theta_n(f_0(x)) \qquad (n \in \mathbb{N}^*), \tag{3.1.1}$$

seront dites pures de poids w s'il existe un ensemble fini $\mathscr{A}$ de nombres $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_l$, purs de poids w, et, pour chaque $\alpha \in \mathscr{A}$, un entier $m(\alpha) > 0$ tels que, pour tout entier $n \geqq 1$, on ait :

$$\sum_{x \in X_0(\mathbb{F}_{q^n})} \theta_n(f_0(x)) = (-1)^w \sum_{\alpha \in \mathscr{A}} m(\alpha).\alpha^n. \tag{3.1.2}$$

Les sommes trigonométriques (3.1.1) *seront dites pures si elles sont pures de poids w pour un certain entier $w \geqq 1$ (la terminologie diffère de celle de* [11] 3.6).

Remarque 3.1.3. — Si les sommes trigonométriques (3.1.1) sont pures, l'entier $w \geqq 1$ est caractérisé par :

$$w = \log_{\sqrt{p}} \limsup_{n \to +\infty} \Big/ \sum_{x \in X_0(\mathbb{F}_{q^n})} \theta_n(f_0(x)) |^{1/n},$$

quelle que soit la valeur absolue archimédienne $|\ |$ sur E_λ choisie (*cf.* [7]); c'est *le poids* des sommes (3.1.1).

Remarque 3.1.4. — Si les sommes trigonométriques (3.1.1) sont pures de poids w, pour toute valeur absolue archimédienne $|\ |$ sur E_λ, on a (*cf.* [7]) :

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\left| \sum_{x \in X_0(\mathbb{F}_{q^n})} \theta_n(f_0(x)) \right|}{(\sqrt{q})^{nw}} = \sum_{\alpha \in \mathscr{A}} m(\alpha).$$

Le critère fondamental de pureté ci-dessous est dû à Deligne ([1], 1.20).

CRITÈRE DE PURETÉ 3.2. — *Soient X_0 un schéma affine lisse purement de dimension m sur $\mathbb{F}_q$, G_0 un groupe algébrique commutatif connexe sur $\mathbb{F}_q$, $\theta : G_0(\mathbb{F}_q) \to E_\lambda^*$ un caractère et $f_0 : X_0 \to G_0$ un morphisme. On suppose que les applications canoniques :*

$$H_c^i(X, \mathscr{L}(\theta, f)) \to H^i(X, \mathscr{L}(\theta, f)) \qquad (i \geqq 0),$$

sont des isomorphismes. Alors les sommes trigonométriques :

$$\sum_{x \in X_0(\mathbb{F}_{q^n})} \theta_n(f_0(x)),$$

sont pures de poids m et :

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\left|\sum_{x\in X_0(\mathbb{F}_{q^n})} \theta_n(f_0(x))\right|}{(\sqrt{q})^{mn}} = (-1)^m \chi_c(X, \mathscr{L}(\theta, f)),$$

pour toute valeur absolue archimédienne $|\ |$ *sur* E_λ.

Remarque 3.2.1. — Plus précisément, sous les hypothèses du critère, on a $H_c^i(X, \mathscr{L}(\theta, f))=0$ pour $i\neq m$ et les valeurs propres de F^* sur $H_c^m(X, \mathscr{L}(\theta, f))$ sont des entiers algébriques purs de poids m.

Rappelons enfin la proposition très utile suivante :

PROPOSITION 3.3. — *Soient* $\overline{X}$ *un schéma propre sur un corps algébriquement clos* k, $j : X \subsetneq \overline{X}$ *un ouvert et* $\mathscr{F}$ *un* E_λ*-faisceau sur* X. *On suppose que :*

(*a*) $(j_*\mathscr{F})_x=0$ *pour tout* $x\in\overline{X}-X$,

(*b*) $R^i j_*\mathscr{F}=0$ *pour tout* $i>0$.

Alors, les applications canoniques :

$$H_c^i(X, \mathscr{F}) \to H^i(X, \mathscr{F}) \qquad (i\geqq 0),$$

sont des isomorphismes.

4. Énoncés des résultats

4.0. Soit I un ensemble fini non vide, soit $(d_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers strictement positifs, soit $(c_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{F}_q$, $c_i\neq 0$ pour tout $i\in I$, et soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{F}_q$, non tous nuls.

Soit $\psi : \mathbb{F}_q \to E_\lambda^*$ un caractère additif non trivial, on considère les sommes trigonométriques $(n\geqq 1)$:

$$S_{I,n}=S_n=\sum_{1+\sum_{i\in I} c_i y_i^{d_i}=0} \psi_n\left(\sum_{i\in I} a_i y_i\right) \qquad (y_i\in\mathbb{F}_{q^n}). \tag{4.0.1}$$

Ces sommes sont attachées à la situation géométrique suivante : soit :

$$V_{I,0}=V_0, \tag{4.0.2}$$

le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^I_{\mathbb{F}_q}=\operatorname{Spec}(\mathbb{F}_q[(y_i)_{i\in I}])$ d'équation :

$$1+\sum_{i\in I} c_i y_i^{d_i}=0.$$

soit :

$$g_{I,0}=g_0 : V_0 \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}, \tag{4.0.3}$$

le morphisme défini par :

$$g_0((y_i)_{i\in \mathrm{I}})=\sum_{i\in \mathrm{I}} a_i y_i$$

et soit :

(4.0.4) $$\mathscr{G}_{\mathrm{I},0}=\mathscr{G}_0=\mathscr{L}(\psi, g_0),$$

$\mathscr{G}_0$ est donc un E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur V_0.

La formule (3.0.1) donne, pour tout entier $n\geqq 1$,

(4.0.5) $$\mathrm{S}_n=\mathrm{Tr}((\mathrm{F}^*)^n, \mathrm{H}_c^*(\mathrm{V}, \mathscr{G})).$$

4.0.6. Soient $1\leqq d_1<d_2<\ldots<d_\mathrm{N}$ les valeurs distinctes prises par les $d_i(i\in \mathrm{I})$, soit d le p.p.c.m. des $d_i(i\in \mathrm{I})$ et soient $r_i=d/d_i(i\in \mathrm{I})$, $r_\nu=d/d_\nu(\nu=1, \ldots, \mathrm{N})$; pour tout $\nu=1, \ldots, \mathrm{N}$, posons :

$$\mathrm{I}_\nu=\{i\in \mathrm{I}\mid d_i=d_\nu\}=\{i\in \mathrm{I}\mid r_i=r_\nu\}$$

et

$$\mathrm{I}'_\nu=\{i\in \mathrm{I}_\nu\mid a_i\neq 0\}.$$

Il sera utile aussi de poser :

$$\mathrm{I}'=\bigcup_{\nu=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{I}'_\nu=\{i\in \mathrm{I}\mid a_i\neq 0\}.$$

Dans toute l'étude géométrique des sommes $\mathrm{S}_{\mathrm{I},n}$, nous ferons les deux hypothèses suivantes :

(A) *d est premier à p.*

(B) *Pour tout* $\nu=1, \ldots, \mathrm{N}$, *tel que* I'_ν *contienne au moins deux éléments, les deux cônes de* $\mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{\mathrm{I}'_\nu}=\mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(x_i)_{i\in \mathrm{I}'_\nu}])$ *d'équations :*

$$\sum_{i\in \mathrm{I}'_\nu} a_i x_i^{r_\nu}=0 \qquad et \qquad \sum_{i\in \mathrm{I}'_\nu} c_i x_i^{d}=0,$$

sont transverses en dehors de l'origine.

Nos résultats principaux sont les suivants :

THÉORÈME 4.1 (*Pureté*). — *Sous les hypothèses* (A) *et* (B) *les sommes trigonométriques* S_n *sont pures de poids* $\mathrm{card}(\mathrm{I})-1$. *Plus précisément, pour tout* $i\in \mathbb{N}$, $i\neq \mathrm{card}(\mathrm{I})-1$, *on a :*

$$\mathrm{H}_c^i(\mathrm{V}, \mathscr{G})=0$$

et, si $\mathscr{A}$ *est l'ensemble des valeurs propres de Frobenius agissant sur* $\mathrm{H}_c^i(\mathrm{V}, \mathscr{G})$ *pour* $i=\mathrm{card}(\mathrm{I})-1$, *et si* $m(\alpha)$ *est la multiplicité de la valeur propre* α, *chaque* $\alpha\in\mathscr{A}$ *est pur de poids* $\mathrm{card}(\mathrm{I})$-1, *on a :*

$$\mathrm{S}_n=(-1)^{\mathrm{card}(\mathrm{I})-1}\sum_{\alpha\in\mathscr{A}} m(\alpha).\alpha^n$$

et :

$$\sum_{\alpha \in \mathscr{A}} m(\alpha) = (-1)^{\mathrm{card}(\mathrm{I})-1} \chi_c(\mathrm{V}, \mathscr{G}).$$

THÉORÈME 4.2 (*Valeur de la constante*). — *Sous les hypothèses* (A) *et* (B), *on a :*

$$\chi_c(\mathrm{V}, \mathscr{G}) = (-1)^{\mathrm{card}(\mathrm{I})-1} \frac{\prod_{i \in \mathrm{I}} (d_i - 1)}{d_{\nu_0} - 1} d_{\nu_0},$$

où ν_0 *est le plus petit indice* $\nu \in \{1, \ldots, \mathrm{N}\}$ *tel que* $\mathrm{I}'_\nu \neq \emptyset$ (*cf.* 4.0.6).

COROLLAIRE 4.3. — *Sous les hypothèses* (A) *et* (B), *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et toute valeur absolue archimédienne* $|\ |$ *sur* E_λ, *on a la majoration :*

$$|\mathrm{S}_n| \leqq \frac{\prod_{i \in \mathrm{I}} (d_i - 1)}{d_{\nu_0} - 1} d_{\nu_0} (\sqrt{q})^{n(\mathrm{card}(\mathrm{I})-1)},$$

où ν_0 *est le plus petit indice* $\nu \in \{1, \ldots, \mathrm{N}\}$ *tel que* $\mathrm{I}'_\nu \neq \emptyset$ (*cf.* 4.0.6).

Remarque 4.3.0. — Quitte à effectuer une extension finie des scalaires ($\mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_{q^f}$) on peut, pour démontrer 4.1 et 4.2, supposer que tous les c_i sont égaux à 1 (il suffit d'effectuer le changement de variable $y_i \to c_i^{1/d_i} y_i$ pour se ramener à ce cas).

Remarque 4.3.1. — On peut déduire de 4.3 un énoncé de majoration des sommes S_n qui vaut aussi pour des d_i non nécessairement premiers à p. Supposons $q = p$ (pour simplifier) et décomposons les $d_i (i \in \mathrm{I})$ en :

$$d_i = p^{s_i} . \overline{d}_i,$$

avec $s_i \in \mathbb{N}$, $\overline{d}_i \in \mathbb{N}^*$ et $(p, \overline{d}_i) = 1$. Soient $1 \leqq \overline{d}_1 < \overline{d}_2 < \ldots < \overline{d}_{\overline{\mathrm{N}}}$ les valeurs distinctes prises par les $\overline{d}_i (i \in \mathrm{I})$, soit $\overline{d}$ le p. p. c. m. des $\overline{d}_i (i \in \mathrm{I})$ et soient :

$$\overline{r}_i = \overline{d}/\overline{d}_i \quad (i \in \mathrm{I}), \qquad \overline{r}_\nu = \overline{d}/\overline{d}_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, \overline{\mathrm{N}});$$

pour tout $\nu = 1, \ldots, \overline{\mathrm{N}}$, posons :

$$\overline{\mathrm{I}}_\nu = \{ i \in \mathrm{I} \mid \overline{d}_i = \overline{d}_\nu \} = \{ i \in \mathrm{I} \mid \overline{r}_i = \overline{r}_\nu \}$$

et :

$$\overline{\mathrm{I}}'_\nu = \{ i \in \overline{\mathrm{I}}_\nu \mid a_i \neq 0 \}.$$

Faisons l'hypothèse suivante :

($\overline{\mathrm{B}}$) *pour tout* $\nu = 1, \ldots, \overline{\mathrm{N}}$, *tel que* $\overline{\mathrm{I}}'_\nu$ *contienne au moins deux éléments, les deux cônes de* $\mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{\overline{\mathrm{I}}'_\nu} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(x_i)_{i \in \overline{\mathrm{I}}'_\nu}])$ *d'équations :*

$$\sum_{i \in \overline{\mathrm{I}}'_\nu} a_i x_i^{\overline{r}_\nu} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i \in \overline{\mathrm{I}}'_\nu} c_i x_i^{\overline{d}} = 0,$$

sont transverses en dehors de l'origine.

Sous l'hypothèse $(\overline{\mathrm{B}})$, pour tout entier $n \geqq 1$ et pour toute valeur absolue archimédienne $|\ |$ sur E_λ, on a la majoration :

$$|\mathrm{S}_n| \leqq \frac{\prod_{i\in \mathrm{I}} (\bar{d}_i - 1)}{(\bar{d}_{\bar{\mathrm{v}}_0} - 1)} \bar{d}_{\bar{\mathrm{v}}_0} (\sqrt{p})^{n\,\mathrm{card}(\mathrm{I})-1},$$

où $\bar{\mathrm{v}}_0$ est le plus petit indice $\mathrm{v} \in \{1, \ldots, \overline{\mathrm{N}}\}$ tel que $\overline{\mathrm{I}}'_\mathrm{v} \neq \emptyset$.

En effet, il suffit de remarquer que le changement de variable :

$$z_i = y_i^{p^{\mathrm{v}_i}} \qquad (i \in \mathrm{I}).$$

permet de réécrire les sommes S_n sous la forme :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{\substack{1+\sum c_i z_i^{\bar{d}_i}=0 \\ i\in \mathrm{I}}} \psi_n\Big(\sum_{i\in \mathrm{I}} a_i z_i\Big) \qquad (z_i \in \mathbb{F}_{q^n}).$$

Cependant, l'hypothèse (A) est fondamentale pour l'étude géométrique qui va suivre.

Remarque 4.3.2 (suggestion du « referee »). — Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_m]$ un polynôme isobare pour y_i de poids $r_i/d\,(i \in \mathrm{I})$, d et $r_1, \ldots, r_m$ étant des entiers >0 (par exemple :

$$\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i^{d_i}, \qquad r_i/d = 1/d_i)$$

et soit :

$$\mathrm{Q}(x_1, \ldots, x_m) = \mathrm{P}(x_1^{r_1}, \ldots, x_m^{r_m})$$

($\mathrm{Q} \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$ est homogène de degré d).

Supposons que l'hypersurface de $\mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}$ d'équation :

$$\mathrm{X}_0^d + \mathrm{Q}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m) = 0$$

est lisse. La méthode pour démontrer 4.1 développée ci-dessous devrait permettre d'exhiber un ouvert $\mathrm{U} \neq \emptyset$ de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[a_1, \ldots, a_m])$ ayant la propriété suivante : pour tout corps fini $\mathbb{F}_q$, pour tout $a \in \mathrm{U}(\mathbb{F}_q)$, les sommes trigonométriques $(n \geqq 1)$:

$$\mathrm{S}_n = \sum_{1+\mathrm{P}(y_1, \ldots, y_m)=0} \Psi_n\left(\sum_{i=1}^{m} a_i y_i\right) \qquad (y_i \in \mathbb{F}_{q^n}),$$

sont pures de poids $m-1$.

4.4. *Cas particuliers*

4.4.1. Si tous les d_i sont égaux, i. e. si $d_i = d\,(\forall\, i \in \mathrm{I})$, considérons l'hypersurface projective lisse de Fermat, X, dans $\mathbb{P}^{\mathrm{I}}_{\mathbb{F}} = \mathrm{Proj}(\mathbb{F}[\mathrm{X}_0, (\mathrm{X}_i)_{i\in \mathrm{I}}])$ d'équation $\sum_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i^d + \mathrm{X}_0^d = 0$ et soit L (resp.

H) l'hyperplan de $\mathbb{P}^{\mathrm{I}}_{\mathbb{F}}$ d'équation $X_0=0$ (resp. $\sum_{i\in I} a_i X_i=0$). L'hypothèse (B) exprime simplement la transversalité H à $X\cap L$ et on a :

$$\chi_c(V, \mathscr{G})=d(1-d)^{\mathrm{card}(I)-1}=\chi_c(X-(X\cap L))-\chi_c((X\cap L)-(X\cap L\cap H)).$$

Par suite, nos énoncés 4.1, 4.2 et 4.3 résultent d'un théorème de N. M. Katz ([7], 5.1.1).

4.4.2. A l'opposé de 4.4.1, si les $d_i (i\in I)$, sont deux à deux distincts, l'hypothèse (B) est automatique (on suppose bien entendu les $a_i (i\in I)$ non tous nuls).

4.4.3. Dans le cas où un seul a_i est non nul, on peut donner une démonstration plus élémentaire de 4.3. En utilisant les résultats de A. Weil [12], on se ramène à $\mathrm{card}(I)=2$, i. e. à une hypersurface diagonale $1+\sum_{i\in I} c_i y_i^{d_i}=0$ qui est une courbe. En particulier, il est facile d'obtenir 4.2 en utilisant la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič.

4.4.4. Considérons les sommes trigonométriques :

$$S_n(p;\alpha,\beta)=\sum_{\substack{\xi^3+\eta^3=1+\zeta^2\\ \xi,\eta,\zeta\in\mathbb{F}_{p^n}}}\psi_n(\alpha\xi+\beta\eta),$$

où $\alpha, \beta\in\mathbb{F}_p$, étudiées par C. Hooley [4]. Supposons, comme le fait C. Hooley, que $\alpha\neq 0$ et que $p\equiv 2 \pmod 3$, $p\neq 2$. Alors notre hypothèse (A) est vérifiée et notre hypothèse (B) équivaut à $\alpha^3\neq\beta^3$, i. e. $\alpha\neq\beta$, puisque $p\equiv 2 \pmod 3$ et que $\alpha, \beta\in\mathbb{F}_p$. La condition $\alpha\neq\beta$ est bien celle qu'impose C. Hooley.

5. Définition et pureté des sommes $s_{I, n}$

5.0. L'étude directe de la pureté des sommes $S_{I, n}$ semble peu abordable dans la mesure où l'on ne connaît pas de compactification lisse simple des hypersurfaces diagonales. Suivant une suggestion de N. M. Katz, nous allons ramener, en partie, l'étude des sommes $S_{I, n}$ à celle des sommes $s_{I, n}$ décrites ci-dessous. Ces sommes $s_{I, n}$ seront d'étude plus facile dans la mesure où elles sont indexées par les points à valeurs dans $\mathbb{F}_{q^n}$ d'une hypersurface de Fermat qui admet une compactification lisse très simple.

Soient donc d un entier strictement positif, I un ensemble fini non vide, $(r_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers strictement positifs et $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{F}_q$ non tous nuls.

Soit $\psi : \mathbb{F}_q\to E_\lambda^*$ un caractère additif non trivial, on considère les sommes trigonométriques $(n\geqq 1)$:

$$s_{I, n}=s_n=\sum_{1+\sum_{i\in I} x_i^d=0}\psi_n\Big(\sum_{i\in I} a_i x_i^{r_i}\Big)\qquad (x_i\in\mathbb{F}_{q^n}).\tag{5.0.1}$$

Ces sommes sont attachées à la situation géométrique suivante : soit :

$$U_{I, 0}=U_0,\tag{5.0.2}$$

le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q[(x_i)_{i\in \mathrm{I}}])$ d'équation :

$$1+\sum_{i\in \mathrm{I}} x_i^d=0.$$

soit :

(5.0.3)
$$f_{\mathrm{I},0}=f_0 : \mathrm{U}_0\to \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_q},$$

le morphisme défini par :

$$f_0((x_i)_{i\in \mathrm{I}})=\sum_{i\in \mathrm{I}} a_i x_i^{r_i}$$

et soit :

(5.0.4)
$$\mathscr{F}_{\mathrm{I},0}=\mathscr{F}_0=\mathscr{L}(\psi, f_0),$$

$\mathscr{F}_0$ est donc un E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur U_0.

D'après (3.0.1), on a, pour tout $n\geqq 1$:

(5.0.5)
$$s_n=\mathrm{Tr}((\mathrm{F}^*)^n, \mathrm{H}^*_c(\mathrm{U}, \mathscr{F})).$$

5.0.6. Nous noterons $r_1>r_2>\ldots>r_{\mathrm{N}}\geqq 1$ les valeurs distinctes prises par les $r_i (i\in \mathrm{I})$ et nous poserons, pour tout $\nu=1, \ldots, \mathrm{N}$:

$$\mathrm{I}_\nu=\{i\in \mathrm{I} \mid r_i=r_\nu\}$$

et :

$$\mathrm{I}'_\nu=\{i\in \mathrm{I}_\nu \mid a_i\neq 0\}.$$

On posera enfin :

$$\mathrm{I}'=\bigcup_{\nu=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{I}'_\nu=\{i\in \mathrm{I} \mid a_i\neq 0\}.$$

Nous allons dans un premier temps démontrer un énoncé de pureté pour les sommes $s_{\mathrm{I},n}$ qui nous servira de point de départ pour prouver 4.1.

5.1. Nous démontrerons la pureté des sommes trigonométriques $s_{\mathrm{I},n}$ sous les deux hypothèses suivantes (peut-être trop restrictives, mais cela nous suffira) :

(A_1) *Pour tout* $i\in \mathrm{I}$, r_i *est premier à* p; d *est premier à* p.

(B_1) *Il existe au plus un* $i\in \mathrm{I}$ *tel que* $a_i=0$ (i. e. $\mathrm{card}(\mathrm{I}')\geqq \mathrm{card}(\mathrm{I})-1$); *pour tout* $\nu=1, \ldots, \mathrm{N}$, *tel que* I'_ν *contienne au moins deux éléments, les deux cônes de* $\mathbb{A}^{\mathrm{I}'_\nu}_{\mathbb{F}}=\mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(x_i)_{i\in \mathrm{I}'_\nu}])$ *d'équations :*

$$\sum_{i\in \mathrm{I}'_\nu} a_i x_i^{r_\nu}=0 \qquad et \qquad \sum_{i\in \mathrm{I}'_\nu} x_i^d=0,$$

sont transverses en dehors de l'origine.

Soit :

(5.1.1)
$$\mathrm{Z}_1=\mathrm{Z},$$

l'hypersurface projective de Fermat, de degré d, dans $\mathbb{P}^{\mathrm{I}}_{\mathbb{F}} = \mathrm{Proj}(\mathbb{F}[X_0, (X_i)_{i\in \mathrm{I}}])$ d'équation :

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} X_i^d + X_0^d = 0.$$

Alors Z est une compactification lisse de U [on a $(d, p)=1$ d'après (A_1)] : U est l'ouvert de Z défini par $X_0 \neq 0$; on notera :

$$j_{\mathrm{I}} = j : \mathrm{U} \hookrightarrow \mathrm{Z}, \tag{5.1.2}$$

l'inclusion et on posera :

$$\mathrm{Y}_{\mathrm{I}} = \mathrm{Y} = \mathrm{Z} - \mathrm{U}. \tag{5.1.3}$$

Pour tout $x \in \mathrm{U}$, de coordonnées homogènes $(X_0, (X_i)_{i\in \mathrm{I}})$, on a :

$$f(x) = \sum_{i\in \mathrm{I}} a_i \left(\frac{X_i}{X_0}\right)^{r_i}.$$

Proposition 5.2. — *Sous les hypothèses* (A_1) *et* (B_1) *de* 5.1, *on a :*

$$(\mathrm{R}^i j_* \mathscr{F})_z = 0,$$

pour tout point fermé z *de* Y *et pour tout* $i \in \mathbb{N}$.

Par suite (3.2, 3.3) :

Corollaire 5.2.1. — *Sous les hypothèses* (A_1) *et* (B_1) *de* 5.1, *la flèche d'oubli des supports :*

$$\mathrm{H}^i_c(\mathrm{U}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^i(\mathrm{U}, \mathscr{F})$$

est un isomorphisme, pour tout $i \in \mathbb{N}$, *et les sommes trigonométriques* s_n *sont pures de poids* $\mathrm{card}(\mathrm{I}) - 1$.

5.3. Pour prouver 5.2, il est commode d'introduire la notion suivante : soient Z un schéma de type fini sur un corps k algébriquement clos, Y un sous-schéma fermé de Z et z un point fermé de Y tel que (Z, Y) soit un k-couple lisse en z de codimension 1. Alors, nous appellerons *système de coordonnées locales sur* Z, *centré en* z, *adapté à* Y un diagramme de morphismes de k-schémas pointés :

(5.3.0)
$$\begin{tikzcd} & (\mathrm{Z}', z') \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\underline{u}"] & \\ (\mathrm{Z}, z) & & (\mathbb{A}^{m+1}_k, 0) \end{tikzcd}$$

où π est étale, où $\underline{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_m)$ est lisse et tel que $\pi^{-1}(\mathrm{Y})$ soit défini dans Z' par l'équation $u_0 = 0$ [un tel système n'est pas nécessairement *complet*, il ne l'est que si $\underline{u}$ est étale, i. e. si $m+1 = \dim_z(\mathrm{Z})$].

Soit $\mathscr{F}$ un E_λ-faisceau sur Z − Y (où E_λ est une extension finie de $\mathbb{Q}_l$ pour un l inversible dans k), nous dirons qu'un système de coordonnées locales (5.3.0) sur Z, centré en z, adapté à Y, est *adapté à* $\mathcal{F}$ s'il existe un E_λ-faisceau $\mathcal{G}$ sur l'ouvert de $\mathbb{A}_k^{m+1}$ défini par $u_0 \neq 0$ tel que $\pi^* \mathcal{F}$ soit isomorphe à $u^* \mathcal{G}$ sur $Z' - \pi^{-1}(Y)$. Notons alors j(resp. j', i) l'inclusion $Z - Y \subsetneq Z$ [resp. $Z' - \pi^{-1}(Y) \subsetneq \overline{Z}'$, $\{u_0 \neq 0\} \subsetneq \mathbb{A}_k^{m+1}$]; le lemme suivant nous servira plusieurs fois dans la suite de cet article :

LEMME 5.3.1. — *Avec les notations et les hypothèses ci-dessus, on a :*

$$(R^n j_* \mathcal{F})_z = (R^n i_* \mathcal{G})_0,$$

pour tout entier $n \geqq 0$.

Cela résulte aussitôt du théorème de changement de base par un morphisme lisse.

5.4. *Prouvons* 5.2.

5.4.0. Soit z un point fermé de Y, nous allons construire un système de coordonnées locales sur Z, centré en z, adapté à Y et à $\mathcal{F}$.

Comme X_0 et $\sum_{i \in I} X_i^d + X_0^d$ s'annule en z, il existe au moins deux indices $i \in I$ pour lesquels X_i ne s'annule pas en z et, puisque $\operatorname{card}(I') \geqq \operatorname{card}(I) - 1$, X_i ne s'annule pas en z pour au moins un $i \in I'$. Il existe donc un unique entier $m \in \{1, 2, \ldots, N\}$ tel que :

(i) X_i s'annule en z, pour tout $i \in I'_\nu$, $\nu = 1, \ldots, m-1$;

(ii) il existe $i \in I'_m$ pour lequel X_i ne s'annule pas en z.

Distinguons alors deux cas :

(*a*) $\sum_{i \in I'_m} a_i X_i^{r_m}$ *ne s'annule pas en* z : alors choisissons un indice $i_m \in I'_m$ tel que X_{i_m} ne s'annule pas en z; la fonction rationnelle :

$$\eta = \frac{\sum_{\nu = m}^{N} X_0^{r_m - r_\nu} (\sum_{i \in I'_\nu} a_i X_i^{r_\nu})}{X_{i_m}^{r_m}}$$

est définie dans un voisinage de z et ne s'annule pas en z; comme $(r_m, p) = 1$ [d'après (A_1)], le revêtement de Kümmer :

$$\pi : \quad (Z', z') \to (Z, z),$$

d'équation :

$$\zeta^{r_m} = \eta$$

est étale en z' [le choix de z' correspond au choix d'une racine r_m-ième de $\eta(z)$], donc, quitte à restreindre Z' en un voisinage ouvert de z', est étale partout. Choisissons pour tout $i \in I'_\nu$, $\nu = 1, \ldots, m-1$, une racine r_i-ième a'_i de a_i et considérons les fonctions sur Z', s'annulant en z' :

$$u_0 = \zeta^{-1} \frac{X_0}{X_{i_m}}$$

et :

$$u_i = a'_i \zeta^{-1} \frac{X_i}{X_{i_m}} \qquad (i \in I'_\nu,\ \nu = 1,\ \ldots,\ m-1);$$

soit $\mathbb{A}$ l'espace affine sur $\mathbb{F}$ de dimension $1 + \sum_{\nu=1}^{m-1} \operatorname{card}(I'_\nu)$ et soit :

$$\underline{u}:\quad (Z', z') \to (\mathbb{A}, 0),$$

le morphisme de composantes u_0 et les u_i ci-dessus. Le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & (Z', z') \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\underline{u}"] & \\ (Z, z) & & (\mathbb{A}, 0) \end{tikzcd}$$

est un système de coordonnées locales sur Z, centré en z, adapté à Y; de plus, il est adapté à $\mathscr{F}$ car, par construction :

$$\pi^* \mathscr{F} = \underline{u}^* \mathscr{L}\left(\psi,\ \left(\sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{i \in I'_\nu} \left(\frac{u_i}{u_0}\right)^{r_\nu}\right) + \frac{1}{u_0^{r_m}}\right).$$

(*b*) $\sum_{i \in I'_m} a_i X_i^{r_m}$ *s'annule en* z; alors, choisissons un indice $i_m \in I'_m$ tel que X_{i_m} ne s'annule pas en z et choisissons, pour tout $i \in I'_\nu$, $\nu = 1,\ \ldots,\ m-1$, une racine r_i-ième a'_i de a_i; les fonctions rationnelles :

$$u_0 = \frac{X_0}{X_{i_m}}$$

et :

$$u_i = a'_i \frac{X_i}{X_{i_m}} \qquad (i \in I'_\nu,\ \nu = 1,\ \ldots,\ m-1),$$

$$v = \frac{\sum_{\nu=m}^{N} X_0^{r_m - r_\nu} \left(\sum_{i \in I'_\nu} a_i X_i^{r_\nu}\right)}{X_{i_m}^{r_m}},$$

sont définies en z et s'annulent en z. Soi $\mathbb{A}$ l'espace affine sur $\mathbb{F}$ de dimension $2 + \sum_{\nu=1}^{m-1} \operatorname{card}(I'_\nu)$, alors l'hypothèse (B_1) assure que le morphisme :

$$\underline{u}:\quad (Z', z) \to (\mathbb{A}, 0),$$

de composantes u_0, $u_i (i \in I'_\nu,\ \nu = 1,\ \ldots,\ m-1)$ et v, défini sur un voisinage de Zariski convenable Z' de z dans Z, est lisse, de sorte que :

$$\begin{tikzcd} & (Z', z) \arrow[dl, hook'] \arrow[dr, "\underline{u}"] & \\ (Z, z) & & (\mathbb{A}, 0) \end{tikzcd}$$

est un système de coordonnées locales sur Z, centré en z, adapté à Y; de plus, ce système est adapté à $\mathscr{F}$ car, par construction, $\mathscr{F}\,|\,Z'$ est isomorphe à :

$$\underline{u}^* \mathscr{L}\left(\psi, \left(\sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{i\in I'_\nu} \left(\frac{u_i}{u_0}\right)^{r_\nu}\right) + \frac{v}{u_0^{r_m}}\right).$$

L'énoncé 5.2 est donc conséquence du lemme suivant (*cf.* 5.3.1).

LEMME 5.4.1. — *Soient m un entier, $m \geqq 1$, $(r_1, \ldots, r_m)$ une suite d'entiers positifs premiers à p, strictement décroissante, $(I'_\nu)_{\nu=1, \ldots, m-1}$ une famille finie d'ensembles finis deux à deux disjoints et $\psi : \mathbb{F}_q \to E_\lambda^*$ un caractère additif non trivial. Alors :*

(i) *si $\mathbb{A} = \operatorname{Spec}(\mathbb{F}[u_0, (u_i)_{i\in I'_\nu, \nu=1, \ldots, m-1}])$ et si $j : \mathbb{A}^0 \subsetneq \mathbb{A}$ est l'inclusion de l'ouvert $\mathbb{A}^0$ de $\mathbb{A}$ défini par $u_0 \neq 0$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\left[R^n j_* \mathscr{L}\left(\psi, \left(\sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{i\in I'_\nu} \left(\frac{u_i}{u_0}\right)^{r_\nu}\right) + \frac{1}{u_0^{r_m}}\right)\right]_{(0, \ldots, 0)} = 0.$$

(ii) *si $\mathrm{A} = \operatorname{Spec}(\mathbb{F}[u_0, (u_i)_{i\in I'_\nu, \nu=1, \ldots, m-1}, v])$ et si $j : \mathbb{A}^0 \subsetneq \mathbb{A}$ est l'inclusion de l'ouvert $\mathbb{A}^0$ de $\mathbb{A}$ défini par $u_0 \neq 0$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\left[R^n j_* \mathscr{L}\left(\psi, \left(\sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{i\in I'_\nu} \left(\frac{u_i}{u_0}\right)^{r_\nu}\right) + \frac{v}{u_0^{r_m}}\right)\right]_{(0, \ldots, 0)} = 0.$$

5.4.2. — Prouvons 5.4.1. Nous allons prouver simultanément les assertions (i) et (ii) en raisonnant par récurrence sur l'entier m; nous noterons encore $(\mathrm{i})_m$ et $(\mathrm{ii})_m$ ces assertions.

Pour $m=1$, ces deux assertions sont connues ([8], 3.1.1).

Admettons $(\mathrm{i})_{m'}$ et $(\mathrm{ii})_{m'}$ pour tout entier $m' < m$ et prouvons $(\mathrm{i})_m$ et $(\mathrm{ii})_m$. Nous commencerons par $(\mathrm{i})_m$.

Les notations étant celles de $(\mathrm{i})_m$, soit $\mathbb{P}$ la complétion projective de $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{P} = \operatorname{Proj}(\mathbb{F}[U_0, (U_i)_{i\in I'_\nu, \nu=1, \ldots, m-1}, T])$$

et soit $k : \mathbb{P}^0 \subsetneq \mathbb{P}$ l'inclusion de l'ouvert $\mathbb{P}^0$ de $\mathbb{P}$ défini par $U_0 \neq 0$. Soit $\mathscr{F}$ le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbb{P}^0$ défini par :

$$\mathscr{F} = \mathscr{L}\left(\psi, \left(\sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{i\in I'_\nu} \left(\frac{U_i}{U_0}\right)^{r_\nu}\right) + \left(\frac{T}{U_0}\right)^{r_m}\right)$$

et soit Δ le cône de la flèche canonique :

$$k_! \mathscr{F} \to R k_* \mathscr{F},$$

dans la catégorie dérivée $D_c^b(\mathbb{P}, E_\lambda)$ (*cf.* Deligne, Weil II).

Soit x_0 le point de $\mathbb{P} - \mathbb{P}^0$ de coordonnées homogènes $U_0 = U_i = 0$ $(i \in I'_\nu, \nu = 1, \ldots, m-1)$ et $T = 1$. L'assertion $(\mathrm{i})_m$ équivaut alors à la nullité de Δ en x_0. Pour montrer que $\Delta_{x_0} = 0$, on va montrer que Δ est concentré en x_0 et que $R\Gamma(\mathbb{P}, \Delta) = 0$.

Comme Δ est concentré sur $\mathbb{P}-\mathbb{P}^0$, il suffit de montrer que $\Delta_x=0$ pour tout point fermé $x\neq x_0$ de $\mathbb{P}-\mathbb{P}^0$, i. e. que $(\mathrm{R}^n k_*\mathscr{F})_x=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Or, pour un tel $x\neq x_0$, on peut construire, de la même manière qu'en 5.4.0, un système de coordonnées locales sur $\mathbb{P}$, centré en x, adapté à $\mathbb{P}-\mathbb{P}^0$ et à $\mathscr{F}$, qui ramène, modulo 5.3.1, l'énoncé de nullité de $(\mathrm{R}^n k_*\mathscr{F})_x$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, à l'une des assertions $(\mathrm{i})_{m'}$ et $(\mathrm{ii})_{m'}$ de 5.4.1 pour un entier $m'<m$; par suite l'hypothèse de récurrence assure que Δ est concentré en x_0.

Pour prouver maintenant que $\mathrm{R}\Gamma(\mathbb{P}, \Delta)=0$, ou, ce qui revient au même, que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la flèche d'oubli des supports :

$$\mathrm{H}^n_c(\mathbb{P}^0, \mathscr{F})\to \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^0, \mathscr{F})$$

est un isomorphisme, on remarque que :

$$\mathbb{P}^0=\mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(\tilde{u}_i)_{i\in \mathrm{I}'_\nu,\, \nu=1,\,\ldots,\, m},\, t]),$$

où $\tilde{u}_i=\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_0$ et $t=\mathrm{T}/\mathrm{U}_0$, et que [(2.1.3), (2.1.4)] :

$$\mathscr{F}=\left(\boxtimes_{\nu=1}^{m-1}\ \boxtimes_{i\in \mathrm{I}'_\nu} \mathscr{L}(\psi, \tilde{u}_i^{r_i})\right)\boxtimes \mathscr{L}(\psi, t^{r_m}),$$

de sorte qu'on est ramené, par Künneth, au lemme suivant :

LEMME 5.4.2.1 ([8] 3.2.1). — *Soient* $\mathbb{A}^1=\mathrm{Spec}(\mathbb{F}[\tilde{u}])$, *$r$ un entier* $\geqq 1$ *et* $\psi:\mathbb{F}_q\to \mathrm{E}_\lambda^*$ *un caractère additif non trivial. Alors, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *la flèche d'oubli des supports :*

$$\mathrm{H}^n_c(\mathbb{A}^1, \mathscr{L}(\psi, \tilde{u}^r))\to \mathrm{H}^n(\mathbb{A}^1, \mathscr{L}(\psi, \tilde{u}^r)).$$

est un isomorphisme.

Ce lemme achève la démonstration de l'assertion $(\mathrm{i})_m$, passons à l'assertion $(\mathrm{ii})_m$ de 5.4.1.

Les notations étant celles de l'assertion $(\mathrm{ii})_m$, soit $\mathbb{P}$ la complétion projective de $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{P}=\mathrm{Proj}(\mathbb{F}[\mathrm{U}_0, (\mathrm{U}_i)_{i\in \mathrm{I}'_\nu,\, \nu=1,\,\ldots,\, m-1},\, \mathrm{V},\, \mathrm{T}]),$$

et soit $k:\mathbb{P}^0\subsetneq\mathbb{P}$ l'inclusion de l'ouvert $\mathbb{P}^0$ de $\mathbb{P}$ défini par $\mathrm{U}_0\neq 0$. Soit $\mathscr{F}$ le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbb{P}^0$ défini par :

$$\mathscr{F}=\mathscr{L}\left(\psi, \left(\sum_{\nu=1}^{m-1}\ \sum_{i\in \mathrm{I}'_\nu}\left(\frac{\mathrm{U}_i}{\mathrm{U}_0}\right)^{r_\nu}\right)+\frac{\mathrm{VT}^{r_m-1}}{\mathrm{U}_0^{r_m}}\right)$$

et soit Δ le cône de la flèche canonique :

$$k_!\mathscr{F}\to \mathrm{R}k_*\mathscr{F},$$

dans la catégorie dérivée $\mathrm{D}^b_c(\mathbb{P}, \mathrm{E}_\lambda)$.

Soient x_0 (resp. x_1) le point de $\mathbb{P}-\mathbb{P}^0$ de coordonnées homogènes $\mathrm{U}_0=\mathrm{U}_i=0$ ($i\in \mathrm{I}'_\nu$, $\nu=1,\,\ldots,\, m-1$) et $\mathrm{V}=0$, $\mathrm{T}=1$ (resp. et $\mathrm{V}=1$, $\mathrm{T}=0$). L'assertion $(\mathrm{ii})_m$ équivaut à la nullité de Δ en x_0. Pour montrer que $\Delta_{x_0}=0$, on va montrer que Δ est concentré en x_0 et x_1 et que $R\Gamma(\mathbb{P}, \Delta)=0$ (on aura même en fait, comme conclusion, $\Delta=0$).

Comme Δ est concentré sur $\mathbb{P}-\mathbb{P}^0$, il suffit de montrer que $\Delta_x=0$ pour tout point fermé $x\neq x_0, x_1$ de $\mathbb{P}-\mathbb{P}^0$, i. e. que $(R^n k_* \mathscr{F})_x=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Or, pour un tel $x\neq x_0, x_1$, on peut construire, de la même manière qu'en 5.4.0, un système de coordonnées locales sur $\mathbb{P}$, centré en x, adapté à $\mathbb{P}-\mathbb{P}^0$ et à $\mathscr{F}$, qui ramène, modulo 5.3.1, l'énoncé de nullité de $(R^n k_* \mathscr{F})_x$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit à l'assertion $(\mathrm{i})_{m'}$ pour $m'\leqq m$, soit à l'assertion $(\mathrm{ii})_{m'}$ pour $m'<m$ [si x n'est pas dans le fermé de $\mathbb{P}$ d'équation $U_0=U_i=0$ $(i\in I'_\nu,\ \nu=1, \ldots, m-1)$, on est ramené à l'une des assertions $(\mathrm{i})_{m'}$ et $(\mathrm{ii})_{m'}$ pour un entier $m'<m$ et, si x est dans ce fermé, $x\neq x_0, x_1$, on a $V\neq 0$, $T\neq 0$ et on est ramené à l'assertion $(\mathrm{i})_m$ pour l'entier m]; par suite l'hypothèse de récurrence et l'assertion $(\mathrm{i})_m$ que l'on a précédemment démontrée assurent que Δ est concentré en x_0 et x_1.

Pour prouver maintenant que $R\Gamma(\mathbb{P}, \Delta)=0$, ou, ce qui revient au même, que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la flèche d'oubli des supports :

$$H^n_c(\mathbb{P}^0, \mathscr{F})\to H^n(\mathbb{P}^0, \mathscr{F})$$

est un isomorphisme, on remarque que :

$$\mathbb{P}^0=\operatorname{Spec}(\mathbb{F}[(\tilde{u}_i)_{i\in I'_\nu,\ \nu=1, \ldots, m-1}, \tilde{v}, t]),$$

où :

$$\tilde{u}_i=U_i/U_0, \quad \tilde{v}=V/U_0 \qquad \text{et} \qquad t=T/U_0,$$

et que [(2.1.3), (2.1.4)] :

$$\mathscr{F}=\left(\mathop{\boxtimes}_{\nu=1}^{m-1}\ \mathop{\boxtimes}_{i\in I'_\nu}\mathscr{L}(\psi, \tilde{u}_i^{r_i})\right)\boxtimes\mathscr{L}(\psi, \tilde{v}t^{r_m-1}),$$

de sorte que l'on est ramené, par Künneth, au lemme 5.4.2.1 et au lemme suivant :

LEMME 5.4.2.2. — *Soient $\mathbb{A}^2=\operatorname{Spec}(\mathbb{F}(\tilde{v}, t])$, r un entier positif, premier à p, et $\psi : \mathbb{F}_q\to E^*_\lambda$ un caractère additif non trivial. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la flèche d'oubli des supports :*

$$H^n_c(\mathbb{A}^2, \mathscr{L}(\psi, \tilde{v}t^{r-1}))\to H^n(\mathbb{A}^2, \mathscr{L}(\psi, \tilde{v}t^{r-1}))$$

est un isomorphisme.

Prouvons ce lemme. Soit $j : \mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ l'immersion ouverte usuelle, d'après [8], 3.1.1, la flèche d'oubli des supports :

$$j_!\mathscr{L}(\psi, \tilde{v}t^{r-1})\to Rj_*\mathscr{L}(\psi, \tilde{v}t^{r-1})$$

est un isomorphisme dans $D^b_c(\mathbb{P}^2, E_\lambda)$, d'où 5.4.2.2.

6. Un premier énoncé de pureté des sommes $S_{I,n}$.

6.0. Nous allons prouver la pureté des sommes $S_{I,n}$ sous les hypothèses (A) et (B) de 4.0, pour tous les c_i égaux à 1 (*cf.* 4.3.0), avec la restriction suivante : on suppose que tous les a_i, sauf un éventuellement sont non nuls, i. e. on suppose que $\mathrm{card}(\mathrm{I}')\geqq\mathrm{card}(\mathrm{I})-1$, où I' désigne comme en 4.0.6 la réunion des I'_ν ($\nu=1, \ldots, \mathrm{N}$) et où :

$$\mathrm{I}'_\nu=\{i\in\mathrm{I}\mid d_i=d_\nu \quad \text{et} \quad a_i\neq 0\}.$$

En fait, pour des raisons techniques qui seront rendues claires au numéro 8.4.1, nous établirons un résultat un peu plus général : *au lieu de prendre, comme en* 4.0.6, *pour d le p.p.c.m des d_i* ($i\in\mathrm{I}$), *nous prendrons pour d un multiple quelconque des d_i* ($i\in\mathrm{I}$); nous désignerons toujours par r_i le quotient d/d_i ($i\in\mathrm{I}$) et par $r_1>r_2>\ldots>r_\mathrm{N}\geqq 1$ les valeurs distinctes prises par les r_i ($i\in\mathrm{I}$), de sorte que l'on a encore, pour tout $\nu=1, \ldots, \mathrm{N}$, $\mathrm{I}_\nu=\{i\in\mathrm{I}\mid r_i=r_\nu\}$.

Compte tenu de ces modifications, nous remplacerons les hypothèses (A) et (B) par les suivantes :

(A_2) *d est premier à p.*

(B_2) *Il existe au plus un $i\in\mathrm{I}$ tel que $a_i=0$; pour tout* $\nu=1, \ldots, \mathrm{N}$ *tel que I'_ν contienne au moins deux éléments, les deux cônes de $\mathbb{A}^{\mathrm{I}'_\nu}_{\mathbb{F}}=\mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(x_i)_{i\in\mathrm{I}'_\nu}])$ d'équations :*

$$\sum_{i\in\mathrm{I}'_\nu} a_i x_i^{r_\nu}=0 \qquad et \qquad \sum_{i\in\mathrm{I}'_\nu} x_i^d=0$$

sont transverses en dehors de l'origine.

Rappelons [(4.0.2), (4.0.3) et (4.0.4)] que V désigne le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^\mathrm{I}_\mathbb{F}=\mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(y_i)_{i\in\mathrm{I}}])$ d'équation $1+\sum_{i\in\mathrm{I}} y_i^{d_i}=0$, que $g:\mathrm{V}\to\mathbb{A}^1_\mathbb{F}$ est la fonction sur V définie par :

$$g((y_i)_{i\in\mathrm{I}})=\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i y_i$$

et que $\mathscr{G}$ est le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur V défini par $\mathscr{G}=\mathscr{L}(\psi, g)$.

Pour toute partie K de I, notons :

(6.0.1) $$\nu_\mathrm{K}:\quad \mathrm{V}^\mathrm{K}\hookrightarrow\mathrm{V},$$

l'ouvert de V défini par les conditions $y_k\neq 0$, pour tout $k\in\mathrm{K}$.

Considérons le groupe fini :

(6.0.2) $$\mathrm{G}=\prod_{i\in\mathrm{I}}\boldsymbol{\mu}_{r_i}(\mathbb{F}).$$

Alors, un caractère $\underline{\chi}$ de G à valeurs dans E^*_λ est une famille $(\chi_i)_{i\in\mathrm{I}}$, où chaque $\chi_i:\boldsymbol{\mu}_{r_i}(\mathbb{F})\to\mathrm{E}^*_\lambda$ est un caractère. Le *support*, $\mathrm{Supp}(\underline{\chi})$, d'un tel caractère $\underline{\chi}$ est par définition l'ensemble des indices $i\in\mathrm{I}$ tels que χ_i ne soit pas trivial.

A tout caractère $\underline{\chi}$ de G, de support $\mathrm{K}\subset\mathrm{I}$, on associe le E_λ-faisceau, $\mathscr{K}(\underline{\chi})$, lisse de rang 1 sur V^K, défini par [*cf.* (2.2.1)].

(6.0.3) $$\mathscr{K}(\underline{\chi})=\bigotimes_{k\in\mathrm{K}}\mathscr{K}_{r_k}(\chi_k, y_k),$$

où, pour $k\in\mathrm{K}$, y_k est considérée comme morphisme de V^K dans $\mathbb{G}_m$.

PROPOSITION 6.1. — *Sous les hypothèses* (A_2) *et* (B_2), *pour tout caractère* χ, *de support* K, *du groupe* G *à valeurs dans* E_λ^* *et pour tout entier* $i \geqq 0$, *la flèche d'oubli des supports :*

$$H_c^i(V^K, \mathscr{K}(\underline{\chi}) \otimes v_K^* \mathscr{G}) \to H^i(V^K, \mathscr{K}(\underline{\chi}) \otimes v_K^* \mathscr{G})$$

est un isomorphisme. En particulier, pour le caractère trivial de G, *la flèche d'oubli des supports :*

$$H_c^i(V, \mathscr{G}) \to H^i(V, \mathscr{G})$$

est un isomorphisme pour tout entier $i \geqq 0$.

6.2. Prouvons 6.1. Rappelons [(5.0.2), (5.0.3) et (5.0.4)] que U désigne le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{\mathrm{I}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(x_i)_{i \in \mathrm{I}}])$ d'équation $\sum_{i \in \mathrm{I}} x_i^d + 1 = 0$, que $f : \mathrm{U} \to \mathbb{A}_{\mathbb{F}}^1$ désigne la fonction sur U définie par $f((x_i)_{i \in \mathrm{I}}) = \sum_{i \in \mathrm{I}} a_i x_i^{r_i}$ et que $\mathscr{F}$ désigne le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur U défini par $\mathscr{F} = \mathscr{L}(\psi, f)$.

On dispose alors d'un morphisme :

$$\pi : \quad \mathrm{U} \to \mathrm{V}, \tag{6.2.1}$$

défini par :

$$\pi((x_i)_{i \in \mathrm{I}}) = (x_i^{r_i})_{i \in \mathrm{I}};$$

ce morphisme π rend commutatif le triangle :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathrm{V} \arrow[r, "g"'] & \mathbb{A}_{\mathbb{F}}^1 \end{tikzcd} \tag{6.2.2}$$

de sorte que l'on a (2.1.2) :

$$\mathscr{F} = \pi^* \mathscr{G}. \tag{6.2.3}$$

Le morphisme π étant fini, les deux suites spectrales de Leray :

$$E_2^{ij} = H_c^i(V, R^j \pi_! \mathscr{F}) \Rightarrow H_c^{i+j}(U, \mathscr{F}),$$
$$E_2^{ij} = H^i(V, R^j \pi_* \mathscr{F}) \Rightarrow H^{i+j}(U, \mathscr{F}),$$

dégénèrent en E_2 en des isomorphismes:

$$H_c^i(V, \pi_! \mathscr{F}) \simeq H_c^i(U, \mathscr{F}) \qquad (i \in \mathbb{N}),$$
$$H^i(V, \pi_* \mathscr{F}) \simeq H^i(U, \mathscr{F}) \qquad (i \in \mathbb{N}).$$

De plus, vu (6.2.3), on a :

$$\pi_! \mathscr{F} = \pi_* \mathscr{F} = (\pi_* E_\lambda) \otimes \mathscr{G},$$

donc 5.2.1 a la conséquence suivante : pour tout $i \in \mathbb{N}$, la flèche d'oubli des supports :

$$H_c^i(V, (\pi_* E_\lambda) \otimes \mathscr{G}) \to H^i(V, (\pi_* E_\lambda) \otimes \mathscr{G}) \tag{6.2.4}$$

est un isomorphisme [les hypothèses (A_2) et (B_2) de 6.0 impliquent les hypothèses (A_1) et (B_1) de 5.1].

Déterminons maintenant la structure du E_λ-faisceau $\pi_* E_\lambda$. On a un cube de $\mathbb{F}$-morphismes à faces cartésiennes :

(6.2.5)
$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "\pi"] & & \mathbb{A}^I \arrow[dd, "\prod_{i \in I}[r_i]"] \\
\pi^{-1}(V^I) \arrow[ur, hook] \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "\pi_I"'] & & \mathbb{G}_m^I \arrow[ur, hook] \arrow[dd] & \\
& V \arrow[rr, hook] & & \mathbb{A}^I \\
V^I \arrow[ur, hook, "\nu_I"] \arrow[rr, hook] & & \mathbb{G}_m^I \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

où $[r_i] : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ est l'élévation à la puissance r-ième et où π_I est la restriction de π au-dessus de V^I. On déduit de (6.2.5) que :

$$\pi_* E_\lambda = (\nu_I)_* (\pi_I)_* E_\lambda.$$

D'après (2.2.2), (2.2.7) et (2.2.9), $(\pi_I)_* E_\lambda$ admet une décomposition canonique :

$$(\pi_I)_* E_\lambda = \bigoplus_{\underline{\chi} \in \hat{G}} [\bigotimes_{i \in I} \mathscr{K}_{r_i}(\chi_i, y_i)].$$

On en déduit une décomposition canonique de $\pi_* E_\lambda$:

$$\pi_* E_\lambda = \bigoplus_{\underline{\chi} \in \hat{G}} (\nu_I)_* [\bigotimes_{i \in I} \mathscr{K}_{r_i}(\chi_i, y_i)],$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

(6.2.6)
$$\pi_* E_\lambda = \bigoplus_{\underline{\chi} \in \hat{G}} (\nu_{\underline{\chi}})_* \mathscr{K}(\underline{\chi}),$$

où $\mathscr{K}(\underline{\chi})$ est défini en (6.0.3) et où l'on a posé :

(6.2.7)
$$\nu_{\underline{\chi}} = \nu_{\mathrm{Supp}(\underline{\chi})} : V^{\mathrm{Supp}(\underline{\chi})} \hookrightarrow V,$$

pour tout $\underline{\chi} \in \hat{G}$.

Il résulte alors de (6.2.6) que la flèche (6.2.4) est somme directe, pour $\underline{\chi}$ parcourant $\hat{G}$, des flèches d'oubli des supports :

(6.2.8)
$$H_c^i(V, ((\nu_{\underline{\chi}})_* \mathscr{K}(\underline{\chi})) \otimes \mathscr{G}) \to H^i(V, ((\nu_{\underline{\chi}})_* \mathscr{K}(\underline{\chi})) \otimes \mathscr{G})$$

(ceci, pour tout $i \in I$). Par conséquent, comme (6.2.4) est un isomorphisme, *les flèches* (6.2.8) *sont toutes des isomorphismes.*

Considérons, pour tout caractère $\underline{\chi}$ de G, de support K, le diagramme :

$$(6.2.9)\qquad \begin{array}{ccc} H_c^i(V^K, \mathscr{K}(\underline{\chi}) \otimes v_K^* \mathscr{G}) & \xrightarrow{(3)} & H_c^i(V, ((v_K)_* \mathscr{K}(\underline{\chi})) \otimes \mathscr{G}) \\ {\scriptstyle (1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (2)} \\ H^i(V^K, \mathscr{K}(\underline{\chi}) \otimes v_K^*(\mathscr{G})) & \xleftarrow{(4)} & H^i(V, ((v_K)_* \mathscr{K}(\underline{\chi})) \otimes \mathscr{G}) \end{array}$$

où les flèches (1) et (2) sont les flèches d'oubli des supports et où les flèches (3) et (4) sont les flèches de restrictions de V à V^K. Ce diagramme est commutatif et (2), qui n'est autre que (6.2.8), est un isomorphisme. De plus, si la flèche naturelle :

$$(v_K)_! \mathscr{K}(\underline{\chi}) \to (v_K)_* \mathscr{K}(\underline{\chi})$$

est un isomorphisme, (3) est un isomorphisme et, si l'on a :

$$R^j (v_K)_* \mathscr{K}(\underline{\chi}) = 0 \qquad (\forall j \geqq 0),$$

(4) est un isomorphisme.

Pour prouver que la flèche (1) du diagramme (6.2.9) est un isomorphisme et donc pour achever la démonstration de 6.1, il nous reste à montrer que :

$$(6.2.10)\qquad [R^j (v_K)_* \mathscr{K}(\underline{\chi})]_v = 0,$$

pour tout point fermé v de $V - V^K$ et pour tout entier $j \geqq 0$. Considérons donc un point fermé v de $V - V^K$ et soit :

$$K' = \{ k \in K \mid y_k(v) = 0 \}.$$

Alors $K' \neq \emptyset$ et le morphisme :

$$y: \quad (V, v) \to (\mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{K'}, 0),$$

de coordonnées $(y_k)_{k \in K'}$, est lisse en v (on rappelle que V est l'hypersurface affine d'équation $\sum_{i \in I} y_i^{d_i} + 1 = 0$). Notons $\mu_{K'}: \mathbb{G}_m^{K'} \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{K'}$ l'immersion ouverte habituelle. Quitte à remplacer V par un voisinage de v pour la topologie étale, V^K coïncide avec $y^{-1}(\mathbb{G}_m^{K'})$ et [(2.2.1), (2.2.5)]:

$$\mathscr{K}(\underline{\chi}) = y^*(\boxtimes_{k \in K'} \chi_k(\mathscr{K}_{r_k})).$$

Il s'en suit (*cf.* 5.3.1) que, pour tout entier $j \geqq 0$:

$$[R^j (v_K)_* \mathscr{K}(\underline{\chi})]_v = [R^j (\mu_{K'})_* (\boxtimes_{k \in K'} \chi_k(\mathscr{K}_{r_k}))]_0$$

et (6.2.10) est conséquence, modulo Künneth, du lemme bien connu suivant :

LEMME 6.2.11. — *Soit* $\mu: \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{F}}^1$ *l'immersion ouverte habituelle, soit r un entier premier à p, r>0, et soit* χ *un caractère non trivial du groupe* $\boldsymbol{\mu}_r(\mathbb{F})$ *à valeurs dans* E_λ, *alors la flèche* *canonique* :

$$\mu_!\chi(\mathscr{K}_r) \to \mathrm{R}\,\mu_*\chi(\mathscr{K}_r)$$

est un isomorphisme dans $\mathrm{D}^b_c(\mathbb{A}^1_{\mathrm{F}}, \mathrm{E}_\lambda)$.

Le point est que $\chi(\mathscr{K}_r)$ est de rang 1 et effectivement ramifié en 0 puisque χ est non trivial.

7. Rappels sur le produit de convolution de P. Deligne [2].

7.0. Soit k un corps de caractéristique p, soient l un nombre premier distinct de p et E_λ une extension finie de $\mathbb{Q}_l$, soient I un ensemble fini de cardinal $m \geqq 2$ et, pour chaque $i \in \mathrm{I}$, $\mathbb{A}_i = \mathrm{Spec}\,(k[t_i])$ une copie de la droite affine sur k. On note :

$$(7.0.1) \qquad s : \quad \mathbb{A}^{\mathrm{I}} = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathbb{A}_i \to \mathbb{A} = \mathrm{Spec}\,(k[t]) :$$

le morphisme somme, défini par :

$$s((t_i)_{i \in \mathrm{I}}) = \sum_{i \in \mathrm{I}} t_i.$$

7.0.2. Un E_λ-faisceau $\mathscr{F}$ sur la droite affine $\mathbb{A} = \mathrm{Spec}\,(k[t])$ sera dit *de type* $(\star)$ s'il vérifie la condition :

$(\star)$ $\mathscr{F}$ *est nul en* 0, *lisse sur* $\mathbb{A}\text{-}\{0\}$ *et modérément ramifié en* 0 *et à l'infini.*

Remarque. — Si k est algébriquement clos, l'hypothèse de modération de la condition $(\star)$ peut aussi s'exprimer comme suit : le E_λ-faisceau lisse $\mathscr{F} \mid \mathbb{A}\text{-}\{0\}$ est trivialisé par un revêtement de Kummer de $\mathbb{A}\text{-}\{0\}$, d'équation $y^d = t$, pour au moins un entier positif d premier à p.

La proposition suivante est due à Deligne :

PROPOSITION 7.1. — *Soit, pour tout* $i \in \mathrm{I}$, $\mathscr{F}_i$ *un* E_λ-*faisceau sur* $\mathbb{A}_i$ *qui est soit le faisceau constant* E_λ, *soit de type* $(\star)$. *Alors la formation de* $\mathrm{R}\,s_*(\boxtimes_{i \in \mathrm{I}} \mathscr{F}_i)$ [*dans* $\mathrm{D}^b_c(\mathbb{A}, \mathrm{E}_\lambda)$] *commute à tout changement de base* $\mathrm{S} \to \mathbb{A}$. *De plus* :

(i) *si, pour tout* $i \in \mathrm{I}$, $\mathscr{F}_i$ *est le faisceau constant* E_λ, *on a :*

$$\mathrm{R}^j s_*(\boxtimes_{i \in \mathrm{I}} \mathscr{F}_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq 0, \\ \mathrm{E}_\lambda & \text{si } j = 0. \end{cases}$$

(ii) *s'il existe* $i, j \in \mathrm{I}$, $i \neq j$, *tels que* $\mathscr{F}_i$ *soit le faisceau constant* E_λ *et que* $\mathscr{F}_j$ *soit de type* $(\star)$, *on a :*

$$\mathrm{R}\,s_*(\boxtimes_{i \in \mathrm{I}} \mathscr{F}_i) = 0,$$

dans $\mathrm{D}^b_c(\mathbb{A}, \mathrm{E}_\lambda)$;

(iii) *si, pour tout* $i \in \mathrm{I}$, $\mathscr{F}_i$ *est de type* $(\star)$, *on a :*

$$\mathrm{R}^j s_*(\underset{i\in\mathrm{I}}{\boxtimes} \mathscr{F}_i)=0 \qquad \text{si} \quad j\neq m-1$$

et le E_λ*-faisceau* $\mathrm{R}^{m-1} s_*(\underset{i\in\mathrm{I}}{\boxtimes} \mathscr{F}_i)$ *est de type* $(\star)$, *de rang* $\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{rang}(\mathscr{F}_i)$ *sur* A-$\{0\}$.

Dans le cas où tous les $\mathscr{F}_i$ sont de type $(\star)$, Deligne appelle *produit de convolution de la famille* $(\mathscr{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$, le E_λ-faisceau de type $(\star)$:

$$(7.1.1) \qquad \underset{i\in\mathrm{I}}{\star} \mathscr{F}_i=\mathrm{R}^{m-1} s_*(\underset{i\in\mathrm{I}}{\boxtimes} \mathscr{F}_i).$$

Remarque. — $\mathrm{R}s_!(\underset{i\in\mathrm{I}}{\boxtimes} \mathscr{F}_i)$ mérite souvent mieux le nom de produit de convolution, mais $\mathrm{R}s_*(\underset{i\in\mathrm{I}}{\boxtimes} \mathscr{F}_i)$ a la vertu de préserver $(\star)$.

7.2. Soit $\mathbb{G}_m=\mathrm{Spec}\,(k[u, u^{-1}])$ le groupe multiplicatif sur k; notons :

$$(7.2.1) \qquad \mu: \quad \mathbb{G}_m\times\mathbb{A}\to\mathbb{A} \qquad (\text{resp. } \mu_i: \mathbb{G}_m\times\mathbb{A}_i\to\mathbb{A}_i),$$

l'opération naturelle de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}$ (resp. sur $\mathbb{A}_i$) définie par $\mu(u, t)=ut$ (resp. $\mu_i(u, t_i)=ut_i$), notons :

$$(7.2.2) \qquad \nu: \quad \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A},$$

l'inclusion habituelle et :

$$(7.2.3) \qquad a: \quad s^{-1}(1)\to\mathrm{Spec}(k),$$

la projection canonique.

LEMME 7.2.4. — *Considérons l'ensemble de données suivant : pour tout* $i\in\mathrm{I}$, *soient* $\mathscr{F}_i$ *un* E_λ*-faisceau de type* $(\star)$ *sur* $\mathbb{A}_i$, $\mathscr{G}_i$ *un* E_λ*-faisceau sur* $\mathbb{G}_m$ *et :*

$$\alpha_i: \quad \mu_i^*\mathscr{F}_i\to\mathscr{G}_i\boxtimes\mathscr{F}_i,$$

un isomorphisme de E_λ*-faisceau sur* $\mathbb{G}_m\times\mathbb{A}_i$. *Alors il existe un isomorphisme :*

$$\alpha: \quad \underset{i\in\mathrm{I}}{\star} \mathscr{F}_i \xrightarrow{\sim} \nu_!(\underset{i\in\mathrm{I}}{\otimes} \mathscr{G}_i)\otimes\mathrm{R}^{m-1} a_*(\underset{i\in\mathrm{I}}{\boxtimes} \mathscr{F}_i|s^{-1}(1)),$$

uniquement déterminé par l'ensemble de données considéré.

7.2.5. Prouvons 7.2.4. On a un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{G}_m\times\mathbb{A}^{\mathrm{I}} & \xrightarrow{\Delta\times\mathrm{id}} & \mathbb{G}_m^{\mathrm{I}}\times\mathbb{A}^{\mathrm{I}} & \xrightarrow{\prod_{i\in\mathrm{I}}\mu_i} & \mathbb{A}^{\mathrm{I}} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\times s} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle s} \\
\mathbb{G}_m\times\mathbb{A} & & \xrightarrow{\quad\mu\quad} & & \mathbb{A}
\end{array}$$

et, d'après 7.1, la formation de $\underset{i\in I}{\star}\mathscr{F}_i=R^{m-1}s_*(\underset{i\in I}{\boxtimes}\mathscr{F}_i)$ commute au changement de base; donc, la flèche de changement de base par μ,

$$\beta:\quad \mu^*R^{m-1}s_*(\underset{i\in I}{\boxtimes}\mathscr{F}_i)\to R^{m-1}(id\times s)_*(\Delta\times id)^*(\underset{i\in I}{\boxtimes}\mu_i^*\mathscr{F}_i)$$

est un isomorphisme; par suite, si l'on compose β avec l'isomorphisme déduit, par $(\Delta\times id)^*$, de l'isomorphisme :

$$\underset{i\in I}{\boxtimes}\alpha_i:\quad \underset{i\in I}{\boxtimes}\mu_i^*\mathscr{F}_i\to(\underset{i\in I}{\boxtimes}\mathscr{G}_i)\boxtimes(\underset{i\in I}{\boxtimes}\mathscr{F}_i),$$

on obtient, compte tenu de l'isomorphisme de Künneth, un isomorphisme :

$$\gamma:\quad \mu^*R^{m-1}s_*(\underset{i\in I}{\boxtimes}\mathscr{F}_i)\simeq(\underset{i\in I}{\otimes}\mathscr{G}_i)\boxtimes R^{m-1}s_*(\underset{i\in I}{\boxtimes}\mathscr{F}_i).$$

Soit $\sigma:\mathbb{G}_m\to\mathbb{G}_m\times\mathbb{A}$ la section définie par $\sigma(u)=(u,1)$; alors $\mu\circ\sigma=\nu$, donc on a un isomorphisme :

$$\sigma^*(\gamma):\quad \nu^*R^{m-1}s_*(\underset{i\in I}{\boxtimes}\mathscr{F}_i)\simeq(\underset{i\in I}{\otimes}\mathscr{G}_i)\otimes(R^{m-1}s_*(\underset{i\in I}{\boxtimes}\mathscr{F}_i))_1.$$

On conclut en invoquant une nouvelle fois la compatibilité au changement de base de 7.1 et la nullité de $\underset{i\in I}{\star}\mathscr{F}_i$ en 0 [*cf.* 7.1 (iii)].

7.3. Soit n un entier positif, premier à p, tel que k contienne toutes les racines n-ième de l'unité; pour chaque $i\in I$, soient n_i un entier positif divisant n et $\chi_i:\boldsymbol{\mu}_{n_i}(k)\to E_\lambda^*$ un caractère non trivial; nous noterons :

$$\prod_{i\in I}\chi_i:\quad \boldsymbol{\mu}_n(k)\to E_\lambda^*, \tag{7.3.1}$$

le caractère défini par :

$$(\prod_{i\in I}\chi_i)(\zeta)=\prod_{i\in I}\chi_i(\zeta^{n/n_i}),$$

pour tout $\zeta\in\boldsymbol{\mu}_n(k)$. Pour chaque $i\in I$, nous noterons :

$$\nu_i:\quad \mathbb{G}_m=\mathrm{Spec}(k[u,u^{-1}])\hookrightarrow\mathbb{A}_i,$$

l'immersion ouverte usuelle.

LEMME 7.3.1. — *Pour chaque* $i\in I$, *le* E_λ-*faisceau* [*cf.* (2.2.1)] :

$$(\nu_i)_!\mathscr{K}_{n_i}(\chi_i,u)$$

est de type ($\star$) *et on a un isomorphisme canonique :*

$$\mathop{\star}_{i\in \mathrm{I}} (\nu_i)_! \mathscr{K}_{n_i}(\chi_i, u) \xrightarrow{\sim} \nu_! \mathscr{K}_n(\prod_{i\in\mathrm{I}} \chi_i, u) \otimes \mathrm{R}^{m-1} a_*(\boxtimes_{i\in\mathrm{I}} (\nu_i)_! \mathscr{K}_{n_i}(\chi_i, u) \mid s^{-1}(1)),$$

où $\mathrm{R}^{m-1} a_*(\boxtimes_{i\in\mathrm{I}} (\nu_i)_! \mathscr{K}_{n_i}(\chi_i, u) \mid s^{-1}(1))$ *est un* E_λ*-faisceau de rang* 1 *sur* Spec(k).

En effet, pour chaque $i\in \mathrm{I}$, on a un isomorphisme canonique [*cf.* (2.2.3), (2.2.7)] :

$$\mu_i^*(\nu_i)_! \mathscr{K}_{n_i}(\chi_i, u) \simeq \mathscr{K}_{n_i}(\chi_i, u) \boxtimes (\nu_i)_! \mathscr{K}_{n_i}(\chi_i, u),$$

donc le lemme est conséquence de 7.2.4.

7.3.3. — Supposons que k est une clôture algébrique d'un corps fini $\mathbb{F}_q$ et que n divise $q-1$. Alors le Frobenius géométrique F relatif à $\mathbb{F}_q$ agit sur le E_λ-vectoriel de dimension 1 :

$$\mathrm{R}^{m-1} a_*(\boxtimes_{i\in\mathrm{I}} (\nu_i)_! \mathscr{K}_{n_i}(\chi_i, u) \mid s^{-1}(1)) = \mathrm{H}^{m-1}(s^{-1}(1), \boxtimes_{i\in\mathrm{I}} (\nu_i)_! \mathscr{K}_{n_i}(\chi_i, u))$$

et on a le résultat suivant dû à Deligne :

LEMME 7.3.4. — *L'endomorphisme* F* *du* E_λ*-espace vectoriel de dimension* 1, $\mathrm{H}^{m-1}(s^{-1}(1), \boxtimes_{i\in\mathrm{I}} (\nu_i)_! \mathscr{K}_{n_i}(\chi_i, u))$, *est le nombre algébrique* q^{2m-2}/J *où* J *est la somme de Jacobi :*

$$\mathrm{J} = (-1)^{m-1} \sum_{t_i} \prod_{i\in\mathrm{I}} \chi_i^{-1}(t_i^{(q-1)/n_i}), \qquad (t_i \in \mathbb{F}_q^*, \sum_{i\in\mathrm{I}} t_i = 1).$$

En particulier, si le caractère $\prod_{i\in\mathrm{I}} \chi_i$ *de* $\boldsymbol{\mu}_n(k)$ *est non trivial, ce rapport d'homothétie est pur de poids* $m-1$ *et, si le caractère* $\prod_{i\in\mathrm{I}} \chi_i$ *de* $\boldsymbol{\mu}_n(k)$ *est trivial, ce rapport d'homothétie est pur de poids* m.

En effet, d'après [1], 4.16, F* agissant sur le E_λ-vectoriel de dimension 1, $\mathrm{H}_c^{m-1}(s^{-1}(1) \cap \mathbb{G}_m^{\mathrm{I}}, \boxtimes_{i\in\mathrm{I}} \mathscr{K}_{n_i}(\chi_i^{-1}, t_i))$, est l'homothétie de rapport J. Donc, par dualité de Poincaré, compte tenu de (2.2.8), F* agissant sur le E_λ-vectoriel de dimension 1, $\mathrm{H}^{m-1}(s^{-1}(1) \cap \mathbb{G}_m^{\mathrm{I}}, \boxtimes_{i\in\mathrm{I}} \mathscr{K}_{n_i}(\chi_i, t_i))$, est l'homothétie de rapport q^{2m-2}/J. Or 6.2.11, montre que la flèche de restriction :

$$\mathrm{H}^{m-1}(s^{-1}(1), \boxtimes_{i\in\mathrm{I}} (\nu_i)_! \mathscr{K}_{n_i}(\chi_i, u)) \to \mathrm{H}^{m-1}(s^{-1}(1) \cap \mathbb{G}_m^{\mathrm{I}}, \boxtimes_{i\in\mathrm{I}} \mathscr{K}_{n_i}(\chi_i, t_i))$$

est un isomorphisme, d'où 7.3.4.

8. Pureté des sommes $\mathrm{S}_{\mathrm{I},n}$ dans le cas général

8.0. Nous allons, dans ce numéro, déduire 4.1 de 6.1 [nous supposons toujours que les c_i sont tous égaux à 1 (*cf.* 4.3.0)]. Posons :

$$(8.0.1) \qquad \begin{cases} \mathrm{I}' = \{ i \in \mathrm{I} \mid a_i \neq 0 \}, \\ \mathrm{I}'' = \{ i \in \mathrm{I} \mid a_i = 0 \}. \end{cases}$$

Rappelons (4.0.2) que V est l'hypersurface affine dans $\mathbb{A}^{\mathrm{I}}_{\mathbb{F}}=\mathrm{Spec}\,(\mathbb{F}[y_i)_{i\in \mathrm{I}}])$ d'équation $1+\sum_{i\in \mathrm{I}} y_i^{d_i}=0$. Soit 0 un indice n'appartenant pas à I et soit :

(8.0.2) $$\mathrm{V}'\subset \mathrm{Spec}\,(\mathbb{F}[(y_i)_{i\in \mathrm{I}'},\, y_0]),$$

le sous-schéma fermé déquation $\sum_{i\in \mathrm{I}'} y_i^{d_i}+y_0+1=0$. Considérons le diagramme commutatif, à carré cartésien :

(8.0.3) $$\begin{tikzcd} & \mathrm{V} \arrow[dl, "g"'] \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h"] & \mathbb{A}^{\mathrm{I}''}=\mathrm{Spec}\,(\mathbb{F}[(y_i)_{i\in \mathrm{I}''}]) \arrow[d, "k"] \\ \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}} & \mathrm{V}' \arrow[l, "g'"] \arrow[r, "p'"] & \mathbb{A}=\mathrm{Spec}\,(\mathbb{F}[t]), \end{tikzcd}$$

où les morphismes g, g', h, k, p, p' sont définis comme suit :

(8.0.4) $$\left\{\begin{array}{l} g\,((y_i)_{i\in \mathrm{I}})=\sum_{i\in \mathrm{I}} a_i\,y_i \qquad (\textit{cf.}\ 4.0.3), \\ g'\,((y_i)_{i\in \mathrm{I}'},\, y_0)=\sum_{i\in \mathrm{I}'} a_i\,y_i, \\ h\,((y_i)_{i\in \mathrm{I}})=((y_i)_{i\in \mathrm{I}'}\ \sum_{i\in \mathrm{I}''} y_i^{d_i}), \\ k\,((y_i)_{i\in \mathrm{I}''})=\sum_{i\in \mathrm{I}''} y_i^{d_i}, \\ p\,((y_i)_{i\in \mathrm{I}})=(y_i)_{i\in \mathrm{I}''}, \\ p'\,((y_i)_{i\in \mathrm{I}'},\, y_0)=y_0. \end{array}\right.$$

Rappelons enfin que $\mathscr{G}$ désigne le E_λ-faisceau lisse de rang 1, $\mathscr{L}(\psi,\, g)$, sur V et posons :

(8.0.5) $$\mathscr{G}'=\mathscr{L}(\psi,\, g'),$$

de sorte que $\mathscr{G}'$ est un E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur V' et que l'on a [*cf.* (2.1.2)] :

(8.0.6) $$\mathscr{G}=h^*\mathscr{G}'.$$

8.1. Nous voulons déduire de 6.1 l'énoncé suivant :

8.1.0. *Sous les hypothèses* (A) *et* (B) *de* 4.0, *pour tout caractère non trivial* $\psi:\mathbb{F}_q\to \mathrm{E}_\lambda^*$, *on a* $\mathrm{H}^i_c(\mathrm{V},\,\mathscr{G})=0$, *si* $i\neq \mathrm{card}\,(\mathrm{I})-1$, *et les valeurs propres de* F^* *agissant sur* $\mathrm{H}^{\mathrm{card}(\mathrm{I})-1}_c(\mathrm{V},\,\mathscr{G})$ *sont pures de poids* $\mathrm{card}\,(\mathrm{I})-1$.

Or, par dualité de Poincaré, on a :

(8.1.1) $$\mathrm{H}^i_c(\mathrm{V},\,\mathscr{G})=[\mathrm{H}^{2(\mathrm{card}(\mathrm{I})-1)-i}(\mathrm{V},\,\mathscr{G}^{\vee})]^{\vee}\,(1-\mathrm{card}\,(\mathrm{I}))$$

er $\mathscr{G}^{\vee}=\mathscr{L}(\psi, g)^{\vee}=\mathscr{L}(\psi^{-1}, g)$ [*cf.* (2.1.5)] donc il revient au même de déduire de 6.1 l'énoncé suivant :

8.1.2. *Sous les hypothèses* (A) *et* (B) *de* 4.0, *pour tout caractère non trivial* $\psi : \mathbb{F}_q \to \mathrm{E}_\lambda^*$, *on a* $\mathrm{H}^i(\mathrm{V}, \mathscr{G})$ *si* $i \neq \operatorname{card}(\mathrm{I})-1$, *et les valeurs propres de* F^* *agissant sur* $\mathrm{H}^{\operatorname{card}(\mathrm{I})-1}(\mathrm{V}, \mathscr{G})$ *sont pures de poids* $\operatorname{card}(\mathrm{I})-1$.

8.1.3. Il suffit de prouver 8.1.2 après extension préliminaire des scalaires de $\mathbb{F}_q$ à $\mathbb{F}_{q_1} \subset \mathbb{F}$ où q_1 est une puissance de q, $q_1=q^e$ (e entier $\geqq 1$); si F_1 désigne le morphisme de Frobenius relatif à $\mathbb{F}_{q_1}$, on a en effet $\mathrm{F}_1^*=(\mathrm{F}^*)^e$ sur $\mathrm{H}^*(\mathrm{V}, \mathscr{G})$.

8.2. Pour déduire 8.1.2 de 6.1, nous allons analyser la cohomologie $\mathrm{H}^*(\mathrm{V}, \mathscr{G})$ à l'aide de la suite spectrale de Leray pour h :

$$\mathrm{E}_2^{ij}=\mathrm{H}^i(\mathrm{V}', \mathrm{R}^j h_*\mathscr{G}) \quad\Rightarrow\quad \mathrm{H}^{i+j}(\mathrm{V}, \mathscr{G}), \tag{8.2.1}$$

qui s'écrit encore, compte tenu de (8.0.6) :

$$\mathrm{E}_2^{ij}=\mathrm{H}^i(\mathrm{V}', \mathscr{G}'\otimes \mathrm{R}^j h_*\mathrm{E}_\lambda) \quad\Rightarrow\quad \mathrm{H}^{i+j}(\mathrm{V}, \mathscr{G}). \tag{8.2.2}$$

Le morphisme k se factorise en :

$$k \left[\begin{array}{l} \mathbb{A}^{\mathrm{I}''} = \operatorname{Spec}(\mathbb{F}[(y_i)_{i\in\mathrm{I}''}]),\\ \downarrow \pi \\ \mathbb{A}^{\mathrm{I}''} = \operatorname{Spec}(\mathbb{F}[(t_i)_{i\in\mathrm{I}''}]),\\ \downarrow s \\ \mathbb{A} \quad = \operatorname{Spec}(\mathbb{F}[t]), \end{array}\right. \tag{8.2.3}$$

où :

$$\pi((y_i)_{i\in\mathrm{I}''})=(y_i^{d_i})_{i\in\mathrm{I}''} \qquad \text{et} \qquad s((t_i)_{i\in\mathrm{I}''})=\sum_{i\in\mathrm{I}''} t_i.$$

LEMME 8.2.4. — *La flèche de changement de base relative au carré cartésien de* (8.0.3) :

$$p'^*\mathrm{R}^j k_*\mathrm{E}_\lambda \to \mathrm{R}^j h_*\mathrm{E}_\lambda, \tag{8.2.4.1}$$

est un isomorphisme, pour tout $j \geqq 0$.

En effet, π est un morphisme fini, donc la formation de $\pi_*\mathrm{E}_\lambda$ commute à toutchangement de base $\mathrm{S} \to \mathbb{A}^{\mathrm{I}''}$. Il ne reste à voir que la formation de $\mathrm{R}^j s_*(\pi_*\mathrm{E}_\lambda)$ commute à tout changement de base $\mathrm{S} \to \mathbb{A}$. Or le morphisme s admet une compactification :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^{\mathrm{I}''} \arrow[r, hook] \arrow[dr, "s"'] & \overline{\mathbb{A}}^{\mathrm{I}''} \arrow[d, "\bar{s}"] \\ & \mathbb{A} \end{tikzcd}$$

telle que $(\overline{\mathbb{A}}^{\mathrm{I}''}, \overline{\mathbb{A}}^{\mathrm{I}''}-\mathbb{A}^{\mathrm{I}''})$ soit un $\mathbb{A}$-couple lisse [si l'on choisit un indice $i_0 \in \mathrm{I}''$, le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^{\mathrm{I}''} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "s"'] & \mathbb{A}\times\mathbb{A}^{\mathrm{I}''-\{i_0\}} \arrow[d, "pr_1"] \\ & \mathbb{A} \end{tikzcd}$$

où $\alpha((t_i)_{i\in\mathrm{I}''})=(\sum_{i\in\mathrm{I}''} t_i, (t_i)_{i\in\mathrm{I}''-\{i_0\}})$, est commutatif].

D'autre part, π_*E_λ est trivialisé par le revêtement fini π qui est, par hypothèse (A), de degré premier à p; donc π_*E_λ est modérément ramifié le long de $\overline{\mathbb{A}}^{I''} - \mathbb{A}^{I''}$ et le lemme résulte de [6], 1.3.3 (cet argument a été utilisé par Deligne pour prouver 7.1).

Compte tenu de ce lemme, (8.2.2) se réécrit :

(8.2.5) $$E_2^{ij} = H^i(V', \mathscr{G}' \otimes p'^* R^j k_* E_\lambda) \quad \Rightarrow \quad H^{i+j}(V, \mathscr{G}).$$

Désignons le groupe de Galois du revêtement fini π par :

(8.2.6) $$G'' = \prod_{i \in I''} \mu_{d_i}(\mathbb{F});$$

pour tout caractère $\underline{\chi} = (\chi_i)_{i \in I''}$ de G'', de support $K'' = \{ i \in I'' \mid \chi_i \neq 1 \}$, notons :

(8.2.7) $$v_{\underline{\chi}} : \quad \mathbb{G}_m^{K''} \times \mathbb{A}^{I''-K''} \hookrightarrow \mathbb{A}^{I''} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(t_i)_{i \in I''}]),$$

l'inclusion naturelle et $\mathscr{K}(\underline{\chi})$ le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbb{G}_m^{K''} \times \mathbb{A}^{I''-K''}$ défini par :

(8.2.8) $$\mathscr{K}(\underline{\chi}) = (\boxtimes_{k \in K''} \mathscr{K}_{d_k}(\chi_k, t_k)) \boxtimes E_\lambda.$$

LEMME 8.2.9. *Pour tous entiers $i, j \geqq 0$, le terme E_2^{ij} de* (8.2.5) *admet la décomposition :*

(8.2.9.1) $$E_2^{ij} = \bigoplus_{\underline{\chi} \in \hat{G}''} H^i(V', \mathscr{G}' \otimes p'^* R^j s_* (v_{\underline{\chi}})_! \mathscr{K}(\underline{\chi})).$$

En effet, cela résulte aussitôt de la décomposition (6.2.6) de $\pi_* E_\lambda$.

8.3. Posons :

(8.3.0) $$d'' = p.\,p.\,c.\,m((d_i)_{i \in I''}), \qquad r_i'' = d''/d_i \,(i \in I'').$$

Si $\underline{\chi}$ est un caractère de G'', de composantes χ_i ($i \in I''$), nous noterons, conformément à (7.3.1) :

(8.3.1) $$\prod_{i \in I''} \chi_i : \quad \mu_{d''}(\mathbb{F}) \to E_\lambda^*,$$

le caractère défini par $(\prod_{i \in I''} \chi_i)(\zeta) = \prod_{i \in I''} \chi_i(\zeta^{r_i''})$. Posons aussi :

(8.3.2) $$m'' = \mathrm{card}(I'')$$

et rappelons que $v : \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}$ désigne l'inclusion naturelle (7.2.2).

LEMME 8.3.3. — *Soit $\underline{\chi}$ un caractère de $\mathbb{G}''$ de support $K'' \subset I''$. On a :*

(i) *si* $K'' = \emptyset$:

$$R^j s_* (v_{\underline{\chi}})_! \mathscr{K}(\underline{\chi}) = \begin{cases} E_\lambda & si \quad j = 0, \\ 0 & si \quad j \neq 0. \end{cases}$$

(ii) *si* $\mathrm{K}'' \neq \emptyset$ *et si* $\mathrm{K}'' \neq \mathrm{I}''$:

$$\mathrm{R}\, s_{*}(\nu_{\underline{\chi}})_{!}\mathscr{K}(\underline{\chi})=0,$$

dans $\mathrm{D}_c^b(\mathbb{A}, \mathrm{E}_\lambda)$;

(iii) *si* $\mathrm{K}''=\mathrm{I}''$:

$$\mathrm{R}^j s_{*}(\nu_{\underline{\chi}})_{!}\mathscr{K}(\underline{\chi})=0.$$

pour tout $j \neq m''-1$ *et on a un isomorphisme canonique :*

$$\mathrm{R}^{m''-1} s_{*}(\nu_{\underline{\chi}})_{!}\mathscr{K}(\underline{\chi}) \simeq \nu_{!}(\mathscr{K}_{d''}(\prod_{i \in \mathrm{I}''} \chi_i, t)) \otimes \mathrm{H}(\underline{\chi}), \tag{8.3.3.1}$$

où l'on a posé, pour tout caractère $\underline{\chi}$ *de* G'', *de support* I'' :

$$\mathrm{H}(\underline{\chi}),=\mathrm{H}^{m''-1}(s^{-1}(1), (\nu_{\underline{\chi}})_{!}\mathscr{K}(\underline{\chi})). \tag{8.3.3.2}$$

Cela résulte aussitôt de 7.1 et 7.3.1.

LEMME 8.3.4. — *On a :*

$$\mathrm{R}\,\Gamma(\mathrm{V}', \mathscr{G}')=0,$$

dans $\mathrm{D}_c^b(\mathrm{E}_\lambda)$.

En effet, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{V}' \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "g'"] & \\ \mathbb{A}^{\mathrm{I}'} \arrow[r, "\beta"] & \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}} \end{tikzcd}$$

où :

$$\alpha((y_i)_{i \in \mathrm{I}'}, y_0)=(y_i)_{i \in \mathrm{I}} \qquad \text{et} \qquad \beta((y_i)_{i \in \mathrm{I}'})=\sum_{i \in \mathrm{I}'} a_i y_i.$$

Donc :

$$\mathscr{G}'=\alpha^{*}\mathscr{L}(\psi, \beta).$$

Comme α est un isomorphisme, on a :

$$\mathrm{R}\,\Gamma(\mathrm{V}', \mathscr{G}')=\mathrm{R}\,\Gamma(\mathbb{A}^{\mathrm{I}'}, \mathscr{L}(\psi, \alpha)),$$

et, par Künneth :

$$\mathrm{R}\,\Gamma(\mathrm{V}', \mathscr{G}')=\bigotimes_{i \in \mathrm{I}'} \mathrm{R}\,\Gamma(\mathbb{A}_i, \mathscr{L}(\psi, a_i y_i)),$$

par suite 8.3.4 se déduit de l'assertion bien connue ([1], 2.7) :

$$\mathrm{R}\,\Gamma(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}, \mathscr{L}(\psi, ay))=0,$$

pour $\psi : \mathbb{F}_q \to \mathrm{E}_\lambda^*$ non trivial et $a \in \mathbb{F}_q^*$.

En accord avec la notation (6.0.1), nous noterons :

(8.3.5) $$\nu_{\{0\}} : \quad V'^{\{0\}} \subsetneq V',$$

l'ouvert de V' défini par la condition $y_0 \neq 0$.

PROPOSITION 8.3.6. — *Le terme* E_2 *de la suite spectrale* (8.2.1) *de Leray pour h vérifie* :

(i) *pour tout* $j \neq m''-1$ *et pour tout* i :

$$E_2^{ij}=0;$$

(ii) *pour tout* i, *on a une décomposition* :

(8.3.6.1) $$E_2^{i, m''-1}=E_i' \oplus E_i'',$$

où :

(8.3.6.2) $$E_i'=\bigoplus_{\underline{\chi}} H^i\,(V'^{\{0\}}, \mathscr{K}_{d''}(\prod_{i \in I''} \chi_i, p') \otimes \nu_{\{0\}}^* \mathscr{G}') \otimes H(\underline{\chi}),$$

la somme étant étendue aux caractères $\underline{\chi}$ *de* G'', *de support* I'', *tels que* $\prod_{i \in I''} \chi_i$ *ne soit pas trivial, et où* :

(8.3.6.3) $$E_i''=\bigoplus_{\underline{\chi}} H^{i-1}\,(V'-V'^{\{0\}}, \mathscr{G}') \otimes H(\underline{\chi}),$$

la somme étant étendue aux caractères $\underline{\chi}$ *de* G'', *de support* I'', *tels que* $\prod_{i \in I''} \chi_i$ *soit trivial.*

8.3.7. Prouvons 8.3.6. La partie (i) est conséquence immédiate de 8.2.9, 8.3.3 (i) et (ii) et 8.3.4. Pour la partie (ii), il résulte aussitôt de 8.2.9 et 8.3.3 (iii) que :

$$E_2^{i, m''-1}= \bigoplus_{\substack{\underline{\chi} \in \hat{G}'' \\ Supp(\underline{\chi})=I''}} H^i\,(V', \nu_{\{0\}!}\,(\mathscr{K}_{d''}(\prod_{i \in I''} \chi_i, p')) \otimes \mathscr{G}') \otimes H(\underline{\chi}).$$

Si $\prod_{i \in I''} \chi_i$ est non trivial, la flèche d'oubli des supports :

$$\nu_{\{0\}!}\,(\mathscr{K}_{d''}(\prod_{i \in I''} \chi_i, p')) \to R\,\nu_{\{0\}*} \mathscr{K}_{d''}(\prod_{i \in I''} \chi_i, p'))$$

est un isomorphisme dans $D_c^b(V', E_\lambda)$ d'après 6.2.11. Si $\prod_{i \in I''} \chi_i$ est trivial, $\mathscr{K}_{d''}(\prod_{i \in I''} \chi_i, p')=E_\lambda$ et, comme $R\Gamma(V', \mathscr{G}')=0$, d'après 8.3.4, on a :

$$R\Gamma\,(V'-V'^{\{0\}}, \mathscr{G}') \simeq R\Gamma(V', (\nu_{\{0\}!} E_\lambda) \otimes \mathscr{G}')\,[1].$$

Ces deux dernières remarques permettent de conclure facilement.

8.3.8. Comme le diagramme (8.0.3) est défini sur $\mathbb{F}_q$, le Frobenius relatif à $\mathbb{F}_q$, F*, agit sur toute la suite spectrale (8.2.1) et sur les descriptions (8.2.2) et (8.2.5) du terme E_2 de cette suite spectrale; toutes ces actions sont compatibles.

Précisons ce que devient l'action de Frobenius sur le terme E_2 de (8.2.1) dans la décomposition de ce terme E_2, décrite en 8.3.6. Soit q_1 une puissance de q, $q_1 = q^e$, telle que d'' [*cf.* (8.3.1)] divise $q_1 - 1$. La décomposition (6.2.6) de $\pi_* E_\lambda$:

$$\pi_* E_\lambda = \bigoplus_{\underline{\chi} \in \hat{G}''} (\nu_{\underline{\chi}})_! \mathscr{K}(\underline{\chi})$$

est alors définie sur $\mathbb{F}_{q_1}$ (*cf.* 2.2.10). Soit F_1 le Frobenius relatif à $\mathbb{F}_{q_1}$. Alors F_1^* agit sur le terme E_2 de (8.2.1) et cette action coïncide avec celle de $(F^*)^e$. D'autre part F_1^* agit sur chaque facteur des sommes directes (8.3.6.2) et (8.3.6.3), donc sur E_i' et E_i'', et, en remontant toutes les étapes de la preuve de 8.3.6, on vérifie aussitôt que la décomposition (8.3.6.1) est F_1^*-équivariante.

PROPOSITION 8.4. — *Soit $\underline{\chi}$ un caractère de* G'' *de support* I''. *Alors :*

(i) *si* $\prod_{i \in I''} \chi_i$ *est non trivial, on a :*

$$H^i(V'^{\{0\}}, \mathscr{K}_{d''}(\prod_{i \in I''} \chi_i, p') \otimes \nu_{\{0\}}^* \mathscr{G}') = 0,$$

pour tout $i \neq \mathrm{card}(I')$, *et les valeurs propres de* F_1^* *agissant sur :*

$$H^{\mathrm{card}(I')}(V'^{\{0\}}, \mathscr{K}_{d''}(\prod_{i \in I''} \chi_i, p') \otimes \nu_{\{0\}}^* \mathscr{G}'),$$

sont (*relativement à* $\mathbb{F}_{q_1}$) *pures de poids* $\mathrm{card}(I')$;

(ii) *si* $\prod_{i \in I''} \chi_i$ *est trivial, on a :*

$$H^i(V - V'^{\{0\}}, \mathscr{G}') = 0,$$

pour tout $i \neq \mathrm{card}(I') - 1$, *et les valeurs propres de* F^* *agissant sur :*

$$H^{\mathrm{card}(I')-1}(V' - V'^{\{0\}}, \mathscr{G}'),$$

sont pures de poids $\mathrm{card}(I') - 1$.

8.4.1. Prouvons 8.4. Pour les deux assertions (i) et (ii), 3.2.1 nous ramène à montrer que les flèches d'oubli des supports $H_c^i \to H^i$ ($i \in \mathbb{N}$) sont des isomorphismes, mais, dans les deux cas, cela va résulter de 6.1.

Pour l'assertion (i), désignons par d le p. p. c. m. des d_i ($i \in I$) et posons $a_0 = 0$, $d_0 = 1$; les hypothèses (A) et (B) de 4.0 assurent que d, $(d_i)_{i \in I' \cup \{0\}}$ et $(a_i)_{i \in I' \cup \{0\}}$ vérifient les hypothèses (A_2) et (B_2) de 6.0; comme d'' divise d, on peut appliquer 6.1 au caractère du groupe :

$$\prod_{i \in I' \cup \{0\}} \boldsymbol{\mu}_{d/d_i}(\mathbb{F}),$$

dont le support est $\{0\}$ et dont la composante d'indice 0 est le composé :

$$\boldsymbol{\mu}_{d/d_0}(\mathbb{F})=\boldsymbol{\mu}_d(\mathbb{F})\xrightarrow{[d/d'']}\boldsymbol{\mu}_{d''}(\mathbb{F})\xrightarrow{\prod_{i\in \mathrm{I}''}\chi_i}\mathrm{E}_\lambda^*$$

et cela entraîne la conclusion (*c'est ici que servent les possibilités ouvertes en* 6.1 *d'avoir un d multiple arbitraire du p. p. c. m. des* d_i *et d'avoir un* a_i *nul*).

Pour l'assertion (ii), désignons toujours par d le p. p. c. m. des d_i ($i\in\mathrm{I}$); les hypothèses (A) et (B) de 4.0 assurent que d, $(d_i)_{i\in\mathrm{I}'}$ et $(a_i)_{i\in\mathrm{I}'}$ vérifient les hypothèses (A_2) et (B_2) de 6.0; la conclusion résulte, là encore, aussitôt de 6.1.

8.5. Achevons la preuve de 4.1. Il s'agit, comme on l'a vu en 8.1 de prouver 8.1.2. Regroupant 8.3.6 et 8.4, on voit que la suite spectrale 8.2.1 dégénère en E_2 et que son terme E_2 se réduit à :

$$\mathrm{E}_2^{\mathrm{card}(\mathrm{I}'),\,\mathrm{card}(\mathrm{I}'')-1},$$

de sorte que $\mathrm{H}^i(\mathrm{V},\mathscr{G})=0$ pour $i\neq\mathrm{card}(\mathrm{I})-1$ (I est réunion disjointe de I′ et I″) et que la flèche canonique :

$$\mathrm{E}_2^{\mathrm{card}(\mathrm{I}'),\,\mathrm{card}(\mathrm{I}'')-1}\to\mathrm{H}^{\mathrm{card}(\mathrm{I})-1}(\mathrm{V},\mathscr{G})$$

est un isomorphisme; compte tenu de 8.3.8, il résulte de 8.4, 7.3.4 et 8.3.6 (ii) que les valeurs propres de F_1^* agissant sur :

$$\mathrm{E}_2^{\mathrm{card}(\mathrm{I}'),\,\mathrm{card}(\mathrm{I}'')-1},$$

sont pures de poids card (I) − 1 (relativement à $\mathbb{F}_{q_1}$), donc il en est de même des valeurs propres de F_1^* agissant sur :

$$\mathrm{H}^{\mathrm{card}(\mathrm{I})-1}(\mathrm{V},\mathscr{G})$$

et on conclut par la remarque 8.1.3.

9. Modération à l'infini des E_λ-faisceaux $\mathrm{R}^j g_!\,\mathrm{E}_\lambda$ et conséquences pour le calcul de $\chi_c(\mathrm{V},\mathscr{G})$.

9.0. Reprenons les notations de 4.0 avec tous les c_i égaux à 1 (*cf.* 4.3.0) : V est l'hypersurface dans $\mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{\mathrm{I}}=\mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(y_i)_{i\in\mathrm{I}}])$ d'équation :

$$1+\sum_{i\in\mathrm{I}}y_i^{d_i}=0,$$

g : $\mathrm{V}\to\mathbb{A}_{\mathbb{F}}^1$ est le morphisme défini par :

$$g((y_i)_{i\in\mathrm{I}})=\sum_{i\in\mathrm{I}}a_i\,y_i$$

et $\mathscr{G}$ est le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur V défini par $\mathscr{G}=\mathscr{L}(\psi,g)$.

Remarque 9.0.1. — Tout ce que suit reste valable si l'on remplace $\mathbb{F}$ par un corps algébriquement clos, de caractéristique p, arbitraire, les $a_i (i \in I)$ étant alors des éléments quelconques de ce corps.

Rappelons brièvement la méthode de N. M. Kartz pour le calcul de $\chi(V, \mathscr{G})$ (*cf.* [7]). La suite spectrale de Leray pour le morphisme $g : V \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ et le E_λ-faisceau $\mathscr{G}$:

$$E_2^{ij} = H^i(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}, R^j g_* \mathscr{G}) \quad \Rightarrow \quad H^{i+j}(V, \mathscr{G}),$$

donne :

$$\chi(V, \mathscr{G}) = \sum_j (-1)^j \chi(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}, R^j g_* \mathscr{G}). \tag{9.0.2}$$

D'autre part, par définition (2.1.1) de $\mathscr{G}$, on a :

$$\mathscr{G} = g^* [\psi^{-1}(\mathscr{L})],$$

donc, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$R^j g_* \mathscr{G} = R^j g_* E_\lambda \otimes_{E_\lambda} \psi^{-1}(\mathscr{L}).$$

Si l'on montre que, pour chaque entier $j \geqq 0$, *le* E_λ*-faisceau :*

$$R^j g_* E_\lambda,$$

sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ *est modéré à l'infini de* $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$, on aura (d'après [7], 4.8.2), pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$\chi(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}, R^j g_* \mathscr{G}) = \chi(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}, R^j g_* E_\lambda) - \dim_{E_\lambda}((R^j g_* E_\lambda)_{\bar\eta}),$$

où $\bar\eta$ est un point géométrique générique de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ et, par suite, on aura [grâce à (9.0.2)] :

$$\chi(V, \mathscr{G}) = \chi(V, E_\lambda) - \chi(V_{\bar\eta}, E_\lambda), \tag{9.0.3}$$

où $V_{\bar\eta}$ désigne la fibre du morphisme g au point géométrique générique $\bar\eta$ de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$.

Pour établir 4.2, nous allons :

(*a*) prouver la modération à l'infini des E_λ-faisceaux $R^j g_* E_\lambda (j \in \mathbb{N})$;

(*b*) calculer, en termes des $d_i (i \in I)$, les caractéristiques d'Euler-Poincaré λ-adique de V et $V_{\bar\eta}$.

La suite du numéro 9 est consacrée à (*a*) et le numéro 10 à (*b*).

PROPOSITION 9.1. — *Sous les hypothèses* (A) *et* (B) *de* 4.0, *les* E_λ*-faisceaux* $R^j g_* E_\lambda (j \in \mathbb{N})$ *sur* $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ *sont modérés à l'infini.*

Nous avons déduit 4.1 de 5.2 (*via* 6.1), de la même manière nous allons déduire 9.1 de l'énoncé 9.9.1 ci-dessus (*via* son corollaire 9.1.2).

Rappelons [(5.0.2) et (5.0.3)] que U désigne l'hypersurface de Fermat dans $\mathbb{A}^I_{\mathbb{F}} = \operatorname{Spec}(\mathbb{F}[(x_i)_{i \in I}])$ d'équation :

$$\sum_{i \in I} x_i^d + 1 = 0$$

et $\quad f : \quad U \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ le morphisme défini par $f((x_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} a_i x_i^{r_i}$.

PROPOSITION 9.1.1. — *Sous les hypothèses* (A_1) *et* (B_1) *de* 5.1, *les* E_λ*-faisceaux* $R^j f_* E_\lambda$ $(j \in \mathbb{N})$ *sur* $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ *sont modérés à l'infini de* $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$.

Nous démontrerons 9.1.1 en 9.3. Déduisons de 9.1.1 un corollaire. Prenons pour d un multiple commun des d_i $(i \in I)$ et $r_i = d/d_i$ $(i \in I)$. Rappelons [(6.0.2), (6.0.3) et (6.0.1)] que G désigne le groupe fini $\prod_{i \in I} \boldsymbol{\mu}_{r_i}(\mathbb{F})$, $\mathcal{K}(\underline{\chi})$ le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur l'ouvert $\nu_K = \nu_{\underline{\chi}} : V^K \subsetneq V$, défini par :

$$\mathcal{K}(\underline{\chi}) = \bigotimes_{k \in K} \mathcal{K}_{r_k}(\chi_k, y_k),$$

où $\underline{\chi}$ est un caractère de G de support K.

COROLLAIRE 9.1.2. — *Sous les hypothèses* (A_2) *et* (B_2) *de* 6.0, *pour tout caractère* $\underline{\chi}$ *de* G, *de support* $K \subset I$, *les* E_λ*-faisceaux* $R^j g_*(\nu_{\underline{\chi}})_! \mathcal{K}(\underline{\chi})$ $(j \in \mathbb{N})$ *sont modérés à l'infini de* $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$.

En effet, on a, en vertu du diagramme commutatif (6.2.2) :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ V \arrow[r, "g"'] & \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}} \end{tikzcd}$$

$$R^j f_* E_\lambda = R^j g_* \pi_* E_\lambda$$

et en tenant compte de la décomposition [(6.2.6), (6.2.10)] :

$$\pi_* E_\lambda = \bigoplus_{\underline{\chi} \in \hat{G}} (\nu_{\underline{\chi}})_! \mathcal{K}(\underline{\chi}),$$

on voit que, chaque E_λ-faisceau $R^j g_*(\nu_{\underline{\chi}})_! \mathcal{K}(\underline{\chi})$ est un facteur direct de $R^j f_* E_\lambda$ donc est modérément ramifié à l'infini de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$, puisque $R^j f_* E_\lambda$ l'est [on rappelle que pour d un multiple des d_i $(i \in I)$ et $r_i = d/d_i$ $(i \in I)$, les hypothèses (A_2) et (B_2) de 6.0 impliquent les hypothèses (A_1) et (B_1) de 5.1].

9.2. Déduisons 9.1 de 9.1.2. Considérons le diagramme (8.0.3), à carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "g"'] \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h"] & \mathbb{A}^{I''} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(y_i)_{i \in I''}]) \arrow[d, "k"] \\ \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}} & V' \arrow[l, "g'"] \arrow[r, "p'"] & \mathbb{A} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[t]) \end{tikzcd}$$

où V' désigne l'hypersurface dans $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}[(y_i)_{i \in I'}, y_0])$ d'équation :

$$\sum_{i \in I'} y_i^{d_i} + y_0 + 1 = 0,$$

que :

$$g'((y_i)_{i \in I'}, y_0) = \sum_{i \in I} a_i y_i$$

et que :

$$h((y_i)_{i \in \mathrm{I}}) = ((y_i)_{i \in \mathrm{I}'}, \sum_{i \in \mathrm{I}''} y_i^{d_i}).$$

On a une suite spectrale de foncteurs composés ($g = g' \circ h$) :

(9.2.1) $$\underline{\mathrm{E}}_2^{ij} = \mathrm{R}^i g'_* \mathrm{R}^j h_* \mathrm{E}_\lambda \quad \Rightarrow \quad \mathrm{R}^{i+j} g_* \mathrm{E}_\lambda,$$

pour prouver 9.1, il suffit alors de prouver la modération à l'infini des E_λ-faisceaux $\underline{\mathrm{E}}_2^{ij}$ (i, $j \in \mathbb{N}$) sur $\mathbb{A}_{\mathbb{F}}^1$, en vertu du résultat suivant :

LEMME 9.2.2. — *Soit* I *le groupe d'inertie d'un trait strictement local et soit* P *sa partie sauvage, i. e. son pro-p-groupe de Sylow, où p est la caractéristique résiduelle du trait. Soit :*

$$0 \to \mathrm{V}' \to \mathrm{V} \to \mathrm{V}'' \to 0,$$

une suite exacte de représentations l-adiques de I. *Pour que* P *agisse trivialement sur* V, *il faut et il suffit que* P *agisse trivialement sur* V′ *et* V″.

Le point est que, pour toute représentation l-adique $\rho : \mathrm{I} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$, $\rho(\mathrm{P})$ est fini (P est un pro-p-groupe avec $l \neq p$), donc que, en tant que représentation de P, V est semi-simple.

9.2.3. Prouvons la modération de :

$$\underline{\mathrm{E}}_2^{ij} = \mathrm{R}^i g'_* \mathrm{R}^j h_* \mathrm{E}_\lambda \qquad (\forall\, i, j \in \mathbb{N}).$$

Rappelons que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, la flèche de changement de base (8.2.4.1) :

$$p'^* \mathrm{R}^j \mathrm{k}_* \mathrm{E}_\lambda \to \mathrm{R}^j h_* \mathrm{E}_\lambda$$

est un isomorphisme et que $\mathrm{R}^j k_* \mathrm{E}_\lambda$ admet la décomposition (*cf.* 8.2.9) :

$$\mathrm{R}^j k_* \mathrm{E}_\lambda = \bigoplus_{\underline{\chi}} \mathrm{R}^j s_* (\nu_{\underline{\chi}})_! \mathscr{K}(\underline{\chi}),$$

où $\underline{\chi}$ parcourt les caractères du groupe $\mathrm{G}'' = \prod_{i \in \mathrm{I}''} \boldsymbol{\mu}_{d_i}(\mathbb{F})$ [s, $\nu_{\underline{\chi}}$ et $\mathscr{K}(\underline{\chi})$ étant définis respectivement en (8.2.3), (8.2.7) et (8.2.8)]. Les E_λ-faisceaux :

$$\mathrm{R}^j s_* (\nu_{\underline{\chi}})_! \mathscr{K}(\underline{\chi}) \qquad (j \in \mathbb{N},\ \underline{\chi} \in \hat{\mathrm{G}}'')$$

sont calculés en 8.3.3 : $\mathrm{R}^j s_* (\nu_{\underline{\chi}})_! \mathscr{K}(\underline{\chi})$ est isomorphe (non canoniquement) à l'un des quatre E_λ-faisceaux suivants :

(i) le E_λ-faisceau nul sur $\mathbb{A}$;

(ii) le E_λ-faisceau constant de valeur E_λ sur $\mathbb{A}$;

(iii) le E_λ-faisceau $\nu_!(\mathscr{K}_{d''}(\theta, t))$, où $\theta : \boldsymbol{\mu}_{d''}(\mathbb{F}) \to \mathrm{E}_\lambda^*$ est un caractère non trivial:

(iv) le E_λ-faisceau $\nu_! \mathrm{E}_\lambda$.

On doit donc montrer que les E_λ-faisceaux sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$, $R^j g'_* E_\lambda$, $R^j g'_* (v_{\{0\}})_! \mathscr{K}_{d''}(\theta, p')$ et $R^j g'_* (v_{\{0\}})_! E_\lambda$ sont modérés à l'infini de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$, où $v_{\{0\}} : V'^{\{0\}} \hookrightarrow V'$ est l'ouvert de V' défini par $y_0 \neq 0$. Compte tenu de 9.2.2 et du triangle distingué dans $D^b_c(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}, E_\lambda)$:

$$\begin{tikzcd} & R\widetilde{g}'_* E_\lambda \arrow[dl, "+1"'] & \\ Rg'_*(v_{\{0\}})_! E_\lambda \arrow[rr] & & Rg'_* E_\lambda \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

où $\widetilde{g}' : V' - V'^{\{0\}} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ est la restriction de $g' : V' \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ au fermé de V' défini par $y_0 = 0$, il revient au même de montrer la modération à l'infini des E_λ-faisceaux $R^j g'_* E_\lambda$, $R^j g'_* (v_{\{0\}})_! \mathscr{K}_{d''}(\theta, p')$ et $R^j \widetilde{g}'_* E_\lambda$. Mais la modération à l'infini de ces E_λ-faisceaux est conséquence directe de 9.2.1 (même argument qu'en 8.4.1).

9.3. Prouvons 9.1.1. — Nous devons prouver, sous les hypothèses (A_1) et (B_1) de 5.1, la modération à l'infini des E_λ-faisceaux $R^j f_* E_\lambda$ sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$.

9.3.0. Nous allons voir qu'il revient au même de prouver, toujours sous les hypothèses (A_1) et (B_1) de 5.1, la modération à l'infini des E_λ-faisceaux $R^j f_! E_\lambda$ sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$. En effet, U (resp. $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$) étant un $\mathbb{F}$-schéma lisse de dimension $m-1$, où $m = \mathrm{card}(I)$, (resp. 1), $E_\lambda(m-1)[2(m-1)]$ (resp. $E_\lambda(1)[2]$) est le complexe dualisant de U (resp. $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$); par suite, on a un isomorphisme canonique,

$$Rf_* R\,\underline{\mathrm{Hom}}(E_\lambda, E_\lambda(m-1)[2(m-1)]) \simeq R\,\underline{\mathrm{Hom}}(Rf_! E_\lambda, E_\lambda(1)[2]),$$

dans $D^b_c(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}, E_\lambda)$, autrement dit, une suite spectrale de E_λ-faisceaux :

$$\underline{E}_2^{ij} = \underline{\mathrm{Ext}}^i(R^{-j} f_! E_\lambda, E_\lambda) \quad \Rightarrow \quad R^{i+j+2(m-2)} f_* E_\lambda(m-2).$$

Les $\underline{E}_2^{ij}$ pour $i > 0$ sont concentrés sur un ensemble fini de points fermés de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ (le lieu de non lissité des E_λ-faisceaux $R^j f_! E_\lambda$), donc ils sont automatiquement modérés à l'infini; les $\underline{E}_2^{0j} = \underline{\mathrm{Hom}}(R^{-j} f_! E_\lambda, E_\lambda)$ sont modérés à l'infini dès que les $R^j f_! E_\lambda$ le sont. Donc, le lemme 9.2.2 montre que les $R^j f_* E_\lambda$ sont modérés à l'infini dès que les $R^j f_! E_\lambda$ le sont (la réciproque, qui ne nous servira pas, peut se montrer de la même manière).

9.3.1. Pour prouver la modération à l'infini des E_λ-faisceaux $R^j f_! E_\lambda$, nous allons compactifier f. Rappelons [(5.1.1) et (5.1.2)] que Z désigne l'hypersurface dans $\mathbb{P}^I_{\mathbb{F}} = \mathrm{Proj}(\mathbb{F}[X_0, (X_i)_{i \in I}])$ d'équation $\sum_{i \in I} X_i^d + X_0^d = 0$ et que $j : U \hookrightarrow Z$ est l'immersion ouverte qui identifie U à la carte $X_0 \neq 0$ de Z. Le morphisme $f : U \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ définit alors une fonction rationnelle $f : Z \dashrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$, dont on note :

(9.3.1.1)
$$\begin{tikzcd} & \widetilde{Z} \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "\widetilde{f}"] & Z \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}} \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^I_{\mathbb{F}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}} \arrow[dll, "pr_2"] \\ U \arrow[ur, hook, "\widetilde{j}"] \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & Z \arrow[d, dashed, "f"] & & \\ & \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}} & & \end{tikzcd}$$

la variété d'incidence; si on pose :

(9.3.1.2) $$n = \inf\{\nu = 1, \ldots, N \mid I'_\nu = \emptyset\}$$

[on rappelle que $r_1 > r_2 > \ldots > r_N \geqq 1$ sont les valeurs distinctes prises par les $r_i\,(i \in I)$, que $I'_\nu = \{i \in I \mid r_i = r_\nu\}$ et que $I'_\nu = \{i \in I_\nu \mid a_i \neq 0\}$], alors $\tilde{Z}$ est le sous-schéma fermé de :

$$\mathbb{P}^I_{\mathbb{F}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}} = \mathrm{Proj}(\mathbb{F}(X_0, (X_i)_{i\in I}]) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[t])$$

défini par les équations :

(9.3.1.3) $$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i\in I} X_i^d + X_0^d = 0, \\ \displaystyle\sum_{\nu=n}^{N} \Big(\sum_{i\in I'_\nu} a_i X_i^{r_\nu}\Big) X_0^{r_n - r_\nu} - t X_0^{r_n} = 0, \end{cases}$$

et $\tilde{j} : U \hookrightarrow \tilde{Z}$ est l'immersion ouverte qui identifie U à l'ouvert de $\tilde{Z}$ déterminé par la condition $X_0 \neq 0$, autrement dit :

$$\tilde{j}(x) = (j(x), f(x)) \quad \text{pour tout } x \in U.$$

Le fermé de $\tilde{Z}$:

(9.3.1.4) $$\tilde{Y} = \tilde{Z} - U,$$

i. e. le fermé de $\tilde{Z}$ d'équation $X_0 = 0$, n'est autre que le produit de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ par le fermé F de Z d'équations :

$$\sum_{i\in I'_n} a_i X_i^{r_n} = X_0 = 0.$$

On a donc le diagramme commutatif :

(9.3.1.5) $$\begin{tikzcd} & Z & Y \arrow[l, hook'] & F \arrow[l, hook'] & \\ U \arrow[ur, "j"] \arrow[r, hook, "\tilde{j}"] \arrow[dr, "f"'] & \tilde{Z} \arrow[u] \arrow[d, "\tilde{f}"] & & \tilde{Y} \arrow[ll, hook'] \arrow[u] \arrow[dll, "\tilde{f}\mid\tilde{Y} = pr_2"] \arrow[r, phantom, "="] & F \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}} \arrow[ul, "pr_1"'] \\ & \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}} & & & \end{tikzcd}$$

et la suite exacte longue :

(9.3.1.6) $$\dashrightarrow R^j f_! E_\lambda \to R^j \tilde{f}_* E_\lambda \to R^j(\tilde{f} \mid \tilde{Y})_* E_\lambda \to R^{j+1} f_! E_\lambda \dashrightarrow,$$

où les E_λ-faisceaux $R^j(\tilde{f} \mid \tilde{Y})_* E_\lambda$ sont constants de valeur $H^j(F, E_\lambda)$ $(\forall j \in \mathbb{N})$. Il résulte de 9.2.2 que les $R^j f_! E_\lambda$ sont modérés à l'infini de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ si et seulement si les $R^j \tilde{f}_* E_\lambda$ le sont.

9.3.2. Soit $\mathscr{S} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[[\mu]])$ le complété de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$ à l'infini [$\mu = 1/t$ est une coordonnée locale à l'infini de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}[t])$] et soit:

(9.3.2.1) $$\mathscr{Z} \subset \mathbb{P}^I_{\mathbb{F}} \times \mathscr{S},$$

le sous-schéma fermé d'équations :

$$(9.3.2.2)\qquad \begin{cases} \sum_{i\in I} X_i^d + X_0^d = 0, \\ \mu\left[\sum_{\nu=n}^{N}\left(\sum_{i\in I'_\nu} a_i X_i^{r_\nu}\right) X_0^{r_n - r_\nu}\right] - X_0^{r_n} = 0. \end{cases}$$

($\mathscr{X}$ est aussi un sous-schéma fermé de $Z \times \mathscr{S}$). Nous noterons s le point fermé de $\mathscr{S}$, η son point générique, $\bar{\eta}$ un point géométrique localisé en η, $I = \mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ le groupe d'inertie de $\mathscr{S}$ correspondant, $\mathscr{X}_s$ et $\mathscr{X}_{\bar{\eta}}$ les fibres de la projection $\mathscr{X} \to \mathscr{S}$ en s et $\bar{\eta}$ respectivement.

Le groupe d'inertie I agit sur la cohomologie $H^*(\mathscr{X}_{\bar{\eta}}, E_\lambda)$ et nous voulons montrer que cette action est modérée [$H^j(\mathscr{X}_{\bar{\eta}}, E_\lambda)$ est la fibre de $R^j \tilde{f}_* E_\lambda$ en $\bar{\eta}$, vu comme point géométrique de $A^1_{\mathbb{F}}$]. La suite spectrale des cycles évanescents [3] :

$$E_2^{ij} = H^i(\mathscr{X}_s, R^j \psi_\eta(E_\lambda)) \quad \Rightarrow \quad H^{i+j}(\mathscr{X}_{\bar{\eta}}, E_\lambda)$$

et 9.2.2 nous ramène à montrer que l'action de I sur les faisceaux $R^j \psi_\eta(E_\lambda)$ est modérée. Donc, compte tenu de 9.3.1, la proposition 6.1.1 est conséquence de la proposition suivante :

PROPOSITION 9.3.3. — *Sous les hypothèses* (A_1) *et* (B_1) *de* 5.1, *pour tout point fermé z de $\mathscr{X}_s$, le groupe d'inertie* I *agit sur les* E_λ*-vectoriels:*

$$(R^j \psi_\eta(E_\lambda))_z = H^j(\mathscr{X}_{(z)\bar{\eta}}, E_\lambda) \qquad (j \in \mathbb{N}),$$

à travers un groupe fini, d'ordre premier à la caractéristique p de $\mathbb{F}$ ($\mathscr{X}_{(z)\bar{\eta}}$ *désignant la fibre en* $\bar{\eta}$ *de l'hensélisé* $\mathscr{X}_{(z)}$ *de* $\mathscr{X}$ *en* z).

9.3.4. Prouvons 9.3.3. On considère $\mathscr{X}$ comme le sous-schéma fermé de $Z \times \mathscr{S}$ défini par l'équation :

$$\mu\left[\sum_{\nu=n}^{N}\left(\sum_{i\in I'_\nu} a_i X_i^{r_\nu}\right) X_0^{r_n - r_\nu}\right] - X_0^{r_n} = 0.$$

Soit z un point fermé de $\mathscr{X}_s$, alors μ et X_0 s'annulent en z. Vu l'hypothèse (B_1) de 5.1, il existe au moins un indice $i \in I' = \bigcup_{\nu=n}^{N} I'_\nu$ tel que X_i ne s'annule pas en z. Par suite, il existe un unique $m \in \{n, \ldots, N\}$ tel que :

(i) X_i s'annule en z pour tout $i \in I'_\nu$, $\nu = n, \ldots, m-1$;

(ii) X_i ne s'annule pas en z pour au moins un $i \in I'_m$.

Distinguons alors deux cas :

(*a*) $\sum_{i\in I'_m} a_i X_i^{r_m}$ *ne s'annule pas en z :* alors choisissons un indice $i_m \in I'_m$ tel que X_{i_m} ne s'annule pas en z; la fonction rationnelle sur $Z \times \mathscr{S}$:

$$\eta = \frac{\sum_{\nu=m}^{N} X_0^{r_m - r_\nu} \left(\sum_{i \in I'_\nu} a_i X_i^{r_\nu}\right)}{X_{i_m}^{r_m}}.$$

est définie dans un voisinage de z et ne s'annule pas en z; de plus, localement en z, $\mathscr{Z}$ est défini dans $Z \times \mathscr{S}$ par l'équation :

$$\mu\left[\sum_{\nu=n}^{m-1}\left(\sum_{i \in I'_\nu} a_i \left(\frac{X_i}{X_{i_m}}\right)^{r_\nu}\right)\left(\frac{X_0}{X_{i_m}}\right)^{r_n - r_\nu} + \left(\frac{X_0}{X_{i_m}}\right)^{r_n - r_m} \eta\right] - \left(\frac{X_0}{X_{i_m}}\right)^{r_n} = 0.$$

Comme $(r_m, p) = 1$ [d'après (A_1)], le revêtement de Kummer :

$$\pi : \quad (Z', z') \to (Z \times \mathscr{S}, z),$$

d'équation :

$$\zeta^{r_m} = \eta$$

est étale en z' [le choix de z' correspond au choix d'une racine r_m-ième de l'unité de $\eta(z)$], donc quitte à restreindre Z' est étale partout. Choisissons, pour chaque $i \in I'_\nu$, $\nu = n, \ldots, m-1$, une racine r_i-ième a'_i de a_i et considérons les fonctions sur Z', s'annulant en z' :

$$u_0 = \zeta^{-1} \frac{X_0}{X_{i_m}}$$

et :

$$u_i = a_i'^{\zeta^{-1}} \frac{X_i}{X_{i_m}} \qquad (i \in I'_\nu,\ \nu = n, \ldots, m-1);$$

soit $\mathbb{A}$ l'espace affine sur $\mathbb{F}$ de dimension $1 + \sum_{\nu=n}^{m-1} \operatorname{card}(I'_\nu)$ et soit :

$$(\underline{u}, \mu) : \quad (Z', z') \to (\mathbb{A} \times \mathscr{S}, 0),$$

le morphisme de composantes u_0, les u_i ci-dessus et μ. Le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & (Z', z) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "(\underline{u}, \mu)"] & \\ (Z \times \mathscr{S}, z) & & (\mathbb{A} \times \mathscr{S}, 0) \end{tikzcd}$$

est un système de coordonnées locales sur $Z \times \mathscr{S}$ centré en z [au sens de (5.3.0)], si $\mathscr{X}$ est le sous-schéma fermé de $\mathbb{A} \times \mathscr{S}$ d'équation :

$$\mu\left[\Big(\sum_{\nu=n}^{m-1} \big(\sum_{i \in I'_\nu} u_i^{r_\nu}\big) u_0^{r_n - r_\nu}\Big) + u_0^{r_n - r_\nu}\Big) + u_0^{r_n - r_m}\right] - u_0^{r_n} = 0,$$

on a :

$$\pi^{-1}(\mathscr{Z})=(\underline{u}, \mu)^{-1}(\mathscr{X})$$

et le diagramme :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & Z' \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "(\underline{u}, \mu)"] & \\
z\in\mathscr{Z}\subset Z\times\mathscr{S} \arrow[dr, "pr_2"'] & & \mathbb{A}\times\mathscr{S}\supset\mathscr{X}\ni 0 \arrow[dl, "pr_2"] \\
 & \mathscr{S} &
\end{tikzcd}$$

commute. Par suite, il résulte de ([3], 2.1.7.2) que l'on a un isomorphisme de $E_\lambda[I]$-modules :

$$\text{(9.3.4.1)} \qquad H^*(\mathscr{Z}_{(z)\bar{\eta}}, E_\lambda)\simeq H^*(\mathscr{X}_{(0)\bar{\eta}}, E_\lambda),$$

(*b*) $\sum_{i\in I'_m} a_i X_i^{r_m}$ *s'annule en* z : alors, choisissons un indice $i_m\in I'_m$ tel que X_{i_m} ne s'annule pas en z et choisissons, pour tout $i\in I'_\nu$, $\nu=n, \ldots, m-1$, une racine r_i-ième a'_i de a_i; les fonctions rationnelles :

$$u_0=\frac{X_0}{X_{i_m}},$$

$$u_i=a'_i\frac{X_i}{X_{i_m}}.$$

et :

$$v=\frac{\sum_{\nu=m}^{N} X_0^{r_m-r_\nu}(\sum_{i\in I'_\nu} a_i X_i^{r_\nu})}{X_{i_m}^{r_m}},$$

sont définis dans un voisinage de z dans $Z\times\mathscr{S}$ et s'annulent en z. Soit $\mathbb{A}$ l'espace affine sur $\mathbb{F}$ de dimension $2+\sum_{\nu=1}^{m-1}\operatorname{card}(I'_\nu)$, alors l'hypothèse (B_1) de 5.1 assure que le morphisme :

$$(\underline{u}, \mu): \quad (Z', z)\to(\mathbb{A}\times\mathscr{S}, 0),$$

de composantes u_0, v, les u_i ($i\in I'_\nu$, $\nu=n, \ldots, m-1$) ci-dessus et μ, défini sur un voisinage de Zariski convenable Z' de z dans $Z\times\mathscr{S}$, est lisse, de sorte que :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (Z', z') \arrow[dl] \arrow[dr, "(\underline{u}, \mu)"] & \\
(Z\times\mathscr{S}, z) & & (\mathbb{A}\times\mathscr{S}, 0)
\end{tikzcd}$$

est un système de coordonnées locales sur $Z \times \mathscr{S}$, centré en z [au sens de (5.3.0)]; de plus, si $\mathscr{X}$ est le sous-schéma fermé de $A \times \mathscr{S}$ d'équation :

$$\mu\left[\left(\sum_{\nu=n}^{m-1}\left(\sum_{i \in I'_\nu} u_i^{r_\nu}\right) u_0^{r_n - r_\nu}\right) + v \,.\, u_0^{r_n - r_m}\right] - u_0^{r_n} = 0.$$

on a :

$$\mathscr{Z} \cap Z' = (\underline{u}, \mu)^{-1}(\mathscr{X})$$

et le diagramme :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & Z' \arrow[dl, hook'] \arrow[dr, "{(\underline{u}, \mu)}"] & \\ z \in \mathscr{Z} \subset Z \times \mathscr{S} \arrow[dr, "pr_2"'] & & \mathbb{A} \times \mathscr{S} \supset \mathscr{X} \ni 0 \arrow[dl, "pr_2"] \\ & \mathscr{S} & \end{tikzcd}$$

commute. Par suite, il résulte de ([3], 2.1.7.2) que l'on a un isomorphisme de $E_\lambda[I]$-modules:

(9.3.4.2) $$H^*(\mathscr{Z}_{(z)\bar{\eta}}, E_\lambda) \simeq H^*(\mathscr{X}_{(0)\bar{\eta}}, E_\lambda).$$

Pour prouver 9.3.3, on est ramené par (9.3.4.1) et (9.3.4.2) à montrer le lemme suivant :

LEMME 9.3.5. — *Soient* $m \geqq n \geqq 1$ *deux entiers,* $(r_n, \ldots, r_m)$ *une suite d'entiers positifs, premiers à* p, *strictement décroissante, et* $(I'_\nu)_{\nu=n, \ldots, m-1}$ *une famille finie d'ensembles finis non vides, deux à deux disjoints. Considérons les deux situations suivantes :*

(i) $\mathbb{A} = \operatorname{Spec}(\mathbb{F}[u_0, (u_i)_{i \in I'_\nu, \nu=n, \ldots, m-1}])$ *et* $\mathscr{X} \subset \mathbb{A} \times \mathscr{S}$ *est le sous-schéma fermé défini par l'équation :*

$$\mu\left[\left(\sum_{\nu=n}^{m-1}\left(\sum_{i \in I'_\nu} u_i^{r_\nu}\right) u_0^{r_n - r_\nu}\right) + u_0^{r_n - r_m}\right] - u_0^{r_n} = 0,$$

(ii) $\mathbb{A} = \operatorname{Spec}(\mathbb{F}[u_0, v, (u_i)_{i \in I'_\nu, \nu=n, \ldots, m-1}])$ *et* $\mathscr{X} \subset \mathbb{A} \times \mathscr{S}$ *est le sous-schéma fermé défini par l'équation :*

$$\mu\left[\left(\sum_{\nu=m}^{n-1}\left(\sum_{i \in I'_\nu} u_i^{r_\nu}\right) u_0^{r_n - r_\nu}\right) + v u_0^{r_n - r_m}\right] - u_0^{r_n} = 0.$$

Dans ces deux situations l'action du groupe d'inertie I *de* $\mathscr{S}$ *sur* $H^*(\mathscr{X}_{(0)\bar{\eta}}, E_\lambda)$ *est modéré* ($\mathscr{X}_{(0)\bar{\eta}}$ *désigne la fibre en* $\bar{\eta}$ *de l'hensélisé de* $\mathscr{X}$ *en l'origine* 0 *de* $\mathbb{A} \times \{s\}$, *pour la projection* $\mathscr{X}_{(0)} \to \mathscr{X} \hookrightarrow \mathbb{A} \times \mathscr{S} \xrightarrow{pr_2} \mathscr{S}$). *Plus précisément, cette action se factorise à travers l'unique quotient fini cyclique de* I, *d'ordre le* p.p.c.m. r *des* $r_n, r_{n+1}, \ldots, r_m$.

9.3.5.1. Nous allons prouver 9.3.5 par un argument d'homotopie (cf. [7], preuve de 5.4.2). Soit T une indéterminée et soit :

$$\tilde{\mathscr{S}} = \operatorname{Spec}(\mathbb{F}(\mathrm{T})[[\mu]]).$$

Nous noterons $\tilde{0}$ le point $(0, \tilde{s})$ de $\mathbb{A} \times_{\mathbb{F}} \tilde{\mathscr{S}}$, où 0 est l'origine de l'espace affine $\mathbb{A}$ et où $\tilde{s}$ est le point fermé de $\tilde{\mathscr{S}}$. Soit, pour $\alpha = 1, 2$, $\mathscr{X}_\alpha$ le $\tilde{\mathscr{S}}$-schéma déduit du $\mathscr{S}$-schéma $\mathscr{X}$ par l'extension de $\mathbb{F}$-traits :

$$\theta_\alpha : \tilde{\mathscr{S}} \to \mathscr{S}$$

définie par :

$$\theta_\alpha(\mu) = \begin{cases} \mu & \text{si} \quad \alpha = 1, \\ \mathrm{T}^r \mu & \text{si} \quad \alpha = 2. \end{cases}$$

Dans ma situation (i), $\mathscr{X}_1$ (resp. $\mathscr{X}_2$) est le sous-schéma fermé de $\mathbb{A} \times_{\mathbb{F}} \tilde{\mathscr{S}}$ d'équation :

$$\mu\left[\left(\sum_{\nu=n}^{m-1} \left(\sum_{i \in \mathrm{I}'_\nu} u_i^{r_\nu}\right) u_0^{r_n - r_\nu}\right) + u^{r_n - r_m}\right] - u_0^{r_n} = 0.$$

(resp.

$$\left.\mu\,\mathrm{T}^r\left[\left(\sum_{\nu=n}^{m-1} \left(\sum_{i \in \mathrm{I}'_\nu} u_i^{r_\nu}\right) u_0^{r_n - r_\nu}\right) + u_0^{r_n - r_m}\right] - u_0^{r_n} = 0\right).$$

et les deux hensélisés en $\tilde{0}$, $\mathscr{X}_{1(\tilde{0})}$ et $\mathscr{X}_{2(\tilde{0})}$, de $\mathscr{X}_1$ et $\mathscr{X}_2$ respectivement, sont isomorphes sur $\tilde{\mathscr{S}}$: en effet, le $\tilde{\mathscr{S}}$-automorphisme :

$$\varphi : \quad \mathbb{A} \times_{\mathbb{F}} \tilde{\mathscr{S}} \to \mathbb{A} \times_{\mathbb{F}} \tilde{\mathscr{S}},$$

défini par :

$$\begin{cases} \varphi(u_0) = \mathrm{T}^{-r'_m} u_0, \\ \varphi(u_i) = \mathrm{T}^{r'_\nu - r'_m} u_i \qquad (i \in \mathrm{I}'_\nu,\ \nu = n, \ldots, m-1). \end{cases}$$

où on a posé $r'_\nu = r/r_\nu$ $(\nu = n, \ldots, m)$, préserve le point $\tilde{0}$ et induit un $\tilde{\mathscr{S}}$-isomorphisme de $\mathscr{X}_1$ sur $\mathscr{X}_2$.

Dans la situation (ii), $\mathscr{X}_1$ (resp. $\mathscr{X}_2$) est le sous-schéma fermé de $\mathbb{A} \times_{\mathbb{F}} \tilde{\mathscr{S}}$ d'équation :

$$\mu\left[\left(\sum_{\nu=n}^{m-1} \left(\sum_{i \in \mathrm{I}'_\nu} u_i^{r_\nu}\right) u_0^{r_n - r_\nu}\right) + u_0^{r_n - r_m} v\right] - u_0^{r_n} = 0$$

(resp.

$$\left.\mu\,\mathrm{T}^r\left[\left(\sum_{\nu=n}^{m-1} \left(\sum_{i \in \mathrm{I}'_\nu} u_i^{r_\nu}\right) u_0^{r_n - r_\nu}\right) + u_0^{r_n - r_m} v\right] - u_0^{r_n} = 0\right).$$

et les deux hensélisés en $\tilde{0}$, $\mathscr{X}_{1(\tilde{0})}$ et $\mathscr{X}_{2(\tilde{0})}$, de $\mathscr{X}_1$ et $\mathscr{X}_2$ respectivement, sont isomorphes sur $\tilde{\mathscr{S}}$: en effet, le $\tilde{\mathscr{S}}$-automorphisme :

$$\varphi : \quad \mathbb{A} \times_{\mathbb{F}} \tilde{\mathscr{S}} \to \mathbb{A} \times_{\mathbb{F}} \tilde{\mathscr{S}},$$

défini par :

$$\begin{cases} \varphi(u_0)=T^{-r'_m}u_0 \\ \varphi(u_i)=T^{r'_\nu-r'_m}u_i \qquad (i\in I'_\nu,\ \nu=n,\ \dots,\ m-1), \\ \varphi(v)=v, \end{cases}$$

où on a posé $r'_\nu=r/r_\nu\,(\nu=n,\ \dots,\ m)$, préserve le point $\tilde{0}$ et induit un $\tilde{\mathscr{S}}$-isomorphisme de $\mathscr{X}_1$ sur $\mathscr{X}_2$.

Par suite 9.3.5 est conséquence du lemme suivant (*cf.* [7], p. 184-187, pour une démonstration) :

LEMME 9.3.5.2. — *Soit k un corps séparablement clos, soit* $S=\operatorname{Spec}(k[[\mu]])$ *et soit* $f: X\to S$ *un morphisme séparé de type fini. Notons s le point fermé de* S, η *son point générique,* $\bar\eta$ *un point géométrique localisé en* η *et* $I=\operatorname{Gal}(\bar\eta/\eta)$ *le groupe d'inertie de* S *correspondant. Fixons un point fermé x de* X_s. *Soit r un entier positif, premier à la caractéristique p de k. Soit* T *une indéterminée et soit* $K=k(T)$. *Notons, pour* $\alpha=1,\ 2$, X_α *le* $K[[\mu]]$*-schéma déduit de* X *par l'extension de k-traits :*

$$\theta_\alpha:\quad k[[\mu]]\to K[[\mu]],$$

définie par :

$$\theta_\alpha(\mu)=\begin{cases}\mu & \text{si}\quad \alpha=1,\\ T^r\mu & \text{si}\quad \alpha=2.\end{cases}$$

Notons x_α l'unique point rationnel sur K *de* $X_\alpha\otimes_{K[[\mu]]}K$ *qui est au-dessus du point x de* X_s. *On suppose que les hensélisés,* $X_{1(x_1)}$ *et* $X_{2(x_2)}$, *de* X_1 *et* X_2 *respectivement sont* $K[[\mu]]$*-isomorphes. Alors l'action de* I *sur la cohomologie λ-adique* $(\lambda\,|\,l\neq p)$:

$$H^*(X_{(x)\bar\eta},\ E_\lambda),$$

de la fibre en $\bar\eta$ de l'hensélisé $X_{(x)}$ *de* X *en x se factorise à travers l'unique quotient fini cyclique d'ordre r de* I.

10. Calcul de $\chi(V,\ E_\lambda)$ et de $\chi(V_{\bar\eta},\ E_\lambda)$. Fin de la démonstration de 4.2.

PROPOSITION 10.1. — *Soit* F *un corps algébriquement clos de caractéristique* $p\geqq 0$ *et soit* $(d_i)_{i\in I}$ *une famille finie d'entiers positifs, premiers à p. L'hypersurface diagonale affine :*

$$V\subset\mathbb{A}^I_F=\operatorname{Spec}(F[(y_i)_{i\in I}]),$$

d'équation $\sum_{i\in I}y_i^{d_i}+1=0$, *admet comme caractéristique d'Euler-Poincaré λ-adique :*

$$\chi(V,\ E_\lambda)=1+(-1)^{\operatorname{card}(I)-1}\prod_{i\in I}(d_i-1),$$

pour tout $\lambda\,|\,l\neq p$.

10.1.1. Prouvons 10.1. Considérons V comme revêtement fini de l'hyperplan :

$$H\subset\mathbb{A}^I_F=\operatorname{Spec}(F[(z_i)_{i\in I}]),$$

d'équation $\sum_{i \in I} z_i + 1 = 0$, via le morphisme :

$$\varphi : \quad V \to H,$$

défini par $\varphi((y_i)_{i \in I}) = (y_i^{d_i})_{i \in I}$. Pour chaque partie non vide J de I, soit H^J l'ouvert de H défini par les conditions $z_j \neq 0$ ($\forall j \in J$) et soit H_J le fermé de H d'équations $z_i = 0$ ($\forall i \in I - J$). Alors H est réunion disjointe des $H_J \cap H^J$, pour J parcourant les parties non vides de I, et φ est fini étale, de degré $\prod_{j \in J} d_j$, au-dessus de $H_J \cap H^J$. Comme, pour toute partie non vide J de I, le degré $\prod_{j \in J} d_j$ est premier à p, on a ([6], 2.8 ou [7], 5.5.2) :

$$\chi_c(\varphi^{-1}(H_J \cap H^J), E_\lambda) = (\prod_{j \in J} d_j)\, \chi_c(H_J \cap H^J).$$

De plus :

$$\chi_c(H_J \cap H^J) = (-1)^{\mathrm{card}(J)-1},$$

pour toute partie non vide J de I : en effet, pour toute partie K non vide de I, on a :

$$H_K = \bigcup_{\emptyset \subsetneqq J \subset K} H_J \cap H^J$$

et :

$$\chi_c(H_K, E_\lambda) = 1.$$

Par suite :

$$\chi_c(V, E_\lambda) = \sum_{\emptyset \subsetneqq J \subset I} (-1)^{\mathrm{card}(J)-1} \prod_{j \in J} d_j,$$

d'où la conclusion puisque $\chi(V, E_\lambda) = \chi_c(V, E_\lambda)$ (dualité de Poincaré).

Proposition 10.2. — *Soit* F *un corps algébriquement clos de caractéristique* $p \geqq 0$, *soient* $(d_i)_{i \in I}$ *une famille finie non vide d'entiers positifs, premiers à p, et* $(a_i)_{i \in I}$ *une famille d'éléments de* F *non tous nuls. Soient* $1 \leqq d_1 < d_2 < \ldots < d_N$ *les valeurs distinctes prises par les* d_i $(i \in I)$,

$$I_\nu = \{ i \in I \mid d_i = d_\nu \} \qquad \text{et} \qquad I'_\nu = \{ i \in I_\nu \mid a_i \neq 0 \} \qquad (\nu = 1, \ldots, N).$$

Soit $n \in \{1, \ldots, N\}$ *le plus petit indice* ν *tel que* $I'_\nu \neq \emptyset$. *On fait l'hypothèse suivante :*

(B_3) *le cône et l'hyperplan de* $\mathbb{A}_F^{I'_n} = \mathrm{Spec}(F[(y_i)_{i \in I'_n}])$, *respectivement d'équations :*

$$\sum_{i \in I'_n} y_i^{d_n} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i \in I'_n} a_i y_i = 0.$$

sont transverses en dehors de l'origine.

Alors, si :

$$V \subset \mathbb{A}_F^I = \mathrm{Spec}(F[(y_i)_{i \in I}]),$$

désigne l'hypersurface diagonale affine d'équation $\sum_{i \in \mathrm{I}} y_i^{d_i} + 1 = 0$, *si :*

$$g : \quad \mathrm{V} \to \mathbb{A}^1_{\mathrm{F}},$$

est le morphisme défini par :

$$g((y_i)_{i \in \mathrm{I}}) = \sum_{i \in \mathrm{I}} a_i y_i$$

et si $\mathrm{V}_{\bar{\eta}}$ *est la fibre de g en un point géométrique générique* $\bar{\eta}$ *de* $\mathbb{A}^1_{\mathrm{F}}$, *on a :*

$$\chi(\mathrm{V}_{\bar{\eta}}, \mathrm{E}_\lambda) = 1 + (-1)^{\mathrm{card}(\mathrm{I})} \frac{\prod_{i \in \mathrm{I}} (d_i - 1)}{d_n - 1},$$

pour tout $\lambda \mid l \neq p$.

La démonstration de 10.2 comporte plusieurs étapes; la première consiste à nous ramener à démontrer 10.2 avec l'hypothèse supplémentaire $n = 1$, i. e. $\mathrm{I}'_1 \neq \emptyset$. Plus précisément, on a :

Lemme 10.3. — *Les notations et les hypothèses étant celles de* 10.2, *soient :*

$$\mathrm{I}' = \bigcup_{\nu = n}^{\mathrm{N}} \mathrm{I}_\nu \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I}'' = \mathrm{I} - \mathrm{I}' = \bigcup_{\nu = 1}^{n-1} \mathrm{I}_\nu,$$

soit

$$\tilde{\mathrm{V}} \subset \mathbb{A}^{\mathrm{I}'}_{\mathrm{F}} = \mathrm{Spec}(\mathrm{F}[(y_i)_{i \in \mathrm{I}'}]),$$

l'hypersurface diagonale affine d'équation $\sum_{i \in \mathrm{I}'} y_i^{d_i} + 1 = 0$ *et soit*

$$\tilde{g} : \quad \tilde{\mathrm{V}} \to \mathbb{A}^1_{\mathrm{F}}$$

le morphisme défini par $\tilde{g}((y_i)_{i \in \mathrm{I}'}) = \sum_{i \in \mathrm{I}'} a_i y_i$. *Alors :*

$$\chi(\mathrm{V}_{\bar{\eta}}, \mathrm{E}_\lambda) - 1 = \Big(\prod_{i \in \mathrm{I}''} (1 - d_i)\Big)(\chi(\tilde{\mathrm{V}}_{\bar{\eta}}, \mathrm{E}_\lambda) - 1),$$

pour tout $\lambda \mid l \neq p$, $\tilde{\mathrm{V}}_{\bar{\eta}}$ *désignant la fibre de* $\tilde{g}$ *en un point géométrique générique* $\bar{\eta}$.

10.3.1. Pour prouver 10.3, on considère le diagramme commutatif, à carré cartésien :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{V} \arrow[r, "p"] \arrow[ld, "g"'] \arrow[dd, "h"] & \mathbb{A}^{\mathrm{I}''} = \mathrm{Spec}(\mathrm{F}[(y_i)_{i \in \mathrm{I}''}]) \arrow[dd, "k"] \\
\mathbb{A}^1_{\mathrm{F}} & & \\
 & \mathrm{V}' \arrow[r, "p'"] \arrow[lu, "g'"] & \mathbb{A} = \mathrm{Spec}(\mathrm{F}[t])
\end{tikzcd}$$

où :

$$\mathrm{V}' \subset \mathrm{Spec}(\mathrm{F}[(y_i)_{i \in \mathrm{I}'}, y_0])$$

est défini par l'équation :

$$\sum_{i\in I'} y_i^{d_i}+y_0+1=0,$$

où :

$$g'((y_i)_{i\in I'},\, y_0)=\sum_{i\in I'} a_i y_i, \qquad h((y_i)_{i\in I})=((y_i)_{i\in I'},\, \sum_{i\in I''} y_i^{d_i}),$$

$$k((y_i)_{i\in I''})=\sum_{i\in I''} y_i^{d_i}, \quad p((y_i)_{i\in I})=(y_i)_{i\in I''} \quad \text{et} \quad p'((y_i)_{i\in I'},\, y_0)=y_0.$$

De la suite spectrale de Leray pour le morphisme $h_{\bar\eta} : V_{\bar\eta}\to V'_{\bar\eta}$ (fibre de h en $\bar\eta$) et pour le E_λ-faisceau constant E_λ, on tire la relation :

$$\chi(V_{\bar\eta},\, E_\lambda)=\sum_j (-1)^j \chi(V'_{\bar\eta},\, R^j h_* E_\lambda). \tag{10.3.1.1}$$

La flèche de changement de base :

$$p'^* R^j k_* E_\lambda \to R^j h_* E_\lambda,$$

est un isomorphisme pour tout $j\geqq 0$ (*cf.* 8.2.4, en faisant toutefois attention au fait que I′ et I″ n'ont pas tout à fait la même signification) et si :

$$s:\quad \mathbb{A}^{I''}=\mathrm{Spec}\,(F\,[(t_i)_{i\in I''}])\to \mathbb{A}$$

est le morphisme somme, $s((t_i)_{i\in I''})=\sum_{i\in I''} t_i$, si :

$$G=\prod_{i\in I''} \mu_{d_i}(F),$$

si, pour chaque caractère $\underline{\chi} : G\to E_\lambda^*$ de support $K''\subset I''$:

$$\nu_{\underline{\chi}}=\nu_K :\ \mathbb{G}_m^{K''}\times \mathbb{A}^{I''-K''}\hookrightarrow \mathbb{A}^{I''}=\mathrm{Spec}(F\,[(t_i)_{i\in I''}])$$

est l'inclusion naturelle et $\mathscr{K}(\underline{\chi})$ est le E_λ-faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbb{G}_m^{K''}\times\mathbb{A}^{I''-K''}$ défini par :

$$\mathscr{K}(\underline{\chi})=(\boxtimes_{k\in K''} \mathscr{K}_{d_k}(\chi_k,\, t_k))\boxtimes E_\lambda,$$

on a, pour tout $j\geqq 0$:

$$R^j k_* E_\lambda=\bigoplus_{\underline{\chi}\in\hat G} R^j s_* \nu_{\underline{\chi}\,!} \mathscr{K}(\underline{\chi}).$$

(*cf.* 8.2.9 en faisant toujours attention au fait que I′ et I″ ont dans 8.2.9 un sens légèrement différent). On a donc :

(10.3.1.2) $$\chi(V'_{\bar{\eta}}, R^j h_* E_\lambda) = \sum_{\underline{\chi}\in\hat{G}} \chi(V'_{\bar{\eta}}, p'^* R^j s_* \nu_{\underline{\chi}\,!} \mathscr{K}(\underline{\chi})),$$

pour tout $j \geqq 0$.

Or, on sait calculer les $R^j s_* \nu_{\underline{\chi}\,!} \mathscr{K}(\underline{\chi})$ (*cf.* 8.3.3), par suite on a, compte tenu de (10.3.1.2) :

(10.3.1.3) $$\chi(V'_{\bar{\eta}}, R^0 h_* E_\lambda) = \chi(V'_{\bar{\eta}}, E_\lambda),$$

si $j \neq 0$, card(I″)-1, on a :

(10.3.1.4) $$\chi(V'_{\bar{\eta}}, R^j h_* E_\lambda) = 0$$

et si $j = \text{card}(\text{I}'') - 1$, si :

$$\nu_{\{0\}} : \quad V'^{\{0\}} \hookrightarrow V'$$

est l'ouvert de V′ défini par la condition $y_0 \neq 0$, si d est le p. p. c. m. des $(d_i)_{i\in \text{I}''}$ et si $\prod_{i\in\text{I}''} \chi_i$: $\boldsymbol{\mu}_d(F) \to E_\lambda^*$ est le caractère défini en (8.3.1), on a :

(10.3.1.5) $$\chi(V'_{\bar{\eta}}, R^j h_* E_\lambda) = \sum_{\substack{\underline{\chi}\in\hat{G} \\ \text{Supp}(\underline{\chi})=\text{I}''}} \chi(V'_{\bar{\eta}}, (\nu_{\{0\}})_! \mathscr{K}_d(\prod_{i\in\text{I}''} \chi_i, p'))$$

(rappelons simplement que le E_λ-vectoriel $H(\underline{\chi})$ défini en (8.3.3.2) est de dimension 1).

Comme $g' : V' \to \mathbb{A}^1_F$ se factorise en :

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "g'"] & \\ \mathbb{A}^{\text{I}'} \arrow[r, "\beta"'] & \mathbb{A}^1_F \end{tikzcd}$$

où $\alpha((y_i)_{i\in\text{I}'}, y_0) = (y_i)_{i\in\text{I}'}$ et $\beta((y_i)_{i\in\text{I}'}) = \sum_{i\in\text{I}'} a_i y_i$, et que α est un isomorphisme, on a :

(10.3.1.6) $$\chi(V'_{\bar{\eta}}, E_\lambda) = \chi_c(V'_{\bar{\eta}}, E_\lambda) = 1.$$

D'autre part, d'après [9], on a :

$$\chi(V'_{\bar{\eta}}, (\nu_{\{0\}})_! \mathscr{K}_d(\prod_{i\in\text{I}''} \chi_i, p')) = \chi_c(V'_{\bar{\eta}}, (\nu_{\{0\}})_! \mathscr{K}_d(\prod_{i\in\text{I}''} \chi_i, p')) = \chi_c(V'^{\{0\}}_{\bar{\eta}}, \mathscr{K}_d(\prod_{i\in\text{I}''} \chi_i, p')),$$

donc d'après [6] 2.7 ou [7] 5.5.2, on a :

$$\chi(V'_{\bar{\eta}}, (\nu_{\{0\}})_! \mathscr{K}_d(\prod_{i\in\text{I}''} \chi_i, p')) = \chi_c(V'^{\{0\}}_{\bar{\eta}}, E_\lambda);$$

or $\tilde{V}$ s'identifie au fermé de V' d'équation $y_0=0$, i. e. à $V'-V'^{\{0\}}$, donc :

$$\chi_c(V'^{\{0\}}_{\bar{\eta}}, E_\lambda)=\chi_c(V'_{\bar{\eta}}, E_\lambda)-\chi_c(\tilde{V}_{\bar{\eta}}, E_\lambda)=1-\chi_c(\tilde{V}_{\bar{\eta}}, E_\lambda),$$

et, comme $\chi_c(\tilde{V}_{\bar{\eta}}, E_\lambda)=\chi(\tilde{V}_{\bar{\eta}}, E_\lambda)$ (*cf.* [9]), on a :

$$\chi(V'_{\bar{\eta}}, (v_{\{0\}})_! \mathscr{K}_d(\prod_{i\in I''}\chi_i, p'))=1-\chi(\tilde{V}_{\bar{\eta}}, E_\lambda). \tag{10.3.1.7}$$

Comme il y a $\prod_{i\in I''}(d_i-1)$ caractères $\underline{\chi}$ de G de support I'', on a, en regroupant les formules (10.3.1.1) à (10.3.1.7), montré 10.3.

10.4. Il nous reste à montrer 10.2 avec l'hypothèse supplémentaire :

$$I'_1\neq\emptyset. \tag{10.4.1}$$

Le principe de la démonstration est le suivant : fixons un indice $i_1\in I_1$, les conditions $a_{i_1}\neq 0$ (i. e. $i_1\in I'_1$) et (B_3) déterminent un ouvert de Zariski de Spec $(F(a_i)_{i\in I}])$; à chaque point fermé $(a_i)_{i\in I}$ de cet ouvert de Zariski, est attaché un morphisme $g: V\to\mathbb{A}^1_F$ défini par $g((y_i)_{i\in I})=\sum_{i\in I}a_i y_i$, donc le $\bar{\eta}$-schéma $V_{\bar{\eta}}$, fibre de g en $\bar{\eta}$; par suite :

$$(a_i)_{i\in I}\mapsto\chi(V_{\bar{\eta}}, E_\lambda)$$

est une fonction sur cet ouvert de Zariski. On va montrer que cette fonction est constante et calculer sa valeur en un point particulier de cet ouvert.

Partons donc d'une famille $(d_i)_{i\in I}$ finie non vide d'entiers positifs, premier à p, de valeurs distinctes $1\leqq d_1<d_2<\ldots<d_N$, posons :

$$I_\nu=\{i\in I\mid d_i=d_\nu\}\qquad(\nu=1,\ldots,N)$$

et fixons un indice $i_1\in I_1$; on posera alors :

$$\tilde{I}_\nu=\begin{cases}I_1-\{i_1\} & \text{si}\quad \nu=1,\\ I_\nu & \text{si}\quad \nu=2,\ldots,N\end{cases}$$

et :

$$\tilde{I}=\bigcup_{\nu=1}^{N}\tilde{I}_\nu=I-\{i_1\}.$$

Associons à ces données le morphisme :

$$f:\quad X\to S=\operatorname{Spec}(F[s_0, (s_i)_{i\in\tilde{I}}]), \tag{10.4.2}$$

définit comme suit : X est l'hypersurface dans Spec $(F[(y_i)_{i\in\tilde{I}}])\times S$ d'équation :

$$\sum_{i\in\tilde{I}}y_i^{d_i}+(s_0+\sum_{i\in\tilde{I}}s_i y_i)^{d_{i_1}}+1=0,$$

équation que l'on peut aussi écrire :

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\sum_{i\in \bar{I}_\nu} y_i^{d_\nu}) + \left(s_0 + \sum_{\nu=1}^{N} (\sum_{i\in \bar{I}_\nu} s_i y_i)\right)^{d_1} + 1 = 0,$$

et f est la restriction à X de la projection sur S.

On a alors un carré cartésien :

$$(10.4.3)\qquad \begin{array}{ccc} V \times \mathbb{A}^0 & \xrightarrow{s'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbb{A}^1_F \times \mathbb{A}^0 & \xrightarrow{s} & S \end{array}$$

où $\mathbb{A}^0$ est l'ouvert de $\mathbb{A} = \operatorname{Spec}(F[(a_i)_{i\in I}])$ défini par la condition $a_{i_1} \neq 0$ et où :

$$\begin{cases} s(t, (a_i)_{i\in I}) = (t/a_{i_1}, (-a_i/a_{i_1})_{i\in \bar{I}}), \\ f'((y_i)_{i\in I'}\, (a_i)_{i\in I}) = (\sum_{i\in I} a_i\, y_i, (a_i)_{i\in I}), \\ s'((y_i)_{i\in I}, (a_i)_{i\in I}) = ((y_i)_{i\in \bar{I}}, s'((y_i)_{i\in I'}, (a_i)_{i\in I}) \end{cases}$$

Par suite, *la fibre du morphisme* $g : V \to \mathbb{A}^1_F$ *défini par* $\sum_{i\in I} a_i y_i = 0$, *pour une famille* $(a_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* F *telle que* $a_{i_1} \neq 0$, *au point fermé* t *de* $\mathbb{A}^1_F$, *s'identifie à la fibre du morphisme* $f : X \to S$ *au point fermé* $s(t, (a_i)_{i\in I})$ *de* S. Si, de plus, $(a_i)_{i\in I}$ vérifie l'hypothèse (B_3) de 10.2, pour tout point fermé t de $\mathbb{A}^1_F$, on a $s(t, (a_i)_{i\in I})$, où :

$$(10.4.4)\qquad S^0 \subset S$$

est l'ouvert de Zariski de $S = \operatorname{Spec}(F[s_0, (s_i)_{i\in \bar{I}}])$ déterminé par la condition :

(B_4) *Le cône dans* $\mathbb{A}^{\bar{I}_1}_F$ *d'équation :*

$$\sum_{i\in \bar{I}_1} y_i^{d_1} + (\sum_{i\in \bar{I}_1} s_i y_i)^{d_1} = 0$$

est lisse en dehors de l'origine.

Notons :

$$(10.4.5)\qquad S^{00} \subset S^0 \subset S,$$

l'intersection de S^0 et des ouverts maximaux de lissité des E_λ-faisceaux $R^j f_! E_\lambda$ $(j \in \mathbb{N})$.

PROPOSITION 10.5. — *Pour toute famille* $(a_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* F *vérifiant l'hypothèse* (B_3) *de* 10.2 *et telle que* $a_{i_1} \neq 0$, *il existe au moins un point fermé* $t \in \mathbb{A}^1_F$ *tel que* $s(t, (a_i)_{i\in I}) \in S^{00}$.

COROLLAIRE 10.5.1. — *Quand* $(a_i)_{i\in I}$ *parcourt les familles d'éléments de* F, *d'ensemble d'indices* I, *vérifiant l'hypothèse* (B_3) *de* 10.2 *et telles que* $a_{i_1} \neq 0$, *la caractéristique d'Euler-*

Poincaré λ-adique, $\chi(V_{\bar{\eta}}, E_\lambda)$, *de la fibre en* $\bar{\eta}$ *du morphisme* $g : V \to \mathbb{A}^1_F$, *défini par* :

$$g((y_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} a_i y_i,$$

reste constante.

10.5.2. Déduisons 10.5.1 de 10.5. Par définition de S^{00}, $\chi_c(X_s, E_\lambda)$ ne dépend pas de s choisi dans S^{00}, donc $\chi_c(f'^{-1}(t, (a_i)_{i \in I}), E_\lambda)$ ne dépend pas de $(t, (a_i)_{i \in I})$ choisi dans $s^{-1}(S^{00})$. Comme $s^{-1}(S^{00})$ est un ouvert de $\mathbb{A}^1_F \times \mathbb{A}^0$ et rencontre $\mathbb{A}^1_F \times \{(a_i)_{i \in I}\}$ dès que $(a_i)_{i \in I}$ vérifie (B_3) de 10.2, le point géométrique $(\bar{\eta}, (a_i)_{i \in I})$ de $\mathbb{A}^1_F \times \mathbb{A}^0$ est dans $s^{-1}(S^{00})$ dès que $(a_i)_{i \in I}$ vérifie (B_3) de 10.2, d'où la conclusion, puisque $\chi_c(V_{\bar{\eta}}, E_\lambda) = \chi(V_{\bar{\eta}}, E_\lambda)$ (*cf.* [9]).

10.6. Prouvons 10.5. Le morphisme $f : X \to S$ admet une compactification naturelle :

(10.6.1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & & \bar{X} \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

(j est une immersion ouverte d'image dense, $\bar{f}$ est un morphisme propre) définie comme suit : $\bar{X}$ est l'hypersurface dans $\mathrm{Proj}\,(F[Y_0, (Y_i)_{i \in \tilde{I}}]) \times S$ d'équation :

$$\sum_{\nu=1}^{N} \Big(\sum_{i \in \tilde{I}_\nu} Y_i^{d_\nu}\Big) Y_0^{d_N - d_\nu} + \Big(s_0 Y_0 + \sum_{i \in \tilde{I}} s_i Y_i\Big)^{d_1} Y_0^{d_N - d_1} + Y_0^{d_N} = 0,$$

$\bar{f}$ est la restriction à $\bar{X}$ de la projection sur S et j identifie de manière évidente X à l'ouvert de $\bar{X}$ déterminé par la condition $Y_0 \neq 0$.

L'infini de X, i. e. le fermé $\bar{X} - X$ de $\bar{X}$, est, pour $N > 1$, le fermé de $\mathrm{Proj}\,(F[Y_0, (Y_i)_{i \in \tilde{I}}]) \times S$ d'équations :

$$\sum_{i \in \tilde{I}_N} Y_i^{d_N} = Y_0 = 0,$$

donc est le produit d'un fermé de $\mathrm{Proj}\,(F[Y_0, (Y_i)_{i \in \tilde{I}}])$ par S; pour $N = 1$, on a $\tilde{I} = \tilde{I}_1$ et $\bar{X} - X$ est le fermé de $\mathrm{Proj}\,(F[Y_0, (Y_i)_{i \in \tilde{I}_1}]) \times S$ d'équations :

$$\sum_{i \in \tilde{I}_1} Y_i^{d_1} + \Big(\sum_{i \in \tilde{I}_1} s_i Y_i\Big)^{d_1} = Y_0 = 0,$$

donc est lisse au-dessus de S^0, compte tenu de (B_4).

Considérons alors la suite exacte longue d'excision pour l'immersion ouverte $j : X \hookrightarrow \bar{X}$:

$$\cdots \to R^j f_! E_\lambda \to R^j \bar{f}_* E_\lambda \to R^j (\bar{f} \,|\, \bar{X} - X)_* E_\lambda \to R^{j+1} f_! E_\lambda \to \cdots.$$

Vu la description que l'on vient de donner de $\bar{X} - X$, les E_λ-faisceaux $R^j (\bar{f} \,|\, \bar{X} - X)_* E_\lambda$ ($j \in \mathbb{N}$) sont lisses au-dessus de l'ouvert S^0 de S, donc :

(10.6.2) S^{00} *est l'intersection de* S^0 *et des ouverts maximaux de lissité des* E_λ-*faisceaux* $R^j \bar{f}_* E_\lambda$ ($j \in \mathbb{N}$).

LEMME 10.6.3. — *Soient* $(d_i)_{i\in I}$ *et* $(a_i)_{i\in I}$ *comme en* 10.2. *On suppose* $I'_1 \neq \emptyset$ *et que l'hypothèse* (B_3) *de* 10.2 (*pour* $n=1$) *est vérifiée. Alors l'ouvert de* $\mathbb{A}^1_F$ *au-dessus duquel le morphisme* $g : V \to \mathbb{A}^1_F$, *défini par* $g((y_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} a_i y_i$, *est lisse, est non vide* (*autrement dit*, $V_{\bar{\eta}}$ *est lisse*).

10.6.3.1. Prouvons 10.6.3. Soit $\mathcal{J} \subset F\,[(y_i)_{i\in I}]$ l'idéal jacobien de $(\sum_{i\in I} y_i^{d_i}, \sum_{i\in I} a_i y_i)$, engendré par les polynômes :

$$a_i d_j y_j^{d_j-1} - a_j d_i y_i^{d_i-1} \qquad (i, j \in I,\ i \neq j),$$

et soit Γ le sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^I_F$ défini par l'idéal $\mathcal{J}$. Le lien singulier de la fibre en t, V_t, de $g : V \to \mathbb{A}^1_F$ est alors $V_t \cap \Gamma$, donc, pour montrer 10.6.3, il suffit de prouver que $\Gamma \cap V$ est fini (sur F).

Fixons $i_1 \in I'_1 = \{ i \in I \mid d_i = d_1 \text{ et } a_i \neq 0 \}$, alors $\mathcal{J}$ est déjà engendré par les polynômes :

$$a_{i_1} d_j y_j^{d_j-1} - a_j d_1 y_{i_1}^{d_1-1} \qquad (j \in I - \{ i_1 \}).$$

Laissons provisoirement de côté le cas $d_1 = 1$ et supposons donc $d_1 \geqq 2$. Alors Γ est une courbe intersection complète dans $\mathbb{A}^I_F$ (c'est la « courbe polaire » de $g : V \to \mathbb{A}^1_F$). Pour tout $i \in I$, soit C_i l'ensemble des racines $(d_i - 1)$-ièmes de $a_i d_1 / a_{i_1} d_i$ dans F ($C_{i_1} = \{ 1 \}$), soit :

$$C = \prod_{i\in I} C_i$$

et soit :

$$\pi : \coprod_{\underline{c}\in C} \operatorname{Spec}(F[u_{\underline{c}}]) \to \Gamma,$$

le morphisme défini par :

$$y_i = c_i . u_{\underline{c}}^{\delta/(d_i-1)} \qquad (i \in I),$$

pour tout $\underline{c} = (c_i)_{i\in I} \in C$, où l'on a posé :

$$\delta = (d_1 - 1) \ldots (d_N - 1).$$

Comme le morphisme π est surjectif, pour montrer que $V \cap \Gamma$ est fini (sur F), il suffit de montrer que $\pi^{-1}(V \cap \Gamma)$ l'est. Or Spec $(F[u_{\underline{c}}]) \cap \pi^{-1}(V \cap \Gamma)$ a pour équation :

$$\sum_{i\in I} c_i^{d_i} u_{\underline{c}}^{\delta d_i/(d_i-1)} + 1 = 0$$

et le coefficient dominant de ce polynôme de degré $\delta d_1/(d_1 - 1) > 0$ en $u_{\underline{c}}$ est :

$$\sum_{i\in I_1} c_i^{d_1} = \sum_{i\in I'_1} c_i^{d_1};$$

si ce coefficient dominant était nul, le système d'équations :

$$\begin{cases} \sum_{i\in \mathrm{I}'_1} c_i^{d_1-1} x_i=0, \\ \sum_{i\in \mathrm{I}'_1} a_i x_i=0. \end{cases}$$

aurait la solution commune non triviale $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}=(c_i)_{i\in \mathrm{I}}$, ce qui contredirait (B_3) de 10.2 (pour $n=1$); par suite, ce coefficient dominant est non nul et $\mathrm{Spec}(\mathrm{F}[u_{\underline{c}}])\cap\pi^{-1}(\mathrm{V}\cap\Gamma)$ est fini. Ceci ayant lieu quel que soit $\underline{c}\in \mathrm{C}$, 10.6.3 est démontré pour $d_1\geqq 2$.

Pour $d_1=1$, Γ est vide sauf si $\mathrm{I}_1=\mathrm{I}'_1=\{i_1\}$: en effet, pour que Γ soit non vide, il faut que $a_i=a_{i_1}$ pour tout $i\in \mathrm{I}_1$, i. e. que :

$$\sum_{i\in \mathrm{I}'_1} a_i y_i=a_{i_1}(\sum_{i\in \mathrm{I}_1} y_i),$$

mais, vu l'hypothèse (B_3) de 10.2, nécessairement $\mathrm{I}_1=\mathrm{I}'_1$ est réduit à $\{i_1\}$. Supposons donc $d_1=1$ et $\mathrm{I}_1=\mathrm{I}'_1=\{i_1\}$, alors $\Gamma\cap \mathrm{V}$ est défini par les équations :

$$\begin{cases} y_i^{d_i-1}=a_i/a_{i_1} d_i \qquad (i\in \mathrm{I}-\{i_1\}, \\ y_{i_1}=-1-\sum_{i\in \mathrm{I}-\{i_1\}} y_i^{d_i}, \end{cases}$$

où $d_i>1$, pour $i\in \mathrm{I}-\{i_1\}$, donc $\Gamma\cap \mathrm{V}$ est fini et 10.6.3 est démontré pour $d_1=1$.

LEMME 10.6.4. — *Le morphisme* $\bar f : \overline{\mathrm{X}}\to \mathrm{S}$ *est localement acyclique en tout point fermé de* $\overline{\mathrm{X}}-\mathrm{X}$ *au-dessus de* S^0, *relativement au faisceau constant* E_λ.

10.6.4.1. Prouvons 10.6.4. Nous noterons simplement P l'espace projectif $\mathrm{Proj}(\mathrm{F}[\mathrm{Y}_0, (\mathrm{Y}_i)_{i\in \tilde{\mathrm{I}}}])$. Soit x un point fermé de $\overline{\mathrm{X}}-\mathrm{X}$ au-dessus de S^0, alors Y_0 s'annule en x et il existe un unique $m\in\{1, \ldots, \mathrm{N}\}$ tel que :

(i) Y_i s'annule en x, pour $i\in\tilde{\mathrm{I}}_\nu$, $\nu=\mathrm{N}, \ldots, m+1$;

(ii) pour un indice $i\in\tilde{\mathrm{I}}_m$ au moins, Y_i ne s'annule pas en x.

Supposons qu'il existe un diagramme commutatif de morphismes de F-schémas pointés :

(10.6.4.2)
$$\begin{tikzcd} & (\overline{\mathrm{X}}', x') \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "(\underline{u}, \underline{s})"] & \\ (\overline{\mathrm{X}}, x) \arrow[dr, "\bar f"'] & & (\mathrm{Y}\times \mathrm{S}^0, (y, s)) \arrow[dl, "pr_2"] \\ & (\mathrm{S}^0, s) & \end{tikzcd}$$

avec π étale en x' et $(\underline{u}, \underline{s})$ lisse en x', alors 10.6.4 résulte de [5], 2.7 et SGA 41/2 [Th. Finitude] 2.16.

Nous allons construire un diagramme commutatif de morphisme de F-schémas pointés :

$$\begin{tikzcd} & (\mathrm{Q}, x') \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "(\underline{u}, \underline{s})"] & \\ (\mathrm{P} \times \mathrm{S}^0, x) \arrow[dr, "pr_2"'] & & (\mathrm{A} \times \mathrm{S}^0, (y, s)) \arrow[dl, "pr_2"] \\ & (\mathrm{S}^0, s) & \end{tikzcd} \tag{10.6.4.3}$$

avec π étale en x' et $(\underline{u}, \underline{s})$ lisse, tel qu'il existe un sous-schéma fermé $\mathrm{Y} \subset \mathrm{A}$ vérifiant :

$$(\underline{u}, \underline{s})^{-1} (\mathrm{Y} \times \mathrm{S}^0) = \pi^{-1} (\overline{\mathrm{X}}); \tag{10.6.4.4}$$

cela entraînera la conclusion car on déduit de (10.6.4.3), par restriction à $\overline{\mathrm{X}}$, un diagramme (10.6.4.2).

Pour construire (10.6.4.3) et donc prouver 10.6.4, nous distinguerons quatre cas :

(*a*) $m > 1$ *et* $\sum_{i \in \tilde{\mathrm{I}}_m} \mathrm{Y}_i^{d_m}$ *ne s'annule pas en* x : alors choisissons $i_m \in \tilde{\mathrm{I}}_m$ tel que Y_{i_m} ne s'annule pas en x; la fonction rationnelle sur $\mathrm{P} \times \mathrm{S}^0$:

$$\eta = \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{m} \left(\sum_{i \in \tilde{\mathrm{I}}_\nu} \mathrm{Y}_i^{d_\nu} \right) \mathrm{Y}_0^{d_m - d_\nu} \right) + \left(s_0 \mathrm{Y}_0 + \sum_{i \in \tilde{\mathrm{I}}} s_i \mathrm{Y}_i \right)^{d_1} \mathrm{Y}_0^{d_m - d_1} + \mathrm{Y}_0^{d_m}}{\mathrm{Y}_{i_m}^{d_m}}$$

est définie en x et ne s'annule pas en x; comme par hypothèse $(d_m, p) = 1$, le revêtement de Kummer :

$$\pi : \quad (\mathrm{Q}, x') \to (\mathrm{P} \times \mathrm{S}^0, x),$$

d'équation $\zeta^{d_m} = \eta$ est étale en x' [le choix de x' correspond au choix d'une racine d_m-ième de $\eta(x)$]. Considérons l'espace affine A sur F de dimension $1 + \sum_{\nu = m+1}^{\mathrm{N}} \operatorname{card}(\tilde{\mathrm{I}}_\nu)$, d'origine y, et soit :

$$(\underline{u}, \underline{s}) : \quad (\mathrm{Q}, x') \to (\mathrm{A} \times \mathrm{S}^0, (y, s)),$$

le morphisme de composantes u_0, u_i ($i \in \tilde{\mathrm{I}}_\nu$, $\nu = m+1, \ldots, \mathrm{N}$), s_0 et $s_i (i \in \tilde{\mathrm{I}})$, où on a posé :

$$u_0 = \mathrm{Y}_0 / \zeta \, \mathrm{Y}_{i_m}$$

et

$$u_i = \mathrm{Y}_i / \zeta \, \mathrm{Y}_{i_m} \qquad (i \in \tilde{\mathrm{I}}_\nu, \ \nu = m+1, \ldots, \mathrm{N}).$$

Ce morphisme $(\underline{u}, \underline{s})$ est lisse en x' et si $Y \subset A$ est le sous-schéma fermé d'équation :

$$\left(\sum_{\nu=m+1}^{N} (\sum_{i \in \tilde{I}_\nu} u_i^{d_\nu}) u_0^{d_N - d_\nu}\right) + u_0^{d_N - d_m} = 0,$$

on a (10.6.4.4), d'où la conclusion dans ce cas.

(b) $m > 1$ *et* $\sum_{i \in \tilde{I}_m} Y_i^{d_m}$ *s'annule en* x : alors choisissons $i_m \in \tilde{I}_m$ tel que Y_{i_m} ne s'annule pas en x; prenons $(Q, x') = (P \times S^0, x)$ et π le morphisme identique. Considérons l'espace affine A sur F de dimension $2 + \sum_{\nu=m+1}^{N} \operatorname{card}(\tilde{I}_\nu)$, d'origine y, et soit :

$$(\underline{u}, \underline{s}) : \quad (Q, x') = (P \times S^0, x) \to (A \times S^0, (y, s)),$$

le morphisme de composantes u_0, u_i $(i \in \tilde{I}_\nu, \nu = m+1, \ldots, N)$, v, s_0 et s_i $(i \in \tilde{I})$, où on a posé :

$$u_0 = Y_0 / Y_{i_m},$$
$$u_i = Y_i / Y_{i_m} \qquad (i \in \tilde{I}_\nu, \nu = m+1, \ldots, N)$$

et

$$v = \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{m} (\sum_{i \in \tilde{I}_\nu} Y_i^{d_\nu}) Y_0^{d_m - d_\nu}\right) + (s_0 Y_0 + \sum_{i \in \tilde{I}} s_i Y_i)^{d_1} Y_0^{d_m - d_1} + Y_0^{d_m}}{Y_{i_m}^{d_m}}.$$

Ce morphisme $(\underline{u}, \underline{s})$ est lisse en $x' = x$ [en effet, $(d_m, p) = 1$ par hypothèse, donc l'hypersurface dans $\mathbb{A}_F^{\tilde{I}_m} = \operatorname{Spec}(F[(y_i)_{i \in \tilde{I}_m}])$, d'équation $\sum_{i \in \tilde{I}_m} y_i^{d_m} = 0$, est lisse en dehors de l'origine]; de plus, si $Y \subset A$ est le sous-schéma fermé d'équation :

$$\sum_{\nu=m+1}^{N} (\sum_{i \in \tilde{I}_\nu} u_i^{d_\nu}) u_0^{d_N - d_\nu} + u_0^{d_N - d_m} . v = 0,$$

on a (10.6.4.4), d'où la conclusion dans ce cas.

(c) $m = 1$ *et* $\sum_{i \in \tilde{I}_1} Y_i^{d_1} + (\sum_{i \in \tilde{I}_1} s_i Y_i)^{d_1}$ *ne s'annule pas en* x : l'étude de ce cas est analogue à celle du cas (a).

(d) $m = 1$ *et* $\sum_{i \in \tilde{I}_1} Y_i^{d_1} + (\sum_{i \in \tilde{I}_1} s_i Y_i)^{d_1}$ *s'annule en* x : l'étude de ce cas est analogue à celle du cas (b), avec une différence cependant : la lissité du morphisme $(\underline{u}, \underline{s}) : (Q, x') \to (A \times S^0, (y, s))$ est assurée maintenant par le fait que $s \in S^0$, i. e. que $(s_i)_{i \in \tilde{I}_1}$ vérifie (B_4) de 10.4.

10.6.5. Nous pouvons achever la démonstration de 10.5. D'après le théorème de spécialisation des groupes de cohomologie (SGA 4 XVI 2.1) et 10.6.4, S^{00} [compte tenu de sa description (10.6.2)] contient l'ouvert de S^0 formé des $s \in S^0$ tels que X_s est lisse. Par suite

10.5 résulte du lemme 10.6.3 et de l'interprétation, donnée en 10.4, de la fibre de $f : X \to S$ en un point $s(t, (a_i)_{i \in I})$.

10.7. Achevons la preuve de 10.2. Fixons un indice $i_1 \in I_1$ et soit $(a_i)_{i \in I}$ la famille d'éléments de F définie par :

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = i_1, \\ 0 & \text{si} \quad i \neq i_1. \end{cases}$$

Calculons $\chi(V_{\bar{\eta}}, E_\lambda)$ où $V_{\bar{\eta}}$ est la fibre en $\bar{\eta}$ du morphisme $g : V \to \mathbb{A}^1_F$ défini par $g((y_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} a_i y_i$. Si t est un point fermé de $\mathbb{A}^1_F$, la fibre V_t de g en t est clairement isomorphe à l'hypersurface de $\mathbb{A}^{\tilde{I}}_F = \operatorname{Spec}(F[(y_i)_{i \in \tilde{I}}])$, $\tilde{I} = I - \{i_1\}$, d'équation :

$$\sum_{i \in \tilde{I}} y_i^{d_i} + 1 + t^{d_1} = 0;$$

par suite, il résulte de 10.1 que, si $1 + t^{d_1} \neq 0$, on a :

$$\chi(V_t, E_\lambda) = 1 + (-1)^{\operatorname{card}(\tilde{I}) - 1} \prod_{i \in \tilde{I}} (d_i - 1)$$

donc :

$$\chi(V_{\bar{\eta}}, E_\lambda) = 1 + (-1)^{\operatorname{card}(I)} \frac{\prod_{i \in I} (d_i - 1)}{d_1 - 1}.$$

Comme cette famille $(a_i)_{i \in I}$ vérifie $a_{i_1} \neq 0$ et l'hypothèse (B_3) de 10.2, il résulte de 10.5.1 que pour toute famille $(a_i)_{i \in I}$ vérifiant $I'_1 \neq \emptyset$ et l'hypothèse (B_3) de 10.2, on a :

$$\chi(V_{\bar{\eta}}, E_\lambda) = 1 + (-1)^{\operatorname{card}(I) - 1} \frac{\prod_{i \in I} (d_i - 1)}{d_1 - 1}, \tag{10.7.1}$$

où $V_{\bar{\eta}}$ est la fibre en $\bar{\eta}$ du morphisme $g : V \to \mathbb{A}^1_F$ associé à $(a_i)_{i \in I}$. Combinant (10.7.1) et 10.3, on obtient 10.2.

10.8. *Preuve de* 4.2. — Soient V et $\mathcal{G}$ comme en 4.0, vérifiant les hypothèses (A) et (B) de 4.0. D'après 9.1 [*cf.* (9.0.3)] :

$$\chi(V, \mathcal{G}) = \chi(V, E_\lambda) - \chi(V_{\bar{\eta}}, E_\lambda). \tag{10.8.1}$$

Le premier terme du second membre de 10.8.1 est calculé en 10.1, on y obtient :

$$\chi(V, E_\lambda) = 1 + (-1)^{\operatorname{card}(I) - 1} \prod_{i \in I} (d_i - 1). \tag{10.8.2}$$

Pour le second terme, remarquons tout d'abord que l'hypothèse (B) de 4.0 implique l'hypothèse (B_3) de 10.2. Par suite, on peut utiliser 10.2 pour calculer ce second terme et on obtient :

$$(10.8.3)\qquad \chi(V_{\bar{\eta}}, E_\lambda) = 1 + (-1)^{\mathrm{card}(I)-1} \frac{\prod_{i\in I}(d_i - 1)}{d_n - 1},$$

où $n \in \{1, \ldots, N\}$ est le premier indice ν tel que $I'_\nu \neq \emptyset$.

En regroupant (10.8.1), (10.8.2) et (10.8.3), on obtient :

$$\chi(V, \mathscr{G}) = (-1)^{\mathrm{card}(I)-1} \frac{\prod_{i\in I}(d_i - 1)}{d_n - 1} d_n,$$

ce qui n'est autre que 4.2, au changement de notation $\nu_0 = n$ près.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. DELIGNE, *Cohomologie étale* (*SGA* 4 1/2). *Applications de la formule des traces aux sommes trigonométriques* (*Springer Lecture Notes in Math.*, n° 569, Springer-Verlag, 1977, p. 168-232).

[2] P. DELIGNE, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L* (*Séminaire I.H.E.S.*, 1980).

[3] P. DELIGNE, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique* (*SGA* 7) *XIII. Le formalisme des cycles évanescents* (*Springer Lecture Notes in Math.*, n° 340, Springer Verlag, 1973, p. 82-115).

[4] C. HOOLEY, *On the Numbers that are representable as the sum of two cubes* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 314, 1980, p. 146-173).

[5] L. ILLUSIE, *Cohomologie étale* (*SGA* 4 1/2). *Appendice à Théorème de finitude en cohomologie* l-*adique* (*Springer Lecture Notes in Math.*, n° 569, Springer-Verlag, 1977, p. 252-261).

[6] L. ILLUSIE, *Formule d'Euler-Poincaré et Théorie de Brauer* (d'après P. Deligne). *Séminaire de l'E.N.S.* 1978-1979 (*Astérisque*, n° 82-83, 1981, p. 161-172).

[7] N. M. KATZ, *Sommes exponentielles*, Cours à Orsay, automne 1979 (*Astérisque*, n° 79, 1980).

[8] G. LAUMON, *Majoration de sommes exponentielles* (d'après P. Deligne et N. M. Katz). *Séminaire de l'E.N.S.* 1978-1979 (*Astérisque*, n° 82-83, 1980, p. 221-258).

[9] G. LAUMON, *Comparaison de caractéristiques d'Euler-Poincaré en cohomologie* l-*adique* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 292, 19 janvier 1981, p. 209-212).

[10] J.-P. SERRE, *Représentations linéaires des groupes finis*, Troisième édition corrigée, Hermann, Paris, 1978.

[11] J.-P. SERRE, *Majoration de sommes exponentielles. Journées arithmétiques de Caen* (*Astérisque*, n° 41-42, 1977, p. 111-126).

[12] A. WEIL, *Number of Solution of Equations in Finite Fields* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 55, 1949, p. 497-508).

(Manuscrit reçu le 21 décembre 1981,
révisé le 21 mai 1982.)

G. LAUMON,
Université de Paris-Sud,
Département de Mathématique,
Bâtiment n° 425,
91405 Orsay Cedex.