ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PIERRE DAZORD

Sur la géométrie des sous-fibrés et des feuilletages lagrangiens

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 14, nº 4 (1981), p. 465-480
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1981_4_14_4_465_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4^{e} série, t. 13, 1981, p. 465 à 480.

SUR LA GÉOMÉTRIE DES SOUS-FIBRÉS ET DES FEUILLETAGES LAGRANGIENS

PAR PIERRE DAZORD

Introduction

On sait le rôle joué dans la théorie des équations aux dérivées partielles par la classe de Maslov-Arnold que ce soit dans la théorie des opérateurs intégraux de Fourier de L. Hörmander ou dans le calcul lagrangien de J. Leray.

Dans ces questions la géométrie utilisée est la géométrie symplectique ou q-symplectique. Le but de cet article est de montrer comment les études de géométrie symplectique peuvent bénéficier de la considération des structures subordonnées à la structure symplectique ou qui lui sont associées en un sens plus large. Les méthodes utilisées sont celles de la géométrie des fibrés et des connexions telles qu'elles sont présentées dans le livre de A. Lichnerowicz « *Théorie globale des connexions et des groupes d,holonomie* ».

L'article est divisé en trois parties.

La première partie est consacrée à l'étude de l'existence de sous-fibrés lagrangiens d'un fibré symplectique. Par l'utilisation de structures associées à la structure symplectique, des conditions nécessaires d'existence portant sur les classes de Chern, Pontriaguine, Stiefel-Whitney et Euler sont mises en évidence.

La deuxième partie est consacrée aux feuilletages lagrangiens. Un sous-fibré lagrangien L permet de réduire à 0 (n) le groupe structural d'un fibré symplectique. Parmi les structures euclidiennes ainsi construites, il en existe de privilégiées si L est le fibré tangent d'un feuilletage Lagrangien sur une variété symplectique sous certaines conditions naturelles, ce qui permet de prouver que les feuilles complètes de tels feuilletages sont des produits de quotients finis de Tores par des espaces euclidiens, résultat qui généralise un théorème d'Arnold [2].

Enfin la troisième partie est consacrée à la classe de Maslov-Arnold. Une structure complexe associée permet d'identifier la classe de Maslov-Arnold universelle d'un fibré symplectique à une 1-classe de cohomologie entière liée à la structure complexe. En particulier la classe de Maslov-Arnold d'une immersion lagrangienne dans une variété kählérienne est liée à la courbure moyenne de l'immersion, ce qui permet de généraliser un résultat de Morvan [10] aux variétés kählériennes simplement connexe à courbure de Ricci nulle. La courbure moyenne permet alors de caractériser les immersions lagrangiennes 2 q-orientées.

Certains des résultats ont été exposés aux Journées P. de Fermat à Toulouse en mars 1981.

1. Problème d'existence

Soit (E, σ) un fibré vectoriel de rang $2n$ sur une variété M de dimension m, σ étant une 2-forme sur E, c'est-à-dire une section de $\Lambda^2 E^*$, de rang maximal en tout point ($\Lambda^n \sigma(x) \neq 0$ pour tout $x \in M$). (E, σ) est un fibré symplectique. On note $E(Sp(n))$ le fibré principal associé. Si (E, h) est une structure hermitienne subordonnée à la structure symplectique, il lui correspond une $U(n)$-réduction de $E(Sp(n))$: $E(U(n))$.

Si (E, σ) possède un sous-fibré lagrangien L, L permet de réduire à $O(n)$ le groupe structural : $E(O(n))$ est l'espace des repères (isomorphismes de E_x sur $\mathbb{C}^n$) tels que $z^{-1}\,\mathbb{R}^{n*} = L$ où on identifie $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$. L est une forme réelle de E et $E(O(n))$ est isomorphe à $L(O(n))$ fibré des repères de L obtenu en restreignant à L les repères de $E(O(n))$.

L étant une forme réelle de E, E s'identifie au complexifié de L. Il en résulte que les classes de Chern de (E, h) d'ordre impair sont nulles (*cf.* [11]). Par abus de langage, on appellera structure complexe subordonnée à la structure symplectique, toute structure complexe sur E obtenue en élargissant à $GL(n, \mathbb{C})$ le groupe structural d'une structure hermitienne subordonnée à (E, σ).

THÉORÈME 1.1 [11]. — *Les classes de Chern d'ordre impair de n'importe quelle structure complexe subordonnée à* (E, σ) *sont nulles si* E *possède un sous-fibré lagrangien.*

En particulier, $P^n(\mathbb{C})$, munie de sa structure kählérienne naturelle a sa première classe de Chern non nulle [9]. Il n'existe donc pas de sous-fibrés lagrangiens de $TP^n(\mathbb{C})$; plus généralement :

COROLLAIRE. — *Si* M *est une variété kählérienne complète à courbure sectionnelle holomorphe constante strictement positive*, TM *ne possède pas de sous-fibré lagrangien.*

Si $f: M \to M_0$ est une immersion lagrangienne dans une variété kählérienne de fibré tangent à M est un sous-fibré de $f^{-1}\,TM_0$. Donc $f^{-1}\,TM_0$ étant le complexifié de TM, les classes de Pontriaguine de M sont, au signe près, les images réciproques par f des classes de Chern de M_0. Si ω_0 désigne la connexion kählérienne de M_0 et Ω_0 sa courbure, la k-ième classe de Chern de M_0 est donnée par la $2k$-forme γ_k [6] :

$$\gamma_k = \frac{(-1)^k}{(2\pi i)^k k!} \sum_{(i_j)} \sum_{\tau \in s(k)} \varepsilon(\tau)\, \Omega_{0\,\tau(1)}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \Omega_{0\,\tau(k)}^{i_k},$$

où la somme est étendue à tous les k-uples de $(1, \ldots, 2n)$ ($2n$ est la dimension de M) et à toutes les permutations τ de $\{1, \ldots, k)\, \varepsilon(\tau)$ désignant la signature de τ.

Soit $y_0 \in f(M)$, U_0 un voisinage de y_0 tel que la composante connexe contenant y_0 de $U_0 \cap f(M)$ soit une sous-variété de M_0 : W. En restreignant au besoin U_0, on peut supposer que $TW \to W$ est trivialisable. Soit $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ une trivialisation orthonormale pour la structure hermitienne. Elle s'étend à un voisinage U de y_0 dans M_0. Soit α_i les 1-formes duales. Comme f est une immersion lagrangienne :

$$\bar{\alpha}_i|_W = \alpha_i|_W.$$

Donc si M_0 est à courbure sectionnelle holomorphe constante c la restriction à TW de $\Omega^i_{0\,j}$ s'écrit [6] :

$$\Omega^i_{0\,j}|_W = \frac{c}{2}\alpha_i \wedge \alpha_j|_W + \delta_{ij}\sum_k \alpha^k \wedge \alpha^k|_W = \frac{c}{2}\alpha_i \wedge \alpha_j|_W.$$

Si $\tau \in \mathfrak{S}(k)$, $\Omega^{i_1}_{0i_{\tau(1)}} \wedge \ldots \wedge \Omega^{i_k}_{0i_{\tau(k)}}|_W$ contient deux fois le terme α_{i_1} et est donc nulle.

THÉORÈME 1.2. — *Si $f: M \to M_0$ est une immersion lagrangienne dans une variété kählérienne à courbure sectionnelle holomorphe constante, les classes de Pontriaguine de* M *sont nulles.*

On peut encore exploiter le fait qu'un fibré symplectique possédant un sous-fibré lagrangien s'identifie à son complexifié pour donner d'autres obstructions topologiques. Si W [E] est la classe de Stiefel-Whitney totale de E, W [L] celle du sous-fibré lagrangien, le fibré normal de L s'identifiant à L, $W[E] = W[L]^2$.

THÉORÈME 1.3. — *Si* E *figré symplectique possède un sous-fibré lagrangien*, $W[E] = W[L]^2$.

Considérons une variété cotangente $T^* M_0$. Soit $p_0 : T^* M_0 \to M_0$ la projection. La variété symplectique $T^* M_0$ possède un sous-fibré lagrangien le fibré des vecteurs verticaux qui est l'image réciproque par p_0 du fibré tangent de M_0. Si on note W (M) la classe de Stiefel-Whitney totale de M $(W(M) = W[TM])$, $W(T^* M_0) = W[VT^* M_0]^2 = p_0^* W(M_0)^2$.

COROLLAIRE 1. — *Si une variété* M *est isomorphe à une variété cotangente sa classe de Stiefel-Whitney totale est un carré parfait, et donc ses classes de Stiefel-Whitney d'ordre impair sont nulles.*

Soit $f: M \to T^* M_0$ une immersion lagrangienne $f^{-1}\,TT^* M_0$ possède TM comme sous-fibré lagrangien. Donc $W(M)^2 = W[f^{-1}T^* M_0] = f^{-1}W(T^* M_0) = f^{-1} \circ p_0^{-1}(W(M_0)^2)$. On pose $f_0 = p_0 \circ f$. $W(M)^2 = f_0^{-1}(W(M_0)^2)$. On retrouve un résultat de Hayden :

COROLLAIRE 2 [5]. — *Si f est une immersion lagrangienne de* M *dans* $T^* M_0$ *et f_0 l'application composée avec p_0 :*

$$W(M)^2 = f_0^* W(M_0)^2.$$

Un fibré symplectique est muni canoniquement d'une structure unimodulaire définie par la $2n$-forme :

$$\eta = \frac{(-1)^{(n(n+1))/2}}{n!}\Lambda^n \sigma.$$

Il est donc canoniquement orienté et on peut parler de sa classe d'Euler.

THÉORÈME 1.4. — *Si* (E, σ) *fibré symplectique possède un sous-fibré lagrangien* L *sa classe d'Euler* $\chi(E)$ *est nulle.*

Démonstration. — E étant orienté, on peut résuire le groupe structural de E comme fibré réel à $SO(2n, \mathbb{R})$. E possédant un sous-fibré lagrangien, on peut alors réduire le groupe structural à $E(O(n))$, $O(n)$ étant plongé dans $SO(2n, \mathbb{R})$ par l'homomorphisme $\rho : A \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Si ω est une connexion sur $E(O(n))$ sa courbure, considérée comme prenant ses valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathcal{O}(2n, \mathbb{R})$, est telle que Ω^i_j est nul si (i, j) ou (j, i) appartiennent à $\{1, \ldots, n\} \times \{n+1, \ldots, 2n\}$. Or la classe d'Euler de E est la classe de la $2n$-forme sur $M(2n$ est le rang de E) [6] :

$$\gamma_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}\pi^n n!} \sum_{\tau \in s(2n)} \varepsilon(\tau)\, \Omega^{\tau(1)}_{\tau(2)} \wedge \ldots \wedge \Omega^{\tau(2n-1)}_{\tau(2n)}.$$

τ étant une permutation, il existe un i tel que $(\tau(i), \tau(i+1))$ ou $(\tau(i+1), \tau(i))$ appartienne à $\{1, \ldots, n\} \times \{n+1, \ldots, 2n\}$. Chaque terme dans la somme est donc nul, ce qui implique $\gamma_{2n} = 0$.

C.Q.F.D.

Si (M, σ) est une variété symplectique compacte l'intégrale de γ_{2n} sur M est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré de M, ce qui prouve :

COROLLAIRE 1. — *Si* (M, σ) *variété symplectique compacte possède un sous-fibré lagrangien de son fibré tangent, sa caractéristique d'Euler-Poincaré est nulle.*

La seule sphère que l'on peut munir d'une structure symplectique est $\mathbb{S}^2$. Le corollaire précédent n'est alors rien d'autre que le théorème de Poincaré-Hopf : $\mathbb{S}^2$ ne possède aucun champ de direction.

COROLLAIRE 2. — *Si une variété* M *est isomorphe au fibré cotangent d'une variété,* $\chi(TM) = 0$.

En effet toute variété cotangente $T^* M_0$ possède un sous-fibré lagrangien, le fibré des vecteurs tangents verticaux de $T^* M_0$.

Remarque. — Toute variété M peut être réalisée comme sous-variété lagrangienne de son fibré cotangent au moyen de la section nulle. Les théorèmes énoncés ci-dessus donnent des obstructions à la réalisation d'une variété donnée M à l'aide d'une immersion lagrangienne dans une variété symplectique donnée M_0. La détermination explicite des variétés M que l'on peut ainsi réaliser dans $\mathbb{R}^4$ identifié à $T^* \mathbb{R}^2$ est ouverte. T^2 se réalise trivialement. Récemment, Hayden et Zeeman [5] ont construit une immersion lagrangienne de la bouteille de Klein K^2 dans $\mathbb{R}^4$. Dans le paragraphe suivant on détermine explicitement les immersions lagrangiennes obtenues comme feuilles d'un feuilletage lagrangien. En mécanique les autres immersions lagrangiennes ont de ce point de vue un caractère exceptionnel. Signalons enfin que dans [13] sont donnés, sous des hypothèses additionnelles, des résultats concernant les immersions lagrangiennes dans les variétés kählériennes.

2. Feuilletages lagrangiens

Dans tout ce paragraphe (M, σ) désigne une variété symplectique de dimension $2n$, $\mathscr{F}$ un sous-fibré lagrangien de TM, de classe C^2 au moins, intégrable. Par abus de notation $\mathscr{F}$ désigne encore le feuilletage sous-jacent : $\mathscr{F}$ est un feuilletage en sous-variétés lagrangiennes immergées de classe C^3 au moins.

Les résultats de ce paragraphe sont des conséquences du théorème suivant, dû à Weinstein (*cf.* [11]) et dont on donne une démonstration originale :

THÉORÈME 2.1 [11]. — *Toute feuille de $\mathscr{F}$ est munie d'une connexion symétrique plate.*

Démonstration. — On note $\nu\mathscr{F} = TM/\mathscr{F}$ le fibré normal de $\mathscr{F}$ et $\nu^* \mathscr{F}$ son dual identifié au noyau de l'application canonique de T^*M sur $\mathscr{F}^*$. On note ν la projection de TM sur $\nu\mathscr{F}$. On a ainsi deux suites exactes de fibrés sur M, duales l'une de l'autre :

$$\begin{cases} 0 \to \mathscr{F} \to TM \xrightarrow{\nu} \nu\mathscr{F} \to 0, \\ 0 \to \nu\mathscr{F}^* \to T^*M \to \mathscr{F}^* \to 0. \end{cases}$$

Pour tout champ de vecteurs tangents X au feuilletage et tout champ de vecteurs Z sur M, $\nu[X, Z](x)$ ne dépend que de $X(x)$ et de νZ car $\mathscr{F}$ est intégrable. On définit une connexion $\tilde{\nabla}$ dans $i^{-1}\nu\mathscr{F} \to M_0$, où M_0 désigne l'ensemble M muni de la structure de variété de dimension n déduite de la topologie des feuilles et $M_0 \hookrightarrow M$ l'immersion injective canonique, en posant :

$$\tilde{\nabla}_X \zeta = \nu[X, Z] \qquad \text{où} \quad \nu Z = \zeta, \quad X \in \mathscr{F}.$$

$\tilde{\nabla}$ est la connexion de Bott du feuilletage [3].

Remarque. — P. Libermann a prouvé dans [8] que si l'on considère sur une variété de dimension $2n$ un feuilletage de codimension n et une structure paracomplexe subordonnée, il existe une connexion paracomplexe qui induit une connexion particulière sur le fibré normal. Cette connexion sur le fibré normal du feuilletage est la connexion de Bott.

$\mathscr{F}$ étant un feuilletage lagrangien, la 2-forme symplectique σ induit un isomorphisme de $\mathscr{F}$ sur $\nu^* \mathscr{F}$, donné par $X \to -\iota_X \sigma$. Ceci permet de munir $i^{-1} Z \to M_0$ d'une connexion notée ∇ :

$$\iota_{\nabla_X Y} \sigma = -\tilde{\nabla}_X \eta^* \qquad \text{où} \quad \eta^* = -\iota_Y \sigma.$$

L'identité de Jacobi des champs de vecteurs entraîne que la connexion de Bott est sans courbure. Or si $R(\tilde{R})$ désigne la courbure de $\nabla(\tilde{\nabla})$ R et $\tilde{R}$ sont liées par la relation :

$$\iota_{R(X_1, X_2)Y} \sigma = -\tilde{R}(X_1, X_2).\eta^*,$$

car $\tilde{\nabla}^2 \eta^* = \tilde{R} \wedge \eta^*$; ∇ est donc sans courbure.

Soit T sa torsion. Pour toute section locale ζ de $\nu\mathscr{F} \to M$ se relevant en un champ local Z sur M, $\sigma(T(X, Y), Z) = +\langle \tilde{\nabla}_Y \xi^* - \tilde{\nabla}_X \eta^*, \zeta \rangle - \sigma([X, Y], Z)$ où on a posé $-\iota_X \sigma = \xi^*$, $-\iota_Y \sigma = \eta^*$, $\langle , \rangle$ désignant la mise en dualité de $\nu\mathscr{F}$ et $\nu^* \mathscr{F}$.

Par définition de $\tilde{\nabla}$ dans $\nu^* \mathscr{F}$:

$$(\tilde{\nabla}_X \eta^*)(\zeta) = \mathscr{L}_X(\eta^*(\zeta)) - \eta^*(\tilde{\nabla}_X \zeta)$$

$\mathscr{L}_X$ désignant la dérivée de Lie).

Compte tenu de ce que $\eta^* = -\iota_Y \sigma$ et de ce que $\mathscr{F}$ est lagrangien cette relation s'écrit :

$$(\tilde{\nabla}_X \eta^*)(\zeta) = -\mathscr{L}_X(\sigma(Y, Z)) + \sigma(Y, [X, Z]),$$

ce qui conduit à la formule :

$$\sigma(T(X, Y), Z) = \mathscr{L}_X \sigma(Y, Z) + \mathscr{L}_Y \sigma(Z, X) - \sigma([X, Y], Z) - \sigma([Z, X], Y) - \sigma([X, Y], Z).$$

Soit compte tenu de la formule donnant la différentielle d'une 2-forme et de ce que $\mathscr{F}$ est lagrangien :

$$\sigma(T(X, Y), Z) = d\sigma(X, Y, Z).$$

Comme σ est fermée, Z quelconque, $T(X, Y) = 0$.

C.Q.F.D.

Si F est une feuille de $\mathscr{F}$, son holonomie infinitésimale $\psi_1(F)$ est le groupe d'holonomie de la connexion de Bott et donc de ∇. $\psi_1(F)$ s'identifie à un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$. Si $\psi_1(F)$ est relativement compact, il laisse invariant une forme quadratique Q. Identifiant Q à une forme quadratique sur $T_{x_0} F$ où x_0 est un point (quelconque) de F, le transport par parallélisme relativement à ∇ de Q le long des chemins issus de x_0 et aboutissant en un point x_1 donné, ne dépend pas du chemin considéré car Q est invariante par $\psi_1(F)$. F est donc munie naturellement d'une structure riemannienne g. Mais comme $\psi_1(F)$ laisse invariante Q, $\nabla g = 0$ [9]. Comme ∇ est sans torsion, ∇ est la connexion riemannienne de F. On a donc prouvé :

LEMME 1. — *Si* $\psi_1(F)$ *est relativement compact*, F *est munie naturellement d'une structure de variété riemannienne plate dont l'holonomie est* $\psi_1(F)$.

Si F est compacte, F est alors une variété riemannienne compacte plate. Ces variétés sont classifiées [12] : nécessairement $\psi_1(F)$ est fini et F possède un revêtement riemannien isomorphe au tore plat de la dimension correspondante sur lequel $\psi_1(F)$ agit par « déplacement » sans points fixes et F est isomorphe au quotient du tore par $\psi_1(F)$. On dira pour simplifier que F est un *quotient fini de tore*.

Si F n'est pas compacte, on fait l'hypothèse que (F, g) est riemannienne complète. On va prouver qu'alors (*cf.* infra) $\psi_1(F)$ est encore fini, F est isomorphe (du point de vue riemannien) au produit d'une variété F_0 compacte quotient d'un tore, à holonomie $\psi_1(F)$, par un espace euclidien, ce qui conduit au théorème :

THÉORÈME 2.2. — *Si* F *est une feuille d'un feuilletage lagrangien dont l'holonomie infinitésimale* $\psi_1(F)$ *est relativement compacte :*

1. F *est munie canoniquement d'une structure riemannienne* g.

2. *Si* (F, g) *est complète,* F *est isométrique à un produit* $\mathrm{F}_0 \times \mathbb{R}^{n-k}$ *où* F_0 *est le quotient du tore plat* T^k *par le « groupe de déplacements » sans points fixes* $\psi_1(\mathrm{F})$ *qui est fini. En particulier* $\chi(\mathrm{F}_0)=\chi(\mathrm{F})=0$ *sauf si* F *est isométrique à* $\mathbb{R}^n$.

Fin de la démonstration du théorème. — On reprend la démonstration du théorème 3.3.3 de [12]. (F, g) étant riemannienne plate, F est isomorphe à $\mathbb{R}^n/\Gamma$ où Γ est un sous-groupe du groupe des déplacements de $\mathbb{R}^n$: $\mathrm{E}(n)$, discret et sans éléments d'ordre fini (tous les isomorphismes s'entendent ici du point de vue riemannien, $\mathbb{R}^n$ étant munie de sa structure canonique). On note $\overline{\Gamma \circ \mathbb{R}^n}$ la fermeture (dans le groupe topologique des déplacements) de l'extension de Γ par $\mathbb{R}^n$ au sens du produit semi-direct définissant $\mathrm{E}(n)=0(n)\,\mathbb{R}^n$. Soit Γ_* la composante connexe de l'identité de $\Gamma \cap \overline{\Gamma \circ \mathbf{R}^n}$. Γ_* est un sous-groupe distingué de Γ d'indice fini. De plus Γ_* est le groupe des translations d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$, sous réserve du changement éventuel d'origine dans $\mathbb{R}^n$ ce qui ne modifie en rien les conditions de résolution du problème.

Soit $\mathrm{V}^\perp$ l'orthogonal de V. Γ_* laisse V et $\mathrm{V}^\perp$ invariants. D'autre part Wolf prouve, qu'en changeant éventuellement d'origine, on peut assurer que Γ est isomorphe à $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ où Γ_1 est un sous-groupe du groupe des déplacements de V et Γ_2 un sous-groupe du groupe des rotations de $\mathrm{V}^\perp$. Cet isomorphisme transforme Γ_* en un sous-groupe uniforme discret de V :

$$\Gamma/\Gamma_* = \Gamma_1/\Gamma_* \times \Gamma_2.$$

Comme Γ/Γ_* est fini, Γ_2 est fini et donc réduit à l'identité puisque Γ n'a pas d'éléments d'ordre fini.

Donc :

$$\Gamma = \Gamma_1 \times 1_{\mathrm{V}^\perp}$$

(où $1_{\mathrm{V}^\perp}$ est l'identité de $\mathrm{V}^\perp$), et Γ_1/Γ_* est fini.

Le groupe d'holonomie $\psi_1(\mathrm{F})$ s'identifiant à l'image de Γ dans $\mathrm{O}(n)$, $\psi_1(\mathrm{F})=\Gamma_1/\Gamma_*$ est donc fini et s'identifie à un sous-groupe des rotations de V. En particulier il laisse invariant V et $\mathrm{V}^\perp$.

Le revêtement riemannien $p : \mathrm{V} \times \mathrm{V}^\perp \to \mathrm{F}$ définit par passage au quotient par Γ, qui n'agit que dans V, une isométrie surjective, $(\Gamma = \Gamma_1 \times 1_{\mathrm{V}^\perp})$:

$$\mathrm{V}/\Gamma_1 \times \mathrm{V}^\perp \to \mathrm{F},$$

V/Γ_1 est le quotient du tore V/Γ_* par le groupe fini $\psi_1(\mathrm{F})$ qui s'identifie au demeurant au groupe d'holonomie de la variété riemannienne compacte plate V/Γ_1.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1. — *Si* $\mathscr{F}$ *est un feuilletage lagrangien sans holonomie infinitésimale, toute feuille est munie naturellement d'une structure riemannienne. Les feuilles complètes pour cette structure sont isomorphes à des cylindres (c'est-à-dire à des produits de tores par des espaces euclidiens).*

Arnold [2] a prouvé le résultat suivant :

Si $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont n fonctions réelles en involution sur une variété symplectique (M, σ) de dimension $2n$, dont les différentielles sont linéairement indépendantes en tout point de M, les sous-variétés lagrangiennes $W_a = f^{-1}(a)$, où f est l'application de M dans $\mathbb{R}^n$ de coordonnées (f_i), sont des cylindres si les champs hamiltoniens associés aux fonctions f_i sont complets. Les hypothèses faites assurent que le feuilletage défini par les sous-variétés W_a est sans holonomie — et donc *a fortiori* sans holonomie infinitésimale — puisque défini par une submersion. Le théorème d'Arnold résulte donc du théorème précédent sous réserve que l'on prouve que les feuilles W_a sont complètes.

LEMME. — *Soit* W *une variété parallélisable*, (X_i) *un parallélisme. Si pour tout couple* (X_i, X_j), $[X_i, X_j]=0$ *et si les champs* (X_i) *sont complets*, W *est complète pour sa structure riemannienne plate naturelle.*

Démonstration. — Soit Ω_x l'ouvert de $T_x W$ sur lequel est défini $\exp_x$, application exponentielle en x pour la structure riemannienne définie par $g(X_i, X_j)=\delta_{ij}$. La connexion canonique de W liée au parallélisme est la connexion riemannienne de g. $\exp_x$ est une isométrie locale de Ω_x munie d'une structure euclidienne dans W. Donc, si X et Y sont deux vecteurs de Ω_x, $t \to \exp_x(tY+sX)$ est, pour t et s assez petits, une géodésique de W, celle issue de $\exp_x sX$ avec comme vitesse initiale $Y_{\exp_x sX}$ où on note Y le champ parallèle défini par le vecteur Y. Le flot de Y, $\varphi_t^Y(y)$ est donné par $\exp_y tY$. Comme $[X_i, X_j]=0$, le flot φ_s^i de X^i commute au flot de tout champ parallèle, ce qui entraîne :

$$\exp_x(tY+sX)=\varphi_t^Y \circ \varphi_s^i(x)=\varphi_s^i \circ \varphi_t^Y(x).$$

Comme φ_s^i est complet, Ω_x est invariant par les translations $\mathbb{R} X_i$. Les X_i étant linéairement indépendants, $\Omega_x = T_x W$, W est donc complète d'après le théorème de Hopf-Rinow.

C.Q.F.D.

Le théorème d'Arnold se déduit alors du lemme précédent en observant que :

$$\tilde{\nabla}_{X_j} df_i = \mathscr{L}_{X_j} df_i = 0,$$

car les f_i sont en involutions. Donc ∇ est la connexion associée au parallélisme défini par les X_i.

C.Q.F.D.

Remarques. — 1. En basse dimension ($n=2, 3$) les variétés riemanniennes compactes plates sont totalement classifiées. Ainsi si $n=2$ les seules variétés sont T^2 et K^2.

Si $n=3$, Wolf donne une liste complète [12].

2. Sous les hypothèses considérées par Arnold, le feuilletage étant sans holonomie, il résulte du théorème de stabilité locale de Reeb que toute feuille compacte, qui est un tore, admet un voisinage tubulaire feuilleté en tores (*cf.* [2]).

3. Classe de Maslov-Arnold universelle d'un fibré symplectique

Soit (E, J) une structure complexe subordonnée à la structure symplectique (E, σ). Soit ω une connexion sur E(GL(n, $\mathbb{C}$)) fibré principal associé à (E, J) et $t \to (z_1(t), z_2(t))$ un chemin de $E^2(GL(n, \mathbb{C}))$. (On note ainsi systématiquement les carrés fibrés. De même p désigne la projection de tous les fibrés de base M, p_i ($i=1, 2$) les projections naturelles du carré fibré sur ses facteurs).

ω étant une connexion, on peut écrire [9] :

$$\omega\left(\frac{dz_1}{dt}\right) = adg^{-1}\,\omega\left(\frac{dz_2}{dt}\right) + g^{-1}\frac{dg}{dt},$$

où $z_1 = z_2 . g$.

Soit LS(n, $\mathbb{C}$) le sous-groupe de GL(n, $\mathbb{C}$) des matrices dont le carré du déterminant vaut $+1$. L'algèbre de Lie de LS(n, $\mathbb{C}$) est $sl(n, \mathbb{C})$ algèbre de Lie de SL(n, $\mathbb{C}$). On note Tr M la trace de la matrice complexe M.

Si $g \in LS(n, \mathbb{C})$,

$$\operatorname{Tr} g^{-1}\frac{dg}{dt} = 0.$$

Tr ω définit donc de façon naturelle une connexion dans le fibré $E(\mathbb{C}_*) = E(GL(n, \mathbb{C}))/LS(n, \mathbb{C})$ où $\mathbb{C}_* = GL(n, \mathbb{C})/LS(n, \mathbb{C})$ est le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls. On note encore Tr ω cette connexion dont la courbure est une 2-forme sur M dont la classe est la première classe de Chern de (E, J).

On définit sur $E^2(\mathbb{C}_*)$ une 1-forme Σ ainsi :

$$\Sigma = \frac{1}{i\pi}(p_1^* \operatorname{Tr}\omega - p_2^* \operatorname{Tr}\omega).$$

Comme $p_1 \circ p = p_2 \circ p$, et que la différence de deux connexions est une 1-forme tensorielle, Σ ne dépend pas de ω et est fermée.

THÉORÈME 3.1. — Σ *définit sur* $E^2(\mathbb{C}_*)$ (*et sur* $E^2(GL(n, \mathbb{C}))$ *par image réciproque*) *une* 1-*classe de cohomologie entière.*

Démonstration. — Il reste à prouver que Σ est à périodes entières. Si $t \to \Gamma(t) = (z_1(t), z_2(t))$ est une courbe C^1 de $E^2(GL(n, \mathbb{C}))$:

$$\Sigma\left(\frac{d\Gamma}{dt}\right) = \Sigma\left(\frac{dz_1}{dt}, \frac{dz_2}{dt}\right) = \frac{1}{i\pi}\operatorname{Tr} g^{-1}\frac{dg}{dt}, \quad \text{où} \quad z_1 = z_2 . g.$$

Or :

$$\frac{d}{dt}\det^2 g(t) = 2\det^2 g(t) \operatorname{Tr} g^{-1}\frac{dg}{dt}.$$

Donc Tr $g^{-1}\, dg/dt$ s'exprime à l'aide de la forme de Maurer-Cartan de $\mathbb{C}_*$: $z\,dz = \rho^{-1}\,d\rho + 2\pi i\,\theta^*\alpha$ où α désigne la 1-forme canonique de $\mathbb{S}^1$ de période 1, $\rho = |z|$ et θ l'application de $\mathbb{C}_*$ sur $\mathbb{S}^1$ $z \to \theta(z) = z/|z|$. Soit φ l'application de $E^2(GL(n, \mathbb{C}))$ dans $\mathbb{S}^1$ définie par :

$$\varphi(z_1, z_2) = \frac{\det^2 g}{|\det^2 g|} \qquad \text{si} \quad z_1 = z_2 . g,$$

$$\Sigma\left(\frac{d\Gamma}{dt}\right) = \frac{1}{i\pi}\,\frac{d}{dt}\operatorname{Log}|\det g(t)| + \varphi^*\alpha\left(\frac{d\Gamma}{dt}\right).$$

C.Q.F.D.

Donc $\Sigma \sim \varphi^*\alpha$.

Remarques. — 1. Si $E(U(n))$ est une $U(n)$ réduction de $GL(n, \mathbb{C})\,\Sigma|_{E(U(n))} = \varphi^*\alpha|_{E(U(n))}$.

2. Cette classe est typique de la structure complexe. Pour une structure réelle, on a toujours une $O(n)$ réduction et donc $\Sigma \sim 0$.

(E, σ) étant symplectique, le fibré de base $E^2(Sp(n))$, $\mathscr{E} = E^2(Sp(n))$ E est un fibré symplectique muni naturellement de deux sous-fibrés lagrangiens $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$:

$$\mathscr{L}_1(z_1, z_2) = (z_1, z_2, z_2^{-1}\,\mathbb{R}^{n*}),$$
$$\mathscr{L}_2(z_1, z_2) = (z_1, z_2, z_1^{-1}\,\mathbb{R}^{n*})$$

(on identifie $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*} = T^*\,\mathbb{R}^n$).

Au triple $(\mathscr{E}, \mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$ on associe [4] une classe de cohomologie entière la classe de Maslov-Arnold universelle de (E, σ). Cette classe, notée μ_0, est entièrement déterminée par sa restriction à $E^2(U(n))$ où $E(U(n))$ est une $U(n)$ réduction de $E(Sp(n))$.

THÉORÈME 3.2. — *La classe de Maslov-Arnold universelle de* (E, σ) *induit sur* $E^2(U(n))$ *la même classe de cohomologie que* Σ.

Démonstration. — Soit Γ un lacet de $E^2(U(n))$ se projetant sur un lacet γ de M. La classe de Maslov-Arnold étant invariante par image réciproque, pour calculer $\mu_0(\Gamma)$ il suffit de déterminer la classe de l'image réciproque de $(\mathscr{E}, \mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$ par Γ, c'est-à-dire celle de :

$$\begin{array}{c}(\gamma^{-1}E, (z_2^{-1}(t) . \mathbb{R}^{n*}), (z_1^{-1}(t) . \mathbb{R}^{n*})),\\ \downarrow \\ \mathbb{S}^1\end{array}$$

où $z_1^{-1}(t)\ \mathbb{R}^{n*}$ est la fibre en $t \in \mathbb{S}^1$ *de* $\Gamma^{-1}\mathscr{L}_2$ (et vice versa) et où on a posé $\Gamma(t) = (z_1(t), z_2(t))$.

Le fibré symplectique $\gamma^{-1}E$ est symplectiquement isomorphe au fibré symplectique trivial $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^n$ par le symplectoisomorphisme défini pour les fibres en t par : $\xi \to z_2(t) . \xi$; $\mu_0(\Gamma)$ est donc la classe de l'image de $(\gamma^{-1}E, z_2^{-1}(t)\,\mathbb{R}^{n*}, z_1^{-1}(t)\,\mathbb{R}^{n*})$ par cet isomorphisme. C'est donc celle de :

$$\begin{array}{c}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^n, \mathbb{R}^{n*}, S\,\mathbb{R}^{n*}),\\ \downarrow \\ \mathbb{S}^1\end{array}$$

où $S\,\mathbb{R}^{n*}$ est le sous-fibré lagrangien de fibre en t, $g(t) . \mathbb{R}^{n*}$, $g(t)$ étant l'élément de $U(n)$ défini par $z_1(t) = z_2(t) . g(t)$.

Mais cette dernière situation est l'image réciproque par $t \to g(t)$ de :

$$\begin{array}{c}(\mathrm{U}(n) \times \mathbb{C}^n, \mathbb{R}^{n*}, \mathrm{S}\,\mathbb{R}^{n*}),\\ \downarrow \\ \mathrm{U}(n)\end{array}$$

(où $\mathrm{S}\,\mathbb{R}^{n*}$ est le sous-fibré lagrangien de fibre en a, $a\,\mathbb{R}^{n*}$), situation qui définit la classe de Maslov-Arnold de $\mathrm{U}(n)$, $\mu_{\mathrm{U}(n)}$. Si on définit φ_1 de $\mathrm{E}^2(\mathrm{U}(n))$ dans $\mathrm{U}(n)$ en posant $\varphi_1(z_1, z_2)=g$ si $z_1=z_2 g$:

$$\mu_0=\varphi_1^* \mu_{\mathrm{U}(n)}.$$

Pour calculer $\mu_{\mathrm{U}(n)}$ on remarque que $\pi_1 \mathrm{U}(n)=\mathbb{Z}$. Or la trace de la 1-forme de Maurer-Cartan de $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{Tr}\, g^{-1}\, dg$ est une 1-forme fermée non triviale à valeurs imaginaires pures. Il existe donc un réel λ tel que :

$$\mu_{\mathrm{U}(n)}=+i\lambda\,[\mathrm{Tr}\, g^{-1}\, dg], \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

où [ ] désigne la classe d'une 1-forme fermée.

Comme $\mathrm{Tr}\, g^{-1}\, dg=i\pi\varphi_0^*\alpha$, où φ_0 est l'application de $\mathrm{U}(n)$ dans $\mathbb{S}^1$ définie par :

$$\varphi_0(g)=\frac{\det g^2}{|\det g^2|}, \qquad \mu_{\mathrm{U}(n)}=\lambda_1\,[\varphi_0^*\alpha], \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}.$$

Si on considère le lacet $\theta \to (e^{i\theta}, 1, \ldots, 1)$ de $\mathrm{U}(n)$, $\int_l \varphi_0^*\,\alpha=2$. D'autre part $\mu_{\mathrm{U}(n)}(l)=2$ (*cf.* 4 par exemple).

Donc $\mu_{\mathrm{U}(n)}=[\varphi_0^*\alpha]$.

Comme $\varphi_0 \circ \varphi_1=\varphi$, il en résulte que $\mu_0=[\varphi^*\alpha]$.

C.Q.F.D.

La grassmannienne lagrangien $\Lambda(\mathrm{E})$ de $\mathrm{E}, \sigma)$ est le quotient de $\mathrm{E}(\mathrm{Sp}(n))$ par le stabilisateur de $\mathbb{R}^{n*}$ dans l'action de $\mathrm{Sp}(n)$: $\mathrm{St}(n)$:

$$\Lambda(\mathrm{E})=\mathrm{E}(\mathrm{Sp}(n))/\mathrm{St}(n).$$

Si on s'est donné une $\mathrm{U}(n)$ réduction de $\mathrm{Sp}(n)$:

$$\Lambda(\mathrm{E})=\mathrm{E}(\mathrm{U}(n))/\mathrm{O}(n).$$

Comme $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{LS}(n, \mathbb{C})$, $\mu_0=[\varphi^*\alpha]=[\Sigma]$ définit par passage au quotient une 1-classe de cohomologie entière $\mu_\wedge$ sur $\Lambda^2(\mathrm{E})$.

Si L_1 et L_2 sont deux sous-fibrés lagrangiens de E, la classe de Maslov-Arnold de $(\mathrm{E}, \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2)$ notée $\mu_{\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2}$ est l'image réciproque de $\mu_\wedge$ par l'application :

$$\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2 : \mathrm{M} \to \Lambda^2\,\mathrm{E}, \qquad x \to (L_2(x), \mathrm{L}_1(x)).$$

Pour expliciter $\mu_{L_1L_2}=(L_1 L_2)^* \mu_{\wedge}$ on se donne localement un relevé de $L_i (i=1, 2)$ dans $U(n)$, autrement dit, h étant la structure hermitienne considérée, un repère orthonormé $(e^i_j)_{1\leq j\leq n}$ de la structure riemannienne induite sur L_i.

Si $X\in T_x M$, $\Sigma(L_2^T X, L_1^T X)=1/i\pi(\mathrm{Tr}\,\omega(L_2^T X)-\mathrm{Tr}\,\omega(L_1^T X))$ où ω est une connexion hermitienne.

Or $\omega(L_i^T X)=(U^k_{ij})\in u(n)$ algèbre de Lie de $U(n)$ et $(U^k_{ij})=h(D_X e^k_i, e^k_j)$ où D est la loi de dérivation covariante associée.

Donc $\mu_{L_1L_2}$ est la classe de la 1-forme sur M :

$$\tilde{\mu}_{L_1L_2}=\frac{1}{i\pi}\sum_{j=1}^{n}\{h(D_X e^2_j, e^2_j)-h(D_X e^1_j, e^1_j)\},$$

qui ne dépend que de L_1 et L_2. Si g est la structure riemannienne sur E définie par $g(X, Y)=\mathbb{R}\,h(X, Y)$, (partie réelle de $h(X, Y)$), J la structure complexe de E :

$$\tilde{\mu}_{L_1L_2}(X)=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\{g(D_X e^2_j, J e^2_j)-g(D_X e^1_j, J e^1_j)\}.$$

THÉORÈME 3.3. — *Soit* (E, σ) *un fibré symplectique,* L_1 *et* L_2 *deux sous-fibrés lagrangiens de* E; *la classe de Maslov-Arnold de* (E, L_1, L_2) *est la classe de la* 1*-forme sur* M :

$$\tilde{\mu}_{L_1L_2}=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\{g(D e^2_j, J e^2_j)-g(D e^1_j, J e^1_j)\},$$

où g *et* J *sont la structure riemannienne et la structure complexe définie par une structure hermitienne* h *subordonnée à* σ *de loi de dérivation covariante* D.

ω étant une connexion hermitienne et $O(n)$ étant contenu dans $LS(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{Tr}\,\omega$ définit par passage au quotient par $O(n)$ une 1-forme sur $\Lambda(E)$ notée $\mathrm{Tr}\,\omega_{\wedge}$. Si L est un sous-fibré lagrangien de E :

$$dL^*\left(\frac{1}{i\pi}\mathrm{Tr}\;\omega_{\wedge}\right)=\frac{1}{i\pi}\mathrm{Tr}\;\Omega,$$

où Ω est la courbure de ω. On retrouve ainsi que la première classe de Chern est nulle. Si $\mathrm{Tr}\,\Omega=0$, $L^*((1/i\pi)\mathrm{Tr}\,\omega_{\wedge})$ définit sur M une 1-classe de cohomologie réelle.

En particulier si M est une variété kählérienne et $E=TM$, $\Omega=0$ si et seulement si la courbure de Ricci de M, Ric M, est nulle.

Soit $f: W\to M$ une immersion lagrangienne dans M kählérienne. TW est un sous-fibré lagrangien de $f^{-1}TM$. Soit ω_W la 1-forme sur W définie par :

$$\omega_W=(TW)^*\frac{1}{i\pi}\mathrm{Tr}\,\omega_{\wedge_f},$$

$$\begin{tikzcd} f^{-1}TM \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & TM \arrow[d] \\ W \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

où ω, est la 1-forme sur la grassmannienne lagrangienne de f^{-1} TM associée à la connexion image réciproque de la connexion kählérienne de M. $\omega_\wedge$ désignant la 1-forme sur la grassmannienne lagrangienne de TM, ω_W s'écrit encore :

$$\omega_W = (TW)^* \tilde{f}^* \frac{1}{i\pi} \operatorname{Tr} \omega_\wedge .$$

Donc $d\omega_W = f^*((1/i\pi)\operatorname{Tr}\Omega)$ où Ω est la courbure de la connexion kählérienne de M. ω_W est donc fermé soit si la courbure de Ricci de M est nulle, soit si M est à courbure sectionnelle holomorphe constante car alors Ω est colinéaire à la forme symplectique [6]. Dans ces deux cas ω_W définit une classe de cohomologie réelle.

Des calculs effectués au cours de la démonstration du théorème 3.3 il résulte que :

$$\omega_W = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} g(Df^T e_j, J f^T e_j),$$

où D est la loi de dérivation de la connexion kählérienne de M, g la structure riemannienne et J la structure complexe subordonnée à la structure kählérienne, (e_j) une base orthonormée de (TW, $f^* g$).

Par l'utilisation des propriétés de la connexion kählérienne, on prouve que :

$$\omega_W(X) = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} g(f^T X, JD_{e_j} f^T e_j).$$

On appelle courbure moyenne de l'immersion, la section H de f^{-1} TM $\to$ W définie par :

$$\tilde{f} \circ H = \sum_{j=1}^{n} D_{e_j} f^T \circ e_{j2}$$

$$\omega_W(X) = -\frac{1}{\pi} g(f^T X, J\tilde{f} H) = \frac{1}{\pi} f^*(\iota_{\tilde{f}H}\sigma)(X),$$

ce que, par abus de notation, on écrit $\omega_W = (1/\pi) f^* \iota_H \sigma$.

THÉORÈME 3.4. — *Soit f : W $\to$ M une immersion lagrangienne dans une variété kählérienne de 2 forme symplectique σ et H la courbe moyenne de f.*

(i) *Si* M *est à courbure de Ricci nulle ou si* M *est à courbure sectionnelle holomorphe constante*, $(1/\pi) f^* \iota_H \sigma$ *définit une* 1-*classe de cohomologie réelle de* W.

(ii) *Si* M *est à courbure de Ricci nulle et simplement connexe*, $(1/\pi) f^* \iota_H \sigma$ *est à périodes entières.*

De plus si M *possède un sous-fibré lagrangien* L, *la classe de* $-(1/\pi) f^* \iota_H \sigma$ *est la classe de Maslov-Arnold* μ_f *de l'immersion lagrangienne relativement à* L.

Démonstration. — Il reste à prouver (ii).

Si on suppose l'existence d'un sous-fibré lagrangien, ce qui exige que la première classe de Chern de M soit nulle ce qui est réalisé car Ric $M=0$, $\tilde{\mu}_f$, 1-forme définissant la classe de Maslov-Arnold, est donnée par :

$$\tilde{\mu}_f = \frac{1}{i\pi} L^* \operatorname{Tr} \omega_\wedge - \frac{1}{\pi} \iota_H \sigma,$$

car :

$$\tilde{\mu}_f = (TW, f^{-1} L)^* \Sigma_W = (TW, f^{-1} L)^* f^* \Sigma,$$

où Σ_W (resp. Σ) est la 1-forme à période entière associée à f^{-1} TM (resp. TM) :

$$d L^* \operatorname{Tr} \omega_\wedge = \operatorname{Tr} \Omega = 0, \qquad \text{car} \quad \operatorname{Ric} M = 0.$$

Comme $\pi_1 M = 0$, $L^* \operatorname{Tr} \omega_\wedge$ est un cobord et donc :

$$\tilde{\mu}_f \sim -\frac{1}{\pi} f^* \iota_H \sigma,$$

ce qui achève la démonstration dans ce cas.

Dans le cas général soit γ un C^1-lacet de W et Γ le lacet de $\Lambda(TM)$ qui s'en déduit :

$$\Gamma = \tilde{f}_0 \, TW_0 \, \gamma$$

où TW est considéré comme une section de $\Lambda(\bar{f}^1 TM)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_\gamma f^* \iota_H \sigma = \frac{1}{i\pi} \int_\Gamma \operatorname{Tr} \omega.$$

Soit $x_0 = \gamma(0)$ et i l'inclusion de $T_{f(x_0)} M$ dans TM et les inclusions qui s'en déduisent pour tous les fibrés considérés :

$$\pi_1 \Lambda(T_{f(x_0)} M) \to \pi_1 \Lambda(TM) \to \pi_1 M = 0.$$

Donc tout lacet Γ de $\Lambda(TM)$ se déforme en un lacet Γ_1 de $\Lambda(T_{f(x_0)} M)$. Comme $d \operatorname{Tr} \omega = \operatorname{Tr} \Omega = 0$:

$$\frac{1}{\pi} \int_\gamma \iota_H \sigma = \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma_1} i^* \operatorname{Tr} \omega.$$

$\Lambda(\mathrm{TM})$ étant isomorphe à $\mathrm{TM}(n))/\mathrm{O}(n)$, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{U}(n) & \xrightarrow{i_0} & \mathrm{E}(\mathrm{U}(n)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n) = \Lambda(n) & \xrightarrow{i_0} & \Lambda(\mathrm{TM}) \end{array}$$

ω connexion kählérienne a pour image réciproque par i_0 la 1-forme de Maurer-Cartan de $\mathrm{U}(n)$.

Donc :

$$\frac{1}{\pi}\int_{\gamma} \iota_{\mathrm{H}}\,\sigma = \frac{1}{i\pi}\int_{\Gamma_0} \mathrm{Tr}\, g^{-1}\, dg \qquad \text{où} \quad i_0 \circ \Gamma_0 = \Gamma_1,$$

or $(1/i\pi)\,\mathrm{Tr}\, g^{-1}\, dg$ définit la classe de Maslov de $\mathrm{U}(n)$ et donc de $\Lambda(n)$ et donc de $\Lambda(n)$. Il en résulte que $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\gamma} \iota_{\mathrm{H}}\,\sigma \in \mathbb{Z}$.

Ce théorème étend un résultat de Morvan [10] relatif aux immersions lagrangiennes dans $\mathbb{R}^{2n}$.

Un fibré symplectique est muni d'une géométrie ∞-symplectique au sens de Leray [7] si on peut élargir son groupe structural à son revêtement universel. On a de même la notion de géométrie ∞-hermitienne ou ∞-kählérienne.

En particulier si un fibré symplectique possède un sous-fibré lagrangien orienté, il est naturellement muni d'une géométrie ∞-symplectique [4].

On a de même, les notions de géométries $2q$-symplectiques.

Une immersion lagrangienne f d'une variété W dans une variété ∞-symplectique M est $2q$-orientée si son fibré tangent se relève dans la grassmannienne $2q$-symplectique de $f^{-1}\,\mathrm{TM}$.

Du théorème 3.4 et des résultats de [4] on réduit le résultat suivant :

COROLLAIRE 2. — *Si* M *est une variété kählérienne simplement connexe à courbure de Ricci nulle munie de la géométrie ∞-symplectique associée à un sous-fibré lagrangien orienté, une immersion lagrangienne f :* $\mathrm{W} \to \mathrm{M}$ *est $2q$-orientable si et seulement si* $\dfrac{1}{\pi}[\iota_{\mathrm{H}}\,\sigma] \in 2q\,\mathbb{Z}$.

Ceci permet en particulier de caractériser les sous-variétés lagrangiennes $2q$-orientées de $\mathbb{R}^{2n}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. I. ARNOLD, *Une classe caractéristique intervenant dans les conditions de quantification*(en français dans Maslov). *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*, Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1972, p. 341-361.

[2] V. I. ARNOLD et A. AVEZ, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[3] R. BOTT, *On a Topological Obstruction to Integrability* (*Proc. Symp. in Pure Math. A.M.S.*, vol. 16, 1970, p. 127-131).

[4] P. DAZORD, (*a*) *Une interprétation géométrique de la classe de Maslov* (*J. Math. Pures et Appl.*, vol. 56, 1977, p. 231-250; (*b*) *Invariants homotopiques attachés aux fibrés symplectiques* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, vol. 29, n° 2, 1979, p. 25-78; (*c*) *Variations sur la classe de Maslov-Arnold* [*Journées P. de Fermat*, Toulouse, 1981 (à paraître)].

[5] J. HAYDEN et E. C., ZEEMAN, *A Lagrangian Klein Bottle* (*Math. Proc. Cam. Phil. Soc.*, 1980, p. 89-193).

[6] KOBAYASHI et K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry* (Interscience, 1969).

[7] J. LERAY, *Analyse lagrangienne et Mécanique quantique*, Collège de France, 1977.

[8] P. LIBERMANN, *Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales* (*Thèse*, Strasbourg, 1953).

[9] A. LICHNEROWICZ, *Théorie Globale des Connexions et de groupes d'holonomie*, Cremonese, 1955.

[10] J. M. MORVAN, *Classe de Maslov d'une immersion lagrangienne* [*C. R. Acad. Sc.*, Paris (à paraître)].

[11] A. WEINSTEIN, *Lectures on Symplectic Manifolds*, *Conference board of mathematical science* (*Regional Conference Series in Mathematics n°* 29, A.M.S., 1977).

[12] J. A. WOLF, *Spaces of Constant Curvature*, MacGraw Hill, 1967.

[13] K. YANO et M. KON, *Antiinvariant Submanifolds* (*Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, vol. 21, Marcel Dekker, 1976).

(Manuscrit reçu le 19 mai 1981, accepté le 24 septembre 1981.)

P. DAZORD,
Université Claude-Bernard,
Département de Mathématiques,
43, boulevard du 11-Novembre-1918,
69622 Villeurbanne Cedex.