ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MICHEL TALAGRAND

Les mesures vectorielles à valeurs dans L^0 sont bornées

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 14, nº 4 (1981), p. 445-452
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1981_4_14_4_445_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4[e] série, t. 14, 1981, p. 445 à 452.

LES MESURES VECTORIELLES A VALEURS DANS L^0 SONT BORNÉES

PAR MICHEL TALAGRAND

Soit (Ω, Σ, P) un espace probabilisé. On désigne par $L^0(P)$ l'ensemble des classes de fonctions mesurables sur Ω, muni de la distance ξ donnée par $\xi(f, g)=d(f-g)$, où :

$$d(f)=\inf\{a>0;\ P\{|f|\geqq a\}\leqq a\}$$

(où l'on note pour simplifier $P\{|f|\geqq a\}$ au lieu de $P(\{\omega\in\Omega;\ |f(\omega)|>a\})$. C'est un espace vectoriel topologique métrisable complet, qui est très différent d'un espace localement convexe, puisque $L^0(P)$ est l'enveloppe convexe de tout voisinage de zéro.

Soit $(X, \mathscr{X})$ un espace mesurable, et E un espace vectoriel topologique. On appelle mesure vectorielle à valeurs dans E une application $m : \mathscr{X} \to E$ qui est σ-additive, c'est-à-dire telle que $m(\bigcup_n A_n)=\sum_n m(A_n)$ pour toute suite disjointe (A_n) de $\mathscr{X}$. On dit que la mesure m est bornée si l'ensemble des $m(A)$, $A\in\mathscr{X}$ est borné dans E. Il existe des classes d'espaces vectoriels topologiques, généralisant la classe des espaces localement convexes dans lesquels toutes les mesures vectorielles sont bornées [5]. D'autre part, P. Turpin a donné un bel exemple d'une mesure vectorielle à valeurs dans un espace vectoriel topologique métrisable séparable qui n'est pas bornée [4]. Puisque $L^0(P)$ est un espace qui joue un rôle particulièrement important en théorie de la mesure, c'est un problème naturel de décider si toutes les mesures vectorielles à valeurs dans cet espace sont bornées. On va démontrer ici :

THÉORÈME A ([1]). — *Toute mesure vectorielle à valeurs dans* $L^0(P)$ *est bornée.*

Comme conséquence on aura :

THÉORÈME B. — *Soit m une mesure vectorielle à valeurs dans* $L^0(P)$. *Alors il existe une fonction* $g\in L^0(P)$, $g\geqq 0$, *et une mesure vectorielle* μ *à valeurs dans* $L^2(P)$ *telle que pour tout* $A\in\mathscr{X}$ *on ait* $m(A)=g\,\mu(A)$. *En particulier, m admet une mesure de contrôle, c'est-à-dire qu'il existe une probabilité* λ *sur* $\mathscr{X}$ *telle que :*

$$\forall\alpha>0,\quad \exists\varepsilon>0;\qquad \lambda(A)\leqq\varepsilon\ \Rightarrow\ d(m(A))\leqq\alpha.$$

([1]) Ce résultat a été obtenu indépendamment par N. J. Kalton, N. T. Peck et J. W. Roberts.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE. — 0012-9593/1981/445/$ 5.00

Preuve. — Le théorème A affirme que l'ensemble $\{ m(\mathrm{A});\ \mathrm{A} \in \mathscr{X} \}$ est borné. Un résultat de Maurey et Pisier [2] affirme que son enveloppe convexe est alors bornée. Ainsi, si E désigne l'espace des fonctions mesurables étagées sur $\mathscr{X}$, le prolongement canonique T de m à E est continu lorsque E est muni de la norme uniforme. Ainsi T se prolonge au complété $\tilde{\mathrm{E}}$ de E pour la norme uniforme. Mais puisque $\tilde{\mathrm{E}}$ est isomorphe à un espace $\mathscr{C}(\mathrm{K})$, un résultat de Maurey [3] montre que T se factorise par $\mathrm{L}^2(\mathrm{P})$ au moyen d'un changement de densité, ce qui est le résultat annoncé.

Nous nous tournons maintenant vers la preuve du théorème A. Le plan d'attaque est le suivant : si l'on suppose que m est une mesure vectorielle non bornée dans $\mathrm{L}^0(\mathrm{P})$ on va extraire une suite disjointe (X_n) de $\mathscr{X}$ telle que $d(m(\mathrm{X}_n)) > a > 0$, ce qui contredit le fait que la série $\sum m(\mathrm{X}_n)$ converge. La construction des X_n se fera par induction. Pour pouvoir effectuer une telle construction, il faut en un sens assurer que la restriction de m à $\mathrm{X} \setminus \bigcup_{i \leq n} \mathrm{X}_i$ reste non bornée de façon uniforme en n. Si $\mathrm{Y} \in \mathscr{X}$, la façon naturelle de mesurer à quel point la mesure m est non bornée sur Y est par le nombre :

$$a(\mathrm{Y}) = \sup \{ a > 0;\ \forall\, t > 0,\ \exists\, \mathrm{A} \subset \mathrm{Y},\ \mathrm{A} \in \mathscr{X},\ d(tm(\mathrm{A})) > a \}.$$

En effet, l'ensemble $\tilde{\mathrm{Y}} = \{ m(\mathrm{A});\ \mathrm{A} \subset \mathrm{Y},\ \mathrm{A} \in \mathscr{X} \}$ n'est pas borné, donc pour $t \to 0$, l'ensemble $t\tilde{\mathrm{Y}}$ ne tend pas vers zéro. Et $a(\mathrm{Y})$ est l'inf sur t du sup de la distance de zéro à un point de $t\tilde{\mathrm{Y}}$.

Malheureusement cette expression n'est pas maniable. On va donc commencer par lui trouver un équivalent plus agréable.

LEMME 1. — *Soit $\mathscr{P}$ une famille finie d'ensembles disjoints de* X, *et* $t > 0$. *Il existe alors une sous-famille $\mathscr{P}'$ de $\mathscr{P}$ dont la réunion* B *vérifie :*

$$d(8\sqrt{t}\, m(\mathrm{B})) > \frac{1}{8} d\Big(t \sum_{\mathrm{A} \in \mathscr{P}} m^2(\mathrm{A})\Big).$$

Ici bien sur $m^2(\mathrm{A})$ est le carré de la fonction $m(\mathrm{A}) \in \mathrm{L}^0(\mathrm{P})$.

Preuve. — Soit $a = d\big(t \sum_{\mathrm{A} \in \mathscr{P}} m^2(\mathrm{A})\big)$ et soit :

$$\Omega' = \Big\{ \omega;\ t \sum_{\mathrm{A} \in \mathscr{P}} m^2(\mathrm{A})(\omega) \geqq a \Big\}.$$

Alors on a $\mathrm{P}(\Omega') \geqq a$ par définition de d. Soit Q la mesure de pile-ou-face sur $\{-1, 1\}^{\mathscr{P}}$. Chaque $\varepsilon \in \{-1, 1\}^{\mathscr{P}}$ est une famille $(\varepsilon_{\mathrm{A}})_{\mathrm{A} \in \mathscr{P}}$ avec $\varepsilon_{\mathrm{A}} \in \{-1, 1\}$.

Une inégalité classique de Paley et Zygmund [1] nous donne :

$$\forall\, \omega \in \Omega', \quad \mathrm{Q}\Big\{ \varepsilon \in \{-1, 1\}^{\mathscr{P}};\ \Big| \sum_{\mathrm{A} \in \mathscr{P}} \varepsilon_{\mathrm{A}}\, m(\mathrm{A})(\omega) \Big| \geqq \frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{t}} \Big\} \geqq \frac{1}{4}.$$

Le théorème de Fubini montre qu'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}^{\mathscr{P}}$ avec :

$$\mathrm{P}\Big\{ \omega \in \Omega;\ \Big| \sum_{\mathrm{A} \in \mathscr{P}} \varepsilon_{\mathrm{A}}\, m(\mathrm{A})(\omega) \Big| \geqq \frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{t}} \Big\} \geqq \frac{1}{4} a.$$

Soit :

$$B'=\bigcup\{A;\ \varepsilon_A=1\},\qquad B''=\bigcup\{A;\ \varepsilon_A=-1\}.$$

On a :

$$\sum_{A\in\mathscr{P}}\varepsilon_A\, m(A)=m(B')-m(B'').$$

Il existe donc un ensemble B, égal soit à B′ soit à B″ avec :

$$P\left\{\omega\in\Omega;\ |m(B)(\omega)|\geqq\frac{1}{8}\sqrt{\frac{a}{t}}\right\}\geqq\frac{1}{8}a,$$

ce qui est le résultat cherché puisque $\sqrt{a}\geqq a$.

Pour un ensemble $Y\in\mathscr{X}$, on posera :

$$b(Y)=\sup\{a;\ \forall\, t>0,\ \exists\,\mathscr{P}\text{ partition finie de } Y;\quad d(t\sum_{A\in\mathscr{P}}m^2(A))\geqq a\}.$$

LEMME 2. — *Pour* $Y\in\mathscr{X}$, *on a* $b(Y)/8\leqq a(Y)\leqq b(Y)$.

Preuve. — La première inégalité résulte du lemme précédent. La seconde est très simple : si $a<a(Y)$, pour $t>0$ il existe $A\in\mathscr{X}$, $A\subset Y$ avec :

$$P\{\sqrt{a}\,t\,|m(A)|>a\}\geqq a\qquad\text{d'où}\quad P\{tm^2(A)>a\}\geqq a.$$

Le nombre $b(Y)$ est donc étroitement relié à $a(Y)$, et il mesure ainsi à quel point la restriction de m à Y n'est pas bornée.

La construction de X_n, $X_1, \ldots, X_{n-1}$ étant construits se fera par un choix aléatoire. On pose $Y=X\setminus\bigcup_{i\leqq n-1}X_i$. On va construire une partition finie $\mathscr{P}$ de Y ayant des propriétés convenables, puis on choisira X_n aléatoirement comme réunion de certains des éléments de $\mathscr{P}$, en montrant que pour beaucoup des choix aléatoires, l'ensemble obtenu possède des propriétés intéressantes. Puisque l'on veut que $Y\setminus X_n$ soit « gros », au sens que $b(Y\setminus X_n)$ soit proche de $b(Y)$, il convient d'affecter à chaque élément de $\mathscr{P}$ une probabilité d'être inclus dans X_n suffisamment petite.

Plus précisément, pour $0<r<1$, soit Q_r la probabilité sur $K=\{0,1\}^{\mathscr{P}}$, produit sur chaque facteur de la mesure qui donne masse r à 1 et masse $1-r$ à zéro. Un $\varepsilon\in K$ est une famille $(\varepsilon_A)_{A\in\mathscr{P}}$ où $\varepsilon_A\in\{0,1\}$. On lui associe l'ensemble aléatoire $A_\varepsilon=\bigcup\{A\in\mathscr{P},\ \varepsilon_A=1\}$.

LEMME 3. — $Q_r\{\varepsilon\in K;\ b(Y\setminus A_\varepsilon)\geqq(1-10r)\,b(Y)\}\geqq 8/9$.

Naturellement les constantes 10 et 8/9 pourraient être remplacées par bien d'autres choix, mais celui-ci nous suffira.

Preuve. — Soit $s=\operatorname{card}\mathscr{P}$. Pour $a<b(Y)$, $t>0$, il existe une partition $\mathscr{B}$ de Y telle que :

$$d\left(\frac{t}{10\,s}\sum_{B\in\mathscr{B}}m^2(B)\right)>a.$$

Pour $B \in \mathscr{B}$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$m^2(B) \leqq s \sum_{A \in \mathscr{P}} m^2(A \cap B).$$

Il en résulte que $d(t/10 \sum_{A \in \mathscr{P},\, B \in \mathscr{B}} m^2(A \cap B)) > a$.

Posons :

$$f = t \sum_{A \in \mathscr{P},\, B \in \mathscr{B}} m^2(A \cap B).$$

On a donc :

$$P(\Omega') > a \qquad \text{où} \quad \Omega' = \{ f \geqq 10\, a \}.$$

Pour $\varepsilon \in K$, $\omega \in \Omega$, posons :

$$f_\varepsilon = t \sum_{A \in \mathscr{P},\, B \in \mathscr{B}} (1 - \varepsilon_A)\, m^2(A \cap B),$$

$$D_\omega = \{ \varepsilon \in K ; f_\varepsilon(\omega) \geqq a \}.$$

On a pour $\omega \in \Omega'$:

$$(1-r) f(\omega) = \int f_\varepsilon(\omega)\, dQ_r(\varepsilon) = \int_{D_\omega} f_\varepsilon\, dQ_r + \int_{Q_r \setminus D_\omega} f_\varepsilon\, dQ_r \quad \leqq f(\omega)\, Q_r(D_\omega) + a(1 - Q_r(D_\omega)).$$

D'où $(f(\omega) - a)\, Q_r(D_\omega) \geqq (1-r) f(\omega) - a$, d'où :

$$(1) \qquad Q_r(D_\omega) \geqq 1 - \frac{r f(\omega)}{f(\omega) - a} \geqq 1 - \frac{10\, r}{9},$$

puisque $f(\omega) \geqq 10\, a$.

L'idée du calcul est maintenant très simple : si :

$$C = \{ (\omega, \varepsilon) \in \Omega' \times K ; f_\varepsilon(\omega) \geqq a \},$$

d'après (1) on a $P \otimes Q_r(C) \geqq (1 - (10\, r/9))\, P(\Omega')$. Le théorème de Fubini va alors montrer que pour beaucoup de ε, l'ensemble $\{ f_\varepsilon \geqq a \}$ est grand. Plus précisément, si :

$$H_t = \{ \varepsilon \in K ;\ P(\Omega' \cap \{ f_\varepsilon \geqq a \}) \geqq (1 - 10\, r)\, P(\Omega') \},$$

on a :

$$P \otimes Q_r(C) = \int_\varepsilon P(\Omega' \cap \{ f_\varepsilon \geqq a \})\, dQ_r(\varepsilon) = \int_{\varepsilon \in H_t} + \int_{\varepsilon \notin H_t}$$
$$\leqq P(\Omega')(Q_r(H_t) + (1 - 10\, r)(1 - Q_r(H_t))).$$

D'où il vient $Q_r(H_t) \geqq 8/9$.

Posons :

$$\mathscr{P}_\varepsilon = \{ A \in \mathscr{P};\ \varepsilon_A = 0 \} = \{ A \in \mathscr{P};\ A \subset Y \setminus A_\varepsilon \}.$$

On a $f_\varepsilon = t \sum_{A \in \mathscr{P}_\varepsilon,\, B \in \mathscr{B}} m^2 (A \cap B)$. Pour $\varepsilon \in H_t$, on a :

$$P(\{ f_\varepsilon \geqq a \}) \geqq (1 - 10\, r)\, a.$$

La définition de $b(.)$ montre alors que si $\varepsilon \in \bigcap_p \bigcup_{n \geqq p} H_{n^{-1}}$, on a :

$$b(Y \setminus A_\varepsilon) \geqq (1 - 10\, r)\, a.$$

Mais l'ensemble de ces ε a pour Q_r une mesure $\geqq 8/9$, ce qui termine la preuve.

Si la partition $\mathscr{P}$ n'a pas été choisie convenablement, il n'y a aucune raison pour que $d(m(A_\varepsilon))$ soit assez grand pour certains choix de ε.

Il va donc falloir effectuer un choix précis de $\mathscr{P}$. C'est ce que permet le lemme suivant, qui est le point clef de la démonstration.

Lemme 4. — *Soit* $Y \in \mathscr{X}$. *Pour tout entier* q, *il existe une partition finie* $\mathscr{P}$ *de* Y *telle que si on pose :*

$$\Omega' = \{ \omega \in \Omega;\ \operatorname{card} \{ A \in \mathscr{P};\ | m(A) | (\omega) \geqq 1 \} \geqq q \},$$

on ait $P(\Omega') \geqq a(Y)/5$.

La signification de ce résultat est la suivante :

on pourrait penser que m se comporte comme la mesure $[0, 1] \to L^0([0, 1])$ qui envoie A sur $K \chi_A$. Le lemme signifie au contraire que les ensembles $\{ | m(A) | \geqq 1 \}$ « s'étalent ». Ce phénomène est très lié à la structure de L^0.

Preuve. — On pose $a = a(Y)$.

Première étape. — Puisque $a \leqq 1$, il existe un entier p tel que $4\, q^2 \leqq pa \leqq 5\, q^2$. Par induction sur $i \leqq p$, on peut construire des sous-ensembles $A_1, \ldots, A_p$ de Y, et une suite $0 < t_p < \ldots < t_i < \ldots < a/2^p$ tels que, si $\mathscr{P}_i$ est la partition engendrée par $A_1, \ldots, A_i$, on ait :

$$\forall A \in \mathscr{P}_i, \quad d(t_i\, m(A)) \leqq 2^{-p-1}\, a \tag{2}$$

et

$$d(2^{-p-1}\, t_i\, m(A_{i+1})) > a, \tag{3}$$

pour $i = 0, 1, \ldots, p-1$, avec $\mathscr{P}_0 = \{ Y \}$.

Deuxième étape. — Pour $1 \leqq i \leqq p$, soit :

$$T_i = \{ \omega \in \Omega;\ \exists A_1, A_2 \in \mathscr{P}_i;\ A_1 \cup A_2 \in \mathscr{P}_{i-1},\ | m(A_1) | \geqq 2^p,\ | m(A_2) | \geqq 2^p \}.$$

On va montrer que $P(T_i) \geqq a/2$. On a, d'après (3) et (2) :

$$P\{t_{i-1} |m(A_i)| \geqq 2^{p+1} a\} \geqq a,$$
$$\forall A \in \mathscr{P}_{i-1}, \quad P\{t_{i-1} |m(A)| \geqq a\} \leqq 2^{-p-1} a.$$

Puisque $\operatorname{card} \mathscr{P}_i = 2^i \leqq 2^p$, il suffit de montrer que :

$$T_i \supset \{t_{i-1} |m(A_i)| \geqq 2^{p+1} a\} \setminus \bigcup_{A \in \mathscr{P}_{i-1}} \{t_{i-1} |m(A)| \geqq a\}.$$

Mais si $t_{i-1} |m(A_i)(\omega)| \geqq 2^{p+1} a$, il existe $A \in \mathscr{P}_{i-1}$ avec $t_{i-1} |m(A_i \cap A)(\omega)| \geqq 2a$. Si de plus $t_{i-1} |m(A)(\omega)| \leqq a$, on a $t_{i-1} |m(A \setminus A_i)(\omega)| \geqq a$, ce qui prouve l'assertion puisque $t_{i-1} < a 2^{-p}$.

Troisième étape. — Soit $T = \{\omega \in \Omega;\ \operatorname{card}\{i;\ \omega \in T_i\} \geqq q^2\}$. Alors $P(T) \geqq a/5$. En effet on a :

$$2q^2 \leqq p \frac{a}{2} \leqq \int \sum_{i \leqq p} \chi_{T_i} \, dP \leqq \int_T + \int_{\Omega \setminus T} \leqq p\, P(T) + q^2 (1 - P(T)),$$

d'où $P(T) \geqq q^2/(p - q^2) \geqq q^2/p \geqq a/5$.

Quatrième étape. — Pour conclure, il suffit de montrer que pour $\omega \in T$, il existe $n_1, \ldots, n_q$ et des $B_{n_i} \in \mathscr{P}_{n_i}$ disjoints de sorte que $|m(B_{n_i})(\omega)| > 2^p$. En effet, B_{n_i} étant réunion d'au plus 2^{p-n_i} éléments de $\mathscr{P}_p$, pour l'un d'entre eux, soit B_i, on a $|m(B_i)(\omega)| \geqq 1$, et les B_i sont disjoints.

L'argument est combinatoire. Puisque $\omega \in B$, il existe :

$$1 \leqq s_1 < \ldots < s_{q^2} \leqq p \qquad \text{et} \qquad 1 \leqq j \leqq q^2$$

des ensembles distincts C_j^1, C_j^2 de $\mathscr{P}_{s_j}$ tels que :

$$|m(C_j^i)(\omega)| \geqq 2^p \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2 \quad \text{et} \quad C_j^1 \cup C_j^2 \in \mathscr{P}_{s_j - 1}.$$

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des C_j^1, $1 \leqq j \leqq q^2$. Deux éléments de $\mathscr{F}$ sont soit disjoints, soit l'un contient l'autre. Soit $\mathscr{G}$ une famille maximale de $\mathscr{F}$ formée d'éléments disjoints. Si $\operatorname{card} \mathscr{G} \geqq q$, la preuve est terminée. Dans le cas contraire, puisque tout élément de $\mathscr{F}$ rencontre un élément de $\mathscr{G}$, il existe $B \in \mathscr{G}$ tel que q des ensembles C_j^1 rencontrent B. On a donc :

$$C_{j_1}^1 \supset C_{j_2}^1 \supset \ldots \supset C_{j_q}^1 \qquad \text{avec} \quad s_{j_1} < \ldots < s_{j_q}.$$

Mais alors les ensembles $C_{j_1}^2, \ldots, C_{j_q}^2$ sont disjoints. En effet, pour $1 \leqq l < u \leqq q$ on a $C_{j_u}^1 \subset C_{j_l}^1$, d'où puisque $C_{j_u}^1 \cup C_{j_u}^2 \in \mathscr{P}_{s_{j_u} - 1}$, on a :

$$C_{j_u}^2 \subset C_{j_l}^1 \qquad \text{et} \qquad C_{j_l}^1 \cap C_{j_l}^2 = \emptyset.$$

La preuve est terminée.

LEMME 5. — *Pour la partition précédente $\mathscr{P}$, on a avec les notations du lemme 3 :*

$$Q_r\left\{\varepsilon;\ P\left\{\sum_{A\in\mathscr{P}}\varepsilon_A m^2(A)\geqq 1\right\}\geqq\frac{a(Y)}{10}\right\}\geqq 1-2(1-r)^q.$$

Preuve. — Pour $\omega\in\Omega'$ on a, puisque les ε_A sont indépendants :

$$Q_r\left\{\varepsilon;\ \sum_{A\in\mathscr{P}}\varepsilon_A m^2(A)(\omega)\geqq 1\right\}\geqq 1-(1-r)^q.$$

On utilise l'argument déjà utilisé deux fois : soit :

$$C=\left\{(\omega,\varepsilon)\in\Omega'\times\{0,1\}^{\mathscr{P}};\ \sum_{A\in\mathscr{P}}\varepsilon_A m^2(A)(\omega)\geqq 1\right\}.$$

On a $P\otimes Q_r(C)\geqq P(\Omega')(1-(1-r)^q)$.

Soit :

$$H=\left\{\varepsilon;\ P\left(\Omega'\cap\left\{\sum_{A\in\mathscr{P}}\varepsilon_A m^2(A)\geqq 1\right\}\right)\geqq\frac{1}{2}P(\Omega')\right\}.$$

Alors :

$$P\otimes Q_r(C)\leqq P(\Omega')\left(Q_r(H)+\frac{1}{2}(1-Q_r(H))\right),$$

ce qui donne le résultat.

Passons à la preuve du théorème A. Supposant m non bornée, on va construire par induction sur n une suite disjointe (X_n) de $\mathscr{X}$, telle que si l'on pose $Y_n=X\setminus\bigcup_{i\leqq n}X_n$, les conditions suivantes soient vérifiées pour $n\geqq 1$:

$$b(Y_n)>\frac{1}{2}b(X),\tag{4}$$

$$d(m(X_n))\geqq 2^{-13}\,b(X).\tag{5}$$

Comme nous l'avons remarqué, l'existence d'une telle suite est contradictoire. Le premier pas est analogue au pas général. Supposons la construction de X_n effectuée. Soit $r>0$ tel que $(1-10r)\,b(Y_n)>(1/2)\,b(X)$. Soit q un entier assez grand pour que $4(1-r)^q\leqq 1/2$. Soit $\mathscr{P}$ la partition de Y_n fournie par le lemme 4. Puisque $(8/9)+(1/2)>1$, il existe d'après les lemmes 3 et 5, $\varepsilon\in\{0,1\}^{\mathscr{P}}$ tel que :

$$b(Y_n\setminus A_\varepsilon)\geqq(1-10r)\,b(Y_n)>\frac{1}{2}\,b(X),$$

$$P\left\{\sum_{\substack{A\in\mathscr{P}\\ A\subset A_\varepsilon}}m^2(A)\geqq 1\right\}\geqq\frac{a(Y_n)}{10}.$$

On a donc $d(2^{-6} \sum_{\substack{A \in \mathscr{P} \\ A \subset A_\varepsilon}} m^2(A)) \geqq \inf(a(Y_n)/10, 2^{-6})$.

Le lemme 1, avec $t = 2^{-6}$, montre qu'il existe $X_{n+1} \subset A_\varepsilon$ avec :

$$d(m(X_{n+1})) \geqq \inf(2^{-3}\, 10^{-1}\, a(Y_n), 2^{-9}) \geqq 2^{-9} a(Y_n) \geqq 2^{-12} b(Y_n) \geqq 2^{-13} b(X).$$

Puisque $b(Y_n \setminus X_{n+1}) \geqq b(Y_n \setminus A_\varepsilon)$, la preuve est terminée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. P. KAHANE, *Some Random Series of Functions*, D.C. Heath and Company.

[2] B. MAUREY et G. PISIER, *Un théorème d'extrapolation et ses conséquences* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 277, série A, 1973, p. 39-42).

[3] B. MAUREY, *Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans un espace L^p* (*Astérisque*, II).

[4] P. TURPIN, *Une mesure vectorielle non bornée* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 280, série A, 1975, p. 509).

[5] P. TURPIN, *Colloque sur l'intégration vectorielle et multivoque*, Caen, 22 et 23 mai 1975, Offilib, Paris.

(Manuscrit reçu le 21 mars 1981,
accepté le 12 mai 1981.)

M. TALAGRAND,
Équipe d'Analyse, Tour 46,
Université Paris-VI,
4, place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05.