

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PHILIPPE BOUGEROL

Théorème central limite local sur certains groupes de Lie

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 14, n° 4 (1981), p. 403-432

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1981_4_14_4_403_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME CENTRAL LIMITE LOCAL SUR CERTAINS GROUPES DE LIE

PAR PHILIPPE BOUGEROL

Si μ est une mesure de probabilité sur un groupe localement compact G , de n -ième puissance de convolution μ^n , nous voulons estimer $\mu^n(C)$ lorsque C est un compact de G et n tend vers l'infini. Plus précisément nous cherchons à déterminer une suite de réels $\{a_n, n \in \mathbf{N}\}$ et une mesure de Radon non nulle m_μ sur G telles que la suite de mesures $a_n \mu^n, n \in \mathbf{N}$, converge vaguement vers m_μ lorsque n tend vers l'infini, c'est-à-dire que pour toute fonction f continue à support compact sur G :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \int_G f d\mu^n = \int_G f dm_\mu.$$

Nous appellerons théorème central limite local, ou pour abrégé théorème local, un résultat de ce type ([1], [4], [5], [12]).

Lorsque par exemple G est compact et μ est une probabilité sur G dont le support n'est pas contenu dans une classe latérale d'un sous-groupe fermé distingué propre de G , μ satisfait à un théorème local puisque la suite $\mu^n, n \in \mathbf{N}$, converge vers la mesure de Haar normalisée de G [12].

Rappelons d'abord comment se traite le cas classique où G est égal à \mathbf{R} [5]. On considère une probabilité μ sur \mathbf{R} telle que $\int x^2 d\mu(x) = \sigma^2$ et $\int x d\mu(x) = 0$. Si $\tilde{\mathbf{R}}$ est l'ensemble des caractères $\{e_\lambda(x) = e^{i\lambda x}, \lambda \in \mathbf{R}\}$ et $F\mu(\lambda) = \int e_\lambda(x) d\mu(x)$, pour toute fonction continue à support compact f sur G telle que $Ff(\lambda) = \int e_\lambda(x) f(x) dx$ est $d\lambda$ intégrable, la formule d'inversion de Fourier nous donne :

$$\int_{\mathbf{R}} f d\mu^n = (\mu^n \star \tilde{f})(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\mathbf{R}}} F\mu(\lambda)^n Ff(-\lambda) d\lambda,$$

si $\tilde{f}(x) = f(-x)$ pour tout réel x . La démonstration du théorème local se décompose en deux étapes.

Étape 1 : Si pour simplifier on suppose que μ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, pour $\varepsilon > 0$, $\text{Sup} \{ |F\mu(\lambda)|, |\lambda| > \varepsilon \}$ est strictement inférieur à un (lemme de Riemann-Lebesgue) et :

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \int_{\mathbf{R}} f d\mu^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{|\lambda| < \varepsilon} F\mu(\lambda)^n Ff(-\lambda) d\lambda.$$

Étape 2 : Au voisinage de l'origine ($\lambda = 0$), $F\mu(\lambda) = 1 - (\sigma^2 \lambda^2 / 2) + o(\lambda^2)$ et après le changement de variable $\lambda \rightarrow \lambda / \sqrt{n}$, en appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \int_{\mathbf{R}} f d\mu^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda| < \varepsilon \sqrt{n}} F\mu\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)^n Ff\left(-\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) d\lambda \\ = [2\pi\sigma^2]^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} f(x) dx,$$

c'est-à-dire que $\sqrt{n} \mu^n$, $n \in \mathbf{N}$, converge vaguement vers $dx / \sigma \sqrt{2\pi}$.

Nous allons montrer qu'essentiellement ce type de démonstration s'étend à certains groupes localement compacts G possédant un sous-groupe compact K tel que (G, K) soit un couple de Gelfand, comme par exemple les groupes compacts, les groupes de Lie semi-simples connexes de centre fini et certaines extensions compactes de groupes nilpotents. Notons que contrairement à [4] nous ne ferons aucune hypothèse d'invariance de la probabilité considérée sous l'action de K .

L'égalité (1) montre que si $G = \mathbf{R}$ et si μ est centrée le théorème local ne dépend que de la transformée de Fourier de μ au voisinage de l'origine dans $\hat{\mathbf{R}}$ [ceci n'est plus vrai lorsque μ n'est pas centrée car alors pour tout compact C de \mathbf{R} , $\mu^n(C)$ décroît exponentiellement vite vers zéro]. Lorsque G n'est pas commutatif une partie \hat{G}_r , appelée dual réduit, de l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G « remplace » $\hat{\mathbf{R}}$. Au paragraphe I nous définissons, par analogie avec le cas où G égal \mathbf{R} , une « origine » dans \hat{G}_r , et montrons comment la formule de Plancherel sphérique permet de ramener la démonstration du théorème local pour certaines probabilités μ sur G (pas nécessairement invariantes sous l'action de K) à l'étude d'opérateurs T_μ où T est un élément de \hat{G}_r , dans un voisinage de cette origine. C'est ce qui correspond à l'étape 1 lorsque $G = \mathbf{R}$.

Nous appliquons ensuite ces résultats à deux classes de groupes pour y montrer le théorème local par un raisonnement s'apparentant à celui de l'étape 2 lorsque G est égal à \mathbf{R} .

Au paragraphe II nous étudions en détail le cas des groupes de Lie semi-simples connexes de centre fini. Le résultat principal est le théorème 2.3.1 dont un cas particulier est le théorème local suivant :

« Soit d le rang (réel) du groupe semi-simple G et p le nombre de racines positives indivisibles associées à ce groupe. Si μ est une probabilité irréductible sur G possédant une densité tendant assez vite vers 0 à l'infini et $\sigma(\mu)$ est le rayon spectral de l'opérateur associé

à μ dans la représentation régulière de G , alors la suite $\{n^{(2p+d)/2}\mu^n, n \in \mathbb{N}\}$ converge vaguement vers une mesure de Radon non nulle lorsque n tend vers l'infini. »

Nous précisons aussi des résultats de [3] concernant les fonctions de concentration. L'étude de $S_1(2, \mathbf{R})$ permet de cerner le rôle des différentes hypothèses introduites sur μ . Nous terminons ce paragraphe en démontrant que si $G = KAN$ est une décomposition d'Iwasawa du groupe semi-simple G , les projections de μ^n sur K , A et N satisfont aussi à un théorème local. Nous utilisons pour cela la même technique que précédemment et un résultat de Raugi [15].

Dans le troisième paragraphe nous étudions certains groupes moyennables à croissance polynomiale du type $G = N \times_{\circ} K$ où K est un groupe compact opérant sur le groupe nilpotent N de telle sorte que (G, K) soit un couple de Guelfand (en l'occurrence les groupes MN associés à un groupe semi-simple de rang un). Un exemple de tel groupe est le groupe diamant, produit semi-direct du groupe de Heisenberg de dimension trois et du groupe $SO(2)$. On démontre que si μ est une probabilité centrée étalée sur G possédant un moment d'ordre deux et si le degré de croissance de G est égal à d alors (théorème local 3.4) la suite $\{n^{d/2}\mu^n, n \in \mathbb{N}\}$ converge vaguement vers une mesure de Haar non nulle.

On peut traiter de la même façon tous les produits semi-directs $A \times_{\circ} K$ où A est un groupe abélien à génération compacte et retrouver simplement certains résultats de [1].

I. — Généralités sur les couples de Guelfand.

1.1. NOTATIONS. — Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, (l. c. d.), $C_c(G)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur G et $C_c^+(G)$ le cône des fonctions positives ou nulles. Si m est une mesure de Haar à gauche sur G et $L^2(G)$ l'espace des classes de fonctions sur G de carré m -intégrable, notons $\{L_g, g \in G\}$ la représentation régulière gauche de G dans $L^2(G)$ définie par, si $f \in L^2(G)$, $x \in G$, $L_g f(x) = f(g^{-1}x)$. Si μ est une probabilité sur G nous notons $\sigma(\mu)$ le rayon spectral de l'opérateur $L_{\mu} = \int L_g d\mu(g)$.

On dit que la probabilité μ sur G est :

- *adaptée*, si $\text{Supp } \mu$ n'est pas contenu dans un sous-groupe propre fermé de G ;
- *apériodique*, si μ est adaptée et si $\text{Supp } \mu$ n'est pas contenu dans une classe latérale d'un sous-groupe fermé propre distingué de G ;
- *irréductible*, si le semi-groupe fermé engendré par $\text{Supp } \mu$ est égal à G ;
- *étalée*, si μ possède une puissance de convolution qui n'est pas étrangère à la mesure de Haar m ;
- *très étalée*, si μ possède une puissance de convolution μ^n dont la partie singulière ν par rapport à m vérifie : $\sigma(\nu) < \sigma(\mu)^n$.

Rappelons que si G est moyennable (resp. non moyennable) $\sigma(\mu)$ est égal à un (resp. strictement inférieur à un) pour toute probabilité μ sur G adaptée [6]. Il est clair que sur les groupes moyennables les notions étalées et très étalées coïncident, mais nous verrons par un exemple que ce n'est pas toujours le cas si G n'est pas moyennable. Remarquons que si G est connexe toute probabilité étalée est apériodique.

Nous utiliserons plusieurs fois le lemme suivant de Guivarc'h [11] :

LEMME 1.1.1. — Si H est un sous-groupe fermé moyennable d'un groupe localement compact G , pour toute probabilité μ sur G , la norme de L_μ est égale à la norme de l'opérateur associé à μ dans la représentation quasi régulière de G dans $L^2(G/H)$.

1.2. COUPLES DE GUELFAND.

(1.2.1) Rappelons les résultats de la théorie des couples de Guelfand dont nous aurons besoin ([7], [19]). Si K est un sous-groupe compact d'un groupe unimodulaire G , l. c. d., on dit que (G, K) est un couple de Guelfand si l'algèbre $L^1(G; K)$ des fonctions f intégrables sur G bi-invariantes par K [i. e. $f(kgk') = f(g); k, k' \in K, g \in G$] est commutative. Par exemple si G est compact, et $K = G$, ou si G est un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini et K un sous-groupe compact maximal de G ou si G est de la forme $A \times_\sigma K$ où A est abélien, (G, K) est un couple de Guelfand. Si \hat{G} est l'ensemble des (classes de) représentations unitaires irréductibles de G , (G, K) est un couple de Guelfand si et seulement si :

« Pour toute représentation T de \hat{G} , opérant sur l'espace de Hilbert H_T , $K_T = \{v \in H_T, T_k v = v, \forall k \in K\}$ est de dimension 1 ou 0. »

(1.2.2) Supposons alors que (G, K) soit un couple de Guelfand et notons \hat{Z} le sous-ensemble de \hat{G} formé des représentations T pour lesquelles K_T est de dimension 1. Si m_K est

la mesure de Haar normalisée de K , $T_{m_K} = \int_K T_k dm_K(k)$ est un projecteur orthogonal sur K_T . Choisissons un vecteur unitaire u_T de K_T et posons :

$$\varphi_T(g) = \langle T_g u_T, u_T \rangle, \quad g \in G.$$

On obtient ainsi l'ensemble des fonctions sphériques définies positives sur G prenant la valeur 1 en l'élément neutre.

Si \hat{G}_r est le dual réduit de G , que l'on peut caractériser comme le sous-ensemble de \hat{G} formé des représentations T vérifiant $\|T_v\| \leq \|L_v\|$ pour toute mesure bornée v sur G , posons $\hat{Z}_r = \hat{G}_r \cap \hat{Z}$. On sait qu'il existe une topologie sur \hat{G} , appelée topologie de Fell, pour laquelle \hat{G}_r est fermé. G_r est un sous-ensemble ouvert dans \hat{G}_r , localement compact métrisable pour la topologie induite. Nous n'aurons besoin que du résultat suivant : une suite $T_n, n \in \mathbb{N}$, de \hat{Z}_r converge vers T dans \hat{Z}_r si et seulement si φ_{T_n} converge vers φ_T uniformément sur les parties compactes de G .

(1.2.3) Si f est un élément de $L^1(G; K)$ considérons l'application $Ff : \hat{Z}_r \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $Ff(T) = \int_G \varphi_T(g) f(g) dm(g)$. On a si $f, f' \in L^1(G; K)$ et $T \in \hat{Z}_r$:

- $F(f \star f')(T) = Ff(T) Ff'(T)$;
- $|Ff(T)| = \|T_f u_T\| = \|T_f\|$;
- $Ff(T)$ est une fonction continue sur \hat{Z}_r qui tend vers 0 quand T tend vers l'infini (lemme de Riemann Lebesgue).

La formule de Plancherel pour la transformée de Fourier sphérique F s'énonce ainsi :
 « Il existe une unique mesure de Radon γ sur \hat{Z}_r , telle que, si f est une fonction continue de $L^1(G; K)$ dont la transformée Ff est $d\gamma$ intégrable :

$$f(e) = \int_{\hat{Z}_r} Ff(T) d\gamma(T).$$

De plus F se prolonge en une isométrie de $L^2(G; K)$ sur $L^2(\hat{Z}_r, \gamma)$. »

(1.2.4) Rappelons enfin que si G est moyennable \hat{G} est égal à \hat{G}_r , mais que si G n'est pas moyennable la représentation triviale de G (définie par $T_x v = v, \forall x \in G$) est un élément de \hat{G} qui n'est pas dans \hat{G}_r [9].

1.3. ORIGINE DANS LE DUAL RÉDUIT. — Considérons un couple de Guelfand (G, K) . Dans le dual \hat{R} de R (égal au dual réduit) l'origine peut être caractérisée comme le seul point où la transformée de Fourier d'une probabilité étalée est égale à un [c'est-à-dire à $\sigma(\mu)$] et pour tout $\varepsilon > 0$, $\sup \{ |F\mu(\lambda)|^n, \lambda > \varepsilon \}$ tend vers 0 exponentiellement vite quand n tend vers l'infini. Par analogie nous poserons :

DÉFINITION 1.3.1. — On dit qu'une représentation T^0 de \hat{G}_r est une origine de \hat{G}_r si pour toute probabilité μ apériodique irréductible très étalée sur G ,

(a) le rayon spectral de T_μ^0 est égal à $\sigma(\mu)$;

(b) pour tout voisinage V de T^0 dans \hat{G}_r (muni de la topologie de Fell) il existe un réel ρ , $0 < \rho < 1$, tel que pour tout entier n assez grand :

$$\|T_{\mu^n}\| \leq \rho^n \sigma(\mu)^n, \quad T \in \hat{G}_r, \quad T \notin V.$$

Remarque. — En prenant μ bi-invariante par K on voit que T^0 doit appartenir à \hat{Z}_r et, cet espace étant séparé, que l'origine est unique lorsqu'elle existe.

Admettons pour l'instant le lemme suivant que nous démontrerons en (2.2.2).

LEMME 1.3.2. — Soit μ une probabilité irréductible apériodique étalée sur un groupe G , l. c. d. Pour toute fonction f de $C_c^+(G)$ non nulle en l'élément neutre, il existe un entier r et un réel α , $\alpha > 0$, tels que μ^r majore $\alpha f \cdot m$ (où $f \cdot m$ est la mesure de densité f par rapport à la mesure de Haar m). Si de plus μ est très étalée et G connexe on peut supposer que $\sigma(\mu^r - \alpha f \cdot m)$ est strictement inférieur à $\sigma(\mu)^r$.

Remarque. — On déduit de la première partie du lemme que $\sigma(\mu)$ est non nul.

PROPOSITION 1.3.3. — Si (G, K) est un couple de Guelfand et si G est un groupe moyennable ou un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini, \hat{G}_r possède une origine (égale à la représentation triviale dans le premier cas).

Démonstration. — Considérons une fonction f de $C_c^+(G)$, bi-invariante par K , non nulle en l'élément neutre et d'intégrale égale à un. D'après le lemme précédent il existe un entier r , un réel $\alpha > 0$ et une mesure bornée β positive tels que $\mu^r = \alpha f \cdot m + \beta$ et $\sigma(\beta) < \sigma(\mu)^r$ (cette dernière condition est évidente sur les groupes moyennables). Si t est un réel de]0, 1[tel que

pour tout n assez grand $\|L_{\beta^n}\| \leq t^n \|L_{\mu^n}\|$, pour toute représentation T de \hat{G}_r n'appartenant pas à \hat{Z}_r :

$$\|T_{\mu^n}\| \leq \|T_{\beta^n}\| \leq \|L_{\beta^n}\| \leq t^n \|L_{\mu^n}\|.$$

On en déduit facilement qu'il suffit de vérifier la condition (b) de la définition 1.3.1 pour les représentations de \hat{Z}_r .

Lorsque G est un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini, le corollaire 2.2.6 montrera donc que la représentation induite par la représentation triviale de MAN est l'origine de \hat{G}_r .

Supposons que G est moyennable. La représentation triviale T^0 de G vérifie la condition (a) de la définition 1.3.1. Pour montrer le (b) considérons la fonction $g = f \star \mu \star f$. C'est une densité de probabilité bi-invariante par K et il existe un réel λ , $0 < \lambda \leq 1$ et une probabilité ν tels que $\mu^{3r} = \lambda g \cdot m + (1 - \lambda) \nu$. Pour toute représentation T de \hat{Z} on a :

$$\|T_{\mu^{3r}}\| \leq \lambda \|T_{g \cdot m}\| + (1 - \lambda) \|T_\nu\| \leq \lambda |F g(T)| + (1 - \lambda).$$

Il suffit de montrer que pour tout voisinage V de T^0 dans \hat{Z} :

$$\sup_{T \in V} |F g(T)| < 1.$$

Si ce n'est pas le cas, à cause du lemme de Riemann Lebesgue (1.2.3) il existe un élément T de \hat{Z} , différent de T^0 pour lequel $|F g(T)| = 1$. Alors, pour tout entier n :

$$\left| \int_G \varphi_T(x) g^{*n}(x) dm(x) \right| = |F g(T)|^n = 1.$$

Puisque φ_T est une fonction continue dont le module est inférieur ou égal à un et que la réunion des supports de g^{*n} est dense dans G ceci entraîne que φ_T est identiquement égale à un, ce qui n'est possible que si T est la représentation triviale.

1.4. THÉORÈME LOCAL. ÉTAPE 1. — Comme nous l'avons dit dans l'introduction nous voulons montrer que grâce à la transformée de Fourier sphérique, le théorème local est déterminé par le comportement à l'origine des opérateurs T_μ . C'est exactement ce que nous dit la proposition suivante malgré son aspect technique. Elle nous indique aussi comment traiter les fonctions de concentration ([2], [3]) au (a). Comme nous l'avons déjà noté l'affirmation précédente n'est vraie sur \mathbf{R} que lorsqu'on cherche un théorème local avec a_n croissant polynomialement vite (i. e. pour les probabilités centrées), c'est ce qui explique la condition $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/a_{n+1} = \sigma(\mu)$.

Aux paragraphes suivants nous utiliserons cette proposition pour montrer le théorème local sur les groupes semi-simples et sur certaines extensions compactes de groupes nilpotents.

Nous notons $M_b(G)$ l'ensemble des mesures bornées sur G et si $\nu \in M_b(G)$, $\check{\nu}$ est la mesure définie par $\int f d\check{\nu} = \int \check{f} d\nu$ où $\check{f}(x) = f(x^{-1})$.

PROPOSITION 1.4.1. — Soit (G, K) un couple de Gelfand tel que \hat{G}_r possède une origine T^0 , μ une probabilité apériodique très étalée irréductible sur G et $\{a_n, n \in \mathbf{N}\}$ une suite de réels positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/a_{n+1} = \sigma(\mu)$.

(a) Supposons qu'il existe un voisinage V de T^0 dans \hat{Z}_r et une fonction g de $C_c^+(G)$, bi-invariante par K , non nulle en e , dont la transformée $Fg(T)$, $T \in \hat{Z}_r$, soit $d\gamma$ intégrable vérifiant :

(1) « Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout entier n et toutes mesures bornées ν_1 et ν_2 sur G :

$$\left| a_n \int_V \langle T_{\nu_1} T_{\mu^n} T_{\nu_2} u_T, T_g u_T \rangle d\gamma(T) \right| \leq \alpha \|L_{\nu_1}\| \cdot \|L_{\nu_2}\|. \text{ »}$$

Alors pour tout compact C de G il existe un réel $c > 0$ tel que :

« Pour tout entier n , toutes mesures bornées ν_1 et ν_2 sur G :

$$|a_n (\nu_1 \star \mu^n \star \nu_2)(C)| \leq c \|L_{\nu_1}\| \cdot \|L_{\nu_2}\|. \text{ »}$$

(b) Si de plus G est connexe ou moyennable et m_μ est une mesure de Radon sur G vérifiant $m_\mu \star \mu = \sigma(\mu) m_\mu$, si il existe un voisinage V et une fonction g comme au-dessus tels que (1) est vrai et :

(2) « Pour toutes mesures bornées ν_1 et ν_2 sur G :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \int_V \langle T_{\nu_1} T_{\mu^n} T_{\nu_2} u_T, T_g u_T \rangle d\gamma(T) = m_\mu(\check{\nu}_1 \star g \star \check{\nu}_2). \text{ »}$$

Alors la suite de mesures $a_n \mu^n$, $n \in \mathbf{N}$, converge vaguement vers m_μ .

Démonstration. — (a) Supposons que (1) est vérifié. La fonction indicatrice du compact C étant majorée par une combinaison linéaire de translatées de la fonction g , le (a) sera établi si on montre qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\left| a_n \int_G g(x) d(\nu_1 \star \mu^n \star \nu_2)(x) \right| \leq c \|L_{\nu_1}\| \cdot \|L_{\nu_2}\|; \quad n \in \mathbf{N}, \quad \nu_1, \nu_2 \in \mathbf{M}_b(G).$$

La fonction $f_n = m_K \star \check{g} \star \nu_1 \star \mu^n \star \nu_2 \star m_K$ est continue intégrable, bi-invariante par K et sa transformée de Fourier Ff_n vérifie, si $T \in \hat{Z}_r$:

$$|Ff_n(T)| = |\langle T_{\nu_1} T_{\mu^n} T_{\nu_2} u_T, T_g u_T \rangle| \leq \|T_{\nu_1}\| \cdot \|T_{\nu_2}\| \cdot \|T_g\| \leq \|L_{\nu_1}\| \cdot \|L_{\nu_2}\| \cdot |Fg(T)|$$

(voir 1.2.3). Elle est en particulier $d\gamma$ intégrable et par la formule de Plancherel :

$$\int_G g(x) d(\nu_1 \star \mu^n \star \nu_2)(x) = f_n(e) = \int_{\hat{Z}_r} Ff_n(T) d\gamma(T).$$

Cette expression est majorée par :

$$\left| \int_V \langle T_{v_1} T_{\mu^r} T_{v_2} u_T, T_g u_T \rangle d\gamma(T) \right| + \sup_{T \notin V} \|T_{\mu^r}\| \cdot \|L_{v_1}\| \cdot \|L_{v_2}\| \int_{V^c} |F g(T)| d\gamma(T),$$

d'où, grâce à (1), si $c_1 = \sup \left(\alpha, \int |F g(T)| d\gamma(T) \right)$:

$$\left| a_n \int_G g(x) d(v_1 \star \mu^n \star v_2)(x) \right| \leq c_1 \|L_{v_1}\| \cdot \|L_{v_2}\| \{ 1 + a_n \sup_{T \notin V} \|T_{\mu^r}\| \}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/a_{n+1} = \sigma(\mu)$ et d'après le (b) de la définition de l'origine 1.3.1,

$a_n \sup_{T \notin V} \|T_{\mu^r}\|$ est borné et on obtient l'inégalité voulue.

(b) Remarquons d'abord que si $\varphi \in C_c(G)$ et $v_1, v_2 \in M_b(G)$:

$$\begin{aligned} \int_G \varphi(x) d(\mu^n \star v_1 \star \check{g} \cdot m \star v_2)(x) &= (\mu^n \star v_1 \star \check{g} \cdot m \star v_2 \star \check{\varphi})(e) \\ &= (m_K \star \check{g} \cdot m \star v_2 \star \check{\varphi} \star \mu^n \star v_1 \star m_K)(e) = \int_{\check{z}} \langle T_{v_2} T_{\check{\varphi}} T_{\mu^n} T_{v_1} u_T, T_g u_T \rangle d\gamma(T), \end{aligned}$$

d'où en utilisant (2) et les mêmes majorations qu'au-dessus :

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \int_G \varphi(x) d(\mu^n \star v_1 \star \check{g} \cdot m \star v_2)(x) = m_\mu(\varphi \star \check{v}_2 \star g \star \check{v}_1).$$

D'après le lemme 1.3.2 appliqué à la fonction \check{g} il existe un multiple non nul f de \check{g} , un entier r et une mesure bornée β tels que $\mu^r = f \cdot m + \beta$ et $\sigma(\beta) < \sigma(\mu)^r$. Pour tout entier p :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \int \varphi d\mu^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+pr} \int \varphi d\mu^{n+pr} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+pr} \int \varphi d(\mu^n \star (\mu^{pr} - \beta^p)) + \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+pr} \int \varphi d(\mu^n \star \beta^p). \end{aligned}$$

Le premier terme de cette somme se calcule facilement. En effet $\mu^{pr} - \beta^p$ est une somme finie de mesures de la forme $v_1 \star f \cdot m \star v_2$ proportionnelles à $v_1 \star \check{g} \cdot m \star v_2$ donc à l'aide de (3) et

du fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+pr}(1/a_n) = \sigma(\mu)^{-pr}$ on obtient qu'il est égal à :

$$\sigma(\mu)^{-pr} m_\mu(\varphi \star (\check{\mu}^{pr} - \check{\beta}^p)) = \sigma(\mu)^{-pr} [m_\mu(\varphi \star \check{\mu}^{pr}) - m_\mu(\varphi \star \check{\beta}^p)],$$

soit, puisque $m_\mu \star \mu = \sigma(\mu) m_\mu$, à :

$$\int \varphi dm_\mu - \sigma(\mu)^{-pr} m_\mu(\varphi \star \check{\beta}^p).$$

On a donc :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| a_n \int \varphi d\mu^n - \int \varphi dm_\mu \right| \leq \sigma(\mu)^{-pr} m_\mu(\varphi \star \beta^p) + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_{n+pr} \int \varphi d(\mu^n \star \beta^p).$$

Si ν est une mesure bornée positive telle que $g \star \nu$ majore φ on a :

$$m_\mu(\varphi \star \beta^p) \leq m_\mu(g \star \nu \star \beta^p) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n \int (g \star \nu \star \beta^p) d\mu^n,$$

il existe donc, d'après (a) une constante c indépendante de p vérifiant :

$$|\sigma(\mu)^{-pr} m_\mu(\varphi \star \beta^p) + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_{n+pr} \int \varphi d(\mu^n \star \beta^p)| \leq c \sigma(\mu)^{-pr} \|L_{\beta^p}\|$$

et :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| a_n \int \varphi d\mu^n - \int \varphi dm_\mu \right| \leq c \sigma(\mu)^{-pr} \|L_{\beta^p}\|.$$

Cette relation étant vraie pour tout p et le rayon spectral de l'opérateur L_β étant strictement inférieur à $\sigma(\mu)^r$ ceci montre que $a_n \int \varphi d\mu^n$ tend vers $\int \varphi dm_\mu$.

II. — Théorème local sur les groupes semi-simples.

2.1. NOTATIONS

(2.1.1) Dans cette partie G désignera toujours un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini non compact (voir [12] pour le cas compact) dont on fixe une décomposition d'Iwasawa $G = KAN$. Rappelons les notations et les résultats exposés dans [19]. Si \mathfrak{a} est l'algèbre de Lie de A et si l'élément g de G s'écrit $g = kan$, $k \in K$, $a \in A$, $n \in N$, on désigne par $K(g)$ l'élément k et par $H(g)$ l'élément de \mathfrak{a} dont l'image par l'application exponentielle est égale à a . On a donc $g \in K(g) \{ \exp H(a) \} N$. On note ρ la demi-somme des racines positives comptées avec leur multiplicité.

Si M est le centralisateur de A dans K on note B l'espace homogène K/M . Nous identifions les fonctions sur B à des fonctions sur K invariantes à droite par M . En particulier si dk (ou m_K) est la mesure de Haar normalisée sur K nous noterons $L^2(B)$ l'espace des classes de fonctions sur K invariantes à droite par M , de carré m_K intégrable muni du produit scalaire :

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_K \varphi(k) \overline{\psi(k)} dk; \quad \varphi, \psi \in L^2(B).$$

Si λ est un élément du dual (réel) \mathfrak{a}^* de \mathfrak{a} , soit χ_λ le caractère de MAN défini par $\chi_\lambda(man) = e^{i\lambda H(a)}$. Une réalisation de la représentation unitaire de G , $T^\lambda = \text{Ind}_{MAN}^G \chi_\lambda$, induite à G par χ_λ est la suivante :

Pour tout g de G , T_g^λ est l'opérateur sur $L^2(B)$ défini par :

$$T_g^\lambda \varphi(k) = e^{-(i\lambda + \rho)H(g^{-1}k)} \varphi(K(g^{-1}k)); \quad k \in K, \quad \varphi \in L^2(B).$$

Si f est une fonction continue à support compact sur G , en utilisant le fait qu'avec les notations habituelles la mesure de Haar dm vérifie :

$$dm(g) = e^{2\rho\{H(g)\}} dk da dn,$$

on a, pour tout k_0 de K :

$$\begin{aligned} T_f^\lambda \varphi(k_0) &= \int_G e^{-(i\lambda+\rho)H(g^{-1}k_0)} \varphi(K(g^{-1}k_0)) f(g) dm(g) \\ &= \int_G e^{-(i\lambda+\rho)H(g)} \varphi(K(g)) f(k_0 g^{-1}) dm(g) \\ &= \int_G \left\{ \int_{A \times N} e^{-(i\lambda-\rho)H(a)} f(k_0 n^{-1} a^{-1} k^{-1}) da dn \right\} \varphi(k) dk. \end{aligned}$$

Ceci montre que T_f^λ est un opérateur compact dont la norme, majorée par :

$$\int_{K \times K} \left| \int_{A \times N} e^{-(i\lambda-\rho)H(a)} f(k_0 n^{-1} a^{-1} k^{-1}) da dn \right|^2 dk dk_0,$$

tend vers zéro quand λ tend vers l'infini (par le lemme de Riemann Lebesgue classique). Par densité ces propriétés restent vraies pour toute fonction f de $L^1(\bar{G})$.

(2.1.2) Avec les notations de 1.2, (G, K) est un couple de Guelfand et $\hat{Z}_r = \{T^\lambda, \lambda \in \mathfrak{a}^*\}$. Les vecteurs de $L^2(B)$ fixes sous l'action de T_k^λ , $k \in K$, sont les fonctions constantes. En particulier, on peut prendre $u_{T^\lambda} \equiv 1$ et si on note φ_λ la fonction φ_{T^λ} de 1.2.2 :

$$\varphi_\lambda(g) = \langle T_g^\lambda 1, 1 \rangle = \int_K e^{(i\lambda-\rho)H(gk)} dk; \quad g \in G.$$

Fixons une norme $\| \cdot \|$ sur \mathfrak{a} (et par dualité sur \mathfrak{a}^*). Si μ est une probabilité sur G , elle possède un moment d'ordre deux au sens de [11] si et seulement si :

$$\int_G \sup_{k \in K} \|H(gk)\|^2 d\mu(g) \text{ est fini.}$$

2.2. ÉTUDE DES OPÉRATEURS T_μ^λ . — Nous allons d'une part montrer que T^0 (c'est-à-dire T^λ avec λ égal à l'élément nul de \mathfrak{a}^*) est l'origine de \hat{G}_r , d'autre part étudier T_μ^λ pour λ proche de zéro. Nous verrons que le nombre qui remplace la transformée de Fourier d'une probabilité sur \mathbf{R} en un point de $\hat{\mathbf{R}}$ est la valeur propre de plus grand module de T_μ^λ , au moins pour λ petit.

Commençons par établir les propriétés de T_μ^0 .

PROPOSITION 2.2.1. — Soit μ une probabilité irréductible très étalée sur G , alors :

- (a) le rayon spectral de l'opérateur T_μ^0 est égal à $\sigma(\mu)$;
- (b) l'opérateur $\sigma(\mu)^{-1} T_\mu^0$ est quasi compact;
- (c) les points du spectre de T_μ^0 différents de $\sigma(\mu)$ sont contenus dans une boule de \mathbb{C} de centre 0 et de rayon strictement inférieur à $\sigma(\mu)$;

(d) $\sigma(\mu)$ est un pôle d'ordre un de la résolvante de T_μ^0 , le noyau de $T_\mu^0 - \sigma(\mu) \text{Id}$ est de dimension un et contient une fonction strictement positive $p.p.$;

(e) $\sigma(\mu)$ est la seule valeur propre de T_μ^0 admettant un vecteur propre positif.

Démonstration. — Remarquons que T_μ^0 est l'opérateur associé à μ dans la représentation quasi régulière de G sur G/MAN . Puisque MAN est moyennable le (a) résulte du lemme 1.1.1. En utilisant le fait que μ est très étalée on voit qu'il existe un entier r , une fonction f de $L^1(G)$ et une mesure bornée β telles que :

$$\mu^r = f.m + \beta \quad \text{et} \quad \|T_\beta^0\| = \|L_\beta\| < \sigma(\mu)^r.$$

D'où :

$$\left\| \left[\frac{1}{\sigma(\mu)} T_\mu^0 \right]^r - \frac{1}{\sigma(\mu)^r} T_f^0 \right\| \leq \frac{1}{\sigma(\mu)^r} \|T_\beta^0\| < 1.$$

L'opérateur T_f^0 étant compact ceci montre le (b) puisque par définition un opérateur A est quasi compact si il existe un entier n et un opérateur compact B tels que $\|A^n - B\| < 1$.

Si φ est une fonction positive de $L^2(B)$, $T_\mu^0 \varphi$ est aussi positive. L'opérateur T_μ^0 est donc positif et on peut lui appliquer les résultats exposés par exemple dans [16]. Vérifions d'abord que pour tout entier p non nul, $(T_\mu^0)^p$ est irréductible au sens de [16] c'est-à-dire que si φ et ψ sont deux fonctions positives de $L^2(B)$ non nulles, il existe un entier n tel que $\langle (T_\mu^0)^{np} \varphi, \psi \rangle$ soit non nul. Supposons le contraire, alors $\langle T_g^0 \varphi, \psi \rangle$ doit être nul sur l'adhérence de la réunion des supports de μ^{pn} , $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire partout puisque μ^p est irréductible (voir la démonstration 2.2.2). En particulier le produit de convolution sur K des fonctions φ et ψ est nul, ce qui est impossible si ces fonctions sont non nulles (on peut aussi utiliser l'irréductibilité de la représentation T^0). L'opérateur $\sigma(\mu)^{-1} T_\mu^0$ étant quasi compact le lemme 2, VII.8 de [8] montre qu'il existe un réel ρ , $0 < \rho < 1$, tel que la partie de son spectre qui n'est pas dans la boule de centre 0 et de rayon ρ est finie et constituée de pôles de la résolvante. Cet opérateur et ses puissances étant irréductibles la proposition est une conséquence immédiate de ([16], V théorème 5.2 et son corollaire).

(2.2.2) *Démonstration du lemme 1.3.2.* — Reprenons les notations de ce lemme (en particulier G est un groupe l. c. d. quelconque). Montrons d'abord que pour tout entier p non nul, μ^p est irréductible. Soit S l'adhérence de $\bigcup_{n>0} \text{Supp } \mu^{np}$; pour tout g de S , g^{-1} est adhérent

à $\bigcup_{n>0} \text{Supp } \mu^n$ car μ est irréductible d'où g^{-p} est dans S et $g^{-1} = g^{p-1} g^{-p}$ est aussi dans S .

L'ensemble S est donc un sous-groupe fermé de G portant la probabilité apériodique μ^p (cf. [2]). Il doit être égal à G .

Il existe un entier r et une fonction g de $C_c^+(G)$ non nulle telle que μ^r majore $g.m$. Si s est un entier tel que le support de μ^s rencontre $\{x \in G, g(x^{-1}) \neq 0\}$, la fonction $h = \mu^s \star g$ est continue non nulle en e et μ^{r+s} majore $h.m$. Soit $p = r+s$ et $V_n = \{x \in G, (\mu^{pn} \star h)(x) \neq 0\}$. Puisque $\mu^{p(n+1)} \star h$ majore $\mu^{pn} \star h \star h$, la suite d'ouverts V_n est croissante. Sa réunion est égale à G car pour tout x de G , si le support de μ^{pn} rencontre $\{y \in G, h(y^{-1}x) \neq 0\}$, x

appartient à V_n . Il existe donc un entier q tel que $\text{Supp } f \subset V_q$. Si $a = \inf \{ (\mu^{qn} \star h)(x), x \in \text{Supp } f \}$ et $b = \text{Sup} \{ f(x), x \in G \}$ on obtient :

$$\mu^{(q+1)n} \geq (\mu^{qn} \star h) \cdot m \geq \frac{a}{b} f \cdot m,$$

c'est-à-dire la première partie du lemme.

Supposons maintenant que μ est de plus très étalée et G connexe non moyennable (le résultat est trivial dans le cas moyennable). D'après [9], G possède un sous-groupe distingué fermé moyennable H tel que G/H soit un groupe de Lie semi-simple connexe de centre trivial. En utilisant le lemme 1.1.1 et les images des mesures μ^n et $\mu^n - \alpha f \cdot m$ sur G/H on est ramené à montrer la deuxième partie du lemme lorsque G est semi-simple connexe de centre fini. Puisque μ est très étalée il existe un entier r , une fonction l de $L^1(G)$ et une mesure positive ν tels que $\mu^r = l \cdot m + \nu$ et $\sigma(\nu) < \sigma(\mu)^r$. En appliquant la première partie du lemme à μ^r il existe un entier p , $\alpha > 0$ et $\beta_1 \in M_b^+(G)$ tels que $\mu^{rp} = 2\alpha f \cdot m + \beta_1$. Montrons que si $\beta = \alpha f \cdot m + \beta_1$, $\sigma(\beta) < \sigma(\mu)^{rp}$ ce qui établira le lemme. Soit $\beta = h \cdot m + \gamma$ la décomposition de Lebesgue de β en partie absolument continue et étrangère par rapport à m . Si $\sigma(\mu)^{rp}$ est égal à $\sigma(\beta)$, β est une mesure bornée positive irréductible très étalée [car puisque ν^p majore γ , $\sigma(\gamma) \leq \sigma(\nu^p) < \sigma(\mu)^{rp} \leq \sigma(\beta)$]. D'après la proposition précédente il existe donc une fonction φ de $L^2(\beta)$ strictement positive p. p. telle que :

$$T_\beta^0 \varphi = \sigma(\beta) \varphi = \sigma(\mu)^{rp} \varphi.$$

Alors $T_{\mu^r}^0 \varphi$ majore $\sigma(\mu)^{rp} \varphi$ et puisqu'il existe une fonction ψ strictement positive telle que $T_\mu^0 \psi = \sigma(\mu) \psi$, $T_{\mu^r}^0 \varphi = \sigma(\mu)^{rp} \varphi$. Ceci entraîne que $T_{f \cdot m}^0 \varphi$ est nul ce qui est absurde puisque φ est strictement positive.

Remarque. — On déduit immédiatement de ce lemme que si μ est une probabilité aperiodique étalée sur un groupe compact la norme de la variation totale de $\mu^n - m$ tend vers zéro exponentiellement vite.

COROLLAIRE 2.2.3. — *Si μ est une probabilité irréductible très étalée sur le groupe semi-simple G , il existe un réel δ , $0 < \delta < \sigma(\mu)$, tel que pour tout λ de α^* assez proche de zéro :*

(a) *le spectre de l'opérateur T_μ^λ possède un unique élément $s(\lambda)$ de plus grand module, $s(\lambda)$ est une valeur propre associée à un sous-espace propre de dimension un;*

(b) *si $E(\lambda)$ est le projecteur associé à $s(\lambda)$, $T_\mu^\lambda E(\lambda) = E(\lambda) T_\mu^\lambda = s(\lambda) E(\lambda)$ et le rayon spectral de $Q_\lambda = T_\mu^\lambda - s(\lambda) E(\lambda)$ est inférieur à δ ;*

(c) *$E(\lambda)$, $s(\lambda)$ et Q_λ dépendent continument de λ .*

Démonstration. — Puisque l'application qui à $\lambda \in \alpha^*$ associe T_μ^λ est continue pour la topologie de la norme, ceci est une conséquence de la proposition précédente et de la théorie des perturbations (voir par exemple [8]).

PROPOSITION 2.2.4. — *Si μ est une probabilité irréductible très étalée sur G , pour tout λ de α^* non nul, le rayon spectral de l'opérateur T_μ^λ est strictement inférieur à $\sigma(\mu)$.*

Démonstration. — En remplaçant au besoin μ par une de ses puissances de convolution on peut supposer que μ n'est pas étrangère à la mesure de Haar m . Si le rayon spectral de T_μ^λ est égal à $\sigma(\mu)$, puisque pour toute mesure positive ν , bornée, $\|T_\nu^\lambda\| \leq \|T_\nu^0\| \leq \|L_\nu\|$ l'opérateur $\sigma(\mu)^{-1} T_\mu^\lambda$ est quasi compact. En particulier il existe un complexe θ de module un et un élément φ de $L^2(\mathbf{B})$ tel que $T_\mu^\lambda \varphi = \theta \sigma(\mu) \varphi$. Ceci entraîne que :

$$\sigma(\mu) |\varphi| \leq \|T_\mu^\lambda \varphi\| \leq T_\mu^0 |\varphi|,$$

d'où (voir démonstration 2.2.2) $T_\mu^0 |\varphi| = \sigma(\mu) |\varphi|$. Donc d'une part $\varphi(k)$ est non nul pour presque tout k de \mathbf{K} (proposition 2.2.1), d'autre part pour presque tout k_0 de \mathbf{K} il existe un nombre complexe $\alpha(k_0)$ de module un tel que :

$$e^{-i\lambda\{H(x^{-1}k_0)\}} \varphi(\mathbf{K}(x^{-1}k_0)) = \alpha(k_0) |\varphi(\mathbf{K}(x^{-1}k_0))|, \quad \mu \text{ p. p.}$$

Cette propriété est vraie sur un ensemble de m mesure non nulle et par invariance de m :

$$m \{ g \in \mathbf{G}, e^{-i\lambda\{H(g)\}} \varphi(\mathbf{K}(g)) = \alpha(k_0) |\varphi(\mathbf{K}(g))| \} \neq 0,$$

ce qui n'est possible que si λ est nul car m est équivalente à dk da dn .

Dans l'énoncé suivant nous utilisons les notations introduites au corollaire 2.2.3.

COROLLAIRE 2.2.5. — Soit μ une probabilité très étalée irréductible sur \mathbf{G} . Pour tout voisinage \mathbf{V} assez petit de 0 dans α^* , $\text{Sup}_{\lambda \notin \mathbf{V}} \sigma(\mu)^{-n} \|T_\mu^\lambda\|$ et $\text{Sup}_{\lambda \in \mathbf{V}} \sigma(\mu)^{-n} \|Q_\lambda^n\|$ tendent vers zéro exponentiellement vite quand n tend vers l'infini.

Démonstration. — Examinons d'abord les opérateurs T_μ^λ . A cause de l'analogie du lemme de Riemann Lebesgue que nous avons rappelé en 2.1.1, il suffit de montrer que si \mathbf{C} est un compact de α^* ne contenant pas 0, il existe un réel α , $0 < \alpha < 1$, tel que pour tout entier n assez grand et tout λ de \mathbf{C} , $\sigma(\mu)^{-n} \|T_\mu^\lambda\|$ soit inférieur à α^n . D'après le corollaire 2.2.3, $(T_\mu^0)^n = s(0)^n E(0) + Q_0^n$ où $s(0) = \sigma(\mu)$ et Q_0 est de rayon spectral strictement inférieur à $\sigma(\mu)$. On en déduit que $b = \text{Sup}_{n \in \mathbf{N}} \sigma(\mu)^{-n} \|(T_\mu^0)^n\|$ est fini.

Fixons un réel a , $0 < a < 1$. Pour tout λ_0 non nul la proposition précédente montre qu'il existe un entier n tel que $\sigma(\mu)^{-n} \|T_\mu^{\lambda_0}\|$ est inférieur à a/b . Par continuité de T_μ^λ on peut trouver un voisinage $\mathbf{V}(\lambda_0)$ de λ_0 sur lequel $\sigma(\mu)^{-n} \|T_\mu^\lambda\|$ reste inférieur à a/b et alors, pour tout entier p :

$$\sigma(\mu)^{-(n+p)} \|(T_\mu^\lambda)^{n+p}\| \leq \frac{a}{b} \sigma(\mu)^{-p} \|T_\mu^{\lambda_0}\| \leq \frac{a}{b} \sigma(\mu)^{-p} \|T_\mu^0\| \leq a.$$

Par compacité de \mathbf{C} il existe donc un entier n_0 tel que, pour tout λ de \mathbf{C} :

$$\sigma(\mu)^{-n_0} \|(T_\mu^\lambda)^{n_0}\| \leq a < 1$$

et on conclut alors facilement.

La majoration des opérateurs Q_λ^n se fait d'une façon analogue en utilisant l'inégalité :

$$\sigma(\mu)^{-p} \|Q_\lambda^p\| \leq \sigma(\mu)^{-p} \|T_\mu^\lambda - s(\lambda)^p E(\lambda)\| \leq b + \|E(\lambda)\|.$$

La topologie sur \hat{Z} , s'identifiant à la topologie naturelle sur \mathfrak{a}^* il est clair d'après ce corollaire que :

COROLLAIRE 2.2.6. — *L'origine de \hat{G}_r est T^0 .*

Pour étudier l'application s définie au voisinage de 0 dans \mathfrak{a}^* au corollaire 2.2.3 nous supposons que μ possède un moment d'ordre deux (voir 2.4.2). Nous montrerons en 2.4 que contrairement à ce qui se passe par exemple sur \mathbf{R} , cette hypothèse n'est pas toujours nécessaire.

PROPOSITION 2.2.7. — *Si μ est une probabilité très étalée irréductible sur G possédant un moment d'ordre deux, l'application s est deux fois différentiable en zéro. Sa différentielle en ce point est nulle et sa différentielle seconde $d^2 s(0)$ est telle que $-d^2 s(0)$ définit une forme bilinéaire définie positive.*

Démonstration. — Il n'est pas difficile de voir que si μ possède un moment d'ordre 2, l'application qui à λ , $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, associe T_μ^λ est de classe C^2 (pour la norme d'opérateurs). La construction de $E(\lambda)$, Q_λ , $s(\lambda)$ (voir corollaire 2.2.3) par la théorie des perturbations montre que ces quantités dépendent de façon C^2 de λ , pour λ assez petit.

Pour tout élément w du groupe de Weyl et pour tout λ de \mathfrak{a}^* les représentations T^λ et $T^{w\lambda}$ sont équivalentes [19]. Il existe donc un opérateur inversible A tel que $T_\mu^{w\lambda} = AT_\mu^\lambda A^{-1}$ et pour tous λ assez petits $s(w\lambda) = s(\lambda)$, ce qui entraîne que $ds(0)$ est nul. Pour montrer que $-d^2 s(0)$ définit une forme bilinéaire définie positive, fixons un élément non nul λ de \mathfrak{a}^* et démontrons que la fonction $\xi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ définie au voisinage de 0 par $\xi(t) = s(t\lambda)$ a une dérivée seconde en zéro strictement négative. Soient φ et φ' deux fonctions de $L^2(\mathbf{B})$ vérifiant :

$$E(0)\varphi = \varphi, \quad E(0)^*\varphi' = \varphi' \quad \text{et} \quad \langle \varphi, \varphi' \rangle = 1,$$

et notons, si $n \in \mathbf{N}$, $h_n(t) = \langle Q_{t\lambda}^n \varphi, \varphi' \rangle$. De la relation :

$$Q_{t\lambda}^n = [\text{Id} - E(t\lambda)] Q_{t\lambda}^{n-1} [\text{Id} - E(t\lambda)]$$

et du fait que $E(t\lambda)$ est une fonction C^2 de t on déduit qu'il existe un réel c tel que pour tout entier n et t assez petit :

$$|h_n(t)| = |\langle Q_{t\lambda}^n (\text{Id} - E(t\lambda)) \varphi, (\text{Id} - E(t\lambda))^* \varphi' \rangle| \leq c \|Q_{t\lambda}^n\| t^2$$

et par le corollaire 2.2.5, il existe $c' > 0$ tel que $\sigma(\mu)^{-n} |h_n(t)| \leq c' t^2$ pour tout n . En particulier $\sigma(\mu)^{-n} h_n'(0)$ est borné en n .

Puisque $\xi(0) = \sigma(\mu)$ et $\xi'(0) = 0$:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{d^2}{dt^2} \{ \sigma(\mu)^{-n} \langle T_{\mu}^{t\lambda} \varphi, \varphi' \rangle \} (0) \\ &= \frac{d^2}{dt^2} \{ \sigma(\mu)^{-n} \xi(t)^n \langle E(t\lambda) \varphi, \varphi' \rangle + \sigma(\mu)^{-n} h_n(t) \} (0) \\ &= n \sigma(\mu)^{-1} \xi''(0) + \frac{d^2}{dt^2} \langle E(t\lambda) \varphi, \varphi' \rangle (0) + \sigma(\mu)^{-n} h_n''(0). \end{aligned}$$

La fonction $f_n(t) = \sigma(\mu)^{-n} \langle T_{\mu}^{t\lambda} \varphi, \varphi' \rangle$ est de type positif (car φ et φ' sont positives) et vérifie $f_n(0) = 1$. C'est donc la transformée de Fourier d'une variable aléatoire X_n définie sur un espace (Ω, \mathcal{A}, P) . D'après le corollaire 2.2.5, pour tout t non nul, $f_n(t)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Si $E(X_n)$ est l'espérance de X_n on en déduit que $P(|X_n - E(X_n)| < x)$ tend vers zéro pour tout $x > 0$ quand n tend vers l'infini. En appliquant l'inégalité de Bienaymé Tchebitchev ceci entraîne que $-f_n''(0) = E(X_n^2)$ tend vers l'infini ce qui n'est possible que si $\xi''(0)$ est strictement négatif à cause de (1).

2.3. THÉORÈME LOCAL. — Rappelons d'abord la formule de Plancherel « sphérique » sur un groupe de Lie semi simple G connexe de centre fini non compact [19]. Soit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ le système de racines (restreintes) positives associé à la décomposition d'Iwasawa $G = KAN$, écrit de telle sorte que pour un entier p , $\{\lambda_i, 1 \leq i \leq p\}$ soit l'ensemble des racines indivisibles [c'est-à-dire que $(1/2)\lambda_i$ est une racine si et seulement si $i > p$]. Notons m_{λ_i} , $1 \leq i \leq r$, la multiplicité de la racine λ_i et B la fonction Béta. Pour toute forme linéaire complexe v sur \mathfrak{a} on pose :

$$I(v) = \left\{ \prod_{i=1}^p B\left(\frac{m_{\lambda_i}}{2}, \frac{\langle v, \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i, \lambda_i \rangle}\right) \right\} \left\{ \prod_{i=p+1}^r B\left(\frac{m_{\lambda_i}}{2}, \frac{m_{\lambda_{i/2}}}{4} + \frac{\langle v, \lambda_i \rangle}{\langle \lambda_i, \lambda_i \rangle}\right) \right\}$$

et $c(v) = I(iv) \{I(\rho)\}^{-1}$. Alors il existe une mesure de Lebesgue $d\lambda$ sur \mathfrak{a}^* vérifiant :

« Si f est une fonction continue sur G de $L^1(G; K)$ telle que

$$Ff(\lambda) = \int_G \varphi_{\lambda}(g) f(g) dm(g)$$

est $|c(\lambda)|^{-2} d\lambda$ intégrable :

$$f(e) = \int_{\mathfrak{a}^*} Ff(\lambda) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda. »$$

Autrement dit si on identifie \hat{Z}_r à \mathfrak{a}^* la mesure $d\gamma$ introduite en 1.2.3 est égale à $|c(\lambda)|^{-2} d\lambda$.

Si μ est une probabilité irréductible très étalée sur G , soient φ_0 et φ_1 deux fonctions positives de $L^2(B)$ vérifiant :

$$T_{\mu}^0 \varphi_0 = \sigma(\mu) \varphi_0, \quad (T_{\mu}^0)^* \varphi_1 = \sigma(\mu) \varphi_1 \quad \text{et} \quad \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = 1.$$

Nous noterons m_{μ} la mesure de Radon sur G admettant par rapport à la mesure de Haar m la densité continue bornée strictement positive f_{μ} définie par :

$$f_{\mu}(g) = \int_K e^{-\rho\{H(gk)\}} \varphi_0(K(gk)) \varphi_1(k) dk = \langle T_{g^{-1}}^0 \varphi_0, \varphi_1 \rangle, \quad \text{si } g \in G.$$

THÉORÈME 2.3.1. — Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini non compact, $G = KAN$ une décomposition d'Iwasawa de G , d la dimension de \mathfrak{a} et p le nombre de racines positives indivisibles. Si μ est une probabilité très étalée irréductible sur G possédant un moment d'ordre deux;

(a) (Fonctions de concentration). Si C est un compact de G il existe une constante c telle que pour toutes mesures bornées positives ν_1 et ν_2 sur G et tout entier n :

$$(\nu_1 \star \mu^n \star \nu_2)(C) \leq cn^{-(2p+d)/2} \sigma(\mu)^n \|\mathbf{L}_{\nu_1}\| \cdot \|\mathbf{L}_{\nu_2}\|.$$

(b) (Théorème central limite local). Il existe une constante k (déterminée dans la démonstration) telle que pour toute fonction f continue à support compact sur G , la suite $\sigma(\mu)^{-n} n^{(2p+d)/2} \int_G f d\mu^n$ tend vers $k \int f dm_\mu$ quand n tend vers l'infini.

Démonstration. — Remarquons d'abord que pour toute fonction f de $C_c^+(G)$:

$$\int_G f d(m_\mu \star \mu) = \int (f \star \check{\mu}) dm_\mu = \langle \varphi_0, T_f^0 T_\mu^0 \varphi_1 \rangle = \sigma(\mu) \langle \varphi_0, T_f^0 \varphi_1 \rangle = \sigma(\mu) \int_G f dm_\mu,$$

d'où $m_\mu \star \mu = \sigma(\mu) m_\mu$ [de même $\mu \star m_\mu = \sigma(\mu) m_\mu$] et les hypothèses de la proposition 1.4.1 sont satisfaites. Au voisinage de 0 dans \mathfrak{a}^* , par la proposition 2.2.7 et le lemme 2 de [4], il existe un réel $c_G > 0$ tel que :

$$(1) \quad s(0)^{-1} s(\lambda) = 1 + \frac{1}{2\sigma(\mu)} \langle d^2 s(0) \lambda, \lambda \rangle + o(\|\lambda\|^2),$$

$$(2) \quad |c(\lambda)|^{-2} = c_G \prod_{i=1}^P |\langle \lambda, \lambda_i \rangle|^2 + o\left(\prod_{i=1}^P |\langle \lambda, \lambda_i \rangle|^2\right).$$

En particulier il existe $\varepsilon > 0$, $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que si $\|\lambda\| \leq \varepsilon$:

$$(3) \quad |s(0)^{-1} s(\lambda)| \leq e^{-r_1 \|\lambda\|^2},$$

$$(4) \quad |c(\lambda)|^{-2} \leq r_2 \|\lambda\|^{2p}.$$

Choisissons ε assez petit pour que la décomposition $T^\lambda = s(\lambda) E(\lambda) + Q_\lambda$ (corollaire 2.2.3) ait un sens sur $V = \{\lambda \in \mathfrak{a}^*, \|\lambda\| \leq \varepsilon\}$. D'après la proposition 1.4.1 il suffit pour établir le théorème d'étudier :

$$a_n \int_V \langle T_{\nu_1}^\lambda T_{\mu^n}^\lambda T_{\nu_2}^\lambda 1, T_g^\lambda 1 \rangle |c(\lambda)|^{-2} d\lambda, \quad \text{si } a_n = \sigma(\mu)^{-n} n^{(2p+d)/2},$$

où g est une fonction de $C_c^+(G) \cap L^1(G; \mathbf{K})$ telle que Fg soit une fonction de λ , $|c(\lambda)|^{-2} d\lambda$ intégrable et ν_1, ν_2 deux mesures positives bornées. Cette expression est égale à :

$$a_n \int_V s(\lambda)^n \langle T_{\nu_1}^\lambda E(\lambda) T_{\nu_2}^\lambda 1, T_g^\lambda 1 \rangle |c(\lambda)|^{-2} d\lambda + a_n \int_V \langle T_{\nu_1}^\lambda Q_\lambda^n T_{\nu_2}^\lambda 1, T_g^\lambda 1 \rangle |c(\lambda)|^{-2} d\lambda.$$

Le second terme est majoré par :

$$\|\mathbf{L}_{\nu_1}\| \cdot \|\mathbf{L}_{\nu_2}\| a_n \int_V \|Q_\lambda^n\| \cdot |Fg(\lambda)| \cdot |c(\lambda)|^{-2} d\lambda$$

donc tend vers zéro uniformément en ν_1 et ν_2 quand n tend vers l'infini par le

corollaire 2.2.5. Utilisant (3) et (4) il est alors clair que l'on a bien la condition (1) de la proposition 1.4.1 ce qui montre le *a*.

D'autre part, avec le changement de variable $\lambda \rightarrow \lambda/\sqrt{n}$;

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \int_V \langle T_{v_1}^\lambda T_{\mu^*}^\lambda T_{v_2}^\lambda 1, T_g^\lambda 1 \rangle |c(\lambda)|^{-2} d\lambda \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p}{\sigma(\mu)^n} \int_{\|\lambda\| \leq \varepsilon \sqrt{n}} s\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)^n \left\langle T_{v_1}^{\lambda/\sqrt{n}} E\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) T_{v_2}^{\lambda/\sqrt{n}} 1, T_g^{\lambda/\sqrt{n}} 1 \right\rangle \left|c\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)\right|^{-2} d\lambda, \end{aligned}$$

or d'après (1) et (2), $\sigma(\mu)^{-n} s(\lambda/\sqrt{n})^n$ tend vers $\exp\{1/2 \sigma(\mu) \langle d^2s(0)\lambda, \lambda \rangle\}$ et $n^p |c(\lambda/\sqrt{n})|^{-2}$ tend vers $c_G \prod_{i=1}^p |\langle \lambda, \lambda_i \rangle|^2$ quand n tend vers l'infini. Utilisant les inégalités (3) et (4) pour appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue on obtient que la limite précédente est égale à :

$$k \langle T_{v_1}^0 E(0) T_{v_2}^0 1, T_g^0 1 \rangle,$$

$$\text{où : } k = c_G \int_{a^*} \exp\left\{ \frac{1}{2 \sigma(\mu)} \langle d^2s(0)\lambda, \lambda \rangle \right\} \prod_{i=1}^p |\langle \lambda, \lambda_i \rangle|^2 d\lambda.$$

Puisque pour tout φ de $L^2(\mathbf{B})$, $E(0)\varphi = \langle \varphi, \varphi_1 \rangle \varphi_0$ et $T_{m_K}^0 \varphi = \langle \varphi, 1 \rangle 1$:

$$\begin{aligned} m_\mu(\tilde{v}_1 \star g \star \tilde{v}_2) &= \langle \varphi_0, T_{v_1}^0 T_g^0 T_{v_2}^0 \varphi_1 \rangle = \langle \varphi_0, T_{v_1}^0 T_g^0 T_{m_K}^0 T_{v_2}^0 \varphi_1 \rangle \\ &= \langle T_{v_2}^0 \varphi_1, 1 \rangle \langle \varphi_0, T_{v_1}^0 T_g^0 1 \rangle = \langle \langle T_{v_2}^0 1, \varphi_1 \rangle \varphi_0, T_{v_1}^0 T_g^0 1 \rangle \\ &= \langle T_{v_1}^0 E(0) T_{v_2}^0 1, T_g^0 1 \rangle. \end{aligned}$$

Le (2) de la proposition 1.3.1 est donc vérifié et le théorème est montré.

Nous avons démontré dans [3] que si μ est une probabilité étalée sur un groupe connexe non compact G , l. c. d., pour tout compact C de G , il existe une constante $a, a > 0$, telle que :

$$\sup_{x, y \in G} \mu^n(x C y) \leq a n^{-1/2}.$$

Lorsque G n'est pas moyennable, cette quantité décroît exponentiellement et il est plus intéressant de majorer $\sup_{x, y \in G} \sigma(\mu)^{-n} \mu^n(x C y)$. De même l'analogie de la théorie du renouvellement consiste en l'étude des limites vagues du noyau $\Gamma(x, \cdot) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma(\mu)^{-n} (\varepsilon_x \star \mu^n)(\cdot)$ défini sur les boréliens de G quand x tend vers l'infini.

On a :

COROLLAIRE 2.3.2. — *Soit μ une probabilité irréductible très étalée possédant un moment d'ordre deux sur un groupe G connexe, l. c. d., non moyennable. Alors, pour tout compact C de G il existe une constante $a > 0$ telle que pour tout entier n :*

$$(1) \quad \sup_{x, y \in G} \sigma(\mu)^{-n} \mu^n(x C y) \leq a n^{-3/2}$$

et le noyau $\Gamma(x, \cdot)$ tend vaguement vers zéro quand x tend vers l'infini dans G .

Démonstration. — Utilisons le même argument qu'en (2.2.2). Le groupe G possède un quotient par un sous-groupe moyennable H tel que G/H soit un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini non compact. La projection ν de μ sur G/H vérifie les hypothèses du théorème 2.3.1 et $\sigma(\nu) = \sigma(\mu)$. Il suffit de montrer le corollaire pour ν et c'est alors une conséquence immédiate du théorème.

Remarque. — Nous verrons que l'inégalité (1) n'est plus vraie si on suppose seulement que μ est étalée.

2.4. ÉTUDE DE $SL(2, \mathbf{R})$. — Sur \mathbf{R} l'hypothèse de moment d'ordre deux est nécessaire pour avoir le théorème local (avec $a_n = \sqrt{n}$). L'exemple des probabilités bi-invariantes par un sous-groupe compact maximal traité dans [4], montre qu'il n'est pas de même sur les groupes semi-simples. Dans ce paragraphe nous établissons que le théorème 2.3.1 reste vrai si $G = SL(2, \mathbf{R})$ même si μ n'a pas de moment alors que les conditions « très étalée » et « irréductibles » sont indispensables.

PROPOSITION 2.4.1. — Si $G = SL(2, \mathbf{R})$ les conclusions du théorème 2.3.1 sont vraies dès que μ est très étalée irréductible (donc sans hypothèse du moment).

Démonstration. — Nous utilisons l'existence d'un prolongement analytique uniformément borné de la série de représentations $\{T^\lambda, \lambda \in \alpha^*\}$, [17] : si on identifie α^* à l'ensemble des réels de \mathbf{C} il existe un voisinage V de 0 dans \mathbf{C} , un espace de Hilbert H et pour tout z de V une représentation continue R^z de G dans H vérifiant :

- (a) pour tout g de G , l'application qui à $z \in V$ associe R_g^z est analytique;
- (b) $\sup_{g \in G} \|R_g^z\|$ est borné sur V ;
- (c) si z est réel les représentations R^z et T^z sont unitairement équivalentes.

La famille d'opérateurs $R_\mu^z, z \in V$, est alors analytique et a les mêmes propriétés spectrales que T_μ^z lorsque z est réel. On en déduit que l'application s définie au corollaire 2.2.3 est analytique près de zéro. Nous avons déjà vu que $s(\lambda) = s(-\lambda)$ (car il existe un élément du groupe de Weyl opérant par symétrie) et puisque pour tout φ de $L^2(\mathbf{B})$, $T_\mu^{-\lambda} \overline{\varphi} = \overline{T_\mu^\lambda \varphi}$, $\overline{s(\lambda)} = s(-\lambda)$ si λ est proche de zéro. Il existe donc un réel non nul α et un entier r tels que, au voisinage de 0 :

$$(1) \quad s(\lambda) = s(0) - \alpha \lambda^{2r} + o(\lambda^{2r}).$$

D'après la proposition 2.2.4 α doit être positif. A l'aide de cette estimation on peut reprendre la démonstration du théorème 2.3.1 et l'on obtient que $\sigma(\mu)^{-n} n^{3/2r} \mu^n$ converge vaguement vers une mesure de Radon non nulle. Mais ceci n'est possible que si r est égal à un car sinon la série $\sum_{n \geq 0} \sigma(\mu)^{-n} \mu^n$ n'est pas une mesure de Radon ce qui contredit un résultat de [11]. Donc $r=1$ et (1) fournit l'estimation nécessaire à la démonstration du théorème 2.3.1.

Remarque. — Il est clair que cette proposition est vraie sur tous les groupes de rang un dont la série principale sphérique T^λ admet un prolongement analytique uniformément borné.

Pour montrer que l'hypothèse d'irréductibilité est indispensable pour obtenir un théorème local il suffit de considérer l'exemple d'une probabilité μ sur $SL(2, \mathbf{R})$ portée par $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R}), \{a \geq 2, b \geq 0, c \geq 0\} \right\}$ car si C est un compact de G , pour n assez grand $\mu^n(C)$ est nul. Donc pour toute suite $a_n, n \in \mathbf{N}$, $a_n \mu^n$ tend vaguement vers zéro.

Le résultat suivant montre l'importance de la condition très étalée puisque sous cette hypothèse, sur $SL(2, \mathbf{R})$, le théorème local dit que $\sigma(\mu)^{-n} n^{3/2} \mu^n$ converge vaguement.

Puisque, d'après [11], pour toute probabilité μ sur $SL(2, \mathbf{R})$, $\sum_{n \geq 0} \sigma(\mu)^{-n} \mu^n(C)$ est fini si C est compact, la condition $r > 1$ est maximale. Par contre on peut se demander si il n'existe pas des probabilités à support compact vérifiant la proposition.

PROPOSITION 2.4.2. — *Pour tout réel $r, r > 1$, il existe une probabilité μ irréductible non étrangère à la mesure de Haar sur $SL(2, \mathbf{R})$, un compact C et un réel $k > 0$ tels que pour tout entier n :*

$$\sigma(\mu)^{-n} \mu^n(C) \geq kn^{-r}.$$

Démonstration. — Considérons la représentation A de $SL(2, \mathbf{R})$ à valeurs dans $L^2(\mathbf{R})$ donnée par, si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{R})$, $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ et $t \in \mathbf{R}$:

$$A_g \varphi(t) = |-bt + d|^{-1} \varphi\left(\frac{at - c}{-bt + d}\right).$$

C'est une représentation unitaire de $G = SL(2, \mathbf{R})$ équivalente à T^0 (correspondant à la réalisation sur $\bar{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbf{R} \right\}$) [19]. Dans cette équivalence à la fonction identiquement égale à 1 de $L^2(\mathbf{B})$ correspond la fonction $\xi(t) = \{\pi(1+t^2)\}^{-1/2}$ de $L^2(\mathbf{R})$. Si m_K est la mesure de Haar sur $K = SO(2)$ normalisée, A_{m_K} est donc la projection orthogonale sur le sous-espace de $L^2(\mathbf{R})$ engendré par ξ et si f est une fonction de $L^1(G; K)$:

$$A_f \varphi = Ff(0) \langle \varphi, \xi \rangle \xi, \quad \varphi \in L^2(\mathbf{R}).$$

Fixons une fonction f strictement positive de $L^1(G; K)$ d'intégrale égale à un. Soit ν la probabilité sur $SL(2, \mathbf{R})$ portée par \bar{N} vérifiant, pour une fonction h de $L^1(\mathbf{R})$, positive d'intégrale 1 :

$$\nu \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}, a < n < b \right\} = \int_a^b h(x) dx; \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

• Nous allons voir que pour f et h bien choisis, $\mu = 1/2(f \cdot m + \nu)$ (où m est la mesure de Haar fixée) vérifie la conclusion de la proposition.

Notons $*$ le produit de convolution sur \mathbf{R} et $\hat{}$ la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbf{R})$ prolongeant l'application qui à φ de $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ associe :

$$\hat{\varphi}(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{itx} \varphi(x) dx.$$

On a, si $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$;

$$A_\nu \varphi(t) = \int_G A_g \varphi(t) d\nu(g) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(t-x) h(x) dx = (\varphi * h)(t).$$

Le rayon spectral de l'opérateur A_ν est donc égal à un.

Supposons que $\sigma(\mu)$ est strictement supérieur à $1/2$, c'est-à-dire que μ est très étalée. La représentation A de $SL(2, \mathbf{R})$ étant équivalente à T^0 , la proposition 2.2.1 montre qu'il existe un vecteur ψ de $L^2(\mathbf{R})$ non nul tel que $A_\mu \psi = \sigma(\mu) \psi$. Si on note σ le réel $\sigma(\mu)$ on a :

$$\sigma \psi = \frac{1}{2}(A_f \psi + A_\nu \psi) = \frac{1}{2}(Ff(0) \langle \psi, \xi \rangle \xi + \psi * h)$$

et en prenant les transformées de Fourier :

$$2\sigma \hat{\psi} = (2\pi)^{-1} Ff(0) \langle \hat{\psi}, \hat{\xi} \rangle \hat{\xi} + \hat{\psi} \hat{h}$$

et :

$$\hat{\psi} = \{2\pi(2\sigma - \hat{h})\}^{-1} Ff(0) \langle \hat{\psi}, \hat{\xi} \rangle \hat{\xi},$$

en particulier $\langle \hat{\psi}, \hat{\xi} \rangle$ est non nul et :

$$\langle \hat{\psi}, \hat{\xi} \rangle = \langle \hat{\psi}, \hat{\xi} \rangle (2\pi)^{-1} Ff(0) \langle (2\sigma - \hat{h})^{-1} \hat{\xi}, \hat{\xi} \rangle,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{2\pi}{Ff(0)} = \int_{\mathbf{R}} \frac{|\hat{\xi}(t)|^2}{2\sigma - \hat{h}(t)} dt.$$

Pour $r > 1$, choisissons comme densité h celle dont la transformée de Fourier est donnée par $\hat{h}(t) = \exp(-|t|^{1/r})$. Puisque $\hat{\xi}(t)$ est de l'ordre de $-\text{Log}|t|$ à l'origine et que σ est supérieur à $1/2$ on obtient :

$$(1) \quad \frac{2\pi}{Ff(0)} \leq \int_{\mathbf{R}} \frac{|\hat{\xi}(t)|^2}{1 - \hat{h}(t)} dt < +\infty.$$

Quand f parcourt l'ensemble des fonctions positives de $L^1(G; \mathbf{K})$ d'intégrale 1, $Ff(0)$ prend toutes les valeurs de $]0, 1[$. On peut donc trouver une fonction f de ce type pour laquelle l'inégalité (1) n'est pas vérifiée et alors $\sigma(\mu)$ est égal à $1/2$. La probabilité μ est irréductible, non singulière à la mesure de Haar et vu le choix de h , pour tout compact C de G tel que

$C \cap \overline{N}$ est d'intérieur non vide dans \overline{N} , il existe un réel $k > 0$ pour lequel pour tout entier n :

$$\sigma(\mu)^{-n} \mu^n(C) \geq \sigma(\mu)^{-n} \frac{v^n(C \cap \overline{N})}{2^n} \geq v^n(C \cap \overline{N}) \geq kn^{-r}.$$

2.5. ÉTUDE DES PROJECTIONS DE μ^n SUR K , A ET N . — Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini non compact, $G = KAN$ une décomposition d'Iwasawa. Si μ est une probabilité sur G irréductible possédant une densité à support compact nous voulons montrer que les projections de μ^n sur K , A et N satisfont à un théorème local. En d'autres termes si $Z_n, n \in \mathbf{N}$, est un produit de n variables aléatoires indépendantes de loi μ sur G , s'écrivant dans la décomposition d'Iwasawa $Z_n = K_n A_n N_n$ nous voulons estimer, en un certain sens, les lois de K_n, A_n et N_n lorsque n tend vers l'infini.

Raugi a montré dans [15] que le couple (K_n, N_n) converge en loi vers une probabilité sur $K \times N$ de la forme $\lambda_1 \otimes \lambda_2$. Donc si μ_1^n est la projection de μ^n sur K , μ_2^n la projection de μ^n sur N , μ_3^n la projection de μ^n sur $K \times N$, μ_1^n tend vaguement vers λ_1 , μ_2^n vers λ_2 , et μ_3^n vers $\lambda_1 \otimes \lambda_2$. C'est un théorème local pour les projections de μ^n sur K , N et $K \times N$.

Il reste à étudier la projection de μ^n sur KA , car K étant compact on obtiendra en même temps un théorème local pour la projection sur A . Raugi [15] montre qu'essentiellement, du point de vue du théorème central limite et de la loi des grands nombres, $\text{Log } A_n = H(Z_n)$ se comporte comme la somme de n variables aléatoires indépendantes équidistribuées sur \mathfrak{a} décentrées. La proposition suivante montre qu'il en est de même du point de vue du théorème local.

Notons $v_n, n \in \mathbf{N}$, la projection de μ^n sur KA définie par, si D est un borélien de KA , $v_n(D) = \mu^n(DN)$. Soit φ_0 l'unique élément de $L^2(B)$ positif de norme un vérifiant $T_\mu^0 \varphi_0 = \sigma(\mu) \varphi_0$ (cf. proposition 2.2.1), m_1 la mesure sur K admettant la densité φ_0 par rapport à la mesure de Haar et m_2 la mesure sur A ayant pour densité la fonction $l(a) = e^{\rho\{H(a)\}}$, $a \in A$, par rapport à la mesure de Haar de A .

PROPOSITION 2.5.1. — Soit μ une probabilité irréductible possédant une densité à support compact sur le groupe semi-simple G et d le rang de G (i.e. $\dim A = d$). Il existe une constante k non nulle telle que la suite de mesures $\sigma(\mu)^{-n} n^{d/2} v_n, n \in \mathbf{N}$, sur $KA \simeq K \times A$ converge vaguement vers $k(m_1 \otimes m_2)$.

Démonstration. — A. Pour tout λ de \mathfrak{a}^* considérons la représentation V^λ de G dans $C(K)$, espace de Banach des fonctions continues sur K muni de la norme uniforme, définie par :

$$V_g^\lambda \varphi(k) = e^{-(i\lambda + \rho)H(g^{-1}k)} \varphi(K(g^{-1}k)); \quad g \in G, \quad k \in K, \quad \varphi \in C(K).$$

Puisque la probabilité μ possède une densité à support compact, $V_\mu^\lambda = \int_G V_g^\lambda d\mu(g)$ définit un opérateur compact sur $C(K)$ dépendant continument de λ . Il est clair que V_μ^0 est un

opérateur positif irréductible au sens de [16] et on montre comme au corollaire 2.2.3 qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tout λ assez petit :

$$V_\mu^\lambda = t(\lambda) F(\lambda) + P_\lambda,$$

où $t(\lambda)$ est l'unique élément du spectre de V_μ^λ de module supérieur à δ , $F(\lambda)$ est la projection sur le sous-espace de dimension un associé à $t(\lambda)$ [elle vérifie $V_\mu^\lambda F(\lambda) = F(\lambda) V_\mu^\lambda = t(\lambda) F(\lambda)$] et P_λ est un opérateur de rayon spectral inférieur à δ .

Pour tout m de M soit $\tau_m : C(K) \rightarrow C(K)$ l'application définie par $(\tau_m \varphi)(k) = \varphi(km)$, $k \in K$. Puisque M normalise N et centralise A il est clair que $V_\mu^\lambda \tau_m = \tau_m V_\mu^\lambda$. En particulier, si φ est l'unique vecteur propre, à une constante près, de l'opérateur V_μ^λ associé à $t(\lambda)$ (pour λ assez petit) on a :

$$V_\mu^\lambda (\tau_m \varphi) = \tau_m (V_\mu^\lambda \varphi) = t(\lambda) (\tau_m \varphi); \quad m \in M,$$

et par unicité $\tau_m \varphi = \varphi$ c'est-à-dire que φ est dans $L^2(B)$. On en déduit que le vecteur propre positif associé à $t(0)$ est un vecteur propre positif de T_μ^0 donc (proposition 2.2.1) que $t(0) = \sigma(\mu)$ et que pour tout λ assez petit $t(\lambda)$ est égal à $s(\lambda)$ (cf. corollaire 2.2.3). D'autre part on montre comme dans le corollaire 2.2.5 que pour tout $\varepsilon > 0$, $\sup \{ \sigma(\mu)^{-n} \| V_\mu^\lambda \|, |\lambda| > \varepsilon \}$ et $\sup \{ \sigma(\mu)^{-n} \| P_\lambda \|, |\lambda| < \varepsilon \}$ tendent vers zéro exponentiellement vite quand n tend vers l'infini.

B. Si β est une fonction de $C_c(\alpha)$ et λ un élément de α^* soit :

$$\hat{\beta}(\lambda) = \int_\alpha e^{(i\lambda + \rho)(x)} \beta(x) dx,$$

où dx est la mesure de Lebesgue sur α . D'après la formule d'inversion classique, pour tout x de α :

$$e^{\rho(x)} \beta(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\alpha^*} e^{-i\lambda(x)} \hat{\beta}(\lambda) d\lambda.$$

Si φ est une fonction de $C(K)$ considérons la fonction f sur KA définie par $f(ka) = \varphi(k) \beta(H(a))$, $k \in K$, $a \in A$ et la fonction \tilde{f} sur G définie par $\tilde{f}(kan) = f(ka)$, $k \in K$, $a \in A$, $n \in N$.

Pour des commodités d'écriture étudions la suite v'_n des projections de $\tilde{\mu}^n$ (image de μ^n par l'application qui à $g \in G$ associe g^{-1}). A l'aide du théorème de Fubini, on a, si e est l'élément neutre de K :

$$\begin{aligned} \int_{KA} f dv'_n &= \int_G \tilde{f}(g) d\tilde{\mu}^n(g) = \int_G \varphi(K(g)) \beta(H(g)) d\tilde{\mu}^n(g) \\ &= \int_G \varphi(K(g^{-1})) \beta(H(g^{-1})) d\mu^n(g) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_G \varphi(K(g^{-1})) \left\{ \int_{\alpha^*} e^{-\rho\{H(g^{-1})\}} e^{-i\lambda\{H(g^{-1})\}} \hat{\beta}(\lambda) d\lambda \right\} d\mu^n(g) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\alpha^*} (V_{\mu^n}^\lambda \varphi)(e) \hat{\beta}(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Utilisant alors les résultats de A comme dans la démonstration du théorème 2.3.1 on obtient, pour ε assez petit :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} (2\pi)^d n^{d/2} \sigma(\mu)^{-n} \int_{KA} f d\nu'_n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma(\mu)^{-n} n^{d/2} \int_{\{\lambda \in \mathfrak{a}^*, |\lambda| < \varepsilon\}} s(\lambda)(F(\lambda)\varphi)(e) \hat{\beta}(\lambda) d\lambda \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|\lambda| \leq \varepsilon \sqrt{n}} \left[s(0)^{-1} s\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) \right]^n \left(F\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)\varphi \right)(e) \hat{\beta}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) d\lambda \\ &= (F(0)\varphi)(e) \hat{\beta}(0) \int_{\mathfrak{a}^*} \exp\left\{ \frac{1}{2\sigma(\mu)} \langle d^2 s(0)\lambda, \lambda \rangle \right\} d\lambda. \end{aligned}$$

Si φ_1 est un élément non nul de $L^2(\mathbf{B})$ tel que $(T_\mu^0)^* \varphi_1 = \sigma(\mu) \varphi_1$ et $\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = 1$, la mesure w sur K admettant la densité φ_1 par rapport à la mesure de Haar vérifie $(V_\mu^0)^* w = \sigma(\mu) w$, d'où :

$$(F(0)\varphi)(e) = \varphi_0(e) \int_K \varphi(k) dw(k).$$

En échangeant le rôle de μ et de $\check{\mu}$ on a donc prouvé que $\sigma(\mu)^{-n} n^{d/2} \int f d\mu^n$ tend vers $k \int f d(m_1 \otimes m_2)$ si :

$$k = \varphi_1(e) (2\pi)^{-d} \int_{\mathfrak{a}^*} \exp\left\{ \frac{1}{2\sigma(\mu)} \langle d^2 s(0)\lambda, \lambda \rangle \right\} d\lambda.$$

Un argument de densité permet de conclure.

Remarque 1. — Il est clair que la proposition est vraie dès que μ est une probabilité irréductible très étalée telle que V_μ^λ définit, si $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, un opérateur compact sur $C(K)$. Ceci est en particulier vérifié par toutes les probabilités adaptées sur G , bi-invariantes par K .

Remarque 2. — Si Z_n , $n \in \mathbf{N}$, est le produit de n matrices aléatoires de $Sl(2, \mathbf{R})$ indépendantes de loi μ et x un vecteur de \mathbf{R}^2 , la proposition permet d'estimer la loi de $Z_n x$.

III. — Théorème local sur une classe de groupes moyennables.

(3.1) Dans cette partie nous appliquons les résultats du paragraphe I pour montrer le théorème local sur la classe C de groupes extensions compactes de groupe nilpotent, donc moyennables, définie ainsi :

A un groupe semi-simple H connexe de centre fini et à une décomposition d'Iwasawa $H = KAN$ de H associons le groupe MN où M est le centralisateur de A dans K .

C'est la classe des groupes MN ainsi obtenus lorsque H est un groupe de rang un et N n'est pas abélien.

Notons que N est nilpotent, M compact et que MN est isomorphe à un produit semi direct $N \times_{\circ} M$. Le cas où N est abélien se traite de façon analogue mais plus simplement (voir remarque 3). Donnons un exemple de groupe de la classe C. Si $H = SU(n, 1)$, M est isomorphe à $U(n-1)$ et N au groupe d'Heisenberg de dimension $2(n-1)+1$ donc MN s'identifie à l'ensemble $C^{n-1} \times R \times U(n-1)$ muni du produit :

$$(z, t, k)(z', t', k') = (z + kz', t + t' + \text{Im} \langle kz', z \rangle, kk'),$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur C^{n-1} .

La raison du choix de ces groupes est que (MN, M) est un couple de Guelfand. Rappelons en effet les résultats de Korányi [13] : si $H = KAN$ est un groupe de rang un du type considéré au-dessus, le système de racines positives est de la forme $\{\alpha, 2\alpha\}$ car on suppose que N n'est pas abélien. Notons \mathfrak{h}_1 le sous-espace propre de l'algèbre de Lie \mathfrak{h} de H associé à α , p sa dimension et \mathfrak{h}_2 le sous-espace associé à 2α , q sa dimension. L'algèbre de Lie \mathfrak{n} de N est égale à $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ et $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] = \mathfrak{h}_2$. Pour simplifier les notations nous munissons \mathfrak{n} du produit scalaire défini à partir de l'involution de Cartan θ et de la forme de Killing B par, si $\mathfrak{h} = [4(p+4q)]^{-1/2}$:

$$\langle X_1 + Y_1, X_2 + Y_2 \rangle = -\sqrt{b} B(X_1, \theta X_2) - B(Y_1, \theta Y_2) \quad (X_1, X_2 \in \mathfrak{h}_1, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{h}_2).$$

Le groupe M est connexe et opère par isométries sur \mathfrak{n} à l'aide de la représentation adjointe. Il laisse stable \mathfrak{h}_1 et \mathfrak{h}_2 et opère transitivement sur la sphère unité de \mathfrak{h}_1 .

Si ds est la mesure de Haar normalisée sur $S = SO(\mathfrak{h}_2)$, groupe des isométries linéaires de \mathfrak{h}_2 de déterminant un, fixons un vecteur U de \mathfrak{h}_2 et posons :

$$j^{(q)}(Y) = \int_S e^{i \langle U, sY \rangle} ds, \quad Y \in \mathfrak{h}_2.$$

En particulier, si $q=1$, $j^{(q)}(Y) = e^{iY}$. Soit $\alpha = p/2 - 1$ et L_n^α le polynôme de Laguerre d'indice α de degré n . Pour tout λ de R posons :

$$\varphi_{\lambda, n}(m \exp(X+Y)) = \frac{1}{L_n^\alpha(0)} j^{(q)}(\lambda Y) e^{-1/2|\lambda| \cdot \|X\|^2} L_n^\alpha(|\lambda| \cdot \|X\|^2),$$

si $m \in M$, $X \in \mathfrak{h}_1$, $Y \in \mathfrak{h}_2$.

(3.2) Alors $\varphi_{\lambda, n}$, $\lambda \in R$, $n \in N$, sont des fonctions sphériques de type positif sur le couple de Guelfand (MN, M) . Si $d\gamma$ est la mesure sur $R \times N$ produit de la mesure sur R de densité $|\lambda|^{q+\alpha}$ par rapport à la mesure de Lebesgue $d\lambda$ et de la mesure de comptage sur N il existe une mesure de Haar m sur $G = MN$ telle que si f est une fonction sur G continue intégrable bi-invariante par M dont la transformée $Ff(\lambda, n) = \int \varphi_{\lambda, n}(g) f(g) dm(g)$ est $d\gamma$ intégrable :

$$f(e) = \int_{R \times N} Ff(\lambda, n) d\gamma(\lambda, n) \quad (\text{cf. [13]}).$$

Notons $T^{\lambda, n}$ la représentation de \hat{G} associée à $\phi_{\lambda, n}$. Remarquons que $T^{\lambda, n} = T^{-\lambda, n}$ si q est différent de un et que, pour tout entier n , $T^{0, n}$ est la représentation triviale de G . Afin d'appliquer les résultats du paragraphe I déterminons les voisinages de l'origine dans \hat{G} , (égal ici à \hat{G}) ou, ce qui nous suffit vu la formule de Plancherel, la trace de ces voisinages sur le sous-ensemble de \hat{G} formé des représentations $T^{\lambda, n}$.

PROPOSITION 3.1. — Si $V_\varepsilon = \{T^{\lambda, n} \in \hat{G}, |\lambda|(n+1) < \varepsilon\}$, la famille $\{V_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ est une base de voisinages de la représentation triviale de MN sur l'ensemble des représentations $T^{\lambda, n}$, $(\lambda, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}$, muni de la topologie induite par celle de \hat{G} .

Démonstration. — Cette topologie est métrisable et une suite de représentations de la forme $T^{\lambda, n}$ converge vers l'une d'elles si et seulement si les fonctions $\phi_{\lambda, n}$ correspondantes convergent uniformément sur tout compact.

(a) Montrons que V_ε est un voisinage de la représentation triviale si $\varepsilon > 0$. Si ce n'est pas le cas il existe une suite $(\lambda_p, n_p)_{p \in \mathbf{N}}$ de $\mathbf{R} \times \mathbf{N}$ telle que pour tout p , $|\lambda_p|(n_p+1) \geq \varepsilon$ et telle que ϕ_{λ_p, n_p} tend vers un uniformément sur les compacts quand p tend vers l'infini. En écrivant cette condition sur $\exp \mathfrak{h}_2$ on voit que λ_p doit tendre vers 0 (donc n_p tend vers l'infini). Soit $w > 0$, d'après le théorème 7.6.5 de [18] il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que si $0 \leq x \leq w$ et $n \geq B$:

$$n^{(1/4) - (\alpha/2)} |x^{(\alpha/2) + (1/4)} e^{-x/2} L_n^\alpha(x)| \leq A,$$

d'où, puisque $L_n^\alpha(0)$ est équivalent à $n^\alpha/\Gamma(\alpha+1)$ quand n tend vers l'infini :

Il existe A' tel que si $X \in \mathfrak{h}_1$, $|\lambda_p| \cdot \|X\|^2 \leq w$ et $n_p \geq B$:

$$|\phi_{\lambda_p, n_p}(\exp X)| \leq |\{L_{n_p}^\alpha(0)\}^{-1} e^{-|\lambda_p|(\|X\|^2/2)} L_{n_p}^\alpha(|\lambda_p| \cdot \|X\|^2)| \\ \leq A' \{n_p |\lambda_p| \cdot \|X\|^2\}^{-(\alpha/2) + (1/4)} \leq A' \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \|X\|^2 \right\}^{-(\alpha/2) + (1/4)}$$

Choisissons alors X assez grand pour que le dernier terme de cette inégalité soit inférieur à $1/2$. Pour p assez grand cette inégalité est vérifiée et $\phi_{\lambda_p, n_p}(\exp X)$ ne peut pas tendre vers un.

(b) Montrons que les voisinages V_ε , $\varepsilon > 0$, forment une base. Vérifions d'abord l'inégalité suivante, (que nous emploierons aussi plus tard) :

(1) $\forall \alpha > 0, \exists a > 0, \exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0$ tels que si $n \in \mathbf{N}$ et $0 \leq x \leq a(n+1)^{-1}$,

$$1 - c_1 x(n+1) \leq e^{-x/2} L_n^\alpha(x) \{L_n^\alpha(0)\}^{-1} \leq 1 - c_2 x(n+1).$$

Si n est non nul les racines du polynôme L_n^α sont positives et distinctes (théorème 3.3.1 de [18]) donc si $x(n)$ est la plus petite d'entre elles, la fonction $h(x) = e^{-x/2} L_n^\alpha(x) \{L_n^\alpha(0)\}^{-1}$ est convexe sur $[0, x(n)]$ et vérifie :

$$1 + xh'(0) \leq h(x) \leq 1 - \frac{x}{x(n)}.$$

Puisque $h'(0) = -(1/2) - (n/(\alpha + 1))$ et que (théorème 6.31.3 de [18]) il existe deux constantes $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ telles que :

$$k_1 (n+1)^{-1} \leq x(n) \leq k_2 (n+1)^{-1},$$

on obtient immédiatement (1), le cas $n=0$ étant évident.

Pour montrer que $\{V_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ forme une base de voisinages il suffit de montrer que si $(\lambda_p, n_p) \in V_{1/p}$, Φ_{λ_p, n_p} tend vers un uniformément sur tout compact quand p tend vers l'infini. Remarquons d'abord que λ_p tend vers 0 donc que $j^{(q)}(\lambda_p, Y)$ tend vers un uniformément sur les compacts de \mathfrak{h}_2 . D'autre part si $X \in \mathfrak{h}_1$ et $\|X\| \leq A$, pour p assez grand :

$$|\lambda_p| \cdot \|X\|^2 \leq a(n_p + 1)^{-1}$$

et d'après (1) :

$$|e^{-|\lambda_p|(\|X\|^2/2)} \{L_{n_p}^\alpha(0)\}^{-1} L_{n_p}^\alpha(|\lambda_p| \cdot \|X\|^2) - 1| \leq c_1 |\lambda_p| \cdot \|X\|^2 (n_p + 1) \leq \frac{c_1}{p} A.$$

Cette expression tend vers 0 et Φ_{λ_p, n_p} produit de deux fonctions tendant vers 1 uniformément sur les compacts à la même propriété.

Notons σ l'application de $G = MN$ dans \mathbf{R} définie par $\sigma(mn) = \|X\|^2 + \|Y\|$ si $m \in M$, $n = \exp(X + Y)$, $X \in \mathfrak{h}_1$, $Y \in \mathfrak{h}_2$. Dire qu'une probabilité μ sur G possède un moment d'ordre 2,

[11], équivaut ici à dire que $\int_G \sigma(g) d\mu(g)$ est fini.

LEMME 3.2. — Soit $G = MN$ un groupe de la classe C. Si μ est une probabilité apériodique sur G possédant un moment d'ordre 2, il existe une fonction β de $L^1(G; \mathbf{M})$ continue non nulle en l'élément neutre de G vérifiant : si ν_1 et ν_2 sont des mesures bornées sur G , pour tous (λ, n) de $\mathbf{R} \times \mathbf{N}$, $F(\nu_1 \star \mu^r \star \nu_2)(\lambda/r, n)$ tend vers $\nu_1(G) \nu_2(G) F\beta(\lambda, n)$ lorsque r tend vers l'infini.

Démonstration. — Pour tout entier r considérons l'automorphisme δ_r de MN défini par :

$$\delta_r(\exp(X + Y)m) = \exp\left(\frac{X}{\sqrt{r}} + \frac{Y}{r}\right)m, \quad \text{si } X \in \mathfrak{h}_1, Y \in \mathfrak{h}_2, m \in M.$$

Identifions MN au produit semi direct $N \times_\sigma M$. Puisque M opère de façon transitive sur la sphère unité de \mathfrak{h}_1 on peut appliquer le théorème central limite 5.9 de [15] :

Si m_M est la mesure de Haar normalisée de M il existe un semi-groupe de convolution $\{\beta_t, t > 0\}$ de probabilités sur N possédant une densité C^∞ tel que la suite $\delta_r(\mu^r)$ des images de μ^r , $r \in \mathbf{N}$, par δ_r converge vaguement vers $\beta_1 \otimes m_M$.

Pour tout entier p , $\delta_{pr}(\mu^{pr})$ converge à la fois vers $\beta_1 \otimes m_M$ et vers $\delta_p(\beta_1 \otimes m_M)^{*p}$ donc la densité β de $\beta_1 \otimes m_M$ est bi-invariante par M .

Puisque $\delta_r(\nu_i)$, $i=1$ ou 2 , converge vaguement vers la mesure sur $N \times_\sigma M$, $\varepsilon_0 \otimes \bar{\nu}_i$ (où $\bar{\nu}_i$ est la projection de ν_i sur M) on en déduit que la suite $\delta_r(\nu_1 \star \mu^r \star \nu_2) = \delta_r(\nu_1) \star \delta_r(\mu^r) \star \delta_r(\nu_2)$ tend vers $\nu_1(G) \nu_2(G) (\beta_1 \otimes m_M)$, d'où, si $(\lambda, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}$:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} F(\delta_r(\nu_1 \star \mu^r \star \nu_2))(\lambda, n) = \nu_1(G) \nu_2(G) F\beta(\lambda, n).$$

Or si ν est une mesure bornée sur G , en utilisant l'expression explicite de $\varphi_{\lambda, n}$ on voit immédiatement que $F(\delta_r(\nu))(\lambda, n) = F\nu(\lambda/r, n)$, ce qui montre le lemme.

LEMME 3.3. — Si $G = MN$ est un groupe de la classe C , toute probabilité étalée sur G est irréductible.

Démonstration. — Soit S le semi-groupe engendré par une probabilité étalée sur G . Il contient un ouvert U . Montrons que le semi-groupe ouvert $T = US$, contenu dans S , est égal à G . Si $N_2 = \exp \mathfrak{h}_2$, N_2 est un sous-groupe distingué fermé de G et G/N_2 est égal à $\mathbf{R}^p \times_{\sigma} M$ où M est un groupe compact connexe opérant de façon transitive sur la sphère unité de \mathbf{R}^p . Soit π la projection de G sur G/N_2 . La projection de $\pi(T)$ sur M est un semi-groupe ouvert du groupe compact et connexe M donc est égal à M . En particulier il existe un ouvert V de \mathbf{R}^p tel que $V \times \{e\}$ soit contenu dans $\pi(T)$.

Fixons un élément x de V et $\varepsilon > 0$ tel que λx soit dans V si $|\lambda - 1| < \varepsilon$. Si (t, k) et (t', k^{-1}) sont deux éléments de $\pi(T)$ tels que $k(x) = -x$, pour tous $m, n \in \mathbf{N}$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ vérifiant $|\lambda - 1| < \varepsilon$ et $|\mu - 1| < \varepsilon$:

$$(t, k)(\lambda x, e)^n (t', k^{-1})(\mu x, e)^n = (t + k(t') + (m\mu - n\lambda)x, e),$$

est dans $\pi(T)$. Ceci entraîne que $(t + k(t') + \alpha x, e)$ appartient à $\pi(T)$ pour tout réel α . En faisant parcourir à x une base de \mathbf{R}^p contenue dans V on voit que $\mathbf{R}^p \times \{e\}$ est contenu dans $\pi(T)$. En particulier il existe un voisinage symétrique W de 0 dans \mathfrak{h}_1 et un élément Y de \mathfrak{h}_2 tels que $\exp(W + Y)$ soit contenu dans T .

Si $X_1, X_2 \in W$ et $n \in \mathbf{N}$:

$$[\exp(X_1 + Y)]^n [\exp(X_2 + Y)]^n [\exp(-X_1 + Y)]^n [\exp(-X_2 + Y)]^n = \exp(n^2[X_1, X_2] + 4nY),$$

est un élément de T . Puisque $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] = \mathfrak{h}_2$, $\{[X_1, X_2]; X_1 \in W, X_2 \in W\}$ est un voisinage de 0 dans \mathfrak{h}_2 et ceci montre que $\exp \mathfrak{h}_2$ est contenu dans T qui est donc un voisinage de l'élément neutre. On conclut par connexité.

Montrons alors le théorème local et la majoration des fonctions de concentration suivants (β désigne la fonction introduite au lemme 3.2 et m la mesure de Haar fixée dans la formule de Plancherel).

THÉORÈME 3.4. — Soit $G = MN$ un groupe de la classe C et μ une probabilité étalée sur G .

(a) Pour tout compact B de G il existe un réel $c > 0$ tel que :

$$\sup_{x, y \in G} \mu^r(x B y) \leq c r^{-r^{(p+2q)/2}} \text{ pour tout entier } r.$$

(b) Si de plus μ possède un moment d'ordre 2, la suite de mesures $r^{(p+2q)/2} \mu^r$, $r \in \mathbf{N}$, converge vaguement vers $\beta(0)$ quand r tend vers l'infini.

Démonstration. — Le groupe G est moyennable [donc $\sigma(\mu) = 1$] et connexe donc μ est très étalée apériodique. D'après le lemme 3.3 elle est aussi irréductible et nous pouvons appliquer la proposition 1.4.1. D'après celle-ci il suffit d'étudier, si g est une fonction de $C_c^+(G)$ bi-

invariante par M d'intégrale 1, non nulle en e , si ν_1 et ν_2 sont des probabilités sur G , $a_r = r^{(p+2q)/2}$ et :

$$W_\varepsilon = \{(\lambda, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}, |\lambda|(n+1) < \varepsilon\},$$

$$a_r \int_{W_\varepsilon} F(\tilde{g} \star \nu_1 \star \mu^r \star \nu_2)(\lambda, n) d\gamma(\lambda, n),$$

pour un $\varepsilon > 0$ (voir proposition 3.1).

Posons $A = \text{Sup} \{\|X\|; X \in n, g(\exp X) \neq 0\}$. Par l'inégalité (1) de la démonstration de la proposition 3.1 si $\varepsilon = a/A^2$ et si $(\lambda, n) \in W_\varepsilon$ pour tout x du support de g :

$$|\varphi_{\lambda, n}(x)| \leq \{L_n^\alpha(0)\}^{-1} e^{-|\lambda| \|X\|^2/2} L_n^\alpha(|\lambda| \cdot \|X\|^2) \leq 1 - c_2 |\lambda|(n+1) \|X\|^2,$$

si $x = m \exp(X+Y)$, $m \in M$, $X \in \mathfrak{h}_1$, $Y \in \mathfrak{h}_2$.

Ayant supposé que g est d'intégrale un, il existe $c_3 > 0$ tel que sur W_ε :

$$|F g(\lambda, n)| \leq 1 - c_3 |\lambda|(n+1).$$

On sait (lemme 1.3.2) qu'il existe un entier s , une probabilité ν et un réel t , $0 < t \leq 1$ vérifiant $\mu^s = t g \cdot m + (1-t) \nu$. Par le même type de majoration que celles utilisées dans la démonstration de la proposition 1.4.1 on en déduit que si $(\lambda, n) \in W_\varepsilon$, pour tous entiers i et j :

$$|F(\tilde{g} \star \nu_1 \star \mu^{js+i} \star \nu_2)(\lambda, n)| \leq \{t |F g(\lambda, n)| + (1-t)\}^j$$

$$\leq \{1 - tc_3 |\lambda|(n+1)\}^j \leq \exp\{-jtc_3 |\lambda|(n+1)\},$$

d'où l'existence d'un réel $d > 0$ vérifiant, si $r > s$ et $(\lambda, n) \in W_\varepsilon$:

$$(\star) \quad |F(\tilde{g} \star \nu_1 \star \mu^r \star \nu_2)(\lambda, n)| \leq \exp\{-dr |\lambda|(n+1)\}$$

et :

$$\left| a_r \int_{W_\varepsilon} F(\tilde{g} \star \nu_1 \star \mu^r \star \nu_2)(\lambda, n) d\gamma(\lambda, n) \right| \leq r^{(p+2q)/2} \sum_{n \geq 0} \int_{\mathbf{R}} \exp\{-dr |\lambda|(n+1)\} |\lambda|^{q+\alpha} d\lambda,$$

est uniformément borné en r , ν_1 et ν_2 car $\alpha = (p/2) - 1$. Le (1) de la proposition 1.4.1 est donc vérifié ce qui prouve le a .

De même si μ a un moment d'ordre deux, puisque :

$$a_r \int_{W_\varepsilon} F(\tilde{g} \star \nu_1 \star \mu^r \star \nu_2)(\lambda, n) d\gamma(\lambda, n) = \int_{W_\varepsilon} F(\tilde{g} \star \nu_1 \star \mu^r \star \nu_2) \left(\frac{\lambda}{r}, n \right) d\gamma(\lambda, n),$$

le lemme 3.2 et la relation (\star) (qui permet d'appliquer le théorème de Lebesgue) montrent que cette quantité tend vers $\int F \beta(\lambda, n) d\gamma(\lambda, n) = \beta(0)$ car $g \cdot m$, ν_1 et ν_2 sont des probabilités.

Si ce sont des mesures bornées arbitraires on trouve comme limite, par linéarité :

$$\beta(0) \nu_1(G) \nu_2(G) \int g(x) dm(x) = \beta(0) m(\tilde{\nu}_1 \star g \star \tilde{\nu}_2),$$

ce qui montre le (2) de la proposition 1.4.1 et établit le théorème.

Remarque 1. — Le nombre $(p+2q)/2$ est la moitié du degré de croissance du groupe à croissance polynomiale G [10].

Remarque 2. — Si λ est une probabilité sur N invariante sous l'action de M on obtient le théorème local pour λ en appliquant le théorème précédent à la probabilité $\lambda \otimes m_M$ sur $MN \simeq N \times_{\sigma} M$. Après avoir rédigé cet article j'ai appris que A. Hulanicki avait montré le théorème local, de façon indépendante, pour les probabilités sur le groupe de Heisenberg de dimension 3 invariantes sous l'action de $SO(2)$.

Remarque 3. — Par la même méthode on peut traiter le cas où G est de la forme $A \times_{\sigma} K$ où K est un groupe compact opérant sur le groupe abélien à génération compacte A . En effet (G, K) est alors un couple de Guelfand et les fonctions sur G bi-invariantes par K s'identifiant aux fonctions sur A invariantes sous l'action de K , les propriétés de la transformée de Fourier usuelle permettent de déterminer facilement la formule de Plancherel sphérique et d'obtenir les inégalités nécessaires à la démonstration des propriétés (1) et (2) de la proposition 1.4.1. On retrouve ainsi, plus simplement, les résultats de [1].

On peut aussi démontrer facilement que le théorème 3.4 reste vrai pour les groupes $H_n \times_{\sigma} SO(2)^n$, où H_n est le groupe d'Heisenberg de dimension $2n+1$. Si on l'identifie à $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}$ l'action de $SO(2)^n$ est donnée par :

$$\sigma(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})(Z_1, \dots, Z_n, t) = (e^{i\theta_1} Z_1, \dots, e^{i\theta_n} Z_n, t).$$

Les fonctions sphériques sont alors indexées par $\mathbf{R} \times \mathbf{N}^n$ et font intervenir des produits de polynômes de Laguerre.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. BALDI, P. BOUGEROL et P. CREPEL, *Théorème central limite local sur les extensions compactes de \mathbf{R}^d* (Ann. I.H.P., Sect. B, vol. 14, n° 1, 1978, p. 99-112).
- [2] P. BOUGEROL, *Fonctions de concentration sur certains groupes localement compacts* (Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, vol. 45, 1978, p. 135-157).
- [3] P. BOUGEROL, *Une majoration universelle des fonctions de concentration sur les groupes localement compacts non compacts* (Lecture Notes in Math., n° 706, 1979, p. 36-40, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.)
- [4] P. BOUGEROL, *Comportement asymptotique des puissances de convolution d'une probabilité sur un espace symétrique* (Astérisque, vol. 74, 1980, p. 29-45, Soc. Math. Fr.).
- [5] L. BREIMAN, *Probability*, Addison Wesley, Reading, 1968.
- [6] Y. DERRIENNIC et Y. GUIVARC'H, *Théorème de renouvellement pour les groupes non moyennables* (C. R. Acad. Sc., t. 277, série A, 1973, 613-615.)
- [7] J. DIEUDONNÉ, *Éléments d'analyse*, t. 6, Gauthier Villars, Paris, 1975.
- [8] N. DUNFORD et J. T. SCHWARZ, *Linear Operators*, part. I, Interscience, New York, 1953.
- [9] F. P. GREENLEAF, *Invariant Means on Topological Groups*, Van Nostrand, New York, 1969.
- [10] Y. GUIVARC'H, *Croissance polynomiale et période des fonctions harmonique* (Bull. Soc. Math. Fr., vol. 101, 1973, p. 333-375).
- [11] Y. GUIVARC'H, *Loi des grands nombres et rayon spectral d'une marche aléatoire sur un groupe de Lie* (Astérisque, vol. 74, 1980, p. 47-98, Soc. Math. Fr.).
- [12] Y. KAWADA et K. ITO, *On the Probability Distribution on a Compact Group* (Proc. Phys. Soc., vol. 22, 1940, p. 977-999).
- [13] A. KORANYI, *Some Applications of Guelfand Pairs in classical Analysis* (Lecture in Harmonic Analysis and Group Representations C.I.M.E., 1980).

- [14] A. RAUGI, *Fonctions harmoniques et théorèmes limites pour les marches aléatoires sur les groupes* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, Mémoire 54, 1977, 127 p.).
- [15] A. RAUGI, *Théorème de la limite centrale pour un produit semi-direct d'un groupe de Lie résoluble simplement connexe de type rigide par un groupe compact* (*Lecture Notes in Math.*, n° 706, 1979, p. 257-324, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York).
- [16] H. H. SCHAEFER, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.
- [17] E. M. STEIN, *Analytic Continuation of group Representations* (*Adv. in Math.*, vol. 4, 1970, p. 172-207).
- [18] G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 28, 1939.
- [19] G. WARNER, *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

(Manuscrit reçu le 21 janvier 1981,
accepté le 13 mai 1981.)

Ph. BOUGEROL
U.E.R. de Mathématiques,
Université Paris-7,
2, place Jussieu,
75221 Paris Cedex 05.