ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN-MICHEL BONY

Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 14, nº 2 (1981), p. 209-246

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1981_4_14_2_209_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 14, 1981, p. 209 à 246.

CALCUL SYMBOLIQUE ET PROPAGATION DES SINGULARITÉS POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRES

PAR JEAN-MICHEL BONY

Soit :

$$(0.1) \qquad F(x, u(x), \ldots, \partial^\beta u(x), \ldots)_{|\beta| \leq m} = 0,$$

une équation non linéaire d'ordre m, où F est réelle et de classe C^∞. Si u est une solution réelle de (0.1) on définit le symbole principal :

$$(0.2) \qquad p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F}{\partial u_\alpha}(x, u(x), \ldots)(i\xi)^\alpha.$$

On dit que $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ est caractéristique si $p_m(x_0, \xi_0) = 0$ et on appelle bicaractéristique les courbes intégrales du champ hamiltonien de p_m. Les résultats sont alors les suivants :

(0.3) (th. 5.3).

Soit u une solution appartenant à l'espace de Sobolev H^s, $s > s_0$ [resp. à l'espace de Hölder C^ρ, $\rho > \rho_0$]. Alors, en tout point (x_0, ξ_0) non caractéristique, u est microlocalement de classe H^t pour $t < 2s - \lambda$ [resp. de classe $C^{2\rho-\mu}$].

(0.4) (th. 6.1).

Si u est une solution de classe H^s, $s > s_1$, et est microlocalement de classe H^t, $t < 2s - \lambda - 1$, en un point caractéristique (x_0, ξ_0), alors u est microlocalement de classe H^t en tout point de la bicaractéristique issue de (x_0, ξ_0).

Pour l'équation (0.1) la plus générale on a $s_0 = n/2 + m$; $\rho_0 = m$; $\lambda = n/2 + m$; $\mu = m$; $s_1 = n/2 + m + 2$, mais ces valeurs s'améliorent lorsque l'équation (0.1) est quasi linéaire (*voir* les paragraphes 5 et 6 pour les énoncés précis).

Avant de discuter ces résultats, décrivons la méthode de démonstration. Nous introduisons une classe d'opérateurs, dits paradifférentiels, associés à des symboles du type suivant :

$$(0.5) \qquad p(x, \xi) = p_m(x, \xi) + p_{m-1}(x, \xi) + \ldots + p_{m-[\rho]}(x, \xi),$$

où p_{m-k} est homogène de degré $m-k$, de classe C^∞ en ξ et $C^{\rho-k}$ en x ($\rho>0$ non entier). Un opérateur paradifférentiel de symbole p applique H^s dans H^{s-m} quel que soit s. Si deux opérateurs ont p comme symbole, leur différence applique H^s dans $H^{s-m+\rho}$. Tout le calcul pseudo-différentiel classique (produit, adjoint, inverse, ...) s'étend aux opérateurs paradifférentiels, le calcul symbolique étant fini et non pas asymptotique, les restes étant ρ-régularisants et non infiniment régularisants. Ce calcul fait l'objet du paragraphe 3.

L'exemple typique, et fondamental, de tels opérateurs est celui des opérateurs T_a, introduits au paragraphe 2, associés à une fonction $a(x)\in C^\rho$. A la place de la multiplication par a, qui n'opère de H^s dans lui-même que pour $|s|<\rho$, nous introduisons les opérateurs de « paramultiplication » T_a qu'on peut décrire approximativement comme suit : si u a son spectre localisé au voisinage de $|\xi|=R$, $T_a u$ est à peu près égal à $a_R\, u$, où $\hat{a}_R$ est égal à $\hat{a}$ dans la boule de rayon εR, et à 0 ailleurs.

Le lien fondamental entre opérateurs paradifférentiels et fonctions non linéaires est le résultat suivant, dont les généralisations font l'objet du paragraphe 4. Si u est de classe C^ρ, $\rho>0$ [resp. H^s, $s>n/2$], et si f est de classe C^∞, on a :

$$f[u(x)]=T_{f'[u(x)]}\,.\,u(x)+\text{erreur}, \tag{0.6}$$

où l'erreur appartient à $C^{2\rho}$ [resp. $H^{2s-n/2-\varepsilon}$]. On peut alors facilement montrer qu'une solution de (0.1) est solution d'une équation :

$$P\,u=f, \tag{0.7}$$

où P est un opérateur paradifférentiel d'ordre m, de symbol principal p_m défini en (0.2), et où f appartient à $H^{2s-2m-n/2-\varepsilon}$ sous les hypothèses de (0.3) ou (0.4).

Le théorème (0.3) n'est plus alors qu'un corollaire banal, l'opérateur P étant microlocalement inversible lorsque son symbole principal ne s'annule pas. La démonstration du théorème (0.4) fait l'objet du paragraphe 6. Elle repose sur la démonstration d'une inégalité d'énergie pour (0.7) du même type que celle utilisée par Hörmander [4] dans le cas pseudo-différentiel. Nous utilisons une forme adaptée de l'inégalité de Gårding précisée, que nous démontrons par une méthode empruntée à Cordoba-Fefferman [3].

Il est clair que bien d'autres résultats de localisation, propagation, réflexion des singularités, connus pour les opérateurs pseudo-différentiels classiques, peuvent s'étendre aux équations paradifférentielles (0.7) et donc aux équations non linéaires (0.1).

Revenons aux théorèmes (0.3) et (0.4). Ceux-ci s'appliquent à certaines solutions faibles d'équations du type (0.1), mais il existe dans la littérature beaucoup de notions de solutions faibles qui n'entrent pas dans le cadre de nos hypothèses. Il est d'ailleurs bien connu que les ondes de choc ont des singularités dont le comportement est très différent de celui décrit par les théorèmes (0.3) et (0.4).

D'autre part, même pour des solutions assez régulières, les singularités ne sont contrôlées par ces théorèmes que jusqu'à l'ordre $2s-\lambda-1$. Dans le comportement des singularités d'ordre plus élevé, il apparaît des phénomènes typiquement non linéaires (*voir* [5], [7], [8]).

Enfin, le symbole principal défini par (0.2) dépend en général, non seulement de (0.1), mais de la solution u elle-même. On n'a une description exacte de la propagation des singularités que pour des équations quasi linéaires dont la partie principale est linéaire. Dans les autres cas, le fait de connaître l'existence d'une solution satisfaisant à certaines estimations peut fournir des estimations sur $p_m(x, \xi)$, et donc des renseignements qualitatifs sur les singularités (par exemple, une borne de la vitesse de propagation des singularités pour une équation hyperbolique).

Nous avions exposé au Colloque de Saint-Jean-de-Monts (juin 1978), et très brièvement résumé dans [1], des résultats du type (0.3) et (0.4). Nos méthodes reposaient alors sur une étude directe de la régularité microlocale de $f[u(x)]$ à partir de celle de $u(x)$ (*voir* cor. 4.7) et sur des estimations *a priori* (du type inégalités de Schauder ou d'énergie) pour des équations linéaires dont les coefficients ont une régularité limitée, et des régularités microlocales additionnelles. Ces méthodes, assez fastidieuses, conduisaient en outre à des valeurs de s_0 et s_1 moins bonnes en général que celles que nous obtenons maintenant.

Indépendamment et simultanément, un certain nombre de cas des théorèmes (0.3) et (0.4) ont été prouvés par B. Lascar [5] et J. Rauch [7].

Enfin, le lecteur pourra constater que nos méthodes doivent beaucoup aux résultats et aux techniques (décomposition en « couronnes dyadiques ») de R. Coifman et Y. Meyer. Nous tenons à remercier ce dernier d'avoir bien voulu nous communiquer le manuscrit inédit d'une version antérieure de [2].

N.B. — Y. Meyer a donné récemment [9] une nouvelle démonstration, et une amélioration, de (0.6). Il montre que, en fait, l'« erreur » appartient à $H^{2s-n/2}$. Le lecteur se convaincra aisément qu'il en résulte que les théorèmes de régularité (0.3) ou (0.4) sont valables avec les inégalités « larges » : $t \leqq 2s-\lambda$ ou $t \leqq 2s-\lambda-1$.

1. Rappels sur les décompositions « en couronnes dyadiques »

Nous utiliserons les espaces de Sobolev H^s (norme notée $|\,.\,|_s$) et les espaces de fonctions hölderiennes C^ρ (normes notée $\|\,.\,\|_\rho$) définis comme suit. Pour $0<\rho<1$, une fonction u appartient à $C^\rho(R^n)$ si elle est bornée et si $|u(y)-u(x)|/|y-x|^\rho$ est borné. Pour $\rho \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, en posant $\rho=m+\rho'$ avec $0<\rho'<1$, une distribution u est de classe C^ρ si pour tout opérateur pseudo-différentiel R d'ordre m, on a $R\,u \in C^{\rho'}$. Pour ρ entier positif, on note encore $\|u\|_\rho$ le maximum des normes uniformes des dérivées de u d'ordre inférieur ou égal à ρ. Ainsi $\|u\|_0$ et $|u|_0$ désignent respectivement la norme uniforme et la norme L^2 de u.

Pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note $H^s_{loc}(\Omega)$ [resp. $C^\rho_{loc}(\Omega)$] les distributions localement de classe H^s [resp. C^ρ]. On dira que u est microlocalement de classe H^s [resp. C^ρ pour $\rho \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$] en un point $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ s'il existe un opérateur pseudo-différentiel classique R d'ordre 0, dont le symbole principal est non nul en (x_0, ξ_0), tel que $R\,u \in H^s$ [resp. C^ρ].

Pour éviter le « mauvais cas » des espaces de Hölder d'ordre entier, et ne pas trop alourdir les énoncés, nous utiliserons la convention habituelle suivante : dans une proposition du type : « si $u \in C^\sigma, \ldots,$ alors $v \in C^\rho$ [conv. hab. si entier] », remplacer l'hypothèse par « il existe $\sigma'>\sigma$ tel que $u \in C^{\sigma'}$ » lorsque σ est entier, et remplacer la conclusion par « $v \in C^{\rho'}$ pour tout $\rho'<\rho$ » lorsque ρ est entier.

Nous faisons ici un minimum de rappels sur la caractérisation des espaces H^s et C^ρ à l'aide des décompositions « en couronnes dyadiques », en renvoyant le lecteur au mémoire de Coifman-Meyer [2] pour toutes ces questions. Le lecteur y trouvera également de quoi étendre nos résultats (à l'exception de la propagation des singularités bien entendu) au cas des espaces $W^{s,p}$.

Soit $k>1$, on définit les couronnes dyadiques C_j, $j\in\mathbb{N}$, par :

$$C_j=\{\xi\in\mathbb{R}^n \mid k^{-1}2^j\leqq|\xi|\leqq k\,2^{j+1}\}. \tag{1.1}$$

On peut alors construire une partition de l'unité :

$$1=\Psi(\xi)+\sum_0^\infty \varphi(2^{-j}\xi), \tag{1.2}$$

où φ et Ψ appartiennent à $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, le support de φ étant contenu dans la couronne C_0 et celui de Ψ dans la boule unité.

Pour $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a alors la décomposition « canonique » (dépendant en fait de k et φ) suivante :

$$u=u_{-1}+\sum_0^\infty u_j=\Psi(D)\,u+\sum_0^\infty \varphi(2^{-j}D)\,u, \tag{1.3}$$

$$u_{-1}+\sum_0^{p-1} u_j=\Psi(2^{-p}D)\,u. \tag{1.4}$$

Les opérateurs $\varphi(2^{-j}D)$ et $\Psi(2^{-j}D)$ opèrent continûment de L^∞ dans L^∞ et de L^2 dans L^2 avec une norme indépendante de j. On a :

$$u\in L^\infty \Rightarrow \|u_j\|_0\leqq \mathrm{Cte}\,\|u\|_0 \quad \text{et} \quad \Big\|\sum_{-1}^{p} u_j\Big\|_0\leqq \mathrm{Cte}\,\|u\|_0, \tag{1.5}$$

$$u\in C^\rho(\rho\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}) \Rightarrow \|u_j\|_0\leqq \mathrm{Cte}\,\|u\|_\rho\,2^{-j\rho}, \tag{1.6}$$

$$u\in H^s \Rightarrow |u_j|_0\leqq c_j\,2^{-js} \quad \text{avec} \quad \|(c_j)\|_{l^2}\leqq \mathrm{Cte}\,|u|_s. \tag{1.7}$$

Réciproquement, si des fonctions u_j ont leur spectre ($=\operatorname{supp}(\hat u_j)$) dans C_j et vérifient les estimations (1.8) [resp. (1.9)] :

$$\|u_j\|_0\leqq K\,2^{-j\rho}, \tag{1.8}$$

$$|u_j|_0\leqq c_j\,2^{-js};\qquad \|(c_j)\|_{l^2}\leqq K, \tag{1.9}$$

alors on a $\sum u_j\in C^\rho$ conv. hab. si entier [resp. $u\in H^s$] et la norme de $\sum u_j$ est majorée par Cte K.

En outre, pour $\rho>0$ non entier [resp. $s>0$], si des fonctions u_j ont leur spectre dans la boule de rayon $k\,2^j$, et vérifient les estimations (1.8) [resp. (1.9)], on a $\sum u_j\in C^\rho$ [resp. H^s] avec une norme majorée par Cte K.

Nous utiliserons constamment la remarque suivante. Si N_0 est un entier assez grand (par rapport à k), si u et v ont leurs spectres respectivement dans C_j et C_l avec $l\leqq j-N_0$, alors uv a son spectre dans C'_j, où les couronnes C'_j ont une définition analogue à celle des C_j, mais avec une constante k' plus grande que k.

Soit par exemple T un opérateur défini par :

$$u \rightsquigarrow Tu = \sum \alpha_q u_q,$$

où $u = \sum u_q$ est la décomposition canonique de u, et où α_q a son spectre dans une boule de rayon 2^{q-N_0} (N_0 assez grand par rapport à k) :

On a :

$$\| \alpha_q u_q \|_0 \leqq \| \alpha_q \|_0 \; \| u_q \|_0 \qquad \text{et} \qquad | \alpha_q u_q |_0 \leqq \| \alpha_q \|_0 \; | u_q |_0,$$

et les $\alpha_q u_q$ ont leur spectre dans les couronnes C'_q. On déduit de ce qui précède que si $\| \alpha_q \|_0 \leqq \mathrm{Cte}\, 2^{-q\rho}$, l'opérateur T est ρ-régularisant, c'est-à-dire applique H^s dans $H^{s+\rho}$ et C^σ dans $C^{\sigma+\rho}$ conv. hab. si entier.

2. Opérateurs de paramultiplication

Soit $a(x) \in L^\infty$, à support compact. L'idée essentielle est de remplacer l'opérateur de multiplication par a, qui n'opère que dans bien peu d'espaces, par un opérateur de « paramultiplication » T_a qui appliquera H^s (ou C^σ) dans lui-même, quels que soient s et σ. Cet opérateur dépendra du choix d'une fonction auxiliaire χ, mais si a est de classe C^ρ, un changement de fonction χ ne modifie T_a que par l'addition d'un opérateur ρ-régularisant.

Soit $\chi(\theta, \eta)$ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus 0$, homogène de degré 0, vérifiant pour $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ assez petits :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \chi(\theta, \eta) = 1 & \text{pour} \quad |\theta| \leqq \varepsilon_1 |\eta|; \\ \chi(\theta, \eta) = 0 & \text{pour} \quad |\theta| \geqq \varepsilon_2 |\eta|, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

l'opérateur T_a est alors défini comme suit :

$$\widehat{T_a u}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int \chi(\xi - \eta, \eta)\, \hat{a}(\xi - \eta)\, \hat{u}(\eta)\, d\eta. \tag{2.2}$$

Nous allons également définir un autre opérateur T'_a, dépendant d'un entier N_0 (et du choix de k et φ pour la décomposition en couronnes dyadiques) :

$$T'_a u = \sum_{-1 \leqq p \leqq q - N_0} \sum a_p u_q, \tag{2.3}$$

l'entier N_0 doit être assez grand pour qu'il existe une famille de couronnes C'_q analogues aux C_q telles que $C_q + C_{q-N_0} \subset C'_q$. On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1. — (*a*) *les opérateurs* T_a *et* T'_a *appliquent* H^s *dans* H^s *et* C^σ *dans* C^σ *(conv. hab. si entier), et leur norme d'opérateurs est majorée par* Cte $\| a \|_0$;

(*b*) *si de plus a est de classe* C^ρ, $\rho > 0$ *non entier, alors* $T_a - T'_a$ *est* ρ*-régularisant : il applique* H^s *dans* $H^{s+\rho}$ *et* C^σ *dans* $C^{\sigma+\rho}$ *(conv. hab. si entier) avec une norme majorée par* Cte $\| a \|_\rho$. *De* *même, une modification du choix de* χ *pour* T_a, *ou de* (N_0, k, φ) *pour* T'_a, *ne modifie ces opérateurs que par addition d'un opérateur* ρ*-régularisant.*

On a :

$$(2.4)\qquad T'_a u = \sum_q f_q = \sum_q \Big(\sum_{-1 \leqq p \leqq q-N_0} a_p\Big)\, u_q$$

et il résute de (1.5) que l'on a :

$$(2.5)\qquad \| f_q \|_0 \leqq \mathrm{Cte}\, \| a \|_0\, \| u_q \|_0; \qquad | f_q |_0 \leqq \mathrm{Cte}\, \| a \|_0\, | u_q |_0.$$

Les f_q ayant leur spectre dans les couronnes C'_q, il est clair que T'_a applique H^s dans H^s et C^σ dans C^σ (conv. hab. si entier) avec une norme majorée par Cte $\| a \|_0$.

Modifier le choix de N_0, par exemple remplacer N_0 par N_0+1, revient à remplacer T'_a par $T'_a - S$ avec :

$$(2.6)\qquad S u = \sum_q a_{q-N_0-1}\, u_q = \sum g_q.$$

Les g_q ont leur spectre dans C'_q, et on a, pour $a \in C^\rho$:

$$(2.7)\qquad \| g_q \|_0 \leqq \mathrm{Cte}\, \| a \|_\rho\, 2^{-q\rho}\, \| u_q \|_0; \qquad | g_q |_0 \leqq \mathrm{Cte}\, \| a \|_\rho\, 2^{-q\rho} | u_q |_0.$$

L'opérateur S est donc ρ-régularisant.

Comparons maintenant les opérateurs T_a et T'_a :

$$(2.8)\qquad \widehat{T_a u}(\xi) = (2\pi)^{-n} \sum_p \sum_q \int \chi(\xi-\eta, \eta)\, \hat{a}_p(\xi-\eta)\, \hat{u}_q(\eta)\, d\eta.$$

Si $k^2 \varepsilon_2$ est assez petit, où k est la constante définissant les couronnes C_j, il existe des entiers $0 < N_1 < N_2$ tels que, dans les intégrales ci-dessous, on ait $\chi = 1$ sur le domaine d'intégration pour $p \leqq q - N_2$, et $\chi = 0$ sur le domaine d'intégration pour $p \geqq q - N_1$. On a donc :

$$(2.9)\qquad T_a u = \sum_{p \leqq q - N_2} \sum a_p u_q + R u,$$

$$(2.10)\qquad R u(x) = \sum_{q-N_2 < p < q-N_1} \sum (2\pi)^{-2n} \int e^{ix.(\theta+\eta)} \chi(\theta, \eta)\, \hat{a}_p(\theta)\, \hat{u}_q(\eta)\, d\theta\, d\eta.$$

Soit $r(s, t) \in \mathscr{S}(R^{2n})$ dont la transformée de Fourier est à support compact, et coïncide avec $\chi(\theta, \eta)$ pour :

$$k^{-1} 2^{-N_2} \leqq | \theta | \leqq 2k \qquad \text{et} \qquad k^{-1} 2^{-N_2} \leqq | \eta | \leqq 2k.$$

On a alors :

$$(2.11)\qquad R u(x) = \sum_{q-N_2 < p < q-N_1} \sum (2\pi)^{-2n} \int e^{ix.(\theta+\eta)} \hat{r}(2^{-q}\theta, 2^{-q}\eta)\, \hat{a}_p(\theta)\, \hat{u}_q(\eta)\, d\theta\, d\eta,$$

$$\text{(2.12)}\qquad \mathrm{R}\,u(x)=\sum_{q-\mathrm{N}_2<p<q-\mathrm{N}_1}\sum\int r(s,\,t)\,a_p(x-2^{-q}s)\,u_q(x-2^{-q}t)\,ds\,dt=\sum\sum f_{pq},$$

$$\text{(2.13)}\qquad \|f_{pq}\|_0\leqq \mathrm{Cte}\,\|a_p\|_0\,\|u_q\|_0;\qquad |f_{pq}|_0\leqq \mathrm{Cte}\,\|a_p\|_0\,|u_q|_0.$$

En posant $f_q=\sum f_{pq}$, $q-\mathrm{N}_2<p<q-\mathrm{N}_1$, on a $\mathrm{R}\,u=\sum f_q$, où les f_q ont leur spectre dans C'_q et vérifient :

$$\text{(2.14)}\qquad \|f_q\|_0\leqq \mathrm{Cte}\,\|a\|_0\,\|u_q\|_0;\qquad |f_q|_0\leqq \mathrm{Cte}\,\|a\|_0\,|u_q|_0\quad \text{si } a\in \mathrm{L}^\infty,$$

$$\text{(2.15)}\qquad \|f_q\|_0\leqq \mathrm{Cte}\,\|a\|_\rho\,2^{-q\rho}\|u_q\|_0;\qquad |f_q|_0\leqq \mathrm{Cte}\,\|a\|_\rho\,2^{-q\rho}|u_q|_0\quad \text{si } a\in \mathrm{C}^\rho.$$

Il en résulte clairement que R applique continûment H^s dans H^s et C^σ dans C^σ avec une norme majorée par Cte $\|a\|_0$, et que, de plus, R est ρ-régularisant si $a\in \mathrm{C}^\rho$.

En revenant à (2.9), on obtient immédiatement, les propriétés de continuité de T_a et le caractère ρ-régularisant de $\mathrm{T}_a-\mathrm{T}'_a$. La fin de l'assertion du théorème 2.1 (*b*) résulte évidemment du fait que T'_a est défini indépendamment de χ, tandis que T_a est défini indépendamment de $(\mathrm{N}_0,\,k,\,\varphi)$.

Remarque 2.2. — Soit $u=\sum u'_q$ une autre décomposition de u vérifiant $\hat{u}'_q$ à support dans C_q et $\|u'_q\|_0\leqq \mathrm{K}\,2^{-q\sigma}$ ($|u'_q|_0\leqq c_q 2^{-qs}$ avec $\|(c_q)\|_{l^2}\leqq \mathrm{K}'$).

On a alors :

$$\text{(2.16)}\qquad \mathrm{T}'_a u-\sum_{p\leqq q-\mathrm{N}_0}\sum a_p u'_q=\sum_p a_p\Big(\sum_{q\geqq p+\mathrm{N}_0} u_q-\sum_{q\geqq p+\mathrm{N}_0} u'_q\Big)=\sum a_p v_p,$$

avec $\hat{v}_p$ à support dans $\mathrm{C}'_{p+\mathrm{N}_0}$ et $\|v_p\|_0\leqq \mathrm{Cte}\;\mathrm{K}\,2^{-p\sigma}$ (Cte $c_p 2^{-ps}$).

On a donc :

$$\text{(2.17)}\qquad \Big\|\mathrm{T}'_a u-\sum_{p\leqq q-\mathrm{N}_0}\sum a_p u'_q\Big\|_{\sigma+\rho}\leqq \mathrm{Cte}\,\|a\|_\rho\,\mathrm{K}\quad \text{(conv. hab. si entier)},$$

$$\text{(2.18)}\qquad \Big|\mathrm{T}'_a u-\sum_{p\leqq q-\mathrm{N}_0}\sum a_p u'_q\Big|_{s+\rho}\leqq \mathrm{Cte}\,\|a\|_\rho\,\mathrm{K}'.$$

THÉORÈME 2.3. — *Soient a et b de classe* C^ρ *à support compact, avec* $\rho>0$ *non entier. Alors* $\mathrm{T}_a\circ\mathrm{T}_b-\mathrm{T}_{ab}$ *est un opérateur* ρ*-régularisant, et sa norme d'opérateur est majorée par* Cte $\|a\|_\rho\|b\|_\rho$.

Soient $0\ll \mathrm{N}_1\ll \mathrm{N}_2$ des entiers. On a :

$$\text{(2.19)}\qquad \mathrm{T}_b u=\sum_q\Big(\sum_{p_2\leqq q-\mathrm{N}_2} b_{p_2}\Big)\,u_q+\mathrm{R}\,u=\sum_q v_q+\mathrm{R}\,u,$$

où R est un opérateur ρ-régularisant, et où les v_q ont leur support dans des couronnes C'_q analogues aux C_q. On a alors :

$$\text{(2.20)}\qquad \mathrm{T}_a\circ\mathrm{T}_b u=\sum_{p_1,\,p_2\leqq q-\mathrm{N}_2}\sum\sum a_{p_1} b_{p_2} u_q+\mathrm{R}'u,$$

en vertu de la remarque 2.2, avec $|||\,R'\,||| \leqq \mathrm{Cte}\,\|a\|_\rho \|b\|_\rho$ en désignant par $|||\,.\,|||$ une norme d'opérateur de H^s dans $H^{s+\rho}$ ou de C^σ dans $C^{\sigma+\rho}$.

D'autre part, on a [*voir* (1.4)] :

$$T_{ab}\,u = \sum_q \Big(\sum_{p_1}\sum_{p_2} \psi(2^{-q+N_1} D)\, a_{p_1} b_{p_2}\Big)\, u_q + R''\, u, \tag{2.21}$$

avec

$$|||\,R''\,||| \leqq \mathrm{Cte}\,\|a\|_\rho\,\|b\|_\rho.$$

Si les entiers N_1 et N_2 ont été choisis convenablement, on a $\psi(2^{-q+N_1}\xi)=1$ sur le support de $(a_{p_1} b_{p_2})^\wedge$ lorsque $p_1 \leqq q - N_2$ et $p_2 \leqq q - N_2$.

On a également $\psi(2^{-q+N_1}\xi)=0$ sur le support de $(a_{p_1} b_{p_2})^\wedge$ lorsque $p_1 \geqq q$ et $p_2 \leqq p_1 - N_3$ pour un entier N_3 convenable (ce support est alors contenu dans une couronne C'_{p_1}).

Dans la différence $(T_a \circ T_b - T_{ab})\, u$, il apparaît donc : des termes $R\,u$ avec R ρ-régularisant vérifiant :

$$|||\,R\,||| \leqq \mathrm{Cte}\,\|a\|_\rho\,\|b\|_\rho,$$

des termes du type :

$$R_\nu u = \sum_q \Big(\sum_{p\leqq q} \psi(2^{-q+N_1} D)\, a_{q-\nu} b_p\Big)\, u_q = \sum f_q u_q, \tag{2.22}$$

où ν varie de 0 à N_2 et des termes du type :

$$S_\nu u = \sum_q \Big(\psi(2^{-q+N_1} D) \sum_{p\geqq q} a_p b_{p-\nu}\Big)\, u_q = \sum g_q u_q, \tag{2.23}$$

où ν varie de 0 à N_3, ainsi que les termes analogues en échangeant les rôles de a et b.

Il est clair que l'on a :

$$\|f_q\|_0 \leqq \mathrm{Cte}\,\|a\|_\rho\,\|b\|_\rho\, 2^{-q\rho} \qquad \text{et} \qquad \|g_q\|_0 \leqq \mathrm{Cte}\,\|a\|_\rho\,\|b\|_\rho\, 2^{-q\rho}$$

et que les termes $f_q u_q$ et $g_q u_q$ ont leur spectre dans des couronnes C'_q. Les opérateurs R_ν et S_ν sont alors ρ-régularisants, leurs normes vérifiant les estimations voulues, ce qui démontre le théorème.

THÉORÈME 2.4. — *Soit a de classe C^ρ à support compact. Alors l'adjoint T_a^* de T_a applique H^s dans H^s pour tout s, et l'opérateur $T_{\bar a} - T_a^*$ applique H^s dans $H^{s+\rho}$, avec une norme d'opérateur majorée par* $\mathrm{Cte}\,\|a\|_\rho$.

Pour N_0 assez grand, on a :

$$(T_a^* u, v) = (u, T_a v) \equiv \sum_{p\leqq r-N_0}\sum\sum \int u_q\, \bar a_p\, \bar v_r\, dx \tag{2.24}$$

et :

$$(T_{\bar a} u, v) = \sum_{p\leqq q-N_0}\sum\sum \bar a_p\, u_q\, \bar v_r \tag{2.25}$$

modulo des termes majorés par $\mathrm{Cte}\,\|a\|_\rho\,\|u\|_s\,\|v\|_{-s-\rho}$.

D'autre part, il existe un entier N_1 tel que, pour $|q-r|>N_1$, les supports de $\hat{u}_q$ et $\widehat{a_p v_r}$ soient disjoints pour $p \leqq r-N_0$, ainsi que ceux de $(\bar{a}_p u_q)^{\wedge}$ et $\hat{v}_r$ pour $p \leqq q-N_0$. Les intégrales correspondant à ces indices sont donc nulles. Il en résulte que l'on a :

$$(2.26)\quad |(T_a^* u, v)-(T_{\bar{a}} u, v)| \leqq \text{Cte} \sum_{\nu_1}\sum_{\nu_2}\sum_{q} \int |a_q| . |u_{q+\nu_1}| . |v_{q+\nu_2}|\, dx + \text{Cte}\, \|a\|_\rho \|u\|_s |v|_{-s-\rho},$$

où ν_1 et ν_2 ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.

Pour chaque valeur de (ν_1, ν_2) on a alors :

$$(2.27)\quad \sum_q \int |a_q| . |u_{q+\nu_1}| . |v_{q+\nu_2}|\, dx \leqq \sum_q \|a_q\|_0\, |u_{q+\nu_1}|_0\, |v_{q+\nu_2}|_0 \leqq \text{Cte} \sum_q \|a\|_\rho 2^{-q\rho} c_{q+\nu_1} 2^{-sq} d_{q+\nu_2} 2^{(s+\rho)q},$$

avec :

$$\|(c_q)\|_{l^2} \leqq \text{Cte}\, |u|_s \quad \text{et} \quad \|(d_q)\|_{l^2} \leqq \text{Cte}\, |v|_{-s-\rho}.$$

Il en résulte que :

$$(2.28)\quad |(T_a^* u, v)-(T_{\bar{a}} u, v)| \leqq \text{Cte}\, \|a\|_\rho\, |u|_s\, |v|_{-s-\rho},$$

ce qui démontre le théorème.

THÉORÈME 2.5. — (*a*) *soit a de classe C^ρ ($\rho>0$, non entier) et $u \in C^\sigma$, à supports compacts. On a alors (conv. hab. si entier)* :

$$(2.29)\quad \text{si } \sigma>0, \quad au = T_a u + T_u a + r \quad \text{avec } \|r\|_{\rho+\sigma} \leqq \text{Cte}\, \|a\|_\rho\, \|u\|_\sigma,$$

$$(2.30)\quad \text{si } -\rho<\sigma<0, \quad au = T_a u + r \quad \text{avec } \|r\|_{\rho+\sigma} \leqq \text{Cte}\, \|a\|_\rho\, \|u\|_\sigma;$$

(*b*) *supposons $a \in H^s$, $s>n/2$, et $u \in H^t$ à supports compacts. On a alors, pour tout $\varepsilon>0$* :

$$(2.31)\quad \text{si } t>n/2, \quad au = T_a u + T_u a + r \quad \text{avec } |r|_{s+t-n/2-\varepsilon} \leqq \text{Cte}\, |a|_s\, |u|_t,$$

$$(2.32)\quad \text{si } -s+n/2<t\leqq n/2, \quad au = T_a u + r \quad \text{avec } |r|_{s+t-n/2-\varepsilon} \leqq \text{Cte}\, |a|_s\, |u|_t.$$

Démontrons par exemple la partie (*b*). On peut d'après le théorème 2.1, remplacer T_a et T_u par T'_a et T'_u respectivement. Pour $t>n/2$, posons :

$$(2.33)\quad r' = au - T'_a u - T'_u a = \sum\sum_{q-N_0<p<q+N_0} a_p u_q = \sum_{|\nu|<N_0} \sum_q a_{q-\nu} u_q.$$

Le terme $a_{q-\nu} u_q$ a son spectre contenu dans la boule de rayon $k' 2^q$ pour k' convenable, et vérifie l'estimation du type (1.9) suivante :

$$(2.34)\quad |a_{q-\nu} u_q|_0 \leqq \|a_{q-\nu}\|_0\, |u_q|_0 \leqq \text{Cte}\, |a_{q-\nu}|_{n/2+\varepsilon} |u_q|_0,$$

$$(2.35)\quad |a_{q-\nu} u_q|_0 \leqq \text{Cte}\, |a|_s\, 2^{-q(s-n/2-\varepsilon)} 2^{-qt} d_q \quad \text{avec} \quad \|(d_q)\|_{l^2} \leqq |u|_t.$$

Comme on a $s+t-n/2-\varepsilon>0$, il en résulte que $\sum a_{q-\nu} u_q$ et donc r' appartiennent à $H^{s+t-n/2-\varepsilon}$ et que l'on a :

$$|r'|_{s+t-n/2-\varepsilon} \leqq \mathrm{Cte}\, |a|_s\, |u|_t, \tag{2.36}$$

ce qui démontre (2.31).

Posons de même, si $-s+n/2<t<n/2$:

$$r''=au-\mathrm{T}'_a u = \sum_{q-\mathrm{N}_0<p<q+\mathrm{N}_0} \sum a_p u_q + \sum_{q \leqq p-\mathrm{N}_0} \sum u_q a_p. \tag{2.37}$$

Le premier terme se majore comme précédemment, puisque $s+t-n/2-\varepsilon>0$.

Le second terme est égal à :

$$r'''=\sum_p \Big(\sum_{q \leqq p-\mathrm{N}_0} u_q \Big) a_p = \sum_p f_p, \tag{2.38}$$

où les f_p ont leur spectre dans C'_p et vérifient :

$$|f_p|_0 \leqq \mathrm{Cte} \Big(\sum_{q \leqq p-\mathrm{N}_0} 2^{-q(t-n/2-\varepsilon)} \Big) |u|_t\, 2^{-ps} c_p \qquad \text{avec} \quad \|(c_p)\|_{l^2} \leqq |a|_s. \tag{2.39}$$

On a $t-n/2-\varepsilon<0$ et donc :

$$|f_p|_0 \leqq \mathrm{Cte}\; 2^{-p(t-n/2-\varepsilon)}\, 2^{-ps} |u|_t c_p, \tag{2.40}$$

$$|r'''|_{s+t-n/2-\varepsilon} \leqq \mathrm{Cte}\, |a|_s\, |u|_t, \tag{2.41}$$

ce qui achève de démontrer (2.32).

3. Opérateurs paradifférentiels

Nous allons d'abord introduire des opérateurs T_l dans $\mathbb{R}^n$, associés à un symbole $l(x, \xi)$ à support compact en x. Puis nous étudierons la classe correspondante des opérateurs à support propre dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Si $l(x, \xi)$ est une fonction homogène de degré m en ξ, C^∞ en ξ pour $\xi \neq 0$, à support compact en x et de classe C^ρ en x (c'est-à-dire que toutes les dérivées $\mathrm{D}^\alpha_\xi l$ sont de classe C^ρ en (x, ξ)), ($\rho>0$ non entier), on définit l'opérateur T_l de la manière suivante :

$$\widehat{\mathrm{T}_l u}(\xi)=(2\pi)^{-n} \int \chi(\xi-\eta, \eta)\, \hat{l}(\xi-\eta, \eta)\, s(\eta)\, \hat{u}(\eta)\, d\eta, \tag{3.1}$$

où χ vérifie les conditions (2.1), s est une application de classe C^∞ de R^n dans R, nulle au voisinage de 0 et égale à 1 en dehors d'un compact, et où $\hat{l}(\theta, \xi)$ est la transformée de Fourier de $l(x, \xi)$ par rapport à la première variable.

La décomposition en harmoniques sphériques permet de mettre l sous la forme :

$$l(x, \xi)=\sum_{\nu} a_{\nu}(x)\, h_{\nu}(\xi), \tag{3.2}$$

où les $a_{\nu}(x)$ sont de classe C^{ρ} à support compact, avec $\| a_{\nu} \|_{\rho} \leqq 1$, et où les h_{ν} sont homogènes de degré-m, C^{∞} en dehors de 0, et sont telles que la suite $\| h_{\nu} \|_{C^{M}(S^{n-1})}$ est à décroissance rapide quel que soit M.

On a alors :

$$T_{l}\, u=\sum_{\nu} T_{a_{\nu}} \cdot (h_{\nu}(D)\, s(D))\, u, \tag{3.3}$$

la série étant convergente pour la norme d'opérateurs de H^{s} dans H^{s-m} ou de C^{σ} dans $C^{\sigma-m}$ (conv. hab. si entier).

Les opérateurs $T'_{a_{\nu}}$ étant définis comme en (2.3), posons :

$$T'_{l}\, u=\sum_{\nu} T'_{a_{\nu}} \cdot (h_{\nu}(D)\, s(D))\, u. \tag{3.4}$$

Les opérateurs $(T_{a_{\nu}}-T'_{a_{\nu}})$ forment une suite bornée d'opérateurs de H^{s} dans $H^{s+\rho}$, tandis que les $(h_{\nu}(D)\, s(D))$ forment une suite à décroissance rapide d'opérateurs de H^{s} dans H^{s-m}. Il en résulte que $T_{l}-T'_{l}$ applique continûment H^{s} dans $H^{s-m+\rho}$ et C^{σ} dans $C^{\sigma+m+\rho}$ (conv. hab. si entier). Un argument du même type montre clairement qu'une modification du choix de χ ou de s pour T_{l}, ou du choix de k, φ, N_{0}, s pour T'_{l} ne modifie ces opérateurs que par addition d'un opérateur $(\rho-m)$-régularisant.

PROPOSITION 3.1. — *Soient* $h(\xi)$ *homogène de degré* m, C^{∞} *pour* $\xi \neq 0$, $a(x)$ *de classe* C^{ρ} ($\rho>0$ *non entier*) *à support compact, et* $s(\xi)$ *comme ci-dessus. Alors l'opérateur* R *défini par :*

$$R\, u=(h(D)\, s(D))\, T_{a}\, u-\sum_{|\alpha| \leqq [\rho]} 1/\alpha\,!\; T_{D^{\alpha} a}(h^{\alpha}(D)\, s(D))\, u \tag{3.5}$$

est $(\rho-m)$*-régularisant : il applique continûment* H^{s} *dans* $H^{s-m+\rho}$ *et* C^{σ} *dans* $C^{\sigma-m+\rho}$ *(conv. hab. si entier), avec une norme d'opérateur majorée par* Cte $\| a \|_{\rho}\, \| h \|_{C^{M}(S^{n-1})}$ *pour* M *convenable. On a noté ici* $h^{\alpha}(\xi)=(\partial / \partial \xi)^{\alpha} h(\xi)$ *et* $[\rho]$ *la partie entière de* ρ.

On peut d'après ce qui précède remplacer les opérateurs T_{a} par T'_{a} avec N_{0} assez grand. L'opérateur R est remplacé par R' avec :

$$R'\, u=\sum_{p \leqq q-N_{0}} \sum h(D)\, a_{p}\, u_{q}-\sum_{|\alpha| \leqq [\rho];\; p \leqq q-N_{0}} \sum \sum 1/\alpha\,!\; D^{\alpha} a_{p}\, h^{\alpha}(D)\, u_{q}, \tag{3.6}$$

si la fonction $s(\xi)$ est égale à 1 sur les couronnes C_{q}, $q \geqq N_{0}$.

Soient deux familles de couronnes (C'_{q}) et (C''_{q}) du même type que les couronnes (C_{q}), telles que pour $p \leqq q-N_{0}$, les produits $a_{p}\, u_{q}$ aient leur spectre dans C'_{q}, et que $C'_{q} \subset C''_{q}$. Soit φ_{0} de classe C^{∞}, à support dans C''_{0}, égale à 1 sur C'_{0}.

On a alors :

$$h(\xi)=2^{mq}\varphi(2^{-q}\xi) \qquad \text{pour} \quad \xi\in C'_q \tag{3.7}$$

en posant $\varphi(\xi)=h(\xi)\,\varphi_0(\xi)$.

Soit enfin $r(x)$ la transformée de Fourier inverse de φ. On a $r\in\mathscr{S}$ et il est clair qu'il existe M tel que :

$$\|(1+|x|)^\rho\, r(x)\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}\leqq \mathrm{Cte}\ \|h(\xi)\|_{C^M(S^{n-1})}. \tag{3.8}$$

On a :

$$R'u=\sum_{p\leqq q-N_0}\sum 2^{mq}[\varphi(2^{-q}D)-\sum_{|\alpha|\leqq[\rho]}1/\alpha\,!\ D^\alpha a_p\,\varphi^\alpha(2^{-q}D)]\,u_q. \tag{3.9}$$

La fonction $\varphi^\alpha(\xi)=(\partial/\partial\xi)^\alpha\varphi(\xi)$ est la transformée de Fourier de $(-ix)^\alpha r(x)$. On a donc :

$$R'u=\sum_{p\leqq q-N_0}\sum 2^{mq}\int r(t)\,a_p(x-2^{-q}t) - \sum_{|\alpha|\leqq[\rho]}\frac{1}{\alpha\,!}\,\frac{\partial^\alpha a_p}{\partial x^\alpha}(x)\,2^{-|\alpha|q}(-t)^\alpha.\,u_q(x-2^{-q}t)\,dt \tag{3.10}$$

et donc $R'u=\sum f_q$ avec $\operatorname{Supp}\hat{f}_q\subset C'_q$ et :

$$\|f_q\|_0\leqq \mathrm{Cte}\ 2^{mq}\|\sum_{p\leqq q-N_0}a_p\|_\rho\,2^{-\rho q}\|\,|t|^\rho r(t)\|_{L^1}\|u_q\|_0, \tag{3.11}$$

$$|f_q|_0\leqq \mathrm{Cte}\ 2^{mq}\|\sum_{p\leqq q-N_0}a_p\|_\rho\,2^{-\rho q}\|\,|t|^\rho r(t)\|_{L^1}\,|u_q|_0. \tag{3.12}$$

On a

$$\|\sum_{p\leqq q-N_0}a_p\|_\rho\leqq \mathrm{Cte}\ \|a\|_\rho$$

et il résulte de (3.8), (3.11) et (3.12) que R' applique H^s dans $H^{s-m+\rho}$ et C^σ dans $C^{\sigma-m+\rho}$ (conv. hab. si entier) avec une norme majorée par Cte $\|a\|_\rho\ \|h\|_{C^M(S^{n-1})}$.

THÉORÈME 3.2. — *Soient $l_1(x,\xi)$ et $l_2(x,\xi)$ homogènes en ξ de degré m_1 et m_2, de classe C^∞ en ξ et C^ρ en x, à support compact en x.*

Posons :

$$l(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\leqq[\rho]}1/\alpha\,!\,(\partial/\partial_\xi)^\alpha l_1\,D_x^\alpha l_2. \tag{3.13}$$

On a alors $T_{l_1}\circ T_{l_2}=T_l+R$, où R applique continûment H^s dans $H^{s-m_1-m_2+\rho}$ et C^σ dans $C^{\sigma-m_1-m_2+\rho}$ (conv. hab. si entier).

Si $l_1(x, \xi)=\sum a_\nu(x)\, h_\nu(\xi)$ et $l_2(x, \xi)=\sum b_\nu(x)\, k_\nu(\xi)$ sont les décompositions en harmoniques sphériques, on a :

$$\text{(3.14)} \qquad T_{l_1} T_{l_2}=\sum_\mu \sum_\nu T_{a_\mu}(h_\mu(D)\, s(D))\, T_{b_\nu}(k_\nu(D)\, s(D))=\sum\sum A_{\mu\nu}.$$

D'après la proposition 3.1, on a :

$$\text{(3.15)} \qquad A_{\mu\nu}=T_{a_\mu}\Big(\sum_\alpha 1/\alpha\,!\; T_{D^\alpha b_\nu}.\, h_\nu^\alpha(D)\, s(D)\, k_\nu(D)\, s(D)\Big)+T_{a_\mu} R_{\mu\nu} k_\nu(D)\, s(D)$$

et $T_{a_\mu} R_{\mu\nu}\, k_\nu(D)\, s(D)$ applique H^s dans $H^{s-m_1-m_2+\rho}$ avec une norme majorée par :

$$\text{Cte}\, \| a_\mu \|_\rho\, \| b_\nu \|_\rho\, \| h_\mu \|_{C^M(S^{n-1})}\, \| k_\nu \|_{C^M(S^{n-1})}.$$

D'autre part, d'après le théorème 2.3, on a :

$$\text{(3.16)} \quad T_{a_\mu} T_{D^\alpha b_\nu} h_\mu^\alpha(D)\, k_\nu(D)\, s^2(D)=T_{a_\mu D^\alpha b_\nu} h_\mu^\alpha(D)\, k_\nu(D)\, s^2(D)+R_{\mu\nu}^\alpha h_\mu^\alpha(D)\, k_\nu(D)\, s^2(D).$$

où $R_{\mu\nu}^\alpha$ applique continûment H^s dans $H^{s+\rho-|\alpha|}$ avec une norme majorée par $\text{Cte}\,\| a_\mu \|_\rho \| D^\alpha b_\nu \|_{\rho-|\alpha|}$. Il en résulte que $R_{\mu\nu}^\alpha h_\mu^\alpha(D) k_\nu(D) s^2(D)$ applique continûment H^s dans $H^{s-m_1-m_2+\rho}$ avec une norme majorée par :

$$\text{Cte}\, \| a_\mu \|_\rho\, \| b_\nu \|_\rho\, \| h_\mu \|_{C^M(S^{n-1})} \| k_\nu \|_{C^M(S^{n-1})}.$$

Enfin, on a :

$$\text{(3.17)} \qquad T_l=\sum_\mu \sum_\nu \sum_{|\alpha|\leq\rho} \frac{1}{\alpha\,!}\, T_{a_\mu D^\alpha b_\nu} h_\mu^\alpha(D)\, k_\nu(D)\, s^2(D)+R^0,$$

où le reste R^0 provient du remplacement de $s(\xi)$ par $s^2(\xi)$, et applique continûment H^s dans $H^{s-m_1-m_2+\rho}$. La série :

$$\text{(3.18)} \qquad \sum_\mu \sum_\nu \| a_\mu \|_\rho\, \| b_\nu \|_\rho\, \| h_\mu \|_{C^M(S^{n-1})} \| k_\nu \|_{C^M(S^{n-1})}$$

étant convergente, on a bien $T_l=T_{l_1} \circ T_{l_2}+R$, avec R continu de H^s dans $H^{s-m_1-m_2+\rho}$, et, de même, continu de C^σ dans $C^{\sigma-m_1-m_2+\rho}$ (conv. hab. si entier).

THÉORÈME 3.3. — *Soit $l(x, \xi)$ homogène de degré m en ξ de classe C^∞ en ξ et C^ρ en x, à support compact. Posons :*

$$l^*(x, \xi)=\sum_{|\alpha|\leq[\rho]} 1/\alpha\,!(\partial/\partial_\xi)^\alpha D_x^\alpha \bar{l}(x, \xi).$$

Alors l'adjoint T_l^* de T_l applique H^s dans H^{s-m}, et $T_l^*-T_{l^*}$ applique continûment H^s dans $H^{s-m+\rho}$.

Si $l(x, \xi)=\sum a_\nu(x)\, h_\nu(\xi)$ est la décomposition de l en harmoniques sphériques, on a :

(3.19) $$(\mathrm{T}_l^* u, v)=(u, \mathrm{T}_l v)=\sum_\nu (u, \mathrm{T}_{a_\nu} h_\nu(\mathrm{D})\, s(\mathrm{D})\, v)=\sum_\nu (\mathrm{T}_{a_\nu}^* u, h_\nu(\mathrm{D})\, s(\mathrm{D})\, v).$$

D'après le théorème 2.4, on a :

(3.20) $$(\mathrm{T}_{a_\nu}^* u, h_\nu(\mathrm{D})\, s(\mathrm{D})\, v)=(\mathrm{T}_{\bar{a}_\nu} u, h_\nu(\mathrm{D})\, s(\mathrm{D})\, v)+(\mathrm{R}_\nu a, h_\nu(\mathrm{D})\, s(\mathrm{D})\, v),$$

avec :

(3.21) $$\begin{aligned}|(\mathrm{R}_\nu u, h_\nu(\mathrm{D})\, s(\mathrm{D})\, v)| &\leqq \mathrm{Cte}\, \|a_\nu\|_\rho\, \|u\|_s\, \|h_\nu(\mathrm{D})\, s(\mathrm{D})\, v\|_{-s-\rho}\\ &\leqq \mathrm{Cte}\, \|a_\nu\|_\rho\, \|h_\nu\|_{\mathrm{C}^{\mathrm{M}}(\mathrm{S}^{n-1})}\, \|u\|_s\, \|v\|_{-s-\rho+m}.\end{aligned}$$

On a :

(3.22) $$\begin{aligned}(\mathrm{T}_{\bar{a}_\nu} u, h_\nu(\mathrm{D})\, s(\mathrm{D})\, v)&=(\bar{h}_\nu(\mathrm{D})\, s(\mathrm{D})\, \mathrm{T}_{\bar{a}_\nu} u, v)\\ &=\sum_{|\alpha|\leqq\rho} (\mathrm{T}_{\mathrm{D}^\alpha \bar{a}_\nu} \bar{h}_\nu(\mathrm{D})\, s(\mathrm{D})\, u, v)+(\mathrm{R}'_\nu u, v),\end{aligned}$$

d'après la proposition 3.1, avec :

(3.23) $$|(\mathrm{R}'_\nu u, v)|\leqq \mathrm{Cte}\, \|a_\nu\|_\rho\, \|h_\nu\|_{\mathrm{C}^{\mathrm{M}}(\mathrm{S}^{n-1})}\, \|u\|_s\, \|v\|_{-s-\rho+m}.$$

La série $\sum \|a_\nu\|_\rho\, \|h_\nu\|_{\mathrm{C}^{\mathrm{M}}(\mathrm{S}^{n-1})}$ étant convergente, on a donc :

$$((\mathrm{T}_l^* - \mathrm{T}_{l^*})\, u, v)\leqq \mathrm{Cte}\, \|u\|_s\, \|v\|_{-s-\rho+m},$$

ce qui démontre le théorème.

A un symbole $l(x, \xi)$, on peut associer de manière classique l'opérateur $l(x, \mathrm{D})$. La différence entre $l(x, \mathrm{D})$ et T_l est d'autant plus régularisante que l est plus régulier en x, ce qui est une conséquence simple du théorème 2.5 et de la décomposition en harmoniques sphériques. Nous nous bornerons aux deux énoncés suivants :

THÉORÈME 3.4. — (*a*) *Soit* $l(x, \xi)$ *homogène en* ξ *de degré* m, *de classe* C^∞ *en* ξ *et* C^ρ *en* x, *à support compact en* x, *avec* $\rho>m$. *Alors l'opérateur* $l(x, \mathrm{D})-\mathrm{T}_l$ *applique continûment* L^2 *dans* L^2;

(*b*) *si de plus* l *est de classe* C^∞ *en* x, *alors* $l(x, \mathrm{D})-\mathrm{T}_l$ *est infiniment régularisant, c'est-à-dire applique* H^s *dans* H^{s} *et* C^σ *dans* C *quels que soient* s, s', σ, σ'.

Si $l(x, \xi)=\sum a_\nu(x)\, h_\nu(\xi)$ est la décomposition de l en harmoniques sphériques, on est ramené à montrer que :

$$\sum_\nu (\mathrm{T}_{a_\nu}-a_\nu)\, h_\nu(\mathrm{D})\, s(\mathrm{D}),$$

possède les propriétés voulues. Or $h_\nu(\mathrm{D})\, s(\mathrm{D})$ applique H^s dans H^{s-m} avec une norme majorée par $\mathrm{Cte}\, \|h_\nu(\xi)\|_{\mathrm{C}^{\mathrm{M}}(\mathrm{S}^{n-1})}$, tandis que $\mathrm{T}_{a_\nu}-a_\nu$ applique H^{-m} dans L^2 sous l'hypothèse (*a*) [H^{s-m} dans $H^{s'}$ pour tout s' sous l'hypothèse (*b*)], avec une norme majorée par Cte $\| a_\nu \|_\rho$ [resp. $| a_\nu |_{s'-s+m+n/2+\varepsilon}$], d'après le théorème 2.5 et la série $\sum (T_{a_\nu} - a_\nu) h_\nu(D) s(D)$ converge pour les normes d'opérateurs voulues.

COROLLAIRE 3.5. — *Soit* $l(x, \xi)$ *homogène de degré* m *en* ξ, *de classe* C^∞ *en* ξ *et* C^ρ *en* x, *à support compact en* x. *Soit* u *appartenant à* H^s [*resp.* C^σ] *à support compact, et soit* U *un ouvert conique de* $R^n \times S^{n-1}$:

(*a*) *supposons* $l(x, \xi) = 0$ *dans* U. *Alors* $T_l u$ *est microlocalement de classe* $H^{s-m+\rho}$ [*resp.* $C^{\sigma-m+\rho}$ *conv. hab. si entier*] *dans* U;

(*b*) *supposons que* u *soit microlocalement de classe* $H^{s'}$ [*resp.* $C^{\sigma'}$] *dans* U. *Alors* $T_l u$ *est microlocalement de classe* H^t [*resp.* C^τ *conv. hab. si entier*] *dans* U, *avec* $t = \mathrm{Min}(s+\rho-m, s'-m)$ *et* $\tau = \mathrm{Min}(\sigma+\rho-m, \sigma'-m)$.

Il faut étudier la régularité de $k(x, D) T_l u$, avec $k(x, \xi)$ homogène de degré 0, de classe C^∞, nul hors de U. On a :

$$k(x, D)\, T_l u = T_k T_l u + R u, \tag{3.24}$$

avec R infiniment régularisant d'après le théorème précédent, et :

$$T_k T_l u = \sum_{|\alpha| \leq [\rho]} 1/\alpha!\, T_{\partial_\xi^\alpha k D_x^\alpha l} u + R' u = 0 + R' u, \tag{3.25}$$

avec R′ d'ordre $m-\rho$ d'après le théorème 3.2. Cela démontre la partie (*a*).

Sous les hypothèses de la partie (*b*), soit $k(x, D)$ comme ci-dessus. Soient $k_1(x, \xi)$ et $k_2(x, \xi)$ homogènes de degré 0, de classe C^∞, à support compact en x, tels que $k_1(x, \xi) + k_2(x, \xi)$ soit égal à 1 pour x dans un voisinage du support de u, que $k_1(x, \xi)$ soit à support dans U et vaille 1 au voisinage du support de $k(x, \xi)$. On a alors :

$$k(x, D)\, T_l u = T_k T_l k_1(x, D)\, u + T_k T_l k_2(x, D)\, u + R u, \tag{3.26}$$

$$k(x, D)\, T_l u = T_k T_l k_1(x, D)\, u + T_k T_l T_{k_2} u + R' u, \tag{3.27}$$

avec R et R′ infiniment régularisants. Comme précédemment, on a $T_l T_{k_2}$ d'ordre $m-\rho$ et $T_k T_l T_{k_2} u$ appartient à $H^{s-m+\rho}$ [resp. $C^{\sigma-m+\rho}$].

D'autre part, $k_1(x, D)\, u$ appartient à $H^{s'}$ [resp. $C^{\sigma'}$] et $T_k T_l k_1(x, D)\, u$ appartient à $H^{s'-m}$ [resp. $C^{\sigma'-m}$], d'où le résultat.

Nous pouvons maintenant aborder le calcul paradifférentiel dans un ouvert de R^n. Lorsque $l(x, \xi)$ sera égal à une somme finie $l = \sum l_j(x, \xi)$ avec les l_j comme ci-dessus, on notera $T_l = \sum T_{l_j}$.

DÉFINITION 3.6. — (*a*) *Soit* Ω *un ouvert de* R^n. *Nous noterons* $\Sigma_\rho^m(\Omega)$, *pour* $m \in R$ *et* $\rho > 0$ *non entier, l'ensemble des fonctions* $l(x, \xi)$ *définies dans* $\Omega \times (R^n \setminus \{0\})$:

$$l(x, \xi) = l_m(x, \xi) + l_{m-1}(x, \xi) + \ldots + l_{m-[\rho]}(x, \xi), \tag{3.28}$$

où $l_{m-k}(x, \xi)$ *est homogène de degré* $m-k$ *en* ξ, *de classe* C^∞ *en* ξ *et* $C_{\mathrm{loc}}^{\rho-k}$ *en* x. [*On a noté* $[\rho]$ *la partie entière de* ρ.];

(*b*) *si* $l^{(i)} \in \Sigma_\rho^{m_i}$, $i=1, 2$, *on définit* $l^1 \# l^2 \in \Sigma_\rho^{m_1+m_2}$ *par :*

(3.29) $$l^1 \# l^2 = \sum_{|\alpha|+k_1+k_2 \leqq [\rho]} \sum \sum 1/\alpha\,!\ \partial_\xi^\alpha l^1_{m_1-k_1} D_x^\alpha l^2_{m_2-k_2};$$

(*c*) *si* $l \in \Sigma_\rho^m$, *on définit* $l^* \in \Sigma_\rho^m$ *par :*

(3.30) $$l^* = \sum_{|\alpha|+k \leqq [\rho]} \sum 1/\alpha\,!\ \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \bar{l}_{m-k}.$$

Comme dans la théorie classique des opérateurs pseudo-différentiels, on démontre que la loi de composition est associative (cela résultera d'ailleurs du théorème 3.9) et on démontre le théorème d'inversion suivant :

PROPOSITION 3.7. — *Soient* $l \in \Sigma_\rho^m(\Omega)$ *et* $k \in \Sigma_\rho^{m'}(\Omega)$, *tels que* $l_m(x, \xi) \neq 0$ *au voisinage du support de k. Il existe alors h et h' appartient à* $\Sigma_\rho^{m'-m}(\Omega)$ tels que :

$$l \# h = h' \# l = k.$$

DÉFINITION 3.8. — *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$ *et* L *une application linéaire de* $D'(\Omega)$ *dans lui-même à support propre* [*pour tout compact* K *de* Ω, *il existe un compact* $\hat{K}$ de Ω tel que $\operatorname{Supp} u \subset K \Rightarrow \operatorname{Supp} Lu \subset \hat{K}$ *et* $(\operatorname{Supp} u) \cap K = \emptyset \Rightarrow \operatorname{Supp} Lu \cap K = \emptyset$].

On dit que L *est un opérateur paradifférentiel d'ordre m et de classe* C^ρ *dans* Ω, *ce qu'on notera* $L \in \operatorname{Op}(\Sigma_\rho^m)(\Omega)$ [*resp.* $\widetilde{\operatorname{Op}}(\Sigma_\rho^m)(\Omega)$], *s'il existe* $l \in \Sigma_\rho^m(\Omega)$ *tel que, pour tout compact* K *de* Ω, *pour tout* $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ *égal à* 1 *au voisinage de* K, *l'opérateur* $Lu - \chi T_{\chi l} u$ *applique continûment les éléments de* H^s *à support dans* K *dans* $H^{s-m+\rho}$ [*resp. et de plus les éléments de* C^σ *à support dans* K *dans* $C^{\sigma-m+\rho}$ *conv. hab. si entier*].

Nous dirons provisoirement (avant de démontrer l'unicité) que l est un symbole de L si on a la propriété ci-dessus. Il est clair que si L appartient à $\operatorname{Op}(\Sigma_\rho^m)(\Omega)$ [resp. $\widetilde{\operatorname{Op}}(\Sigma_\rho^m)(\Omega)$], L applique $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ dans $H^{s-m}_{\text{loc}}(\Omega)$ [resp. et de plus C^σ_{loc} dans $C^{\sigma-m}_{\text{loc}}(\Omega)$ conv. hab. si entier].

THÉORÈME 3.9. — (*a*) *Si* L *appartient à* $\operatorname{Op}(\Sigma_\rho^m)(\Omega)$ [*resp.* $\widetilde{\operatorname{Op}}(\Sigma_\rho^m)(\Omega)$], *il existe un unique symbole l de* L. *L'application symbole* $L \leadsto \sigma(L) = l$ *ainsi définie de* $\operatorname{Op}(\Sigma_\rho^m(\Omega))$ [*resp.* $\widetilde{\operatorname{Op}}(\Sigma_\rho^m(\Omega))$] *dans* $\Sigma_\rho^m(\Omega)$ *est surjective, son noyau est constitué des opérateurs appliquant* $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ *dans* $H^{s-m+\rho}_{\text{loc}}(\Omega)$ [*resp. et de plus* $C^\sigma_{\text{loc}}(\Omega)$ *dans* $C^{\sigma-m+\rho}_{\text{loc}}(\Omega)$ *conv. hab. si entier*];

(*b*) *si* $L^j \in \operatorname{Op}(\Sigma_\rho^{m_j})(\Omega)$ [*resp.* $\widetilde{\operatorname{Op}}(\Sigma_\rho^{m_j})(\Omega)$]; $j=1, 2$; *on a :*

$$L^1 L^2 \in \operatorname{Op}(\Sigma_\rho^{m_1+m_2})(\Omega) \qquad [\textit{resp. } \widetilde{\operatorname{Op}}(\Sigma_\rho^{m_1+m_2})(\Omega)]$$

et

$$\sigma(L^1 . L^2) = \sigma(L^1) \# \sigma(L^2);$$

(*c*) *si* L *appartient à* $\operatorname{Op}(\Sigma_\rho^m)(\Omega)$, *il en est de même de son adjoint* L^*, *et on a* $\sigma(L^*) = (\sigma(L))^*$;

(*d*) *si* L *est un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre m, à support propre dans* Ω, *de symbole :*

$$l(x, \xi) \sim \sum_j l_{m-j}(x, \xi),$$

alors pour chaque $\rho>0$, *l'opérateur* L *appartient à* $\tilde{\mathrm{O}}\mathrm{p}(\Sigma_m^\rho)(\Omega)$ et son symbole est alors :

$$\sigma(\mathrm{L})=\sum_{0\leqq i\leqq[\rho]} l_{m-j}.$$

Le (a) sera démontré en dernier. Montrons d'abord que si l^j est un symbole de L^j; $j=1, 2$; sous les hypothèses du (b), alors $l^1 \# l^2$ est un symbole de $\mathrm{L}^1\mathrm{L}^2$. Soit K un compact de Ω, et $\chi\in\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ égale à 1 au voisinage de K. On a, pour u à support dans K :

$$\mathrm{T}_{\chi l^1\#\chi l^2}\,u=\mathrm{T}_{\chi(l^1\#l^2)}\,u+\mathrm{R}'u, \tag{3.32}$$

avec R′ d'ordre $m_1+m_2-\rho$. Il résulte immédiatement de (3.31), (3.32) et de la définition 3.8 que $\mathrm{L}^1\mathrm{L}^2$ appartient à $\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^{m_1+m_2})(\Omega)$ [resp. $\tilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_\rho^{m_1+m_2})(r)$] et que $l^1\#l^2$ est un symbole de $\mathrm{L}^1\mathrm{L}^2$.

On démontre de même que si l est un symbole de L, alors l^* est un symbole de L^*, en utilisant le théorème 3.3 et le corollaire 3.5.

Si L est un opérateur pseudo-différentiel vérifiant les conditions du (c), alors :

$$\mathrm{L}-\chi\sum_{0\leqq j\leqq[\rho]} l_{m-j}(x, \mathrm{D})$$

est d'ordre $m-[\rho]-1$ sur les distributions à support dans K, et $\chi\, l_{m-j}(x, \mathrm{D})-\mathrm{T}_{\chi l_{m-j}}$ est infiniment régularisant d'après le théorème 3.4 (b).

On déduit aisément du corollaire 3.5 que :

$$\mathrm{L}\in\tilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_\rho^m) \text{ et que } \sum_{0\leqq j\leqq[\rho]} l_{m-j} \text{ est un symbole de L.}$$

Montrons maintenant que pour tout $l\in\Sigma_\rho^m$, on peut trouver un opérateur L à support propre dont l est un symbole. Soit U_j un recouvrement localement fini de Ω, φ_j et χ_j appartenant à $\mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{U}_j)$ tels que (φ_j) soit une partition de l'unité et que χ_j soit égal à 1 au voisinage du support de φ_j.

Posons $\mathrm{L}\,u=\sum\chi_j\mathrm{T}_{\chi_j l}(\varphi_j u)$. Le lecteur vérifiera facilement, à l'aide du corollaire 3.5 que :

$$\mathrm{L}\in\tilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_\rho^m) \text{ et que } l \text{ est un symbole de L.}$$

Montrons enfin qu'à un opérateur paradifférentiel L, on peut associer un seul symbole l, ou encore que si $\mathrm{L}\in\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^m)$ applique H^s dans $\mathrm{H}^{s-m+\rho}$, le seul symbole qui lui soit associé est 0. C'est une conséquence simple de la proposition suivante :

PROPOSITION 3.10. — *Soit* $\mathrm{L}\in\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^m)$ [*resp.* $\tilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_\rho^m)$], *ayant comme symbole* $l=l_m+\ldots+l_{m-[\rho]}$. *S'il existe* $s\in\mathbb{R}$ [*resp.* $\sigma\in\mathbb{R}$] *et* $\varepsilon>0$ *tels que* L *applique* H^s *dans* $\mathrm{H}^{s-m+\varepsilon}$ [*resp.* C^σ *dans* $\mathrm{C}^{\sigma-m+\varepsilon}$], *on a* $l_m=0$.

Supposons qu'il existe (x_0, ξ_0) tel que $l_m(x_0, \xi_0)\neq 0$, et soit K un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, dont le symbole principal est non nul en (x_0, ξ_0), et dont le symbole complet est nul en dehors d'un petit voisinage conique de (x_0, ξ_0), voisinage dans lequel on a $l_m(x, \xi)\neq 0$. D'après la proposition 3.7, il existe $h\in\Sigma_\rho^{-m}(\Omega)$ tel que $l\#h=k_0+\ldots+k_{-[\rho]}$.

D'après ce qui précède, il existe H appartenant à $\widetilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_\rho^{-m})(\Omega)$ de symbole h, et on a donc :

(3.33) $$K = LH + R,$$

l'opérateur R étant ρ-régularisant. L'opérateur pseudo-différentiel K, d'ordre 0 et de symbole principal non nul devrait appliquer H_{loc}^{s-m} dans $H_{\mathrm{loc}}^{s-m-\varepsilon}$ ou $C_{\mathrm{loc}}^{\sigma-m}$ dans $C_{\mathrm{loc}}^{\sigma-m-\varepsilon}$, ce qui est impossible.

Le corollaire suivant regroupe des conséquences simples et d'usage constant du calcul symbolique précédemment développé.

COROLLAIRE 3.11. — (*a*) *on a* $\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^m)(\Omega) \subset \mathrm{Op}(\Sigma_{\rho+d}^{m+d})(\Omega)$ *pour* $d > 0$;

(*b*) *si* $L \in \mathrm{Op}(\Sigma_\rho^m)(\Omega)$ *avec* $\rho > 1$, *et si le symbole principal* $\sigma_m(L)$ *est nul, alors* $L \in \mathrm{Op}(\Sigma_{\rho-1}^{m-1})(\Omega)$;

(*c*) *si* $L^j \in \mathrm{Op}(\Sigma_\rho^{m_j})(\Omega)$; $j = 1, 2$; *on a* $[L_1, L_2] \in \mathrm{Op}(\Sigma_{\rho-1}^{m_1+m_2-1})(\Omega)$ *si* $\rho > 1$, *et :*

$$\sigma_{m_1+m_2-1}([L_1, L_2]) = \frac{1}{i}\{\sigma_{m_1}(L_1), \sigma_{m_2}(L_2)\}.$$

Pour $0 < \rho < 1$, *on a* $[L_1, L_2] \in \mathrm{Op}(\Sigma_\rho^{m_1+m_2})(\Omega)$ *et son symbole est nul;*

(*d*) *soit* U *un ouvert conique de* $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, *et soit* $L \in \mathrm{Op}(\Sigma_\rho^m)(\Omega)$. *Soit* $u \in H_{\mathrm{loc}}^s(\Omega)$ *tel que* u *appartienne à* H^t *microlocalement en tout point de* U. *Alors* Lu *appartient microlocalement à* H^r *en tout point de* U, *avec* $r = \mathrm{Min}(t-m, s+\rho-m)$. *Si* $\sigma(L)$ *est nul dans* U, Lu *appartient microlocalement à* $H^{s+\rho-m}$ *dans* U.

On a également les résultats analogues en remplaçant Op *par* $\widetilde{\mathrm{Op}}$ *et* H^s *par* C^σ *conv. hab. si entier.*

Sous l'hypothèse (*d*), on a en outre la propriété de continuité suivante. Si M est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 à support dans un compact K de Ω, et dont le symbole s'annule hors d'un « compact conique » de U, il existe un opérateur M_1 ayant les mêmes propriétés, et une fonction Ψ à support compact dans Ω tels que :

(3.34) $$|MLu|_r \leqq \mathrm{Cte}(|M_1 u|_t + |\Psi u|_s).$$

Remarque 3.12. — Une famille (L_λ) d'opérateurs de $\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^m)(\Omega)$ est dite bornée si on a les trois propriétés suivantes :

(3.35) La condition de support propre est uniforme : pour tout compact de Ω, il existe $\hat{K}$ compact de Ω tel que $\mathrm{Supp}\, u \subset K \Rightarrow \mathrm{Supp}(L_\lambda u) \subset \hat{K}$ et $\mathrm{Supp}\, u \cap \hat{K} = \emptyset \Rightarrow \mathrm{Supp}\, L_\lambda u \cap K = \emptyset$.

(3.36) Les majorations sur les symboles sont uniformes : si $l_\lambda = \sum_{j \leqq [\rho]} l_{\lambda, m-j}$ est le symbole de L_λ, pour tout multi-indice α, les $D_\xi^\alpha l_{\lambda, m-j}$ formant un ensemble borné de $C_{\mathrm{loc}}^{\rho-j}(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$.

(3.37) Pour tout compact K de Ω, et $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ égale à 1 au voisinage de K, les opérateurs $L_\lambda - \chi T_{\chi l_\lambda}$ appliquent les éléments de H^s à support dans K dans $H^{s-m+\rho}$ avec une norme majorée uniformément en λ.

Il est clair que, si (L_λ) est bornée dans $\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^m)(\Omega)$, et si (L'_λ) est bornée dans $\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^{m'})(\Omega)$, la famille $(L_\lambda L'_\lambda)$ est bornée dans $\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^{m+m'})(\Omega)$.

Pour (L_λ) bornée dans $\mathrm{Op}(\Sigma_\rho^m)(\Omega)$, la majoration (3.34) peut être prise uniforme : M étant donné, on peut choisir M_1, Ψ et la constante tels que (3.34) soit valable pour tous les (L_λ). En effet (3.35) et (3.37) permettent de se ramener au cas de T_{l_λ} et à la démonstration du corollaire 3.5 (*b*) [avec $M = k(x, D)$ et $M_1 = k_1(x, D)$]. Il suffit de vérifier que les normes des opérateurs intervenant dans (3.26) et (3.27) sont bornées uniformément en λ, ce qui se déduit facilement de la décomposition en harmoniques sphériques, et du caractère uniforme des majorations intervenant dans le théorème 2.1 et la proposition 3.1.

Le lecteur vérifiera également sans difficulté que, pour $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, Δ étant le laplacien, la famille des opérateurs $\chi(1-\alpha\Delta)^{-1}\chi$, $\alpha>0$, est bornée dans Σ_ρ^0, et que la famille $\alpha\chi(1-\alpha\Delta)^{-1}\chi$, $\alpha>0$, est bornée dans Σ_ρ^{-2}, pour tout $\rho>0$ non entier. Nous aurons à utiliser ceci au paragraphe 6.

Enfin, le théorème 2.5 entraîne immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.13. — (*a*) *Soient* $a \in C_{\mathrm{loc}}^\rho(\Omega)$, $\rho>0$ *non entier, et* $u \in C_{\mathrm{loc}}^\sigma(\Omega)$. *Soient* $A \in \tilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_\rho^0)(\Omega)$ *avec* $\sigma(A)=a$, *et éventuellement* $U \in \tilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_\sigma^0)$, *avec* $\sigma(U)=u$.

On a alors :

(3.38) *si* $\sigma>0$, $au \equiv A\,u + U\,a$ (mod. $C_{\mathrm{loc}}^{\rho+\sigma}$ *conv. hab. si entier*),

(3.39) *si* $-\rho<\sigma<0$, $au \equiv A\,u$ (mod. $C_{\mathrm{loc}}^{\rho+\sigma}$ *conv. hab. si entier*);

(*b*) *soient* $a \in H_{\mathrm{loc}}^s(\Omega)$, $s>n/2$ *et* $u \in H_{\mathrm{loc}}^t(\Omega)$. *Soient* $A \in \mathrm{Op}(\Sigma_{s-n/2-\varepsilon}^0)(\Omega)$ *avec* $\sigma(A)=a$ *et éventuellement* $U \in \tilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_{t-n/2-\varepsilon}^0)$, *avec* $\sigma(U)=u$.

On a alors pour tout $\varepsilon>0$:

(3.40) *Si* $t>n/2$, $au \equiv A\,u + U\,a$ (mod $H_{\mathrm{loc}}^{s+t-n/2-\varepsilon}$),

(3.41) *Si* $-s+n/2<t\leqq n/2$, $au \equiv A\,u$ (mod $H_{\mathrm{loc}}^{s+t-n/2-\varepsilon}$).

4. Fonctions composées et opérateurs paradifférentiels

Si u appartient à C^ρ, avec $\rho>0$ et $2\rho \notin \mathbb{N}$, on a :

$$u^2 \equiv 2\,T_u.u = T_{2u}.u \,(\mathrm{mod}\, C^{2\rho})$$

d'après le théorème 2.5.

En utilisant $T_a \circ T_b \equiv T_{ab}$ (mod ρ-régularisants) (th. 2.3), on obtient $u^3 \equiv T_{3u^2}.u$ et, par une récurrence évidente, $F(u) \equiv T_{F'(u)}.u$ (mod $C^{2\rho}$), lorsque F est un polynôme. Pour pouvoir passer à la limite et démontrer cette dernière propriété lorsque F est de classe C^∞, il nous faudra toutefois obtenir une estimation précise du reste dans $C^{2\rho}$.

Les deux lemmes qui suivent sont des variantes de théorèmes de [2], aussi ne donnerons-nous que de brèves indications sur leur démonstration.

LEMME 4.1. — *Soient* $\rho>0$ *non entier et* $r>0$. *Soit* u *appartenant à* C^ρ [*resp.* H^r]. *Il existe alors pour chaque* $R>0$, *une décomposition* $u=u_R+u'_R$, *avec* Supp $\hat{u}_R\subset B(R)$ (*boule de rayon* R), *et pour* $0\leqq\sigma\leqq\rho$,

$$\| u'_R \|_\sigma \leqq \mathrm{Cte}\, \| u \|_\rho\, R^{\rho-\sigma},$$

$$\left[\textit{resp. pour } 0\leqq s<r,\ | u'_R |_s \leqq c(R)\, R^{r-s} \textit{ avec } \left(\int_1^\infty c^2(R)\frac{dR}{R}\right)^{1/2} \leqq \mathrm{Cte}\, | u |_r\right].$$

La démonstration est simple, on écrit la décomposition canonique de u :

$$u=\sum_{-1}^{N_0} u_j+\sum_{N_0+1}^{\infty} u_j, \tag{4.1}$$

avec 2^{N_0} de l'ordre de grandeur de R. On voit que l'on peut exiger de plus que $\hat{u}'_R$ est nul hors de B (Cte R).

LEMME 4.2. — *Soient* $0<\sigma<\rho$ *et* $0<r<s$. *Soit* u *une distribution telle que, pour tout* $R>0$, *on ait une décomposition :*

$$u=u_R+u'_R+u''_R; \qquad \operatorname{supp} \hat{u}_R\subset B(R)$$

et :

$$\| u_R \|_0\leqq C_0; \qquad \| u'_R \|_0\leqq C_0\, R^{-\rho}; \qquad \| u''_R \|_\sigma \leqq C_0\, R^{\sigma-\rho}$$

$$\left[\textit{resp. } | u_R |_0\leqq C_0;\ | u'_R |_0\leqq c(R)\, R^{-r};\ | u''_R |_s\leqq c(R)\, R^{s-r} \textit{ avec } \int_1^\infty c^2(R)\frac{dR}{R}<\infty\right].$$

On a alors $u\in C^\rho$ (*conv. hab. si entier*) *et :*

$$\| u \|_\rho \leqq \mathrm{Cte}\, C_0$$

$$\left[\textit{resp. } u\in H^r \textit{ et } | u |_r\leqq \mathrm{Cte}\left[C_0+\left(\int_1^\infty c^2(R)\frac{dR}{R}\right)^{1/2}\right]\right].$$

On démontre que la décomposition canonique en couronnes dyadiques $u=\sum u_j$ possède les propriétés voulues en écrivant :

$$u_j=\varphi(2^{-j}D)\, u=\varphi(2^{-j}D)\, u_R+\varphi(2^{-j}D)\, u'_R+\varphi(2^{-j}D)\, u''_R, \tag{4.2}$$

et en choisissant R de l'ordre de grandeur de 2^j, de manière que $\varphi(2^{-j}D)\, u_R$ soit nul.

PROPOSITION 4.3. — *Soient* $u_1, \ldots, u_l$ *à support compact dans* $\mathbb{R}^n$, *à valeurs réelles, de classe* C^ρ *avec* $\rho>0$ *et* $2\rho\notin\mathbb{N}$ [*resp. de classe* H^r *avec* $r>n/2$]. *Il existe alors* C_0 [*resp.* C_ε *pour* $\varepsilon>0$] *et un cube* K *de* $\mathbb{R}^l$ *tels que, pour tout polynôme* P *de* l *variables, on ait :*

$$\left\| P(u_1, \ldots, u_l)-\sum_{j=1}^{l} T'_{\partial P/\partial u_j}.u_j \right\|_{2\rho} \leqq C_0\, (d^0 P)^{2\rho}\, \| P \|_{C^2(K)}, \tag{4.3}$$

$$[\textit{resp. } | P(u_1, \ldots, u_l)-\sum T'_{\partial P/\partial u_j}.u_j |_{2r-n/2-\varepsilon} \leqq C_\varepsilon\, (d^0 P)^{2r-n/2-\varepsilon}\, \| P \|_{C^2(K)}]. \tag{4.4}$$

On a noté ici $T'_a u = \sum_{p \leqq q - N_0} \sum a_p u_q$, où N_0 et les choix dont dépendent les décompositions en couronnes dyadiques sont fixés dans tout ce qui suit.

Remarquons que si a a son spectre dans la boule $B(R)$, on a :

$$(4.5) \qquad \operatorname{Supp}(au - T'_a u)\hat{} \subset B(\mathrm{Cte}\, R),$$

où la constante ne dépend que des choix précédents. On a en effet :

$$au - T'_a . u = \sum_{q - N_0 \leqq p \leqq p_0} \sum a_p u_q,$$

avec 2^{p_0} de l'ordre de grandeur de R.

Pour simplifier les notations, nous supposerons $l=2$ et poserons $u_1 = u$, $u_2 = v$. Nous utiliserons les décompositions $u = u_R + u'_R$, $v = v_R + v'_R$ fournies par le lemme 4.1. Le cube K aura pour demi-côté $\sup(u_R, v_R)$. On posera $d = d^0(P)$.

On a d'après la formule de Taylor :

$$(4.6) \qquad P(u, v) = P(u_{R/d}, v_{R/d}) + \frac{\partial P}{\partial u}(u_{R/d}, v_{R/d})\, u'_{R/d} + \frac{\partial P}{\partial v} v'_{R/d} + f'_R,$$

avec :

$$(4.7) \qquad \| f'_R \|_0 \leqq \mathrm{Cte} \| P \|_{C^2(K)} (\| u'_{R/d} \|_0^2 + \| v'_{R/d} \|_0^2) \leqq \mathrm{Cte} \| P \|_{C^2(K)} d^{2\rho} R^{-2\rho}.$$

Il est clair que $P(u_{R/d}, v_{R/d})$ a son spectre dans $B(R)$ et est majoré en norme uniforme par celle de P sur K. D'autre part, si on pose :

$$g_R = \frac{\partial P}{\partial u}(u_{R/d}, v_{R/d})\, u'_{R/d} - T_{\partial P/\partial u (u_{R/d}, v_{R/d})} . u'_{R/d},$$

le spectre de g_R est contenu dans B (Cte R) d'après (4.5), et on a :

$$(4.8) \qquad \| g_R \|_0 \leqq \mathrm{Cte} \left(\left\| \frac{\partial P}{\partial u} \right\|_0 \| u'_{R/d} \|_0 + \left\| \frac{\partial P}{\partial u} \right\|_0 \| u'_{R/d} \|_\varepsilon \right) \leqq \mathrm{Cte} \| P \|_{C^1(K)},$$

en utilisant le théorème 2.1. Le terme analogue à g_R (en échangeant les rôles de u et v) jouit des mêmes propriétés. Enfin, en posant :

$$h_R = T_{\partial P/\partial u(u, v)} . u'_{R/d} - T_{\partial P/\partial u(u, v)} . u = - T_{\partial P/\partial u} . u_{R/d},$$

le spectre de h_R est contenu dans B(Cte R), et on a :

$$(4.9) \qquad \| h_R \|_0 \leqq \mathrm{Cte} \left\| \frac{\partial P}{\partial u} \right\|_0 \| u_{R/d} \|_\varepsilon \leqq \mathrm{Cte} \| P \|_{C^1(K)}.$$

On a donc :

$$(4.10) \qquad f = P(u, v) - T_{\partial P/\partial u(u, v)} . u - T_{\partial P/\partial v} . v = f_R + f'_R + f''_R,$$

où l'on a posé :

$$(4.11) \qquad f''_R = T_\alpha . u'_{R/d} + T_\beta . v'_{R/d},$$

avec :

$$\alpha=\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u}(u_{\mathrm{R}/d}, v_{\mathrm{R}/d})-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u}(u, v); \qquad \beta=\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial v}(u_{\mathrm{R}/d}, v_{\mathrm{R}/d})-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial v}(u, v), \tag{4.12}$$

et où f_{R} est la somme de $\mathrm{P}(u_{\mathrm{R}/d}, v_{\mathrm{R}/d})$, de g_{R}, de k_{R}, et des deux termes analogues (en échangeant les rôles de u et v). On a donc :

$$\operatorname{Supp} f_{\mathrm{R}} \subset \mathrm{B}(\mathrm{Cte}\,\mathrm{R}) \qquad \text{et} \qquad \| f_{\mathrm{R}} \|_0 \leqq \mathrm{Cte} \| \mathrm{P} \|_{\mathrm{C}^1(\mathrm{K})}. \tag{4.13}$$

En utilisant le théorème 2.1, on a :

$$\| \mathrm{T}_{\alpha} . u'_{\mathrm{R}/d} \|_{\rho} \leqq \mathrm{Cte} \| \alpha \|_0 \| u'_{\mathrm{R}/d} \|_{\rho} \leqq \mathrm{Cte} \| \mathrm{P} \|_{\mathrm{C}^2(\mathrm{K})} (\| u'_{\mathrm{R}/d} \|_0 + \| v'_{\mathrm{R}/d} \|_0) \| u'_{\mathrm{R}/d} \|_{\rho} \tag{4.14}$$

et donc :

$$\| f''_{\mathrm{R}} \|_{\rho} \leqq \mathrm{Cte} \| \mathrm{P} \|_{\mathrm{C}^2(\mathrm{K})} d^{\rho} \mathrm{R}^{-\rho}. \tag{4.15}$$

Il en résulte immédiatement du lemme 4.2 et de (4.7), (4.10), (4.13), (4.15) que l'on a $f \in \mathrm{C}^{2\rho}$ et l'estimation (4.3).

Sous l'hypothèse $u \in \mathrm{H}^r$, on a :

$$| f_{\mathrm{R}} |_0 \leqq \mathrm{Cte} \| \mathrm{P} \|_{\mathrm{C}^1(\mathrm{K})}, \tag{4.16}$$

$$| \mathrm{T}_{\alpha} - u'_{\mathrm{R}/d} |_0 \leqq \mathrm{Cte} \| \alpha \|_0 | u'_{\mathrm{R}/d} |_0 \leqq \mathrm{Cte} \| \mathrm{P} \|_{\mathrm{C}^2(\mathrm{K})} \| u'_{\mathrm{R}/d} \|_0 | u'_{\mathrm{R}/d} |_0, \tag{4.17}$$

et donc :

$$| f''_{\mathrm{R}} |_0 \leqq \mathrm{C}_{\varepsilon} \| \mathrm{P} \|_{\mathrm{C}^2(\mathrm{K})} (d/\mathrm{R})^{r+r-n/2-\varepsilon}. \tag{4.18}$$

De même, on a :

$$| f'_{\mathrm{R}}(x) | \leqq \mathrm{Cte} \| \mathrm{P} \|_{\mathrm{C}^2(\mathrm{K})} (| u'_{\mathrm{R}/d}(x) |^2 + | v'_{\mathrm{R}/d}(x) |^2) \tag{4.19}$$

et donc :

$$| f'_{\mathrm{R}} |_0 \leqq \mathrm{C}_{\varepsilon} \| \mathrm{P} \|_{\mathrm{C}^2(\mathrm{K})} (d/r)^{2r-n/2-2\varepsilon}. \tag{4.20}$$

L'estimation (4.4) résulte encore du lemme 4.2.

PROPOSITION 4.4. — *Soient $u_1, \ldots, u_l$ des fonctions à support compact dans $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles, de classe C^{ρ} avec $\rho>0$ et $2\rho \notin \mathbb{N}$ [resp. de classe H^r avec $r>n/2$]. Soit $\mathrm{F}(x; \mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_l)$ une fonction C^{∞} de ses arguments, définie dans R^{n+l} au voisinage de $\{ (x; u_1(x), \ldots, u_l(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n \}$. On a alors :*

$$\mathrm{F}(x; u_1(x), \ldots, u_n(x)) - \sum_j \mathrm{T}_{\partial \mathrm{F}/\partial u_j} . u_j \in \mathrm{C}^{2\rho} \qquad [\text{resp. } \mathrm{H}^{2r-n/2-\varepsilon}]. \tag{4.21}$$

On peut supposer, sans restreindre la généralité, que F est de classe C^{∞} dans $\mathbb{R}^{n+l}$ entier, et est à support compact. Montrons que l'on peut se ramener au cas particulier où F ne dépend pas de x.

Soit en effet $K_1 \subset R^n$ un compact hors duquel les u_j et $F(x, u)$ sont nulles. Soit $v_i \in C_0^\infty$, $i=1, \ldots, n$ égale à x_i au voisinage de K_1. En supposant (4.21) démontré dans le cas particulier, on aurait :

$$(4.22) \qquad F(v, u) - \sum T_{\partial F/\partial x_i(v, u)} . v_2 - \sum T_{\partial F/\partial u_j(v, u)} . u_j \in C^{2\rho}.$$

et donc (4.21) dans le cas général, compte tenu du fait que $T_{\partial F/\partial x_i(v, u)} . v_i$ est de classe C^∞, et des égalités :

$$(4.23) \qquad F(v, u) = F(x, u); \qquad \frac{\partial F}{\partial u_j}(v, u). = \frac{\partial F}{\partial u_j}(x, u).$$

Supposons donc maintenant que F ne dépend que de $U_1, \ldots, U_l$. Soit K le cube associé aux fonctions $u_1, \ldots, u_l$ par la proposition 4.3. D'après les théorèmes classiques (*voir* par exemple [6]), d'approximation des fonctions C^∞ par des polynômes, il existe des polynômes P_d, $d \in \mathbb{N}$, de degré inférieur ou égal à d, tels que l'on ait :

$$(4.24) \quad F(U_1, \ldots, U_l) = \sum_d P_d(U_1, \ldots, U_l) \text{ sur K et,}$$

$$\text{pour chaque } M \in \mathbb{N}, \ \| P_d \|_{C^2(K)} \leqq \text{Cte}\, d^{-M}.$$

On a donc, d'après la proposition 4.3 :

$$(4.25) \qquad \| P_d(u_1(x), \ldots, u_l(x)) - \sum T'_{\partial P_d/\partial u_l} . u_l \|_{2\rho} \leqq \text{Cte}\, d^{-M+2\rho}.$$

Il suffit de choisir $M > 2\rho + 1$ et de passer à la limite pour obtenir le résultat. La démonstration est analogue sous l'hypothèse $u \in H^r$.

THÉORÈME 4.5. — *Soient* Ω *un ouvert de* R^n, *et* $u_1, \ldots, u_l$ *appartenant à* $C^\rho_{\text{loc}}(\Omega)$ *avec* $\rho > 0$ [*resp.* $H^r_{\text{loc}}(\Omega)$, *avec* $r > n/2$], *à valeurs réelles.*
Soit $F(x; U_1, \ldots, U_l)$ *définie et de classe* C^∞ *au voisinage de*

$$\{(x; u_1(x), \ldots, u_l(x)) \mid x \in \Omega\}.$$

Soient A_j, $j=1, \ldots, l$, *des opérateurs paradifférentiels appartenant à* $\tilde{Op}(\Sigma^0_\rho)(\Omega)$ [*resp.* $\tilde{Op}(\Sigma^0_{r-n/2-\varepsilon})(\Omega)$ *pour tout* $\varepsilon > 0$], *de symbole* $\sigma(A_j) = \partial F/\partial u_j(x; u(x))$. *Alors* $F(x; u(x)) - \sum A_j . u_j$ *appartient à* $C^{2\rho}_{\text{loc}}(\Omega)$ (*conv. hab. si entier*) [*resp.* $H^{2r-n/2-\varepsilon}$ *pour tout* $\varepsilon > 0$].

Soit K un compact de Ω, et $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, égale à 1 au voisinage de K. On a $F(x, u(x)) = F(x, \chi(x) u(x))$ sur K, et, d'après la définition 3.8, $A_j . u_j - T_{\chi \partial F/\partial u_j(x, u)} . \chi u_j$ appartient à $C^{2\rho}$ au voisinage de K.

Enfin, la fonction :

$$\chi\, \partial F/\partial u_j(x, u) - \partial F/\partial u_j(x, \chi u) \text{ étant nulle au voisinage de K,}$$

on a :

$$T_{\chi \partial F/\partial u_j(x, u)}(\chi u_j) - T_{\partial F/\partial u_j(x, \chi u)}(\chi u_j) \text{ appartient à } C^{2\rho}$$

au voisinage de K. On a donc $F(x, u) - \sum A_j . u_j$ de classe $C^{2\rho}$ au voisinage de K en vertu de la proposition 4.4, ce qui démontre le théorème.

Sous l'hypothèse $u \in H^r_{loc}$, la démonstration est identique, compte tenu du fait que $F(x, u)$ et $\partial F/\partial u_j(x, u)$ appartiennent à $C^\rho_{loc}(\Omega)$ pour $\rho = r - n/2 - \varepsilon$.

Remarque 4.6. — Lorsque les u_j sont à valeurs complexes, le théorème précédent est encore valable, en supposant $F(x; U_1, \ldots, U_l)$ de classe C^∞ et holomorphe par rapport aux variables U. On localise d'abord le problème en remplaçant, au voisinage de tout point x_0 de Ω, la fonction F par $G(x, V) = F(x; u_1(x_0) + V_1, \ldots, u_l(x_0) + V_l)$ et en remplaçant les u_j par des fonctions v_j à support compact, coïncidant avec $u_j(x) - u_j(x_0)$ au voisinage de x_0, et prenant leur valeur (ainsi que les $(v_{j, R})$) dans un polydisque où $G(x, V)$ est holomorphe. Il est alors facile de démontrer l'analogue de la proposition 4.3 (en remplaçant K par un polydisque) et celui de la proposition 4.4 (où le développement de G en série entière fournit l'approximation par les polynômes).

COROLLAIRE 4.7. — *Soient Ω un ouvert de R^n, et $u_1, \ldots, u_l$ appartenant à $C^\rho_{loc}(\Omega)$ avec $\rho > 0$ [resp. $H^r_{loc}(\Omega)$ avec $r > n/2$], à valeurs réelles.*

Supposons de plus que, au voisinage de $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (R^n \setminus \{0\})$, les u_j soient microlocalement de classe $C^{\rho'}$ [resp. $H^{r'}$]. Soit $F(x; U_1, \ldots, U_l)$ définie et de classe C^∞ au voisinage de $\{(x; u_1(x), \ldots, u_l(x) \mid x \in \Omega\}$.

Alors, au voisinage de (x_0, ξ_0), la fonction $F(x, u(x))$ est microlocalement de classe C^σ, avec $\sigma = \operatorname{Min}(\rho', 2\rho)$ conv. hab. si entier [resp. de classe H^s pour tout s vérifiant $s \leqq r'$ et $s < 2r - n/2$].

C'est une conséquence immédiate du théorème 4.5, les fonctions $A_j . u_j$ étant microlocalement de classe C^σ [resp. H^s] en vertu du corollaire 3.11.

Nous avons indiqué dans [1] une démonstration directe de ce théorème. Dans le cas des espaces de Sobolev, sous certaines hypothèses sur F, ce résultat est également établi dans [5] et [7].

5. Équation paradifférentielle associée à une équation non linéaire

Soit :

$$(5.1) \qquad F[u] = F(x, u(x), \ldots, \partial^\beta u(x), \ldots)_{|\beta| \leqq m} = 0,$$

une équation aux dérivées partielles non linéaire d'ordre m, où F est une fonction réelle de classe C^∞ de ses arguments. On peut supposer, sans perdre de généralité, que F est définie lorsque x parcourt un ouvert Ω de R^n, et lorsque les autres arguments parcourent $\mathbb{R}^N$, pour N convenable.

On supposera éventuellement que F est linéaire par rapport à certaines dérivées, auquel cas on peut la mettre sous la forme suivante :

$$(5.2) \quad F(x; u, \ldots) = \sum_{k_0 < k \leqq m} \sum_{|\alpha| = k} A_\alpha(x, u, \ldots, \partial^\beta u, \ldots)_{|\beta| \leqq p(k)} \partial^\alpha u + A_{k_0}(x, u, \ldots, \partial^\beta u, \ldots)_{|\beta| \leqq k_0},$$

où on peut supposer $p(k)<k$. On pose alors :

$$d=\operatorname{Max}\left(k_0, \frac{k+p(k)}{2}\right), \tag{5.3}$$

en convenant que $p(k)=-\infty$ lorsque les A_α correspondants ne dépendent que de x. On a $d=m$ pour une équation non quasi linéaire, $d=m-1/2$ pour l'équation quasi linéaire la plus générale, $d=0$ lorsque seuls les termes d'ordre 0 sont non linéaires, et $d=-\infty$ pour une équation linéaire.

Les fonctions $A_\alpha(x, u(x), \ldots)$ et $A_{k_0}(x, u(x), \ldots)$ sont définies dès que $u \in C^\rho_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ avec $\rho > \operatorname{Max}(k_0, p(k))$. Les produits $A_\alpha \partial^\alpha u$, et donc $F[u]$ sont définis si l'on a :

$$u \in C^\rho_{\mathrm{loc}}(\Omega) \qquad \text{avec} \quad \rho > d \tag{5.4}$$

ou :

$$u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega) \qquad \text{avec} \quad s > n/2 + \operatorname{Max}(k_0, p(k)) \quad \text{et} \quad s > n/4 + d. \tag{5.5}$$

PROPOSITION 5.1. — *Soit u une fonction réelle appartenant à $C^\rho_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ avec $\rho > \operatorname{Max}(k_0, p(k))$. Posons :*

$$p(x, \xi) = \sum_{|\beta| > 2d-\rho} \frac{\partial F}{\partial u_\beta}(x, u(x), \ldots)(i\xi)^\beta.$$

Alors p appartient à $\Sigma^m_{p+m-2d}(\Omega)$.

Les termes figurant dans p sont des deux types suivants :

$$A^\beta(x, \ldots)(i\xi)^\beta \qquad \text{pour} \quad |\beta| > 2d-\rho, \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial u_\beta}(x, \ldots)\partial^\alpha u(i\xi)^\beta \qquad \text{pour} \quad |\beta| > 2d-\rho \quad \text{et} \quad |\beta| \leqq p(|\alpha|). \tag{5.7}$$

Les premiers sont de classe $C^{\rho-p(|\beta|)}$, et $\rho - p(|\beta|) > 0$ par hypothèse. Ils sont homogènes de degré $|\beta|$ en ξ et appartiennent donc à Σ^m_σ, avec $\sigma = \rho - p(|\beta|) + m - |\beta| \geqq \rho + m - 2d$.

Dans les termes du type (5.7), $\partial A_\alpha / \partial u_\beta$ est de classe $C^{\rho - p(|\alpha|)}$ et $\partial^\alpha u$ est de classe $C^{\rho-|\alpha|}$. On a

$$\rho - |\alpha| \geqq \rho - |\alpha| + (|\beta| - p(|\alpha|)) \geqq \rho + |\beta| - 2d > 0.$$

Un terme (5.7) est donc de classe $C^{\rho+|\beta|-2d}$ et homogène de degré β en ξ. Il appartient donc à Σ^m_σ, avec $\sigma = \rho + |\beta| - 2d + m - |\beta| = \rho + m - 2d$.

Remarquons que sous l'hypothèse précédente, on a toujours $m > 2d - \rho$ et que la partie principale $p_m(x, \xi)$ est ainsi bien définie.

DÉFINITION 5.2. — *Si u est une fonction réelle appartenant à $C^\rho_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ avec $\rho > \operatorname{Max}(k_0, p(k))$, on appelle polynôme caractéristique de (5.1) (relativement à u), le polynôme :*

$$p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} \partial F / \partial u_\alpha (x, u(x), \ldots)(i\xi^\alpha). \tag{5.8}$$

On dit que (x_0, ξ_0) *est caractéristique si* $p_m(x_0, \xi_0)=0$.

Lorsque p_m *est assez régulier, on appelle bicaractéristique les courbes intégrales du champ hamiltonien de* p_m.

Le théorème suivant est le point-clé de cet article. Il permet de ramener l'étude des équations non linéaires à celle d'équations paradifférentielles linéaires.

THÉORÈME 5.3. — *Soit u une fonction réelle appartenant à* $C^\rho_{\text{loc}}(\Omega)$ *avec* $\rho > \operatorname{Max}(k_0, p(k))$. *Soit* P *appartenant à* $\widetilde{\mathrm{Op}}\,(\Sigma^m_{\rho+m-2d})(\Omega)$ *de symbole* $\sigma(P)=p(x, \xi)$ *défini par la proposition* 5.1 :

(*a*) *si* $\rho > d$, *et si u est une solution de* (5.1), *on a* $P\,u \in C^{2\rho-2d}_{\text{loc}}$;

(*b*) *si* $u \in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ *avec* $s > (n/2)+\rho$ *et* $\rho > d-(n/4)$, *et si u est une solution de* (5.1), *on a* $P\,u \in H^{s+\rho-2d}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Il suffit bien entendu de démontrer le théorème lorsque $F(x, u, \ldots)$ est réduit à un seul terme

$$F(x, u, \ldots)=A_\alpha(x, u, \ldots, \partial^\beta u, \ldots)_{\beta \leqq p(k)}\, \partial^\alpha u \qquad \text{pour} \quad |\alpha|=k$$

(la démonstration est plus facile pour A_{k_0}).

Nous distinguerons trois cas :

1^er^ *cas* : $k \leqq 2d-\rho$.

On a alors $\partial^\alpha u \in C^{\rho-k}_{\text{loc}}$ avec $\rho-k \geqq 2\rho-2d>0$ sous l'hypothèse (*a*). On a :

$$A_\alpha(x, u, \ldots) \in C^{\rho-p(k)}_{\text{loc}} \qquad \text{avec} \quad \rho-p(k)>p-k$$

et donc $F(x, u, \ldots) \in C^{2\rho-2d}_{\text{loc}}$.

Sous l'hypothèse (*b*), on a :

$$\partial^\alpha u \in H^{s-k}_{\text{loc}}, \qquad A_\alpha(x, u, \ldots) \in H^{s-p(k)}_{\text{loc}}$$

et le produit appartient à H^t_{loc} pour $t \leqq s-k$ et $t<s-k+s-p(k)-n/2$.

On a :

$$s-k \geqq s+\rho-2d \qquad \text{et} \qquad s+s-n/2-(k+p(k))>s+\rho-2d.$$

On a :

$$s-k \geqq s+\rho-2d \qquad \text{et} \qquad s+s-n/2-(k+p(k))>s+\rho-2d.$$

On a donc $F(x, u, \ldots) \in H^{s+\rho-2d}_{\text{loc}}$.

Cela démontre le théorème dans ce premier cas, le symbole $p(x, \xi)$ associé étant alors nul.

2^e^ *cas* : $k>2d-\rho$ et $\rho-k<0$ [resp. $s-k \leqq n/2$].

Soit alors R_α un opérateur paradifférentiel de symbole $A_\alpha(x, u(x), \ldots)$.

On a sous l'hypothèse (*a*) :

$$A_\alpha\, \partial^\alpha u = R_\alpha\, \partial^\alpha u + v,$$

d'après le corollaire 3.13, avec, sous l'hypothèse (a), $v \in C^{\sigma}_{\text{loc}}$ pour

$$\sigma = \rho - p(k) + \rho - k \geqq 2\rho - 2d;$$

et, sous l'hypothèse (b), $v \in H^t$ pour $t < s - k + s - p(k) - n/2$, cette dernière quantité étant supérieure à $s + \rho - 2d$.

Cela démontre le théorème dans ce second cas, l'opérateur $R_\alpha \partial^\alpha$ ayant pour symbole $A_\alpha(x, u(x), \ldots).(i\xi)^\alpha$.

3^e *cas* : $k > 2d - \rho$ et $\rho - k > 0$ [resp. $s - k > n/2$].

Soient alors R_α de symbole $A_\alpha(x, u(x), \ldots)$, et S_α de symbole $\partial^\alpha u(x)$.

On a :

$$A_\alpha \partial^\alpha u = R.\partial^\alpha u + S.A_\alpha(x, u(x), \ldots) + w_1, \tag{5.9}$$

avec

$$w_1 \in C^{\sigma}_{\text{loc}} \quad [\text{resp. } H^t_{\text{loc}}] \qquad \text{pour} \quad \sigma = \rho - p(k) + \rho - k \geqq 2\rho - 2d$$

[resp. $t = s - p(k) + s - k - n/2 - \varepsilon \geqq s + \rho - 2d$] d'après le corollaire 3.13.

Soient $T_{\alpha\beta}$ des opérateurs de symbole $\partial A_\alpha / \partial u_\beta(x, u(x), \ldots)$. On a d'après le théorème 4.5 :

$$A_\alpha(x, u(x), \ldots) = \sum_{|\beta| \leqq p(k)} T_{\alpha\beta}.\partial^\beta u + w_2, \tag{5.10}$$

avec $w_2 \in C^{\sigma}_{\text{loc}}$ [resp. H^t_{loc}] pour $\sigma = 2(\rho - p(k)) \geqq 2\rho - 2d$,

$$[\text{resp. } t = 2(s - p(k)) - n/2 - \varepsilon \geqq s + \rho - 2d].$$

On a donc :

$$A_\alpha \partial^\alpha u = R_\alpha \partial^\alpha u + \sum_\beta S_\alpha T_{\alpha\beta} \partial^\beta u + w_1 + S_\alpha w_2. \tag{5.11}$$

Parmi les termes $ST_{\alpha\beta}\partial^\beta u$, ceux correspondant aux indices β vérifient $|\beta| \leqq 2d - \rho$ donnent des termes w_3 appartenant à $C^{2\rho - 2d}_{\text{loc}}$ [resp. $H^{s + \rho - 2d}_{\text{loc}}$] et on a donc :

$$A_\alpha \partial^\alpha u = R\,\partial^\alpha u + \sum_{\beta > 2d - \rho} ST_{\alpha\beta}\,\partial\beta\, u + w_1 + S\,w_2 + w_3.$$

L'opérateur $R\,\partial^\alpha + \sum ST_{\alpha\beta}\partial^\beta$ a précisément pour symbole :

$$\sum_{|\beta| > 2d - \rho} \frac{\partial F}{\partial u_\beta}(x, u(x), \ldots)(i\xi)^\beta$$

ce qui établit le théorème dans ce dernier cas.

THÉORÈME 5.4. — *Soit u une fonction réelle appartenant à* $C^{\rho}_{\text{loc}}(\Omega)$ *avec* $\rho > d$ [*resp.* $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ *avec* $s > (n/2) + \text{Max}(k_0, p(k))$ *et* $s > n/4 + d$] *solution de* 5.1.

Alors, en tout point (x_0, ξ_0) *non caractéristique, u est microlocalement de classe* $C^{2\rho + m - 2d}$ *conv. hab. si entier* [*resp.* $H^{2s + m - 2d - n/2 - \varepsilon}$ *pour tout* $\varepsilon > 0$].

Les hypothèses du théorème 5.3 sont satisfaites, en choisissant, dans l'hypothèse $u \in H^s_{\text{loc}}$, $\rho = s - n/2 - \varepsilon$ pour ε assez petit. On a donc :

$$Pu = f \in C^{2\rho - 2d}_{\text{loc}}(\Omega) \qquad [\text{resp. } H^{s+\rho-2d}_{\text{loc}}(\Omega)],$$

où P appartient à $\tilde{Op}(\Sigma^m_{\rho+m-2d})$, son symbole principal p_m ne s'annulant pas en (x_0, ξ_0). Soit K un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre 0, dont le symbole principal est non nul en (x_0, ξ_0), et dont le symbole entier k s'annule hors d'un petit voisinage conique V de (x_0, ξ_0), tel que $p_m(x, \xi) \neq 0$ dans V.

D'après la proposition 3.7, il existe $q(x, \xi) \in \Sigma^{-m}_{\rho+m-2d}(\Omega)$ tel que $k \# q = p$. Soit $Q \in \tilde{Op}(\Sigma^{-m}_{\rho+m-2d})$ de symbole q, on a donc $QP = K + R$ où R est $(\rho + m - 2d)$-régularisant, et $Ku = Qf - Ru$ appartient à $C^{2\rho+m-2d}$ [resp. $H^{s+\rho+m-2d}$] ce qui démontre le théorème.

Remarque 5.5. — Ces théorèmes s'appliquent à des solutions relativement « faibles » de (5.1) : on ne demande pas nécessairement que u soit m fois dérivable. Par contre, on demande que la régularité de u soit suffisante pour que chaque produit $A_\alpha(x, u, \ldots)\partial^\alpha u$ ait individuellement un sens. Il existe bien des notions de « solutions faibles » telles que la propriété précédente ne soit plus vérifiée. Il existe d'ailleurs des « solutions faibles » de certaines équations (ondes de choc) pour lesquelles un analogue du théorème 5.4 est inexact.

Les théorèmes précédents s'appliquent à des équations quasi linéaires dont les coefficients sont à gauche des dérivations. Montrons sur un exemple comment le calcul paradifférentiel s'applique à des équations « sous forme de divergence ».

Exemple 5.6. — Soit :

$$F[u] = \sum_{i,j=1}^{n} \partial/\partial x_i \left(A_{ij}(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right) = 0.$$

Lorsque u est de classe C^ρ avec $\rho > 1$, cette équation se ramène à :

$$A_{ij}(x, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + B\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0, \tag{5.12}$$

avec

$$B\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial A_{ij}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}. \tag{5.13}$$

On peut alors appliquer à cette équation les théorèmes 5.3 et 5.4 (avec $m = 2$ et $d = 1$), et u est microlocalement de classe $C^{2\rho}$ en tout point non caractéristique.

Cela dit, $F[u]$ a un sens parfaitement défini lorsque u est de classe C^ρ avec $1/2 < \rho < 1$, alors que (5.12) n'a pas de sens. Dans ce cas, on a, en désignant par R_{ij} un élément de $\tilde{Op}(\Sigma^0_\rho)$ de symbole $A_{ij}(x, u(x))$:

$$A_{ij}(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = R_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + v \qquad \text{avec} \quad v \in C^{2\rho-1}_{\text{loc}}.$$

On a d'autre part, $\partial/\partial x_i \, R_{ij} \equiv R_{ij} \, \partial/\partial x_i$ modulo un opérateur appliquant C^σ_{loc} dans $C^{\sigma+\rho-1}_{\text{loc}}$.

On a donc :

$$0=F[u]=\sum R_{ij}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}+w \qquad \text{avec} \quad w\in C_{loc}^{2\rho-2}.$$

L'opérateur $\sum R_{ij}(\partial^2 u/\partial x_i\,\partial x_j)$ appartient à $\widetilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_\rho^2)$, a pour symbole principal $-\sum A_{ij}(x, u)\,\xi_i\,\xi_j$ et est donc microlocalement inversible en tout point non caractéristique. En reprenant la démonstration du théorème 5.4, on obtient encore dans ce cas que $u\in C^{2\rho}$ en tout point (x_0, ξ_0) non caractéristique.

Même dans le cas d'équations aux dérivées partielles linéaires, lorsque les coefficients ont des singularités non isotropes, il semble utile de se ramener à des équations paradifférentielles. Nous nous bornons à donner un exemple simple.

Exemple 5.7. — Soit $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\,\partial^\alpha u(x)=0$ une équation aux dérivées partielles linéaire. On suppose que les coefficients appartiennent à $C_{loc}^\lambda(\Omega)$ et sont microlocalement, en un point (x_0, ξ_0) non caractéristique, de classe C^μ. Soit u une solution de cette équation de classe C^ρ.

Que peut-on dire de la régularité microlocale de u en (x_0, ξ_0)

Pour $\rho>m$, soient A_α et B_α des opérateurs paradifférentiels de symboles respectifs $a_\alpha(x)$ et $\partial^\alpha u(x)$. On a donc :

$$0=\sum A_\alpha\,\partial^\alpha u+\sum B_\alpha\,a_\alpha+v \qquad \text{avec} \quad v\in C_{loc}^{\lambda+\rho-m}.$$

D'autre part, $B_\alpha\,a_\alpha$ appartient à C^λ, et est microlocalement de classe C^σ avec $\sigma=\mathrm{Min}(\mu, \lambda+\rho-m)$. On a donc l'équation paradifférentielle :

$$\sum A_\alpha\,\partial^\alpha u=w \qquad \text{où} \quad \sum A_\alpha\,\partial^\alpha\in\widetilde{\mathrm{Op}}(\Sigma_\lambda^m)$$

et où $w\in C_{loc}^\lambda$ et est microlocalement de classe C^σ. Il en résulte (en inversant $\sum A_\alpha\,\partial^\alpha$ au voisinage de (x_0, ξ_0)), que u appartient microlocalement à C^τ en (x_0, ξ_0) avec :

$$\tau=\mathrm{Min}(m+\mu,\ \rho+\lambda,\ m+2\lambda).$$

Si u est une solution de classe C^ρ avec $m-\lambda<\rho<m$, on a alors :

$$0=\sum A_\alpha\,\partial^\alpha u+v_1 \qquad \text{avec} \quad v_1\in C_{loc}^{\lambda+\rho-m}$$

et on obtient que u est de classe $C^{\rho+\lambda}$ microlocalement en (x_0, ξ_0).

6. Propagation des singularités

Nous conserverons les notations du paragraphe 5.

THÉORÈME 6.1. — *Soit u une solution réelle de* (5.1) *appartenant à* $H_{loc}^s(\Omega)$ *avec :*

$$s>\frac{n}{2}+\mathrm{Max}(k_0,\ p(k)) \qquad et \qquad s>\frac{n}{4}+d.$$

Supposons de plus que le polynôme caractéristique $p_m(x, \xi)$ soit réel (ou imaginaire pur), et qu'il soit de classe C^2 (ce qui est réalisé dès que $s > (n/2)+p(m)+2$). Soit (x_0, ξ_0) un point caractéristique tel que u appartienne microlocalement à H^t en (x_0, ξ_0), avec $t < 2s-(n/2)+m-2d-1$. Alors u appartient à H^t microlocalement en tout point de la bicaractéristique issue de (x_0, ξ_0).

On peut évidemment supposer en outre $s-(n/2)+m-2d-1 > 0$, le théorème étant trivial dans le cas contraire. En posant $\rho = s-(n/2)-\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ petit, on sait d'après le théorème 5.3 que u est solution de :

$$Pu=f$$

où P appartient à $\mathrm{Op}(\Sigma^m_{\rho+m-2d})$ et a p_m comme symbole principal, et où f appartient à $H^{s+\rho-2d}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Le théorème 6.1 est donc une conséquence immédiate du théorème suivant :

THÉORÈME 6.2. — *Soit P appartenant à $O_p(\Sigma^m_\sigma)$, avec $\sigma > 1$ non entier, dont le symbole principal p_m est réel et de classe C^2. Soient s et t appartenant à R, avec $t \leqq s+\sigma-1$. Soit $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tel que $Pu \in H^{t-m+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Si u appartient microlocalement à H^t en un point (x_0, ξ_0) caractéristique, u appartient microlocalement à H^t en tout point de la bicaractéristique issue de (x_0, ξ_0).*

Remarque 6.3. — L'hypothèse $p_m \in C^2$ sert uniquement à assurer l'unicité de la courbe intégrale du champ hamiltonien H_{p_m} issue de (x_0, ξ_0). Sous la seule hypothèse $P \in \mathrm{Op}(\Sigma^m_\sigma)$, $\sigma > 1$, le théorème est encore valable en supposant cette unicité. Dans le cas contraire, nous énonçons l'une des extensions possibles du théoreme 6.2, extension adaptée au cas où u est solution d'un problème de Cauchy. On pourrait bien entendu, à l'aide de considérations de géométrie infinitésimale directe, donner d'autres extensions, mais l'utilité de celles-ci n'apparaît pas évidente. Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer l'analogue du théorème 6.1 qui se déduit du théorème 6.2′.

THÉORÈME 6.2′. — *Soit P appartenant à $\mathrm{Op}(\Sigma^m_\sigma)$, avec $\sigma > 1$ non entier, à symbole principal réel. Soit U un ouvert conique de $R^n \times (R^n \setminus \{0\})$ dans lequel $\partial p_m/\partial \xi_1 \neq 0$. Soit $(y, \eta) \in U$ un point caractéristique tel que chaque demi-courbe intégrale de H_{p_m} [resp. $-H_{p_m}$] issue de (y, η) coupe l'hyperplan $x_1 = 0$ avant de sortir de U. Soient s et t vérifiant $t \leqq s+\sigma-1$, soit $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ telle que $Pu \in H^{t-m+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et que u appartienne microlocalement à H^t en tout point de U tel que $x_1 = 0$. Alors, u appartient microlocalement à H^t au point (y, η).*

Revenons à la démonstration du théorème 6.2. On peut se ramener, en multipliant P par un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre $1-m$, au cas où $m=1$, ce que nous supposerons désormais. Nous noterons H le champ hamiltonien de p_1. Soit Γ un arc de courbe intégrale de H (la démonstration serait analogue pour $-H$) allant d'un point (y, η) au point (x_0, ξ_0). On peut supposer que H n'est proportionnel au champ radial $\sum \xi_i \, \partial/\partial \xi_i$ en aucun point de Γ (et donc d'un voisinage), le théorème étant trivial dans le cas contraire. En découpant au besoin Γ en un nombre fini d'arcs, on peut également supposer qu'il existe une fonction Ψ, définie et de classe C^∞ au voisinage de Γ, homogène de degré 0, telle que $H\Psi \geqq 1$ au voisinage de Γ.

LEMME 6.4. — *Soit* V *un voisinage conique de* (x_0, ξ_0) *et* W *un voisinage conique de* Γ. *Il existe alors un ouvert conique* U, *avec* $\Gamma \subset U \subset W$, *et une fonction* $\varphi(x, \xi)$ *à support dans* U, *de classe* C^∞ *et homogène de degré* 0, *telle que l'on ait* $\varphi(x, \xi) > 0$ *sur* Γ *et* $H\varphi \geqq 0$ *dans* $U \setminus V$.

Il suffit de construire la restriction de φ à une sous-variété Σ de codimension 1, transverse au champ radial, contenant Γ et telle que H soit tangent à Γ. On peut trouver une telle Σ munie d'une carte globale au voisinage de Γ, si bien qu'on est ramené au problème suivant :

$V \subset W$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^{2n-1}$, H est un champ de vecteurs sur W, Γ est un arc de courbe intégrale de H, contenu dans W, partant de $\tilde{z}$ et aboutissant à $z_0 \in V$. Il faut déterminer $\varphi \in C_0^\infty(U)$ telle que $\varphi(z) > 0$ sur Γ et $H_\varphi \geqq 0$ dans $U \setminus V$.

Nous appellerons ε-courbe intégrale de H une application $t \rightsquigarrow Z(t)$, de classe C^1 par morceaux, vérifiant :

$$\left|\frac{dZ(t)}{dt} - H(Z(t))\right| < \varepsilon.$$

Soit $T(z)$ la borne supérieure des t tels qu'il existe une ε-courbe intégrale Z telle que :

$$|Z(0) - \tilde{z}| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad Z(t) = z$$

[on pose $T(z) = 0$ s'il n'existe pas de telle courbe]. Il est clair que l'on a les propriétés suivantes, en prenant pour U l'ensemble des points situés à une distance de Γ moindre que $\varepsilon_1 > 0$ assez petit, puis en choisissant $\varepsilon > 0$ assez petit :

(6.1) $T(z)$ est mesurable, bornée, et on a $T(z) > 0$ sur Γ,

(6.2) $\{z \in U \mid T(z) > 0\}$ est contenu dans la réunion de V et d'un compact de U,

(6.3) il existe $\alpha > 0$, tel que, si z et z' appartiennent à U, si $|z' - z| \leqq \alpha$, si l'angle de $(z' - z)$ et de $H(z)$ est inférieur à α, on a $T(z') > T(z)$ [on peut en effet prolonger une ε-courbe intégrale aboutissant en z par le segment joignant z à z'].

Soit $\chi(z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n-1})$, positive, à support dans un petit voisinage de l'origine, et posons $\varphi_1 = T \star \chi$. Si on a $|z' - z| \leqq \alpha/2$ et si l'angle de $(z' - z)$ et de $H(z)$ est inférieur à $\alpha/2$, on a :

$$\varphi_1(z') - \varphi_1(z) = \int [T(z' - \zeta) - T(z - \zeta)]\, \chi(\zeta)\, d\zeta.$$

Si le support de χ a été choisi assez petit (en fonction du module de continuité de H), l'angle de $(z' - z)$ et de $H(z - \zeta)$ est inférieur à α pour $\zeta \in \operatorname{Supp}(\chi)$, et on a $\varphi_1(z') - \varphi_1(z) > 0$. Il en résulte que $H\varphi_1(z) \geqq 0$.

Enfin, le support de φ_1 est contenu dans la réunion de V et d'un compact K de U, et il suffit de multiplier φ_1 par une fonction appartenant à $C_0^\infty(U)$, positive et égale à 1 au voisinage de K pour avoir la fonction φ voulue.

Remarque 6.5. — On n'a utilisé que l'unicité de la courbe intégrale issue de $\tilde{z}$ et la continuité de H. Sous les hypothèses du théorème 6.2′, la situation se généralise de la façon suivante. Soit K le compact constitué des courbes intégrales du champ hamiltonien issues de

(y, η) arrêtées lorsqu'elles coupent l'hyperplan $x_1=0$. L'ouvert U est un petit voisinage de K, et V un petit voisinage de l'intersection de K et de l'hyperplan $x_1=0$. On construit alors T, puis φ, par la même méthode. Cette fonction φ étant construite, le lecteur n'aura aucun mal à vérifier que le reste de la démonstration du théorème 6.2 s'applique au théorème 6.2'.

LEMME 6.6. — *Les ouverts* U *et* V *ayant les propriétés du lemme* 6.4, *il existe une famille* k_δ, $\delta>0$, *de fonctions positives homogènes de degré* 0 *en* ξ, *de classe* C^∞ *et à support dans un compact conique de* U *vérifiant :*

$$\mathrm{H}\,k_\delta=\{p_1, k_\delta\}\geqq\frac{1}{\delta}\,k_\delta \textit{ hors de } \mathrm{V}. \tag{6.4}$$

On notera K_δ *un opérateur pseudo-différentiel d'ordre* 0, *à support propre dans* Ω, *de symbole* k_δ.

Si Ψ est la fonction précédemment introduite, définie au voisinage de Γ vérifiant $\mathrm{H}\,\Psi\geqq 1$, il suffit de choisir U assez petit et de poser :

$$k_\delta=\varphi\, e^{\Psi/\delta},$$

où φ est fournie par le lemme 6.4.

L'espace des distributions appartenant à H^s microlocalement en tout point d'un ouvert conique U de $\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ peut être muni de semi-normes du type suivant :

$$|u|_{s,\,\mathrm{U}}=|\mathrm{M}\,u|_s, \tag{6.5}$$

où M est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, à symbole nul hors d'un « compact conique » de U.

Les estimations d'énergie suivantes joueront un rôle fondamental :

(6.6) *il existe* $\varepsilon>0$ *tel que, pour tout* $s\in\mathbb{R}$ *et tout compact* F *de* Ω, *il existe une application* $\delta\rightsquigarrow c(\delta)$ *de* $]0, \delta_0(s)[$ *dans* $\mathbb{R}^+$ *tendant vers zéro avec* δ, *il existe des semi-normes :*

$$|\cdot|_{s,\,\mathrm{V}},\qquad |\cdot|_{s-1,\,\mathrm{U}},\qquad |\cdot|_{s-\varepsilon,\,\mathrm{U}}$$

du type (6.5) *et une application :*

$$\delta\rightsquigarrow \mathrm{M}(\delta) \textit{ de }]0, \delta_0(s)[\textit{ dans } \mathbb{R}^+$$

telles que l'on ait :

$$\forall\, u\in C_0^\infty(\mathrm{F}),\quad |\mathrm{K}_\delta u|_s\leqq c(\delta)\,|\mathrm{K}_\delta \mathrm{P}\,u|_s+\mathrm{M}(\delta)\,\{|u|_{s,\,\mathrm{V}}+|\mathrm{P}\,u|_{s-1,\,\mathrm{U}}+|u|_{s-\varepsilon,\,\mathrm{U}}+|u|_{s-\sigma+1}\}.$$

Démonstration du théorème 6.2 *à partir de* (6.6). — Il est clair que la majoration (6.6), valable pour $u\in C_0^\infty(\Omega)$, est encore valable si u appartient à $\mathrm{H}^{s-\sigma+1}_{\mathrm{comp}}(\Omega)$ et est microlocalement de classe H^{s+1} au voisinage de Γ. D'autre part, il suffit évidemment, pour démontrer le théorème 6.2, de démontrer que si u appartient à $\mathrm{H}^{s-\rho+1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, est microlocalement de classe $\mathrm{H}^{s-\varepsilon}$ dans U et de classe H^s dans V, et si $\mathrm{P}\,u$ est de classe H^s dans U, alors u est de classe H^s au voisinage de Γ.

Soit u vérifiant les conditions précédentes. Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ égale à 1 au voisinage de la projection de Γ. Posons :

$$u_\alpha = T_\alpha u = \chi(1-\alpha\Delta)^{-1}\chi u.$$

Les opérateurs T_α sont d'ordre -2, et on pourra appliquer (6.6) aux fonctions u_α. En outre, considérés comme des opérateurs d'ordre 0, les T_α forment une famille bornée dans Σ_σ^0 (*voir* remarque 3.12). Enfin, pour $\alpha \to 0$, on a $u_\alpha \to \chi^2 u$ dans $H^{s-\sigma+1}$ et il suffira de démontrer que $K_\delta u_\alpha$ reste bornée dans H^s pour conclure. On a :

$$(6.7)\quad |K_\delta u_\alpha|_s \leqq c(\delta)|K_\delta P T_\alpha u|_s + M(\delta)\left\{|T_\alpha u|_{s,V} + |PT_\alpha u|_{s-1,U} + |T_\alpha u|_{s-\varepsilon,U} + |T_\alpha u|_{s-\sigma+1}\right\}.$$

Les quantités $|T_\alpha u|_{s-\sigma+1}$ et $|T_\alpha u|_{s-\varepsilon,U}$ restent bornées par Cte $|u|_{s-\sigma+1}$ et Cte $|u|'_{s-\varepsilon,U}$ [pour une autre semi-norme $|\,.\,|'_{s-\varepsilon,U}$] avec des constantes indépendantes de α. De même, $|T_\alpha u|_{s,V} \leqq$ Cte $|u|'_{s,V}$ reste borné.

On a :

$$(6.8)\quad |PT_\alpha u|_{s-1,U} \leqq |T_\alpha P u|_{s-1,U} + |[T_\alpha, P]\,u|_{s-1,U} \leqq \text{Cte}\,|Pu|'_{s-1,U} + |[T_\alpha, P]\,u|_{s-1,U}.$$

Les opérateurs $[T_\alpha, P]$ forment un ensemble borné dans $\sum_{\sigma-1}^0$ et on a donc :

$$(6.9)\qquad |[T_\alpha, P]\,u|_{s-1,U} \leqq \text{Cte}(|u|'_{s-1,U} + |u|_{s-\sigma}).$$

On a enfin :

$$(6.10)\qquad |K_\delta P T_\alpha u|_s \leqq |K_\delta T_\alpha P u|_s + |K_\delta [P, T_\alpha]\,u|_s$$

et :

$$(6.11)\qquad |K_\delta T_\alpha P u|_s \leqq \text{Cte}\,|Pu|'_{s,U}.$$

Les $(1-\alpha\Delta)\,T_\alpha$ formant une famille bornée d'opérateurs d'ordre 0, ayant un symbole égal à 1 lorsque celui de K_δ est non nul, on a :

$$(6.12)\qquad K_\delta[P, T_\alpha]\,u = K_\delta[P, T_\alpha]\,(1-\alpha\Delta)\,T_\alpha u + S_\alpha u,$$

où les S_α décrivent un ensemble borné de Op $(\Sigma_{\sigma-1}^0)$, de symbole nul.

On a donc :

$$(6.13)\qquad |K_\delta[P, T_\alpha]\,u|_s \leqq |K_\delta[P, T_\alpha]\,(1-\alpha\Delta)\,u_\alpha|_s + \text{Cte}\,|u|_{s-\sigma+1},$$

$$(6.14)\quad [P, T_\alpha]\,(1-\alpha\Delta) = PT_\alpha(1-\alpha\Delta) - T_\alpha(1-\alpha\Delta)\,P - \alpha\,T_\alpha[P, \Delta] = S'_\alpha - \alpha\,T_\alpha[P, \Delta],$$

$$(6.15)\qquad |K_\delta[P, T_\alpha]\,u|_s \leqq |\alpha\,K_\delta\,T_\alpha[P, \Delta]\,u_\alpha|_s + \text{Cte}\,|u|_{s-\sigma+1},$$

les $K_\delta\,S'_\alpha$ étant bornés dans $\Sigma_{\sigma-1}^0$ et de symbole nul.

Posons $\alpha\,T_\alpha\,[P, \Delta] = Q_\alpha$. Les $\alpha\,T_\alpha$ formant une famille bornée d'opérateurs d'ordre -2 (*voir* remarque 3.12), il en résulte que les Q_α sont bornés dans $\Sigma_{\sigma-1}^0$. On a :

$$(6.16)\qquad |K_\delta Q_\alpha u_\alpha|_s \leqq |Q_\alpha K_\delta u_\alpha|_s + |[K_\delta, Q_\alpha]\,u_\alpha|_s.$$

Lorsque $\sigma > 2$, les $[K_\delta, Q_\alpha]$ sont bornés dans $\Sigma_{\sigma-2}^{-1}$, et on a donc :

(6.17) $$|[K_\delta, Q_\alpha]\, u_\alpha|_s \leqq \mathrm{Cte}(|u_\alpha|'_{s-1,\,U} + |u_\alpha|_{s-\sigma+1}) \leqq \mathrm{Cte}(|u|''_{s-1,\,U} + |u|_{s-\sigma+1}).$$

Lorsque $1 < \sigma < 2$, les $[K_\delta, Q_\alpha]$ sont bornés dans $\Sigma_{\sigma-1}^{0}$, de symbole nul, et donc :

(6.17′) $$|[K_\delta, Q_\alpha]\, u_\alpha|_s \leqq \mathrm{Cte}\, |u_\alpha|_{s-\sigma+1} \leqq \mathrm{Cte}\, |u|_{s-\sigma+1}.$$

On a enfin :

(6.18) $$|Q_\alpha K_\delta u_\alpha|_s \leqq C_0 |K_\delta u_\alpha|_s + \mathrm{Cte}\, |u|_{s-\sigma+1},$$

où C_0 ne dépend ni de α ni de δ.

Les estimations (6.7) à (6.18) montrent finalement que :

$$|K_\delta u_\alpha|_s \leqq C_0\, c(\delta)\, |K_\delta u_\alpha|_s + M_1(\delta).$$

Les « constantes » figurant dans les estimations étant indépendantes de α, mais éventuellement dépendantes de δ.

Choisissons δ_0 assez petit pour que $C_0\, c(\delta) < 1/2$ pour $\delta \leqq \delta_0$, il en résulte que $|K_{\delta_0} u_\alpha|_s$ reste borné, et donc que u appartient à H^s microlocalement au voisinage de Γ.

LEMME 6.7. — *Pour que l'estimation* (6.6) *soit valide, il suffit que l'on ait :*

(6.19) *Il existe* $\varepsilon > 0$ *et, pour tout compact* F *de* Ω, *une application* $\delta \rightsquigarrow c(\delta)$ *de* $]0, \delta_0[$ *dans* R^+ *tendent vers zéro avec* δ, *une application* $\delta \rightsquigarrow M(\delta)$ *de* $]0, \delta_0[$ *dans* R^+ *et une semi-norme* $|\,.\,|_{0,V}$ *du type* (6.5) *tels que :*

$$\forall u \in C_0^\infty(F), \quad |K_\delta u|_0 \leqq c(\delta)\, |K_\delta P u|_0 + M(\delta)\, \{ |u|_{0,V} + |u|_{-\varepsilon} \}.$$

Soit E un opérateur pseudo-différentiel d'ordre s, à support propre dans Ω, dont le symbole est nul hors d'un compact conique de U, et coïncide avec $(1+|\xi|^2)^{s/2}$ au voisinage des points où le symbole de K_δ est non nul.

On a alors :

(6.20) $$|K_\delta u|_s \leqq |K_\delta E u|_0 + \mathrm{Cte}\, |u|_{s-1,\,U} + \mathrm{Cte}\, |u|_{-M},$$

(6.21) $$|K_\delta E u|_0 \leqq c(\delta)\, |K_\delta P E u|_0 + M(\delta)\, \{ |E u|_{0,V} + |E u|_{-\varepsilon} \}.$$

On a :

$$|E u|_{0,V} \leqq \mathrm{Cte}(|u|'_{s,V} + |u|_{-M}) \quad \text{pour tout } M$$

et :

$$|E u|_{-\varepsilon} \leqq \mathrm{Cte}\, |u|_{s-\varepsilon},$$

(6.22) $$|K_\delta P E u|_0 \leqq |E K_\delta P u|_0 + |[E, P]\, K_\delta u|_0 + |[K_\delta, [E, P]]\, u|_0 + |[K_\delta, E]\, P u|_0.$$

L'opérateur $[E, P]$ appartient à $\mathrm{Op}(\Sigma_{\sigma-1}^{s})$, et $[K_\delta, [E, P]]$ appartient à $\mathrm{Op}(\Sigma_{\sigma-2}^{s-1})$ lorsque $\sigma > 2$. Lorsque $1 < \sigma < 2$, on a $[K_\delta, [E, P]] \in \mathrm{Op}(\Sigma_{\sigma-1}^{s})$ et son symbole est nul. On a dans tous les cas :

(6.23) $$\begin{cases} |E K_\delta P u|_0 \leqq C_0 |K_\delta P u|_s, \\ |[E, P]\, K_\delta u|_0 \leqq C'_0 |K_\delta u|_s \end{cases}$$

avec C_0 et C'_0 indépendants de δ :

$$\text{(6.24)}\qquad \begin{cases} |[K_\delta, [E, P]]\, u|_0 \leqq \mathrm{Cte}(|u|_{s-1,\,U}+|u|_{s-\sigma+1}), \\ |[K_\delta, E]\, P u| \leqq \mathrm{Cte}(|P u|_{s-1,\,U}+|u|_{s-\sigma+1}). \end{cases}$$

D'après (6.20) à (6.24) on a donc :

$$|K_\delta u|_s \leqq C'_0\, c(\delta)\, |K_\delta u|_s + C_0\, c(\delta)\, |K_\delta P u|_s + M_1(\delta)\,\{|u|_{s,\,V}+|P u|_{s-1,\,U}+|u|_{s-\varepsilon,\,U}+|u|_{s-\sigma+1}\}$$

et donc la majoration (6.6), valable dès que $C'_0\, c(\delta)<1$, avec comme nouvelle fonction $c'(\delta)=C_0\, c(\delta)/(1-C'_0\, c(\delta))$.

Démonstration de (6.19). — On a $P-P^* \in \mathrm{Op}(\sum_{\sigma-1}^0)$, et donc :

$$\text{(6.25)}\quad |\mathrm{Im}(PK_\delta u, K_\delta u)| = \frac{1}{2}\,|((P-P^*)\, K_\delta u, K_\delta u)| \leqq C\, |K_\delta u|_0^2 + M(\delta)\, |u|_{(1-\sigma)/2}^2.$$

On notera C diverses constantes indépendantes de δ, et $M(\delta)$ diverses constantes qui dépendent de δ. On a :

$$\text{(6.26)}\qquad \mathrm{Im}(PK_\delta u, K_\delta u) = \mathrm{Im}(K_\delta P u, K_\delta u) + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\, K_\delta^*\, [P, K_\delta]\, u, u\right).$$

D'après (6.4), on peut écrire :

$$\text{(6.27)}\qquad \frac{1}{i}\, K_\delta^*\, [P, K_\delta] = \frac{1}{\delta}\, K_\delta^*\, K_\delta + S_1 + S_2.$$

S_1 et S_2 appartenant à $\mathrm{Op}(\Sigma_{\sigma-1}^0)$, le symbole principal de S_1 étant positif, le symbole de S_2 étant nul hors de V. On déduit donc de (6.25), (6.26), (6.27) :

$$\text{(6.28)}\quad \frac{1}{\delta}\, |K_\delta u|_0^2 + \mathrm{Re}(S_1 u, u) \leqq C\, |K_\delta u|_0^2 + |K_\delta P u|_0^2 + M(\delta)\, \{|u|_{0,\,V}^2 + |u|_{(1-\sigma)/2}\}.$$

Il résulte du théorème 6.8 ci-dessous (avec $m=0$ et $\tau=\sigma-1$) que :

$$\text{(6.29)}\qquad \mathrm{Re}(S_1 u, u) \geqq -M(\delta)\, |u|_{-\varepsilon}^2$$

et (6.19) résulte de (6.28) et de (6.29) dès que $\delta<1/C$.

THÉORÈME 6.8 (*Inégalité de Garding précisée*). — *Soit S appartenant à* $\mathrm{Op}(\Sigma_\tau^m)(\Omega)$, *avec* $\tau>0$ *non entier. On suppose* $s_m(x, \xi)\geqq 0$, *où* s_m *désigne le symbole principal de* S. *Il existe alors* $\mu>0$ *tel que l'on ait, pour tout compact* F *de* Ω :

$$\text{(6.30)}\qquad \forall u \in C_0^\infty(F), \quad \mathrm{Re}(S u, u) \geqq -C_F\, |u|_{m/2-\mu/2}^2.$$

Nous montrerons que l'on peut prendre $\mu<1/2$ et $\mu<\tau/2$, mais il serait facile de montrer (en considérant comme dans [3] le terme d'ordre $\mu-1/2$ du symbole de $W^* s_\mu W$ dans la démonstration ci-dessous) que l'on peut prendre $\mu=1$ si $\tau>2$ et $\mu<\tau/2$ sinon.

En remplaçant S par A* SA, avec A elliptique d'ordre $(\mu-m)/2$, on se ramène au cas où S est d'ordre μ, où μ vérifie les inégalités ci-dessus. On peut également supposer, en multipliant par une fonction $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, égale à 1 au voisinage de F, que S_μ est à support compact en x. Il résulte alors du théorème 3.4 que $S-S_\mu(x, D)$ applique continûment L^2 dans L^2, et la démonstration de (6.30) se ramène à la démonstration de l'inégalité ci-dessous :

$$\forall u \in C_0^\infty(R^n), \quad \operatorname{Re}(S_\mu(x, D)\, u, u) \geqq -\mathrm{Cte}\, |u|_0^2. \tag{6.31}$$

Nous allons démontrer (6.31) en reprenant la démonstration de l'inégalité de Gårding précisée due à Cordoba-Fefferman [3].

Soit W l'opérateur, de $L^2(R^n)$ dans $L^2(R^{2n})$ défini par :

$$W u(x, \xi) = c_n |\xi|^{n/4} \int e^{i(x-y).\xi} e^{-|\xi|.|x-y|^2} u(y)\, dy, \tag{6.32}$$

avec $c_n = (2)^{-n/4}(\pi)^{-3n/4}$, et soit W* son adjoint :

$$W^* F(x) = c_n \int e^{i(x-z).\xi} e^{-|\xi|.|x-z|^2} |\xi|^{n/4} F(z, \xi)\, dz\, d\xi. \tag{6.33}$$

On a :

$$W^* s_\mu W u = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y).\xi} t(x, y, \xi)\, u(y)\, dy\, d\xi, \tag{6.34}$$

avec :

$$t(x, y, \xi) = (2\pi)^n c_n^2 |\xi|^{n/2} \int e^{-|\xi| \{|x-z|^2+|y-z|^2\}} s_\mu(z, \xi)\, dz. \tag{6.35}$$

Il est facile de voir que l'on a :

$$|D_x^\alpha D_y^\beta D_\xi^\gamma t(x, y, \xi)| \leqq C_{\alpha\beta\gamma} |\xi|^{\mu-\gamma+(\alpha+\beta)/2} \tag{6.36}$$

si bien que $W^* s_\mu W$ est un opérateur pseudo-différentiel de classe $\operatorname{Op}(S_{1,1/2}^\mu)$.

On a donc :

$$W^* s_\mu W = t(x, x, D) + R, \tag{6.37}$$

où $R \in \operatorname{Op}(S_{1,1/2}^{\mu-1/2})$ et applique donc L^2 dans L^2 vu notre choix de μ.

On a :

$$t(x, x, \xi) = (2\pi)^n c_n^2 |\xi|^{n/2} \int e^{-2|\xi|.|w|^2} s_\mu(x-w, \xi)\, dw \tag{6.38}$$

et :

$$s_\mu(x, \xi) = (2\pi)^n c_n^2 |\xi|^{n/2} \left(\int e^{-2|\xi|.|w|^2} dw\right) s_\mu(x, \xi), \tag{6.39}$$

d'après le choix de c_n. On a donc :

(6.40) $$t(x, x, \mathrm{D}) - s_\mu(x, \mathrm{D}) = r(x, \mathrm{D}),$$

avec :

(6.41) $$r(x, \xi) = (2\pi)^n c_n^2 \, |\xi|^{n/2} \int e^{-2\langle\xi\rangle |w|^2} [s_\mu(x-w, \xi) - s_\mu(x, \xi)] \, dw.$$

Soit $\lambda > 0$ tel que $2\mu + \lambda < \mathrm{Min}(\tau, 1)$, on a alors :

(6.42) $$|\mathrm{D}_\xi^\alpha (r(x_1, \xi) - r(x_2, \xi))| \leqq c_\alpha (1 + |\xi|)^{n/2 + \mu - |\alpha|} \int e^{-2|\xi|.|w|^2} |x_1 - x_2|^\lambda |w|^{2\mu} dw,$$

(6.43) $$|\mathrm{D}_\xi^\alpha (r(x_1, \xi) - r(x_2, \xi))| \leqq \mathrm{C}_\alpha |x_1 - x_2|^\lambda (1 + |\xi|)^{-|\alpha|}.$$

Il résulte alors du théorème 9 (chap. II) de Coifman-Meyer [2], que $r(x, \mathrm{D})$ applique L^2 dans L^2.

On a :

(6.44) $$\mathrm{Re}(\mathrm{W}^* s_\mu \mathrm{W} u, u)_{\mathrm{L}^2(\mathrm{R}^n)} = \mathrm{Re}(s_\mu \mathrm{W} u, \mathrm{W} u)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{2n})} \geqq 0,$$

et d'après (6.37) et (6.40) :

(6.45) $$(\mathrm{W}^* s_\mu \mathrm{W} u, u) = (s_\mu(x, \mathrm{D}) u, u) + (\mathrm{R} u, u) + (r(x, \mathrm{D}) u, u).$$

On a donc :

$$\mathrm{Re}(s_\mu(x, \mathrm{D}) u, u) \geqq -\mathrm{Cte} \, |u|_0^2.$$

ce qui démontre le théorème.

Remarque 6.9. — La méthode de Cordoba-Fefferman permet également d'associer à un symbole $p(x, \xi) \in \Sigma_\rho^m$ un opérateur $\mathrm{W}^* p \mathrm{W}$ opérant dans tous les espaces de Sobolev. Ces opérateurs sont des opérateurs pseudo-différentiels à symbole dans $\mathrm{S}_{1,1/2}^m$, tandis que les opérateurs paradifférentiels, si on voulait les considérer comme opérateurs pseudo-différentiels, auraient des « symboles » dans $\mathrm{S}_{1,1}^m$. En revanche, le calcul symbolique paradifférentiel est plus simple, et mieux adapté aux fonctions non linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. Bony, *Localisation et propagation des singularités pour les équations non linéaires* (*Actes Journées E.D.P.*, Saint-Jean-de-Monts, 1978).

[2] R. Coifman et Y. Meyer, *Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels* (*Astérisque*, vol. 57, 1978)

[3] A. Cordoba et C. Fefferman, *Wave Packets and Fourier Integral Operators* (*Comm. P.D.E.*, 1978).

[4] L. Hormander, *On the Existence and the Regularity of Solutions of Linear Pseudo-Differential Equations* (*L'enseignement Math.*, vol. 17, 1971, p. 99-163).

[5] B. LASCAR, *Singularités des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires* (*C.R. Acad. Sc*, Paris, t. 287, série A, 1978, p. 527-529).

[6] G. LORENTZ, *Approximation of Functions*, Elsevier, 1965.

[7] J. RAUCH, *Singularities of Solutions to Semilinear wave Equations* (*J. Math. Pures et appl.*, 1979).

[8] J. RAUCH et M. REED, *Propagation of Singularities for Semilinear Hyperbolic Equations in one Space Variable* (*Annals Math.*, 111, 1980, p. 531-552).

[9] Y. MEYER, *Régularité des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires* (*Séminaire Bourbaki*, 1979/1980, n° 560).

(Manuscrit reçu le 30 juin 1980.)

J. M. BONY
Université de Paris-Sud,
Centre d'Orsay,
Mathématique,
Bât. n° 425,
91405 Orsay Cedex.