ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ANDRÉ HIRSCHOWITZ

Sur la restriction des faisceaux semi-stables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 14, nº 2 (1981), p. 199-207
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1981_4_14_2_199_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 14, 1980, p. 199 à 207.

SUR LA RESTRICTION DES FAISCEAUX SEMI-STABLES

PAR ANDRÉ HIRSCHOWITZ

Dans un travail très récent [M1], Maruyama énonce les résultats suivants :

THÉORÈME 0.1 ([M1] (0.2) démontré en [M2], 4.6). — *Soit* E *un faisceau cohérent sans torsion sur une variété projective non singulière* $(X, \mathcal{O}_X(1))$ *de dimension n et de degré d. Soient* $Y_1, \ldots, Y_m$ $(m < n)$ *en position générale dans un système très ample de diviseurs hyperplans, et* $Y = Y_1 \cap \ldots \cap Y_m$. *Si* E *est semi-stable, alors on a* :

$$\mu_i(E_{|Y}) - \mu_{i+1}(E_{|Y}) \leqq d, \qquad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

où $(\mu_1, \mu_2, \ldots)$ *désigne la suite de Harder-Narasimhan* (cf. 1.4).

THÉORÈME 0.2 ([M1], 3.1). — *Si de plus* $(X, \mathcal{O}_X(1))$ *est* $\mathbb{P}_n$ *muni du faisceau usuel, alors :*

$$\mu_i(E_{|Y}) - \mu_{i+1}(E_{|Y}) \leqq \frac{1}{n-m}; \qquad \textit{pour} \quad i = 1, 2 \ldots$$

THÉORÈME 0.3 ([M1], 2.5). — *Le produit tensoriel modulo torsion de deux faisceaux semi-stables est encore semi-stable.*

L'objet du présent travail est de démontrer une généralisation commune aux théorèmes (0.1) et (0.2). Par précaution ([1]), prenons $\mathbb{C}$ comme corps de base et commençons par énoncer le :

THÉORÈME. — *Soit* $(X, \mathcal{O}_X(1))$ *une variété projective non singulière de dimension n. Soit* $U \subset X \times S$ *une famille non vide (propre et plate) de sous-variétés non singulières de dimension m de* X *paramétrée par la variété non singulière* S. *On note p et q les projections de* U *sur* X *et* S *et on note* $T_{U|X}$ *le faisceau tangent relatif. On suppose que :*

(i) *l'ensemble des points de non-platitude de p est de codimension au moins deux dans* U;

([1]) Selon le referee et toute vraisemblance, on peut prendre n'importe quel corps de base algébriquement clos de caractéristique nulle, mais la démonstration ne s'étend pas au cas de la caractéristique non nulle.

(ii) *la fibre générale de p est connexe et irréductible;*

(iii) $|\mathcal{O}_X(1)|^{n-1}$ *et* $[q].|\mathcal{O}_X(1)|^{m-1}$, *où* $[q]$ *désigne la classe de la fibre générale de q dans* $H^{2n-2m}(X, \mathbb{Q})$, *sont proportionnelles dans* $H^{2n-2}(X, \mathbb{Q})$.

Soit E *un faisceau sans torsion non nul sur* X *et* $(\mu_1, \ldots, \mu_k)$ *le type de scindage générique de* $p^* E/U/S$ (cf. 1.6) :

Si E *est semi-stable, alors on a :*

$$\mu_i - \mu_{i+1} \leqq -\nu(T_{U/X}/U/S) \qquad \textit{pour} \quad i=1, \ldots, k-1,$$

où ν *est l'invariant défini en* (3.2).

Grâce au théorème 0.3, on peut montrer que ν est égal à $\mu_{\min}$ ce qui conduit à la généralisation commune aux théorèmes 0.1 et 0.2 :

COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses du théorème, on a :*

$$\mu_i - \mu_{i+1} \leqq -\mu_{\min}(T_{U/X}/U/S) \qquad \text{pour} \quad i=1, \ldots, k-1,$$

où $\mu_{\min}$ *est le dernier terme de la suite de Harder-Narasimhan* (cf. 1.6).

Ce corollaire est plus fin que les résultats de Maruyama même dans le cas des fibrés de rang deux sur $\mathbb{P}_2$ ou $\mathbb{P}_3$ et même pour les restrictions aux sous-variétés linéaires (*cf.* § 6).

A notre connaissance, le premier résultat de restriction des faisceaux semi-stables est dû à Van de Ven [VdV] qui traite (implicitement) la restriction aux droites des fibrés uniformes de rang deux sur l'espace projectif. La démonstration de notre théorème consiste à pousser un peu plus loin l'argument initial de Van de Ven : de fait, la vitalité de cet argument est saisissante puisqu'on le retrouve de façon plus ou moins déguisée dans [GM], [B], [E], [Sp], [EHS], [FHS], [M2] et [P].

Dans notre interprétation, qui n'est qu'une légère variante de celle de [FHS], cet argument consiste à appliquer au terme convenable d'une filtration de Harder-Narasimhan relative le :

LEMME DE DESCENTE. — *Soit* $p : A \to B$ *un morphisme de variétés algébriques non singulières avec* B *normal. On suppose p surjectif, universellement ouvert et à fibres connexes. Soit* E *un fibré sur* B *et* E′ *un sous-fibré de* $p^* E$. *Si* $\mathrm{Hom}(T_{A|B}, \mathcal{H}om(E', p^* E/E'))=0$, *où* $T_{A|B}$ *désigne le faisceau tangent relatif, alors il existe un sous-fibré* E″ *de* E *vérifiant* $p^* E'' = E'$.

On vérifie l'hypothèse de nullité sur les fibres d'un morphisme $q : A \to C$ au moyen, non pas de la première classe de Chern (qui suffisait dans [VdV]) mais des nombres $\mu_{\min}$ et $\mu_{\max}$ (*cf.* 1.4 et 1.6).

1. Conventions et rappels.
2. Les pseudohomomorphismes.
3. Le nombre ν et l'égalité $\nu = \mu_{\min}$.
4. La descente.
5. La démonstration.
6. Notice d'utilisation illustrée.

1. Conventions et rappels

Dans ce qui suit, le corps de base est $\mathbb{C}$, les variétés sont algébriques quasi-projectives et irréductibles, la topologie est celle de Zariski.

Soit X une variété projective non singulière de dimension n munie du faisceau inversible très ample $\mathcal{O}_X(1)$. On note $|\mathcal{O}_X(1)|$ la première classe de Chern $c_1(\mathcal{O}_X(1))$. Le groupe $H^{2n}(X, \mathbb{Z})$ s'identifie naturellement à $\mathbb{Z}$. Par suite, si E est un faisceau algébrique sans torsion et non nul sur X, le produit d'intersection $c_1(E).|\mathcal{O}_X(1)|^{n-1}$ définit un entier qu'on appelle degré de E [relativement à $\mathcal{O}_X(1)$] et qu'on note $\deg(E, \mathcal{O}_X(1))$ ou simplement $\deg E$. On appelle pente de E le quotient $\mu(E)$ du degré de E par le rang de E. Enfin si Y est une sous-variété non vide de X on pose :

$$\deg Y = \deg(\mathcal{O}_X(1)_{|Y}, \mathcal{O}_X(1)_{|Y}).$$

On note $\overline{E}$ le quotient de E par son sous-faisceau de torsion et $E^\vee$ le dual de E.

Si A, B et C sont des faisceaux sans torsion non nuls, alors :

$$(1.1) \qquad \mu(\overline{A \otimes B}) = \mu(A) + \mu(B) \qquad \text{et} \qquad \mu(C) = -\mu(C^\vee) = \mu(C^{\vee\vee}).$$

On dit que E est μ-semi-stable (dans la suite, nous dirons simplement semi-stable) si chacun de ses sous-faisceaux non nuls F vérifie :

$$(1.2) \qquad \mu(F) \leqq \mu(E).$$

Si E est semi-stable, alors $E^\vee$ et $E^{\vee\vee}$ le sont aussi.

Soient A et B semi-stables :

$$(1.3) \qquad \text{Si} \quad \mu(A) > \mu(B) \qquad \text{alors} \quad \operatorname{Hom}(A, B) = 0.$$

(1.4) Théorème ([HN], [Sch], [M3]). — *Il existe une unique filtration* $0 = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_k = E$ *de* E *par des sous-faisceaux vérifiant :*

($\star$) E_i/E_{i-1} *est semi-stable* ($i = 1, \ldots, k$);

($\star\star$) $\mu(E_i/E_{i-1}) > \mu(E_{i+1}/E_i)$ ($i = 1, \ldots, k-1$).

Cette filtration s'appelle filtration HN de E. Nous posons :

$$\mu_i := \mu_i(E) := \mu(E_i/E_{i-1}), \qquad \mu_{\max}(E) := \mu_1$$

et :

$$\mu_{\min}(E) := \mu_k,$$

et nous nommons $(\mu_1, \ldots, \mu_k)$ suite HN de E. La suite HN de $E^\vee$ est $(-\mu_k, \ldots, -\mu_1)$ et donc celle de $E^{\vee\vee}$ est égale à celle de E.

Soient A et B deux faisceaux sans torsion non nuls; de (1.3) on déduit :

$$(1.5) \qquad \text{Si} \quad \mu_{\min}(A) > \mu_{\max}(B), \qquad \text{alors} \quad \operatorname{Hom}(A, B) = 0.$$

La filtration HN admet une version relative :

(1.6) THÉORÈME ([M2], p. 33, on peut aussi démontrer ce résultat comme l'ouverture de la semi-stabilité). — *Soit* $q : \mathrm{U} \to \mathrm{S}$ *une submersion propre de variétés à fibres de dimension positive, munie d'un fibré en droites très ample relatif* $\mathcal{O}_{\mathrm{U/S}}(1)$. *Si* E *est un faisceau sans torsion sur* U, *alors il existe une filtration :*

$$0 = \mathrm{E}_0 \subset \mathrm{E}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{E}_k = \mathrm{E},$$

de E *par des sous-faisceaux dont la restriction à la fibre générale de q soit la filtration* HN *de la restriction de* E (*sur la fibre générale, cette restriction est sans torsion*).

L'unicité est assurée si on impose que les quotients $\mathrm{E} \mid \mathrm{E}_i$ soient sans torsion. Cette filtration s'appelle filtration HN relative de E/U/S. On appelle type de scindage générique (ou suite HN) de E/U/S, la suite HN de la restriction de E à la fibre générale. On note en particulier $\mu_{\max}(\mathrm{E/U/S})$ et $\mu_{\min}(\mathrm{E/U/S})$ les termes extrêmes de cette suite.

(1.7) μ ET RESTRICTION. — Soit Y une sous-variété non singulière de dimension m dans X. On suppose que, si [Y] désigne la classe de cohomologie associée à Y, $[\mathrm{Y}].|\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(1)|^{m-1}$ et $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(1)^{n-1}$ sont proportionnels dans $\mathrm{H}^{2n-2}(\mathrm{X}, \mathbb{Q})$. Le coefficient de proportionalité est alors positif puisque c'est $\deg \mathrm{Y}/\deg \mathrm{X}$. Soit E semi-stable sur X et F un sous-faisceau de E dont la restriction à Y est sans torsion. Alors on a :

$$\mu(\mathrm{F}_{|\mathrm{Y}}) \leqq \mu(\mathrm{E}_{|\mathrm{Y}}).$$

Démonstration de 1.7. — Cet énoncé est une conséquence évidente du suivant :

(1.8) LEMME. — Y *vérifiant les hypothèses de* (1.7), *si* G *est un faisceau sans torsion sur* X *dont la restriction à* Y *est aussi sans torsion alors :*

$$\mu(\mathrm{G}_{|\mathrm{Y}}) = (\deg \mathrm{Y}/\deg \mathrm{X})\, \mu(\mathrm{G}).$$

Démonstration de (1.8). — Il suffit de démontrer l'égalité analogue pour les degrés. On a :

$$\deg(\mathrm{G}) = c_1(\mathrm{G})\,|\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(1)|^{n-1} = (\deg \mathrm{X}/\deg \mathrm{Y})(c_1(\mathrm{G}).|\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(1)|^{m-1})[\mathrm{Y}].$$
$$\deg(\mathrm{G}_{|\mathrm{Y}}) = c_1(\mathrm{G}_{|\mathrm{Y}})\,|\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}(1)|^{m-1}.$$

La formule annoncée s'obtient alors en appliquant à l'élément $c_1(\mathrm{G})\,|\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(1)|^{m-1}$ la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^{2m}(\mathrm{X}, \mathbb{Q}) \arrow[r, "{[\mathrm{Y}]}"] \arrow[d, "\rho"] & \mathrm{H}^{2n}(\mathrm{X}, \mathbb{Q}) \arrow[d, "ev"] \\
\mathrm{H}^{2m}(\mathrm{Y}, \mathbb{Q}) \arrow[r, "ev"'] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

où [Y] désigne le produit d'intersection avec [Y], ρ désigne la restriction et *ev* désigne l'identification naturelle.

2. Les pseudohomomorphismes

L'objet de ce paragraphe est de faciliter le travail modulo les fermés de codimension deux.

(2.1) Définition. — Soient F et G deux faisceaux sur X. On appellera pseudohomomorphisme de F dans G toute classe d'équivalence de couples (U, f) où U est le complémentaire dans X d'un fermé de codimension au moins deux et f un morphisme de $F_{|U}$ dans $G_{|U}$; deux couples (U', f') et (U'', f'') sont équivalents si $f'_{|U' \cap U''}$ et $f''_{|U' \cap U''}$ sont égaux. Les pseudohomomorphismes de F dans G constituent un groupe noté Pshom(F, G).

(2.2) Proposition. — *Si* G *est sans torsion, le groupe* Pshom(F, G) *est naturellement isomorphe à* $\mathrm{Hom}(F, G^{\vee\vee})$.

Démonstration. — G étant sans torsion est naturellement isomorphe à $G^{\vee\vee}$ en dehors d'un fermé de codimension au moins deux. Cet isomorphisme induit un morphisme :

$$\alpha : \quad \mathrm{Hom}(F, G^{\vee\vee}) \to \mathrm{Pshom}(F, G).$$

Soit f un pseudohomomorphisme de F dans G. On peut lui choisir un domaine de définition U où G soit localement libre. Si i désigne l'injection de U dans X, on sait que $i_* i^* G$ est naturellement isomorphe à $G^{\vee\vee}$. Comme il y a aussi un morphisme naturel de F dans $i_* i^* F$ (qui est isomorphe à $F^{\vee\vee}$), on obtient ainsi un morphisme θ de F dans $G^{\vee\vee}$ qui vérifie $(U, f) \in \alpha(\theta)$. D'autre part α est injectif parce que le faisceau $\mathscr{H}om(F, G^{\vee\vee})$ est sans torsion.

(2.3) Proposition. — *Soient* F *et* G *semi-stables sur* X; *si* $\mu(F) > \mu(G)$ *alors* Pshom $(F, G) = 0$.

Démonstration. — Elle résulte de (2.2), (1.1) et (1.3).

(2.4) Proposition. — *Soient* F *et* G *sans torsion non nuls sur* X; *si* $\mu_{\min}(F) > \mu_{\max}(G)$ *alors* $\mathrm{Pshom}(F, G) = 0$.

Démonstration. — Résulte de (2.2), (1.1) et (1.5).

3. Le nombre ν et l'égalité $\nu = \mu_{\min}$.

(3.1) Proposition. — *Si* E *est un faisceau sans torsion non nul sur* X *alors* :

(i) *il existe un entier relatif* ν *tel que si* F *et* G *sont des faisceaux semi-stables vérifiant* $\mu(F) - \mu(G) > -\nu$ *alors* $\mathrm{Pshom}(E, \mathscr{H}om(F, G)) = 0$;

(ii) *Si* ν *vérifie* (i) *alors* $\nu \leqq \mu_{\min}(E)$.

Démonstration. — Soit d le degré de X.

(i) Si k est tel que $E(k)$ soit engendré par ses sections, alors E est quotient de $\mathcal{O}_X(-k)^N$, avec N convenable. Pour voir que $\nu := kd$ convient, il nous suffit de montrer que Pshom $(\mathcal{O}_X(-k), \mathscr{H}om(F, G))$ est nul si $\mu(F) - \mu(G) > kd$; ceci se déduit de (2.2), (1.1) et (1.3) car :

$$\mu(\mathcal{O}_X(1)) = d \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(-k), \mathscr{H}om(F, G)^{\vee\vee}) = \mathrm{Hom}(F(-k), G^{\vee\vee}).$$

(ii) Soit $\nu > \mu_{\min}(E)$. On pose $F := \mathcal{O}_X$ et on note G un quotient sans torsion de E vérifiant $\mu(G) = \mu_{\min}(E)$. On a simultanément :

$$\mu(F) - \mu(G) > -\nu \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Pshom}(E, \mathcal{H}om(F, G)) \neq 0.$$

(3.2) Définition. — Pour tout faisceau sans torsion non nul E, on note $\nu(E)$ le plus grand entier relatif vérifiant la condition (i) de la proposition précédente. On pose par convention $\nu(0) := +\infty$ et pour E quelconque, $\nu(E) := \nu(\overline{E})$.

(3.3) Proposition. — *Soient* F *et* G *sans torsion non nuls et* E *quelconque. Si* $\mu_{\min}(F) - \mu_{\max}(G) > -\nu(E)$, *alors* $\mathrm{Pshom}(E, \quad om(F, G)) = 0$.

Démonstration. — Elle résulte du fait que tout pseudohomomorphisme non nul de E dans $\mathcal{H}om(F, G)$ induit un pseudohomomorphisme non nul dans un des faisceaux $\mathcal{H}om(\mathrm{gr}_i F, \mathrm{gr}_j G)$, où gr désigne l'objet gradué associé à la filtration HN.

La proposition suivante utilise de façon essentielle le théorème 0.3 de l'introduction :

(3.4) Proposition. — *Pour tout faisceau* E *tel que* $\overline{E}$ *soit non nul, on a :*

$$\nu(E) = \mu_{\min}(\overline{E}).$$

Démonstration. — D'après 3.1 (ii), il nous suffit de prouver que $\mu_{\min}(\overline{E})$ vérifie la condition (i) de 3.1, ce qui résulte de (1.5) et (2.2) car $\mathcal{H}om(F, G)^{\vee\vee}$ est semi-stable (d'après 0.3) et a pour $\mu : \mu(G) - \mu(F)$ (d'après 1.1).

(3.5) Proposition. — *Soient* E, U, S *comme dans* (1.6). *Soient* F *et* G *deux autres faisceaux sans torsion non nuls sur* U. *Si :*

$$\mu_{\min}(F/U/S) - \mu_{\max}(G/U/S) > -\mu_{\min}(E/U/S)$$

alors :

$$\mathrm{Pshom}(E, \mathcal{H}om(F, G)) = 0.$$

Démonstration. — Elle s'obtient en appliquant (3.3) et (3.4) à la restriction à la fibre générale de $U \to S$ d'un pseudohomomorphisme de E dans $\mathcal{H}om(F, G)$.

4. La descente.

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le lemme de descente énoncé dans l'introduction. On considère donc un diagramme de variétés algébriques

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & C \\ B & \end{tikzcd}$$

avec p universellement ouvert à fibres connexes et B normal.

(4.1) PROPOSITION. — *Si q est constant sur les fibres de p, il se factorise à travers p.*

Démonstration. — On peut supposer C propre. Soit D la fermeture dans $B \times C$ de la projection du graphe de (p, q). Alors q se factorise à travers D et la fibre générale de la projection $\pi : D \to B$ est réduite à un point. Il nous suffit de prouver que toutes les fibres sont réduites à un point. Soit donc (b, c) dans D et montrons que $c = q(p^{-1}(b))$. Soit H le lieu critique de π et soit γ une courbe lisse munie d'un point 0 et d'un morphisme injectif j de γ dans D tel que $j^{-1}(b, c) = \{0\}$, $j^{-1} H \subset \{0\}$ et que la restriction de $\pi \circ j$ à $\gamma - \{0\}$ soit une immersion. On pose :

$$A_\gamma := A \times_B \gamma \qquad \text{et} \qquad D_\gamma := D \times_B \gamma.$$

Le morphisme j induit une section σ de $\pi_\gamma : D_\gamma \to \gamma$ dont l'image $\hat{\gamma}$ est une composante irréductible de D_γ. Si on note p_γ et q_γ les morphismes naturels de A_γ dans γ et D_γ, alors $q_\gamma^{-1}(D_\gamma - \hat{\gamma})$ est un ouvert de A_γ contenu dans $p_\gamma^{-1}(0)$. Comme p_γ est ouvert, $q_\gamma^{-1}(D_\gamma - \hat{\gamma})$ est vide et donc q_γ se factorise à travers $\hat{\gamma}$. Si $(a, 0)$ est dans $p_\gamma^{-1}(0)$, on a alors $q_\gamma(a, 0) = \sigma(0)$, c'est-à-dire $c = q(a)$.

(4.2) PROPOSITION. — *Si q est constante sur la fibre générale de p, alors q se factorise à travers p.*

Démonstration. — Le produit fibré $A \times_B A$ est ouvert sur B. Il est muni du morphisme (q, q) à valeurs dans $C \times C$. Si Δ désigne la diagonale de $C \times C$, $(q, q)^{-1}((C \times C) - \Delta)$ est un ouvert dont la projection par p n'est pas dense donc est vide. Cela prouve que q est constant sur toutes les fibres et on peut appliquer la proposition précédente.

(4.3) REMARQUES. — On peut, comme le référé, penser que (4.1) et (4.2) s'adaptent au cas de la caractéristique quelconque. En revanche, l'énoncé suivant utilise de façon essentielle l'hypothèse de caractéristique nulle. De façon analogue, la connexité des fibres intervient seulement dans l'énoncé suivant.

(4.4) PROPOSITION. — *Si la différentielle relative $d_{A/B}\, q$ est nulle, alors q se factorise à travers p.*

Démonstration. — Sur un ouvert lisse partout dense A' de A, p est une submersion. La différentielle de la restriction de q à une fibre $p^{-1}(b)$ s'annule donc sur $A' \cap p^{-1}(b)$. Par suite q est constant sur la fibre générale de p et on peut appliquer la proposition précédente.

(4.5) DÉMONSTRATION DU LEMME DE DESCENTE. — Soit $r : R \to B$ la grassmannienne relative des sous-espaces vectoriels des fibres de E et soit $\varphi : A \to R$ le B-morphisme associé à E'. On sait que si $U \subset r^* E$ désigne le sous-fibré universel, φ est caractérisé par $\varphi^* U = E'$. On sait aussi que l'espace tangent relatif $T_{R/B}$ s'identifie à $\mathscr{H}om(U, r^* E/U)$. On voit alors que la différentielle relative $d_{A/B}\, \varphi$ est une section de $\mathscr{H}om(T_{A/B}, \mathscr{H}om(E', p^* E/E'))$. Elle est donc nulle et d'après la proposition précédente, φ s'écrit $\overline{\varphi} \circ p$. Le sous-fibré E'' est $\overline{\varphi}^* U$.

5. Démonstrations du théorème et du corollaire.

La distinction entre les deux énoncés est destinée à mettre en évidence le rôle du théorème 0.3; mais d'après (3.4), ces deux énoncés sont équivalents et nous ne démontrons que le corollaire.

Supposons $\mu_i - \mu_{i+1} > -\mu_{\min}(T_{U/X}/U/S)$. Les hypothèses assurent l'existence d'un fermé de codimension deux dans U dont le complémentaire V a les propriétés suivantes :

(i) $p \mid V$ est plat;

(ii) $p^* E \mid V$ est localement libre;

(iii) $E_{i\mid V}$ est facteur direct de $p^* E \mid V$.

On note encore p la projection de V sur son image X'. Elle est plate surjective à fibres connexes. D'après (3.5), $\mathrm{Pshom}(T_{U/X}, \mathscr{H}om(E_i, p^* E/E_i))$ est nul. Comme V est le complémentaire d'un fermé de codimension au moins deux, $\mathrm{Hom}(T_{V/X'}, \mathscr{H}om(E_i, p^* E/E_i))$ est aussi nul. D'après le lemme de descente, il existe un sous-fibré E'' de E sur X' vérifiant $p^* E'' = E_i$ sur V. Soit F un sous-faisceau de E prolongeant E'' sur X. Comme U-V est de codimension au moins deux, il en est de même pour $U(s)$-$V(s)$ pour s général. Il en résulte que si Γ est une fibre générale de q :

$$\mu(F_{\mid\Gamma}) = \mu(E_{i\mid\Gamma}) \qquad \text{et} \qquad \mu((E/F)_{\mid\Gamma}) = \mu((E/E_i)_{\mid\Gamma}).$$

De $\mu(E_{i\mid\Gamma}) \geqq \mu_i > \mu_{i+1} \geqq \mu((E/E_i)_{\mid\Gamma})$ il résulte $\mu(F_{\mid\Gamma}) > \mu(E_{\mid\Gamma})$ ce qui d'après (1.7) prouve que E n'est pas semi-stable.

6. Notice d'utilisation illustrée.

(6.1) Les hypothèses (i) et (ii) du théorème sont vérifiées si X est homogène rationnelle et S est une partie équivariante du schéma de Hilbert.

(6.2) L'hypothèse (iii) du théorème est vérifiée dès que $H^2(X, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, et même dès que $H^1(X, \Omega_X)$ est de dimension un puisque les classes considérées sont dans $H^{n-1,\, n-1}(X, \mathbb{R})$.

(6.3) Lorsque S est un ouvert du schéma de Hilbert, d'après la théorie des déformations, la restriction de $T_{U/X}$ à la fibre générale Γ de $U \to S$ est le noyau de la surjection naturelle : $H^0(\Gamma, N) \otimes \mathscr{O}_\Gamma \to N$ où N désigne le fibré normal à Γ dans X.

(6.4) Courbes rationnelles dans $\mathbb{P}_n$: le corollaire donne $\mu_i - \mu_{i+1} \leqq 1$. Ce résultat est démontré dans [B] de façon très différente.

(6.5) Sous-espaces linéaires : le corollaire s'applique à la famille des sous-variétés linéaires de dimension m de $\mathbb{P}_n$ passant par une sous-variété linéaire fixe de dimension $m-2$ au plus. Par exemple il permet de montrer que si x est un point de $\mathbb{P}_3$ et E un fibré semi-stable de rang au plus trois sur $\mathbb{P}_3$ avec $c_1(E) = 0$, alors il existe un plan passant par x où E se restreint en un fibré semi-stable.

BIBLIOGRAPHIE

[B] W. BARTH, *Some Properties of Stable Rank-2 Bundles on* $\mathbb{P}_n$ (*Math. Ann.*, vol. 226, 1977, p. 125-150).

[E] G. ELENCWAJG, *Les fibrés uniformes de rang 3 sur* $\mathbb{P}_2$ ($\mathbb{C}$) *sont homogènes* (*Math. Ann.* vol. 231, 1978, p. 217-227).

[EHS] G. ELENCWAJG, A. HIRSCHOWITZ et M. SCHNEIDER, *Les fibrés uniformes de rang n sur* $\mathbb{P}_n$ *sont ceux qu'on croit*, Série Progress in Math., Birkhaüser (Boston); *Vector Bundles and differential Equations* (*Proceedings, Progress in Math.*, n° 7, Birkhaüser, 1979, p. 37-63).

[FHS] O. FORSTER, A. HIRSCHOWITZ et M. SCHNEIDER, *Type de scindage généralisé pour les fibrés stables*. Série Progress in Math., Birkhaüser (Boston); *Vector Bundles and Differential Equations Proceedings* (*Progress in Math.*, n° 7, Birkhaüser, 1979, p. 65-81).

[GM] H. GRAUERT et G. MÜLICH, *Vektorbündel vom Rang 2 über dem n-dimensionalen komplex-projektiven Raum* (*Manuscripta math.*, vol. 16, 1975, p. 75-100, et complément *ibid.* vol. 18, 1976, p. 213-214).

[HN] G. HARDER et M. S. NARASIMHAN, *On the Cohomology Groups of Moduli Spaces of Vector Bundles on Curves* (*Math. Ann.*, vol. 212, 1975, p. 215-248).

[M1] M. MARUYAMA, *The Theorem of Grauert-Mülich-Spindler*, Bonn, 1980 (Preprint).

[M2] M. MARUYAMA, *Boundedness of Families of Torsion Free Sheaves*, Bonn, 1980 (Preprint).

[M3] M. MARUYAMA, *Boundedness of Semi-Stable Sheaves of Small Ranks* (*Nagoya J.*, vol. 78, 1980, p. 65-94).

[P] Ch. PESKINE, *Le lemme des trisecantes généralisé*, conférence à Nice, mars 1980.

[Sch] S. SCHATZ, *The Decomposition and Specialization of Algebraic Families of Vector Bundles* (*Compositio Math.*, vol. 35, 1977, p. 163-187).

[Sp] H. SPINDLER, *Der Satz von Grauert-Mülich für beliebige semistabile holomorphe Vektorbündel über dem n-dimensionalen komplex-projektiven Raum* (*Math Ann.*, vol. 243, 1979, p. 131-141).

[VdV] A. VAN DE VEN, *On Uniform Vector Bundles* (*Math. Ann.*, vol. 195, 1972, p. 245-248).

(Manuscrit reçu le 4 juin 1980,
révisé le 23 décembre 1980.)

André HIRSCHOWITZ,
Université de Nice,
Institut de Mathématiques et Sciences Physiques
Parc Valrose, 06034 Nice.