J. LE POTIER

Sur le groupe de Picard de l'espace de modules des fibrés stables sur $\mathbb{P}_2$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 14, nº 2 (1981), p. 141-155
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1981_4_14_2_141_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4[e] série, t. 13, 1981, p. 141 à 155.

SUR LE GROUPE DE PICARD DE L'ESPACE DE MODULES DES FIBRÉS STABLES SUR $\mathbb{P}_2$

PAR J. LE POTIER

0. Introduction

Soit c_2 un entier $\geqq 2$. On désigne par $M = M(0, c_2)$ l'espace de modules des fibrés vectoriels algébriques E stables de rang 2 de classes de Chern $c_1(E) = 0$ et $c_2(E) = c_2$ sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C}) = \mathbb{P}_2$. On sait d'après Maruyama [8] que c'est une variété algébrique lisse de dimension $4c_2 - 3$, et on se propose de décrire le groupe de Picard Pic M des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels algébriques L de rang un sur M. Le résultat obtenu est le suivant :

THÉORÈME 1. — *On a :*

$$\operatorname{Pic} M = \begin{cases} \mathbb{Z} & si \quad c_2 > 2, \\ \mathbb{Z}/3\,\mathbb{Z} & si \quad c_2 = 2. \end{cases}$$

Ce théorème sera démontré au paragraphe 3. On vérifiera en même temps que les seules fonctions régulières inversibles sur M sont les constantes.

Soit E un fibré vectoriel algébrique stable de rang 2 sur $\mathbb{P}_2$, de classes de Chern $(0, c_2)$. Les droites de $\mathbb{P}_2$ sur lesquelles E n'est pas trivial, dites droites de saut de E, sont obtenues par l'annulation d'un polynôme homogène de degré c_2, défini à homothétie près, sur le plan projectif dual $\mathbb{P}_2^\vee$. Ceci détermine un morphisme :

$$\sigma : \quad M \to \mathbb{P}_N(\mathbb{C}),$$

avec $N=(1/2)(c_2+1)(c_2+2)-1$. On vérifiera (prop. 11) que si c_2 est impair, le fibré $L_0=\sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(1)$ est un des deux générateurs de Pic M. Dans le cas où c_2 est pair, le fibré $\sigma^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(1)$ est le carré d'un générateur L_0 de Pic M. On peut en déduire (prop. 12) que le morphisme défini par la classe de Chern en cohomologie singulière :

$$\operatorname{Pic} M \to H^2(M, \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme.

Ce générateur étant parfaitement décrit, nous pouvons déterminer le fibré canonique $\det T^*(M)$:

THÉORÈME 2. — *On a :*

$$\det T^*(M)=\begin{cases} L_0^{\otimes -12} & si \quad c_2 \ est\ pair, \\ L_0^{\otimes -6} & si \quad c_2\ est\ impair. \end{cases}$$

En particulier, ce fibré est trivial pour $c_2=2$, et c'est le seul cas où il est trivial. La démonstration de ce théorème nécessite une description précise du fibré tangent à M faisant intervenir les monades universelles déjà utilisées dans [7]. Cette description sera donnée au paragraphe 5. En même temps, nous montrerons (cor. 19) que dans le cas où c_2 est impair, il existe un fibré universel et un seul $\mathbb{U} \to \mathbb{P}_2 \times M$ vérifiant la condition suivante :

$$\det \mathbb{U}=pr_2^* L_0,$$

où $pr_2 : \mathbb{P}_2 \times M \to M$ est la seconde projection. Dans le cas où c_2 est pair, on sait qu'il n'existe pas de fibré universel [7].

Pour les fibrés stables de rang 2 de classes de Chern $c_1=-1$ et c_2, le calcul de Pic $M(-1, c_2)$ a été obtenu par G. Ellingsrud et S. A. Strømme [5].

1. Groupes réductifs ([4], [9])

Soit G un groupe algébrique sur $\mathbb{C}$. On dit que G est *réductif* s'il est affine et si son radical est un tore, c'est-à-dire un groupe de la forme $\mathbb{C}^{*m}$. D'après un théorème classique de H. Weyl, ceci équivaut à dire que toute représentation rationnelle de G dans un espace vectoriel de dimension finie est complètement réductible. Si $\rho : G \to GL(E)$ est une représentation rationnelle d'un groupe réductif G dans un espace vectoriel E de dimension finie, il existe une rétraction canonique appelée opérateur de Reynolds :

$$R : \quad E \to E^G$$

de E sur l'espace vectoriel E^G des points invariants par G, et cette rétraction dépend fonctoriellement du couple (E, ρ).

Soit X une variété algébrique, muni d'une action à gauche d'un groupe réductif G, $\mathcal{O}_X$ son faisceau structural. L'espace quotient X/G des orbites sous l'action de G sera équipé de la topologie quotient de la topologie de Zariski et du faisceau $\mathcal{O}_X^G \subset \mathcal{O}_X$ des sections de $\mathcal{O}_X$ G-invariantes.

PROPOSITION 3. — *Si* X *est une variété affine, et si les orbites sont fermées, alors le quotient* $Y=X/G$ *est une variété affine, et la projection canonique* $X \to X/G$ *est un morphisme affine.*

Une démonstration est donnée par exemple dans A. Borel ([4], § 7.10).

PROPOSITION 4. — *Soit* G *un groupe réductif opérant librement sur une variété algébrique* X; *on suppose que* X/G *est une variété algébrique, et que le morphisme* $X \to X/G$ *est affine. Si* E *est un* G-*fibré vectoriel algébrique sur* X, *le quotient* E/G *est un* G-*fibré vectoriel algébrique sur* $Y=X/G$.

Démonstration. — La question est locale sur Y; par suite, on peut supposer que X est une variété affine. Il résulte de la proposition 3 que le quotient $F=E/G$ est une variété algébrique affine. La projection canonique :

$$F=E/G \to X/G=Y$$

est alors un morphisme de variétés algébriques dont les fibres sont des espaces vectoriels; il suffit de montrer que ce morphisme a des sections locales.

Soient $a \in Y$, et X_a la fibre de X au-dessus de a; il existe une trivialisation G-invariante de E au-dessus de X_a :

$$u=(u_1, \ldots, u_r): \quad X_a \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\sim} E \mid X_a.$$

Puisque X est une variété affine, chacune des sections u_i *s'étend en une section* v_i de E sur X. L'espace des sections de E sur X, $\Gamma(X, E)$, est un G-module sur lequel on peut encore définir l'opérateur de Reynolds, bien qu'il ne soit pas de dimension finie :

$$R: \quad \Gamma(X, E) \to \Gamma(X, E)^G$$

et, par fonctorialité, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, E) & \xrightarrow{R} & \Gamma(X, E)^G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(X_a, E) & \xrightarrow{R} & \Gamma(X_a, E)^G \end{array}$$

où les flèches verticales sont les restrictions canoniques. Il en résulte que $(R(v_1), \ldots, R(v_r))$: $X \times \mathbb{C}^r \to E$ est un isomorphisme au-dessus de X_a, et donc au-dessus d'un voisinage ouvert G-invariant de X_a. Ces sections définissent une trivialisation de $F \to Y$ au voisinage de a, ce qui démontre la proposition.

Soit X une variété algébrique, sur laquelle un groupe réductif G opère librement. Cette action induit une action sur le groupe $\mathcal{O}^*(X)$ des sections inversibles de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de X. On désigne par Mor $(G, \mathcal{O}^*(X))$ le groupe des morphismes croisés $\chi: G \to \mathcal{O}^*(X)$, c'est-à-dire des applications $g \mapsto \chi_g$ vérifiant les conditions suivantes :

(1) l'application χ provient d'un morphisme de variétés algébriques :

$$G \times X \to \mathbb{C}^*;$$

(2) pour tout g et $g' \in G$, $\chi_{gg'}=g'^*(\chi_g)\,\chi_{g'}$.

PROPOSITION 5. — *Avec les hypothèses de la proposition* 4, *on a une suite exacte :*

$$\mathcal{O}^*(X) \to \mathrm{Mor}(G, \mathcal{O}^*(X)) \to \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X).$$

Démonstration. — Pour simplifier l'écriture, nous supposons X réduit. A tout morphisme croisé $\chi \in \mathrm{Mor}(G, \mathcal{O}^*(X))$ on associe un G-fibré vectoriel L'_χ de rang un sur X en considérant le fibré trivial $X \times \mathbb{C}$ muni de l'action à gauche $G \times X \times \mathbb{C} \to X \times \mathbb{C} : (g, x, v) \mapsto (gx, \chi_g(x) v)$. D'après la proposition 4, le quotient $L_\chi = L'_\chi / G$ est un G-fibré vectoriel de rang un sur Y; on a ainsi obtenu un homomorphisme de groupes :

$$\mathrm{Mor}(G, \mathcal{O}^*(X)) \to \mathrm{Pic}(Y)$$

qui à χ associe la classe d'isomorphisme de L_χ. Considérons d'autre part le morphisme $\mathcal{O}^*(X) \to \mathrm{Mor}(G, \mathcal{O}^*(X))$ qui à $f \in \mathcal{O}^*(X)$ associe le morphisme croisé χ défini par :

$$f(gx) = \chi_g(x) f(x)$$

pour $x \in X$ et $g \in G$. Il est évident que ce morphisme et le morphisme image réciproque : $\mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X)$ rendent exacte la suite de la proposition.

2. Structure algébrique sur $M = M(0, c_2)$

On utilise l'essentiel des notations de [7]. En particulier, on désigne par Q le fibré vectoriel quotient canonique de rang 2 de $\mathcal{O}^3 = \mathbb{P}_2 \times \mathbb{C}^3$ sur $\mathbb{P}_2$, et on pose $V = \Gamma(\mathbb{P}_2, Q)$; le dual V^* de V s'identifie à l'espace vectoriel $\Gamma(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(1))$ des sections de $\mathcal{O}(1)$.

Soient H un espace vectoriel de dimension c_2, S^2H^* l'espace des formes quadratiques sur H, identifié à l'espace des applications linéaires symétriques $H \to H^*$. A toute application linéaire $\alpha : V^* \to S^2H^*$ on associe un morphisme de fibrés vectoriels :

$$a : \quad \Lambda^2 Q^* \otimes H \to Q^* \otimes H^*$$

défini au-dessus du point $x \in \mathbb{P}_2$ par la formule suivante : pour $z', z'' \in Q^*_x \subset V^*$ et $h \in H$, on pose :

$$a(z' \wedge z'' \otimes h) = z'' \otimes \alpha(z') h - z' \otimes \alpha(z'') h.$$

On désigne par P l'espace des applications linéaires $\alpha : V^* \to S^2H^*$ qui satisfont aux conditions suivantes :

(1) le morphisme associé a est injectif, c'est-à-dire que pour tout $h \in H$, $h \neq 0$, l'application linéaire $V^* \to H^* : z \mapsto \alpha(z) h$ est de rang $\geqq 2$;

(2) il existe une base (z_0, z_1, z_2) de V^* telle que $\alpha(z_0)$ soit non dégénérée et que l'application linéaire antisymétrique $H \to H^*$:

$$\theta(z_0, z_1, z_2) = \alpha(z_1)\alpha(z_0)^{-1}\alpha(z_2) - \alpha(z_2)\alpha(z_0)^{-1}\alpha(z_1)$$

soit de rang 2.

Dans l'ouvert défini par la condition (1), la condition (2) exprime qu'il existe un épimorphisme $b : Q^* \otimes H^* \to \mathcal{O} \otimes K$ sur un fibré trivial de fibre K de rang $c_2 - 2$, tel que $b \circ a = 0$. Le fibré Ker b ne dépend que de α, et le quotient :

$$E(\alpha) = \operatorname{Ker} b / \operatorname{Im} a$$

est alors un fibré stable de rang 2 de classes de Chern $(0, c_2)$. L'espace P est une variété algébrique lisse sur laquelle le groupe $G = GL(H)/\{\pm 1\}$ opère librement par la formule :

$$(f, \alpha) \mapsto f_* \alpha = {}^t f^{-1} \alpha f^{-1}$$

pour $f \in GL(H)$ et $\alpha \in P$. L'espace quotient P/G est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels stables de rang 2 sur $\mathbb{P}_2$, de classes de Chern $(0, c_2)$ ([2], [7]). On se propose de montrer que $M = P/G$ est une variété algébrique, et que le morphisme canonique $P \to P/G$ est affine.

Soit $L(V^*, S^2H^*)$ l'espace vectoriel des applications linéaires $\alpha : V^* \to S^2H^*$; l'opération de G ci-dessus provient de l'action évidente de GL(H) sur $L(V^*, S^2H^*)$, notée encore $(f, \alpha) \mapsto f_* \alpha$. Un élément $\alpha \in L(V^*, S^2H^*)$ est dit *stable* (au sens de Mumford) sous le groupe SL(H) si le morphisme :

$$SL(H) \to L(V^*, S^2H^*)$$

défini par $f \mapsto f_* \alpha$ est propre. Soient $\alpha : V^* \to S^2H^*$ une application linéaire, et L un sous-espace vectoriel de H; on appelle orthogonal de L relatif à α le sous-espace $L^\perp$ de H défini par les vecteurs $v \in H$ tels que pour tout $z \in V^*$ et tout $u \in L$, $\langle \alpha(z) u, v \rangle = 0$. Un tel sous-espace sera dit totalement isotrope relativement à α si $L \subset L^\perp$. La proposition qui suit, due à C.T.C. Wall, caractérise les éléments $\alpha \in L(V^*, S^2H^*)$ stables sous le groupe SL(H), en termes de sous-espaces totalement isotropes.

PROPOSITION 6 [10]. — *Soit* $\alpha \in L(V^*, S^2H^*)$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) α *est stable sous* SL(H);

(*b*) *pour tout sous-espace vectoriel non nul* $L \subset H$ *totalement isotrope relativement à* α, *on a :*

$$\dim L + \dim L^\perp < \dim H,$$

$L^\perp$ *désignant l'orthogonal de* L *relatif à* α.

La démonstration est donnée dans C.T.C. Wall ([10], th. 0.1). On voit en particulier que si α est stable sous le groupe SL(H), pour tout sous-espace $L \subset H$ totalement isotrope relativement à α on a $\dim L < (1/2) \dim H$. Cependant, cette condition ne suffit pas pour assurer que α soit stable : par exemple, si $\dim H = 3$, et si α est donné par un réseau de coniques de $\mathbb{P}(H)$ tangentes en un point $p \in \mathbb{P}(H)$ à une droite d, il existe une base de H dans laquelle la matrice de $\alpha(z)$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}.$$

Si on fait opérer le groupe à un paramètre $f_\lambda \in \mathrm{SL}(\mathrm{H})$ donné dans la même base par la matrice :

$$f_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

on voit que le morphisme $\lambda \mapsto (f_\lambda)_* \alpha$ n'est pas propre, et par suite que α n'est pas stable, bien que vérifiant en général la condition $\dim \mathrm{L} < (1/2) \dim \mathrm{H}$ pour tout sous-espace totalement isotrope L.

PROPOSITION 7 [3]. — *Tout élément* $\alpha \in \mathrm{P}$ *est stable sous* $\mathrm{SL}(\mathrm{H})$.

Démonstration. — La démonstration que nous donnons ici est une version simplifiée de la démonstration déjà donnée par Barth et Elencwajg [3]. Soit $\mathrm{L} \subset \mathrm{H}$ un sous-espace vectoriel non nul. Si $\alpha \in \mathrm{P}$, il existe une base (z_0, z_1, z_2) de V^* telle que $\alpha(z_0)$ soit non dégénérée. Alors :

$$\dim \mathrm{L}^\perp \leqq \dim \mathrm{H} - \dim \mathrm{L}.$$

Supposons que l'on ait l'égalité : il existe alors un sous-espace $\mathrm{K} \subset \mathrm{H}^*$ tel que pour tout $z \in \mathrm{V}^*$ $\alpha(z)(\mathrm{L}) \subset \mathrm{K}$, et que $\alpha(z_0)$ induise un isomorphisme $\mathrm{L} \to \mathrm{K}$. Si l'on pose $\mathrm{A} = \alpha(z_0)^{-1} \alpha(z_1)$, $\mathrm{B} = \alpha(z_0)^{-1} \alpha(z_2)$, A et B sont des endomorphismes de H, symétriques pour la forme quadratique $\alpha(z_0)$, qui laissent stable L. La condition (2) s'écrit rang $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = 2$.

Si rang $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]|_\mathrm{L} \leqq 1$, d'après un lemme d'algèbre linéaire dû à Barth et Elencwajg, $\mathrm{A}|_\mathrm{L}$ et $\mathrm{B}|_\mathrm{L}$ auraient en commun un vecteur propre $h \in \mathrm{H}$; les vecteurs $\alpha(z_0)h$, $\alpha(z_1)h$, $\alpha(z_2)h$ seraient alors liés, ce qui contredit la condition (1).

Si rang $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]|_\mathrm{L} = 2$, alors $\mathrm{Im}\,[\mathrm{A}, \mathrm{B}] \subset \mathrm{L}$ et donc $\mathrm{L}^\perp \subset \mathrm{Ker}\,[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$. Par suite, si $\mathrm{L}^\perp \neq 0$, $\mathrm{A}|_{\mathrm{L}^\perp}$ et $\mathrm{B}|_{\mathrm{L}^\perp}$ sont encore un vecteur propre en commun, ce qui contredit à nouveau (1).

Par suite, $\dim \mathrm{L}^\perp < \dim \mathrm{H} - \dim \mathrm{L}$; cette inégalité est vrai *a fortiori* pour les sous-espaces L totalement isotropes relativement à α, et donc α est stable sous $\mathrm{SL}(\mathrm{H})$ d'après la proposition 6.

PROPOSITION 8. — *Le quotient* P/G *est une variété algébrique, et le morphisme canonique* $\mathrm{P} \to \mathrm{P}/\mathrm{G}$ *est affine.*

Démonstration. — Montrons d'abord que P/G est localement une variété algébrique : du fait que le morphisme $\mathrm{P} \times \mathrm{G} \to \mathrm{P} \times \mathrm{P}$ donné par l'action de G : $(\alpha, f) \mapsto (\alpha, f_* \alpha)$ est propre, il en résultera que P/G est une variété algébrique séparée.

D'après la proposition 3, il suffit, puisque G est un groupe réductif, de vérifier que chaque trajectoire dans P a un voisinage ouvert affine W invariant par l'action de G. Soit $z_0 \in \mathrm{V}^* - \{0\}$; on désigne par X_0 l'ouvert G-invariant de $\mathrm{X} = \mathrm{L}(\mathrm{V}^*, \mathrm{S}^2\mathrm{H}^*)$ défini par les $\alpha \in \mathrm{X}$ tels que $\det \alpha(z_0) \neq 0$, et par P_0 l'ouvert de P défini par $\mathrm{P} \cap \mathrm{X}_0$.

LEMME 9. — *Soit* $\alpha \in \mathrm{P}_0$. *Alors le morphisme* $\mathrm{G} \to \mathrm{X}_0$ *donné par* $f \mapsto f_* \alpha$ *est propre.*

Démonstration. — Il revient au même de vérifier que la flèche composée :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{SL}(\mathrm{H}) \times \mathbb{C}^* & \to & \mathrm{GL}(\mathrm{H}) & \to & \mathrm{X}_0 & \to & \mathrm{X} \times \mathbb{C}^*, \\ (f, \lambda) & \mapsto & \lambda f, & & \beta & \mapsto & (\beta, \det \beta(z_0)) \end{array}$$

est encore propre; elle donnée par le morphisme Φ défini par :

$$(f, \lambda) \mapsto (\lambda^{-2} f_* \alpha, \lambda^{-2c_2} \det \alpha(z_0))$$

et se factorise suivant le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SL}(\mathrm{H}) \times \mathbb{C}^* \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & \mathrm{X} \times \mathbb{C}^* \arrow[d] \\ & \mathrm{X} \times \mathbb{C}^* \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{c} (\beta, \lambda) \\ \downarrow \\ (\lambda^{-2} \beta, \lambda^{-2c_2} \det \alpha(z_0)) \end{array}$$

où Ψ est donné par $(f, \lambda) \mapsto (f_* \alpha, \lambda)$ et donc propre d'après la proposition 7; le morphisme vertical est fini, et par suite Φ est propre. Ceci démontre le lemme.

Fin de la démonstration de la proposition 8. — Soient $\mathcal{O}(X_0)$ l'algèbre des fonctions régulières sur l'ouvert affine X_0, et $\alpha \in P_0$. Puisque la trajectoire de α est fermée dans X_0 d'après le lemme 9, il existe $u \in \mathcal{O}(X_0)$ tel que $u=1$ sur la trajectoire de α sous G, et $u=0$ sur le fermé F de X_0 défini par les applications $\beta : V^* \to S^2 H^*$ qui ne satisfont pas à la condition (1). Le fermé F étant G-invariant et G un groupe réductif, on peut même, quitte à remplacer u par $R(u)$ (*cf.* § 1), supposer que la fonction u est G-invariante. L'ouvert $W = \{ \beta \in X_0, u(\beta) \neq 0 \}$ est alors un ouvert affine G-invariant qui ne rencontre pas F; par suite $P_0 \cap W$ est fermé dans W, et c'est donc encore un ouvert affine G-invariant de P contenant la trajectoire de α. Ceci permet d'expliquer la proposition 3, et termine la démonstration de la proposition 8.

Remarque. — Une légère modification de la démonstration donnée ci-dessus permet de vérifier que $M = P/G$ est quasi projective. C'est un cas particulier du résultat qu'obtient Maruyama [8] sur les surfaces algébriques lisses projectives, par les méthodes de Mumford et Seshadri.

3. Description de Pic M

3.1. Dans le cas $c_2 = 2$, le morphisme obtenu en associant à un fibré stable de rang 2 de classes de Chern (0,2) la courbe de $\mathbb{P}_2^\vee$ de ses droites de saut (*cf.* introduction) :

$$\sigma : \quad M(0,2) \to \mathbb{P}_5(\mathbb{C}) = \text{espace des coniques de } \mathbb{P}_2^\vee$$

est un isomorphisme sur l'ouvert complémentaire de l'hypersurface de degré 3 de $\mathbb{P}_5$ correspondant aux coniques dégénérées [2]; cette hypersurface est irréductible et réduite. Par conséquent :

$$\mathrm{Pic}\, M(0,2) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z},$$

avec pour générateur $\sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_5}(1)$.

3.2. Dans le cas $c_2>2$, pour obtenir le théorème 1, il suffit de vérifier la proposition suivante, avec les notations du paragraphe 2 :

PROPOSITION 10. — *Pour* $c_2>2$, *on a* $\mathcal{O}^*(\mathrm{P})=\mathbb{C}^*$ *et* $\mathrm{Pic}\ \mathrm{P}=0$.

Cette proposition sera démontrée au paragraphe 4. La proposition 5 montre alors que Pic M s'identifie au groupe des caractères de G; ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}$; pour générateur, nous choisirons le caractère :

$$f \mapsto \begin{cases} (\det f)^{-1} & \text{si } c_2 \text{ est pair,} \\ (\det f)^{-2} & \text{si } c_2 \text{ est impair} \end{cases}$$

et nous noterons L_0 le fibré de rang un sur M associé à ce caractère.

PROPOSITION 11. — *On a, avec les notations ci-dessus :*

$$\sigma^*_{\mathbb{P}_\mathrm{N}}(1) \simeq \begin{cases} \mathrm{L}_0 & \textit{si } c_2 \textit{ est impair,} \\ \mathrm{L}_0^{\otimes 2} & \textit{si } c_2 \textit{ est pair.} \end{cases}$$

Démonstration. — Il suffit de rappeler la description du morphisme σ. Chaque point $\alpha \in \mathrm{P}$ détermine un morphisme de fibrés vectoriels sur le plan projectif dual $\mathbb{P}_2^\vee$:

$$\mathrm{H}(-1) \to \mathrm{H}^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}$$

dont le déterminant est une section non nulle du fibré $(\det \mathrm{H})^{\otimes -2} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(c_2)$; le lieu des zéros de cette section correspond exactement aux droites de saut du fibré $\mathrm{E}(\alpha)$. Ceci donne un élément $s(\alpha) \in (\det \mathrm{H})^{\otimes -2} \otimes \mathrm{S}^{c_2}\mathrm{V}$ non nul et tel que :

$$s(f_* \alpha) = (\det f)^{-2} s(\alpha)$$

pour $f \in \mathrm{G}$. Ceci définit donc un morphisme $\mathrm{P} \to \mathbb{P}(\mathrm{S}^{c_2}\mathrm{V})$ G-invariant, et qui par conséquent se factorise suivant le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P} \arrow[d] \arrow[dr, "s"] & \\ \mathrm{M} \arrow[r, "\sigma"] & \mathbb{P}(\mathrm{S}^{c_2}\mathrm{V}) = \mathbb{P}_\mathrm{N} \end{tikzcd}$$

ce qui définit σ. En fait, s définit une section G-invariante du G-fibré de rang un sur P : $\mathrm{P} \times (\det \mathrm{H})^{\otimes -2} \otimes s^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_\mathrm{N}}(-1)$, section partout non nulle et qui donne par passage au quotient sur M un isomorphisme :

$$\sigma^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_\mathrm{N}}(1) \simeq \mathrm{P} \times (\det \mathrm{H})^{\otimes -2}/\mathrm{G}.$$

Le fibré qui figure au membre de droite n'est autre que L_0 si c_2 est impair, et $\mathrm{L}_0^{\otimes 2}$ si c_2 est pair. D'où la proposition 11.

3.3. On désigne par $\mathrm{H}^q(\mathrm{M}, \mathbb{Z})$ le q-ième groupe de cohomologie singulière de la variété M munie de la topologie usuelle.

PROPOSITION 12. — *Le morphisme canonique :*

$$\operatorname{Pic} M \to H^2(M, \mathbb{Z})$$

donné par la classe de Chern est un isomorphisme.

Démonstration. — Dans le cas $c_2 = 2$, le complémentaire de M dans $\mathbb{P}_5$ est une hypersurface irréductible de $\mathbb{P}_5$, par conséquent :

$$H^q(\mathbb{P}_5, M; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q=2, \\ 0 & \text{si } q=3 \end{cases}$$

et l'image d'un générateur de $H^2(\mathbb{P}_5; M; \mathbb{Z})$ dans $H^2(\mathbb{P}_5, \mathbb{Z})$ est au signe près la classe fondamentale de l'hypersurface $\mathbb{P}_5 - M$, c'est-à-dire $c_1(\mathcal{O}(3))$. La suite exacte :

$$H^2(\mathbb{P}_5; M; \mathbb{Z}) \to H^2(\mathbb{P}_5; \mathbb{Z}) \to H^2(M, Z) \to 0$$

montre que $H^2(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, avec pour générateur $\sigma^* c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_5}(1)) = -c_1(L_0)$.

Supposons maintenant $c_2 > 2$. On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\pi"'] & S \arrow[d] \\ M \arrow[r, "\sigma"] & \mathbb{P}(S^{c_2} V) = \mathbb{P}_N \end{tikzcd}$$

où S est l'espace total, privé de la section nulle, du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(-1)$ sur $\mathbb{P}_N$. Sur chaque fibre de π, le morphisme s est donné par l'application $G \to \mathbb{C}^*$ définie par $f \mapsto (\det f)^{-2}$. On sait que P est 2-connexe et que M est simplement connexe ([7], prop. 5 et 6). La suite spectrale de Cartan-Serre donne alors, en cohomologie singulière l'isomorphisme $H^1(G, \mathbb{Z}) \simeq H^2(M, \mathbb{Z})$. De même, la variété S est isomorphe à $\mathbb{C}^{N+1} - \{0\}$, et par suite 2 N-connexe, et $N \geqq 9$. Par conséquent, on a aussi l'isomorphisme $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) \simeq H^2(\mathbb{P}_N, \mathbb{Z})$, et la fonctorialité de la suite spectrale de Cartan-Serre donne le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^1(G, \mathbb{Z}) \arrow[d, "\wr"] \\ H^2(\mathbb{P}_N, \mathbb{Z}) \arrow[r] & H^2(M, \mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

dans lequel la première flèche horizontale est induite par l'application $f \mapsto (\det f)^{-2}$. Pour c_2 pair, le morphisme $\det : G \to \mathbb{C}^*$ induit un épimorphisme au niveau du π_1, de noyau $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ([7], prop. 57), et par conséquent un isomorphisme $H^1(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ en cohomologie. Le diagramme commutatif ci-dessus montre que $H^2(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ et que $\sigma^* c_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(1)) = 2u$, où u est un générateur de $H^2(M, \mathbb{Z})$. Il résulte de la proposition 11 que $c_1(L_0)$ est un générateur de $H^2(M, \mathbb{Z})$.

Pour c_2 impair, le morphisme $f \mapsto (\det f)^2 : G \to \mathbb{C}^*$ induit un isomorphisme au niveau du π_1, et donc le morphisme $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) \to H^1(G, \mathbb{Z})$ ci-dessus est un isomorphisme. Il en résulte l'isomorphisme $\sigma^* : H^2(\mathbb{P}_N, \mathbb{Z}) \to H^2(M, \mathbb{Z})$; par suite, $H^2(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, avec pour générateur $\sigma^* c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(1)) = c_1(L_0)$. Ceci démontre la proposition 12.

4. Fonctions inversibles et groupe de Picard de P.

On se propose dans ce paragraphe de démontrer la proposition 10. On posera $n=c_2$ et on garde les notations du paragraphe 2.

4.1. Soit $\Lambda\subset\Lambda^2 H^*$ l'espace des formes symplectiques de rang 2 sur H. C'est une variété algébrique lisse de dimension $2n-3$, localement fermé dans l'espace vectoriel $\Lambda^2 H^*$.

PROPOSITION 13. — *On a pour* $n>2$, $\mathcal{O}^*(\Lambda)=\mathbb{C}^*$ *et* $\operatorname{Pic}\Lambda=0$.

Démonstration. — Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$. Le morphisme $f\mapsto f(e_1)\wedge f(e_2)$: $L(\mathbb{C}^2, H^*)^0\mapsto\Lambda$ de l'ouvert $L(\mathbb{C}^2, H^*)^0$ des applications linéaires injectives $\mathbb{C}^2\to H^*$ à valeurs dans Λ est surjectif et a pour fibres les trajectoires sous l'action du groupe $SL(2, \mathbb{C})$. De plus, ce morphisme a des sections locales, et l'action de $SL(2, \mathbb{C})$ sur $L(\mathbb{C}^2, H^*)^0$ est libre : ainsi, la flèche ci-dessus est un fibré principal algébrique localement trivial de groupe structural $SL(2, \mathbb{C})$.

Or, le complémentaire de $L(\mathbb{C}^2, H^*)^0$ dans $L(\mathbb{C}^2, H^*)$ est de codimension $n-1>2$. Par conséquent :

$$\mathcal{O}^*(L(\mathbb{C}^2, H^*)^0)=\mathbb{C}^*,$$
$$\operatorname{Pic} L(\mathbb{C}^2, H^*)^0=0.$$

La proposition 13 résulte de cette remarque et de la proposition 5, compte tenu du fait que le groupe des caractères de $SL(2, \mathbb{C})$ est trivial.

4.2. Soit (z_0, z_1, z_2) une base de V^*. On désigne par $\tilde{P}_0$ le sous-espace de $L(V^*, S^2 H^*)$ des applications linéaires $\alpha : V^*\to S^2 H^*$ qui satisfont aux conditions suivantes :

(3) $\det\alpha(z_0)\neq 0$;

(4) le polynôme minimal de $A=\alpha(z_0)^{-1}\alpha(z_1)$ est de degré n;

(5) $\operatorname{rang}\theta(z_0, z_1, z_2)=2$.

L'espace $\tilde{P}_0$ est un sous-espace localement fermé de $L(V^*, S^2 H^*)$; en fait, comme on le verra au cours de la démonstration de la proposition qui suit, c'est une sous-variété lisse.

PROPOSITION 14. — (*a*) *le groupe* $\mathcal{O}^*(\tilde{P}_0)/\mathbb{C}^*$ *est un groupe cyclique engendré par la fonction* $\alpha\mapsto\det\alpha(z_0)$ *:*

(*b*) *on a* $\operatorname{Pic}\tilde{P}_0=0$.

Démonstration. — Soit W l'ouvert de $S^2 H^*\times S^2 H^*$ des couples (α_0, α_1) tels que α_0 soit non dégénérée, et que le polynôme minimal de $\alpha_0^{-1}\alpha_1$ soit de degré n. Si $(S^2 H^*)^0$ est l'ouvert de $S^2 H^*$ des formes quadratiques non dégénérées, il résulte de [7], prop. 37, que le complémentaire de W dans $(S^2 H^*)^0\times S^2 H^*$ est de codimension 2. Puisque le polynôme $\alpha_0\mapsto\det\alpha_0$ sur $S^2 H^*$ est irréductible, il en résulte que le groupe $\mathcal{O}^*(W)/\mathbb{C}^*$ est un groupe cyclique, engendré par la fonction $(\alpha_0, \alpha_1)\mapsto\det\alpha_0$.

Au-dessus de W, l'ouvert $\mathscr{W}\subset L(V^*, S^2 H^*)$ des α qui satisfont aux conditions (3) et (4) est un fibré vectoriel, et le morphisme $\mathscr{W}\mapsto W\times\Lambda^2 H^*$:

$$\alpha\mapsto(\alpha(z_0), \alpha(z_1), \theta(z_0, z_1, z_2))$$

est un épimorphisme de fibrés vectoriels au-dessus de W. Il en résulte que l'image réciproque $\tilde{P}_0$ de $W \times \Lambda$ par ce morphisme est un fibré localement trivial en espaces affines au-dessus de $W \times \Lambda$. On a donc $\mathcal{O}^*(\tilde{P}_0) \simeq \mathcal{O}^*(W \times \Lambda)$. D'après la proposition 13, ce dernier groupe s'identifie encore à $\mathcal{O}^*(W)$, ce qui démontre (*a*).

Soit $p : \tilde{P}_0 \to W \times \Lambda$ la projection induite par le morphisme ci-dessus. Puisque ce fibré est localement isomorphe à un fibré vectoriel, on voit que :

$$R^1 p_*(\mathcal{O}^*_{\tilde{P}_0}) = 0,$$
$$\mathcal{O}^*_{W \times \Lambda} \simeq p_*(\mathcal{O}^*_{\tilde{P}_0}).$$

De la suite spectrale de Leray pour les images directes on tire la suite exacte :

$$0 \to H^1(W \times \Lambda, p_*(\mathcal{O}^*_{\tilde{P}_0}) \to H^1(\tilde{P}_0, \mathcal{O}^*_{\tilde{P}_0}) \to H^0(W \times \Lambda, R^1 p_*(\mathcal{O}^*_{\tilde{P}_0})$$

et par conséquent l'isomorphisme $\operatorname{Pic}(W \times \Lambda) \simeq \operatorname{Pic} \tilde{P}_0$. L'espace $W \times \Lambda$ est un ouvert d'un fibré vectoriel au-dessus de Λ, par conséquent le morphisme induit par la seconde projection $W \times \Lambda \to \Lambda$:

$$\operatorname{Pic} \Lambda \to \operatorname{Pic}(W \times \Lambda) \simeq \operatorname{Pic} \tilde{P}_0$$

est surjectif. L'assertion (*b*) résulte donc de la proposition 13.

4.3. Démontrons maintenant la proposition 10. On rappelle que P_0 désigne l'ouvert de P des α tels que $\det \alpha(z_0) \neq 0$. Il résulte de [7], lemmes 45 et 46, que $P_0 \cap \tilde{P}_0$ est un ouvert de Zariski de P_0) (resp. $\tilde{P}_0$) dont le complémentaire est de dimension 2. On obtient donc les isomorphismes :

$$\mathcal{O}^*(P_0) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^*(P_0 \cap \tilde{P}_0) \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}^*(\tilde{P}_0),$$
$$\operatorname{Pic} P_0 \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic}(P_0 \cap \tilde{P}_0) \xleftarrow{\sim} \operatorname{Pic} \tilde{P}_0.$$

D'après la proposition 14, le groupe $\mathcal{O}^*(P_0)/\mathbb{C}^*$ est donc cyclique et engendré par la fonction $\alpha \mapsto \det \alpha(z_0)$, et $\operatorname{Pic} P_0 = 0$. D'après Hartshorne [6], chap. 2, prop. 6.5, il ne reste plus pour obtenir la proposition 10 qu'à vérifier le lemme suivant :

LEMME 15. — *La fonction* $\alpha \mapsto \det \alpha(z_0)$ *s'annule en au moins un point* $\alpha \in P$; *l'hypersurface* Σ_0 *de* P *définie par l'équation* $\det \alpha(z_0) = 0$ *est intègre.*

Démonstration. — Le groupe GL(V) opère sur P par la formule $(\varphi, \alpha) \mapsto \alpha \circ {}^t\varphi$ pour $\varphi \in GL(V)$, $\alpha \in P$. Si $\varphi \in GL(V)$ et $z \in V^*$, on a la formule :

$$\det(\alpha \circ {}^t\varphi)(z) = \det(\alpha({}^t\varphi(z)))$$

ce qui montre que si la fonction $\alpha \mapsto \det \alpha(z)$ s'annule sur P, il en est de même de la fonction $\alpha \mapsto \det(\alpha({}^t\varphi(z)))$. Puisque GL(V) opère transitivement sur $V^* - \{0\}$, ceci démontre la première partie du lemme.

Soit $z_1 \in V^* - \{0\}$. D'après [7], § 5.6, l'hypersurface Σ_0 définie par l'équation $\det \alpha(z_0) = 0$ est intègre dans l'ouvert P_1 de P défini par $\det \alpha(z_1) \neq 0$. Ces ouverts recouvrent P, par conséquent l'hypersurface Σ_0 est réduite. De plus, si z_0 et z_1 sont indépendants, le sous-espace de P défini par les équations :

$$\det \alpha(z_0)=0, \qquad \det \alpha(z_1)=0$$

est de codimension 2 ([7], cor. 53). Par conséquent, l'hypersurface Σ_0 est irréductible, ce qui démontre le lemme 15.

5. Fibré universel et fibré canonique sur M

5.1. Soient K un espace vectoriel de dimension c_2-2, et $\beta : V^* \to L(H^*, K)$ une application linéaire. A cette application linéaire on associe un morphisme de fibrés vectoriels :

$$b : \quad Q^* \otimes H^* \to \mathcal{O} \otimes K$$

en posant $b(z \otimes h)=\beta(z)h$ pour $z \in Q^*$, $h \in H^*$. On désigne par P′ le sous-espace de $L(V^*, S^2 H^*) \times L(V^*, L(H^*, K))$ des couples (α, β) tels que la suite de morphismes de fibrés vectoriels associés :

$$\Lambda^2 Q^* \otimes H \xrightarrow{a} Q^* \otimes H^* \xrightarrow{b} \mathcal{O} \otimes K$$

soit une monade $D^{\bullet}(\alpha, \beta)$, c'est-à-dire satisfasse aux conditions suivantes :

(6) a est injectif, b est surjectif;

(7) $$b \circ a=0.$$

L'espace P′ est une sous-variété localement fermée sur laquelle le groupe réductif $G'=(GL(H) \times GL(K))/\{\pm 1\}$ opère librement par la formule :

$$((f, g), (\alpha, \beta)) \mapsto ({}^t f^{-1} \alpha f, g \beta {}^t f)$$

pour $f \in GL(H)$, $g \in GL(K)$, $(\alpha, \beta) \in P'$. La projection $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha : P' \to P$ induit un isomorphisme :

$$P'/G' \xrightarrow{\sim} M=P/G.$$

On considère sur $\mathbb{P}_2 \times P'$ la monade universelle $\mathbb{D}^{\bullet}$:

$$\Lambda^2 Q^* \boxtimes \mathbb{H} \to Q^* \boxtimes \mathbb{H}^* \to \mathcal{O} \boxtimes \mathbb{K}$$

où $\mathbb{H}$ (resp. $\mathbb{K}$) désigne le fibré trivial de fibre H (resp. K) sur P′, et où $\boxtimes$ désigne le produit tensoriel externe : cette monade induit au-dessus du point $(\alpha, \beta) \in P'$ la monade $D^{\bullet}(\alpha, \beta)$. Le groupe $GL(H) \times GL(K)$ opère sur $\mathbb{D}^{\bullet}$, et donc sur le fibré de cohomologie $\mathbb{E}=H(\mathbb{D}^{\bullet})$. Le fibré $\det \mathbb{E}$ est en particulier un G′-fibré, isomorphe à :

$$\mathbb{P}_2 \times P' \times (\det H)^{\otimes -3} \otimes \det K^*.$$

PROPOSITION 16. — *Sur* $\mathbb{P}_2 \times \mathrm{M}$, *le fibré* $\det \mathbb{E}/\mathrm{G}'$ *est trivial.*

Démonstration. — Soit U l'ouvert de $\mathbb{P}_2^\vee \times \mathrm{P}'$ défini par les couples $(z, (\alpha, \beta)) \in \mathrm{V}^* \times \mathrm{P}'$ tels que $\det \alpha(z) \neq 0$. Il résulte du théorème de Grauert-Mülich [1] que le morphisme $\mathrm{U} \to \mathrm{P}'$ induit par la seconde projection est surjectif. Soit $\mathrm{Q}_{\mathbb{P}_2^\vee}$ le fibré quotient canonique de rang 2 de $\mathbb{P}_2^\vee \times \mathrm{V}^*$ sur $\mathbb{P}_2^\vee$. On a un morphisme au-dessus de l'ouvert U :

$$\theta : \quad \Lambda^2 \mathrm{Q}_{\mathbb{P}_2^\vee} \boxtimes \mathbb{H} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(-1) \boxtimes \mathbb{H}^*$$

défini au-dessus du point $((z), (\alpha, \beta)) \in \mathbb{P}_2^\vee \times \mathrm{P}'$ par :

$$z_1 \wedge z_2 \otimes h \mapsto z \otimes \theta(z, z_1, z_2) h$$

pour z_1 et $z_2 \in \mathrm{V}^*/(z)$ et $h \in \mathrm{H}$ (*cf.* § 2). Choisissons un élément non nul de $\Lambda^3 \mathrm{V}^*$, auquel on associe un isomorphisme $\Lambda^2 \mathrm{Q}_{\mathbb{P}_2^\vee} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(1)$. Le morphisme θ peut alors être considéré comme un morphisme symplectique : $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(1) \boxtimes \mathbb{H} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(-1) \boxtimes \mathbb{H}^*$ au-dessus de U. Soit, au-dessus de $\mathbb{P}_2^\vee \times \mathrm{P}'$, B le morphisme :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(-1) \boxtimes \mathbb{H}^* \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee} \boxtimes \mathbb{K}$$

défini par $z \otimes h \mapsto \beta(z) h$.

LEMME 17. — *Sur l'ouvert* U, *on a la suite exacte de* $\mathrm{GL}(\mathrm{H}) \times \mathrm{GL}(\mathrm{K})$*—fibrés vectoriels :*

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee} \boxtimes \mathbb{K}^* \xrightarrow{{}^t\mathrm{B}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(1) \boxtimes \mathbb{H} \xrightarrow{\theta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(-1) \boxtimes \mathbb{H}^* \xrightarrow{\mathrm{B}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee} \boxtimes \mathbb{K} \to 0.$$

Démonstration. — Pour tout couple $(z, (\alpha, \beta)) \in \mathrm{V}^* \times \mathrm{P}'$ tel que $\det \alpha(z) \neq 0$, on a les propriétés suivantes ([7], § 3.3) :

— $\beta(z)$ est surjectif, ce qui donne la surjectivité de B;

— le noyau de $\beta(z)$ est l'image de $\theta(z, z_1, z_2)$ pour toute base (z, z_1, z_2) de V^*. Ceci donne l'exactitude au niveau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(-1) \boxtimes \mathbb{H}^*$. Le reste s'obtient en transposant, compte tenu du fait que θ est symplectique.

LEMME 18. — *Le morphisme* B *est surjectif en dehors d'un sous-ensemble algébrique* Z *de codimension* $\geqq 2$ *de* $\mathbb{P}_2^\vee \times \mathrm{P}'$.

Démonstration. — On sait qu'il existe des fibrés stables de rang 2 de classes de Chern $(0, c_2)$ tels que sur toute droite $l \subset \mathbb{P}_2$ on ait :

$$\mathrm{E} \mid l \simeq \begin{cases} \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}, \\ \text{ou :} \\ \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(-1). \end{cases}$$

C'est par exemple le cas pour les fibrés de Hulsbergen, obtenus comme extension $0 \to \mathcal{O}(-1) \to \mathrm{E} \to \mathcal{I}(1) \to 0$, où $\mathcal{I}$ est l'idéal de $c_2 + 1$ points de $\mathbb{P}_2$ en position générale ([2], § 5). Pour un tel fibré, $\beta(z)$ est surjectif pour tout $z \in \mathrm{V}^* - \{0\}$.

Soit Z le fermé de $\mathbb{P}_2^\vee \times P'$ défini par les couples $(z, (\alpha, \beta))$ tels que $\beta(z)$ ne soit pas surjectif. La projection canonique $Z \to P'$ a pour image un sous-ensemble algébrique de codimension $\geqq 1$, et les fibres sont de dimension $\leqq 1$. Par conséquent $\dim Z \leqq \dim P'$, d'où le lemme 18.

Fin de la démonstration de la proposition 16. — On considère sur $\mathbb{P}_2^\vee \times P'$ le morphisme ξ défini au-dessus $((z), (\alpha, \beta))$ par θ det $\alpha(z)$:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(-c_2+1) \boxtimes \mathbb{H} \otimes \det \mathbb{H} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(-1) \boxtimes \mathbb{H}^* \otimes \det \mathbb{H}^*.$$

Il est clair ce morphisme est bien défini sur $\mathbb{P}_2^\vee \times P'$; sur l'ouvert $\mathbb{P}_2^\vee \times P' - Z$, il induit un morphisme G'-invariant :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(-c_2) \boxtimes (\det \mathbb{H})^{\otimes 3} \otimes \det \mathbb{K} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^\vee}(-c_2) \boxtimes (\det \mathbb{H})^{\otimes -3} \otimes (\det \mathbb{K})^{\otimes -1}$$

qui d'après le lemme 18 provient d'un morphisme G'-invariant sur $\mathbb{P}_2^\vee \times P'$; d'après le lemme 17, c'est un isomorphisme sur U. Ce morphisme est en fait donné par une section G'-invariante du fibré $(\det \mathbb{H})^{\otimes -6} \otimes (\det \mathbb{K})^{\otimes -2}$ sur P'; cette section est partout non nulle puisque l'application $U \to P'$ est surjective. Par conséquent le fibré $(\det \mathbb{E})^{\otimes 2}/G'$ est trivial. Ceci donne la proposition 16, puisque Pic M n'a pas de 2-torsion.

COROLLAIRE 19. — *Si c_2 est impair, il existe un et un seul fibré universel algébrique* $\mathbb{U}$ *sur* $\mathbb{P}_2 \times M$ *tel que :*

$$\det \mathbb{U} = \mathrm{pr}_2^*(L_0).$$

Dans cet énoncé, L_0 désigne le générateur de Pic M décrit dans l'introduction, ou au paragraphe 3.

Démonstration. — L'unicité est évidente, car si $\mathbb{U}'$ est un autre fibré universel, on peut écrire $\mathbb{U}' = \mathbb{U} \otimes \mathrm{pr}_2^* L$, avec L fibré de rang un sur M. Si $\mathbb{U}$ et $\mathbb{U}'$ satisfont à la condition du lemme, $L^{\otimes 2}$ sera trivial, et par suite, puisque Pic M est sans torsion, L sera aussi trivial.

Pour voir l'existence, il suffit de considérer le G'-fibré vectoriel sur $\mathbb{P}_2 \times P'$ défini par $\mathbb{E} \otimes \mathrm{pr}_2^*(\det \mathbb{H})^{-1}$; le fibré sur $\mathbb{P}_2 \times M$:

$$\mathbb{U} = \mathbb{E} \otimes \mathrm{pr}_2^*(\det \mathbb{H})^{-1}/G'$$

est un fibré vectoriel qui convient, puisque $\det \mathbb{U} = \mathrm{pr}_2^*(\det \mathbb{H})^{\otimes -2}/G'$ et donc $\det \mathbb{U} = \mathrm{pr}_2^*(L_0)$ par définition de L_0.

5.2. *Démonstration du théorème* 2. — Si $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{P}_2 \times P' \to P'$ est la seconde projection, la projection canonique $P' \to M$ induit un isomorphisme :

$$R^1 \mathrm{pr}_{2*}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{E}, \mathbb{E}))/G' \simeq T(M),$$

où $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ désigne le fibré des endomorphismes de $\mathbb{E}$ ([7], prop. 32); pour obtenir le théorème 2, il suffit de décrire le G'-fibré vectoriel sur P' det $R^1 \mathrm{pr}_{2*}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{E}, \mathbb{E}))$. Soit

$\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(\mathbb{D}^{\cdot}, \mathbb{D}^{\cdot})$ le complexe de G'-fibrés vectoriels d'homomorphismes de $\mathbb{D}^{\cdot}$ dans $\mathbb{D}^{\cdot}$, défini par :

$$\underline{\mathrm{Hom}}^q(\mathbb{D}^{\cdot}, \mathbb{D}^{\cdot}) = \bigoplus_i \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{D}^i, \mathbb{D}^{i+q})$$

et muni des différentielles évidentes. Comme dans [7], lemme 23, on a un isomorphisme canonique de G'-fibrés vectoriels :

$$\mathrm{H}^q(\mathrm{pr}_{2*}\, \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(\mathbb{D}^{\cdot}, \mathbb{D}^{\cdot})) \simeq \mathrm{R}^q\, \mathrm{pr}_{2*}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{E}, \mathbb{E})).$$

En particulier, on obtient pour $q=0$ le fibré trivial de rang un, et pour $q \neq 0$ et 1, les deux membres sont nuls. Il en résulte :

$$(\det \mathrm{R}^1\, \mathrm{pr}_{2*}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{E}, \mathbb{E})))^{-1} = \bigotimes_q (\det \mathrm{pr}_{2*}\, \underline{\mathrm{Hom}}^q(\mathbb{D}^{\cdot}, \mathbb{D}^{\cdot}))^{(-1)^q}.$$

Or, $\mathrm{pr}_{2*}\, \underline{\mathrm{Hom}}^q(\mathbb{D}^{\cdot}, \mathbb{D}^{\cdot}) = 0$, sauf pour $q=0, 1, 2$, où l'on a les isomorphismes de G'-fibrés vectoriels :

$$\mathrm{pr}_*\, \underline{\mathrm{Hom}}^0(\mathbb{D}^{\cdot}, \mathbb{D}^{\cdot}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{H}, \mathbb{H}) \oplus \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{H}^*, \mathbb{H}^*) \oplus \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}),$$

$$\mathrm{pr}_*\, \underline{\mathrm{Hom}}^1(\mathbb{D}^{\cdot}, \mathbb{D}^{\cdot}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{H}, \mathbb{H}^* \otimes \mathrm{V}) \oplus \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{H}^*, \mathbb{K} \otimes \mathrm{V}),$$

$$\mathrm{pr}_*\, \underline{\mathrm{Hom}}^2(\mathbb{D}^{\cdot}, \mathbb{D}^{\cdot}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{H}, \mathbb{K} \otimes \Lambda^2 \mathrm{V}).$$

Par suite $(\det \mathrm{R}^1\, \mathrm{pr}_{2*}\, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{E}, \mathbb{E}))^{-1} \simeq (\det \mathbb{H})^{\otimes 12}$; ceci donne le théorème, compte tenu de la description du générateur L_0 donnée au paragraphe 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. BARTH, *Some Properties of Rank-2 Vector Bundles on* $\mathbb{P}_n$ (*Math. Ann.*, vol. 226, 1977, p. 125-150).

[2] W. BARTH, *Moduli of Vector Bundles on the Projective Plane* (*Invent. math.*, vol. 42, 1977, p. 63-91).

[3] W. BARTH, et ELENCWAJG, *Concernant la cohomologie des fibrés algébriques stables sur* $\mathbb{P}_n$ ($\mathbb{C}$), *Variétés analytiques complexes*, Nice, 1977, (*Lecture Notes in Math*, n° 683, 1978, p. 1-24, Springer, Berlin.

[4] A. BOREL, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, Paris, 1969.

[5] G. ELLINGSRUD et S. A. STRØMME, *The Picard Group of the Moduli Space for Stable Rank-2 Vector Bundles on* $\mathbb{P}_2$ *with odd First Chern Class*, Preprint Series, Oslo, 1979.

[6] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Springer, Berlin, 1977.

[7] J. LE POTIER, *Fibrés stables de rang* 2 sur $\mathbb{P}_2$ ($\mathbb{C}$) (*Math. Ann.*, vol. 241, 1979, p. 217-256).

[8] M. MARUYAMA, *Stables Vector Bundles on an Algebraic Surface* (*Nagoya math. J.*, vol. 58, 1975, p. 25-68).

[9] C. S. SESHADRI, *Mumford's Conjecture for* GL (2) *and Applications* (*Algebraic Geometry*, Bombay, Colloquium, 1968-1969, p. 347-371).

[10] C. T. C. WALL, *Nets of Quadrics, and Theta-Characteristics of Singular Curves*, (*Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 81, 1977, p. 351-364).

J. LE POTIER,
Université Paris-VII,
U.E.R. de Mathématiques,
tour 45-55,
2, place Jussieu,
75251 Paris Cedex 05.

(Manuscrit reçu le 26 février 1980,
révisé le 3 décembre 1980.)