ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. APPELL

Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement hélicoïdal d'un corps solide

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 5 (1876), p. 245-274

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1876_2_5__245_0>

SUR LES

PROPRIÉTÉS DES CUBIQUES GAUCHES

ET LE

MOUVEMENT HÉLICOÏDAL D'UN CORPS SOLIDE,

PAR M. P. APPELL,

ÉLÈVE A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

1. Depuis les travaux de Möbius sur les cubiques gauches, ces courbes ont été l'objet de nombreuses recherches, dont les plus importantes sont celles de M. Chasles et de M. Schröter. M. Chasles a montré (*Journal de Liouville*, 1857) qu'il existe, par rapport aux cubiques gauches, un système de pôles et de plans polaires, de même qu'il existe, par rapport aux coniques, un système de pôles et de polaires. La démonstration des propriétés de ce système de pôles et de plans polaires fait l'objet de la première partie de notre travail. Cette démonstration nouvelle repose sur ce fait que les cubiques gauches sont des courbes unicursales et sur l'emploi d'une relation involutive entre trois séries d'éléments variables λ_1, λ_2, λ_3, définie par une équation de la forme

$$A\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + B(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) + C(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + D = 0.$$

Pour montrer l'analogie entre ces propriétés des cubiques gauches et les propriétés des pôles et polaires dans les coniques, nous indiquerons une démonstration de ces dernières propriétés, fondée également sur ce fait que les coniques sont des courbes unicursales et sur l'emploi de l'involution du deuxième ordre entre deux séries d'éléments λ_1, λ_2, définie par une équation de la forme

$$A\lambda_1\lambda_2 + B(\lambda_1 + \lambda_2) + C = 0.$$

La comparaison entre ces deux démonstrations nous fera acquérir la notion d'une relation segmentaire entre deux groupes de trois points en ligne droite, qui semble devoir jouer, dans la géométrie des cubiques gauches, un rôle analogue à celui que joue dans la géométrie des coniques la relation segmentaire appelée *division harmonique*, entre deux couples de points en ligne droite.

2. Le système des pôles et des plans polaires, par rapport à une cubique gauche, a des propriétés identiques aux propriétés du système des plans et de leurs foyers, dans le déplacement d'un corps solide entièrement libre, propriétés qui ont été établies par M. Chasles (*Comptes rendus*, 1843). Cette identité de propriétés conduit à deux problèmes : le premier consiste à déterminer les cubiques gauches correspondant à un mouvement hélicoïdal donné, le second à déterminer le mouvement hélicoïdal correspondant à une cubique gauche donnée. La résolution de ces deux problèmes fait l'objet principal de la deuxième Partie de notre travail. Nous indiquerons de plus, dans cette deuxième Partie, quelques propriétés des cubiques gauches qui nous semblent nouvelles.

PREMIÈRE PARTIE.

3. Comme nous l'avons dit, la démonstration des propriétés indiquées repose sur l'emploi d'une relation involutive du troisième ordre entre trois séries d'éléments, relation définie par une équation de la forme

$$(1) \qquad A\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + B(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) + C(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + D = 0.$$

Nous montrerons d'abord comment on peut déduire les propriétés des pôles et des polaires dans les coniques de la considération de l'involution du second ordre entre deux séries d'éléments, définie par une équation de la forme

$$(2) \qquad A\lambda_1\lambda_2 + B(\lambda_1 + \lambda_2) + C = 0$$

et nous suivrons ensuite pour les cubiques gauches une marche tout à fait analogue.

Donnons d'abord une interprétation géométrique de ces deux relations (1) et (2). Considérons une droite Ox et supposons que les paramètres λ_1 et λ_2 de la relation (2) représentent les abscisses de deux points M_1, M_2 de la droite; sur la droite Ox il y a alors deux points doubles M' et M'', dont les abscisses λ' et λ'' sont les racines de l'équation

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0,$$

d'où

$$\lambda' + \lambda'' = -\frac{2B}{A}, \quad \lambda'\lambda'' = \frac{C}{A}.$$

La relation (2) peut s'écrire en remplaçant $\frac{B}{A}$ et $\frac{C}{A}$ par leurs valeurs

$$2\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda' + \lambda'') + 2\lambda'\lambda'' = 0,$$

ou

$$(\lambda_1 - \lambda')(\lambda_2 - \lambda'') + (\lambda_1 - \lambda'')(\lambda_2 - \lambda') = 0,$$

ou encore

$$M_1M'.M_2M'' + M_1M''.M_2M' = 0,$$

relation qui montre que les deux points M_1 et M_2 sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points M', M''. Cette signification géométrique de la relation (2) est bien connue; nous ne l'avons établie ici que pour montrer d'une manière analogue la signification géométrique de la relation (1). Considérons, en effet, une droite Ox et supposons que λ_1, λ_2, λ_3 représentent les abscisses de trois points M_1, M_2, M_3 de la droite. Sur la droite Ox il y a alors trois points triples, M', M'', M''', dont les abscisses λ', λ'', λ''' sont les racines de l'équation

$$A\lambda^3 + 3B\lambda^2 + 3C\lambda + D = 0$$

d'où

$$\lambda' + \lambda'' + \lambda''' = -\frac{3B}{A}, \quad \lambda'\lambda'' + \lambda''\lambda''' + \lambda'''\lambda' = \frac{3C}{A}, \quad \lambda'\lambda''\lambda''' = -\frac{D}{A}.$$

La relation (1) peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} 3\lambda_1\lambda_2\lambda_3 &- (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)(\lambda' + \lambda'' + \lambda''') \\ &+ (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\lambda'\lambda'' + \lambda''\lambda''' + \lambda'''\lambda') - 3\lambda'\lambda''\lambda''' = 0, \end{aligned}$$

ou bien

$$(\lambda_1 - \lambda')(\lambda_2 - \lambda'')(\lambda_3 - \lambda''') + (\lambda_1 - \lambda'')(\lambda_2 - \lambda''')(\lambda_3 - \lambda') \\ + (\lambda_1 - \lambda''')(\lambda_2 - \lambda')(\lambda_3 - \lambda'') = 0$$

et enfin

$$(3) \quad M_1M'.M_2M''.M_3M''' + M_1M''.M_2M'''.M_3M' + M_1M'''.M_2M'.M_3M'' = 0,$$

ce qui donne la signification géométrique de la relation (1).

Il semble que cette relation géométrique entre deux groupes de trois points doive jouer dans la géométrie des cubiques gauches le même rôle que la division harmonique dans la géométrie des coniques. Remarquons la forme particulière que prend la relation (3) quand deux des points M_1, M_2, M_3 coïncident. Supposons que M_3 coïncide avec M_2 : la relation (3) s'écrit alors

$$\frac{M_1M'}{M_2M'} + \frac{M_1M''}{M_2M''} + \frac{M_1M'''}{M_2M'''} = 0;$$

mais

$$M_1M' = M_1M_2 + M_2M',$$
$$M_1M'' = M_1M_2 + M_2M'',$$
$$M_1M''' = M_1M_2 + M_2M'''.$$

En substituant à la place de M_1M', M_1M'', M_1M''' ces valeurs, on voit que l'on a

$$\frac{3}{M_2M_1} = \frac{1}{M_2M'} + \frac{1}{M_2M''} + \frac{1}{M_2M'''}.$$

Le point M_1 est donc alors le centre des moyennes harmoniques du point M_2 par rapport aux points triples M', M'', M'''.

Si trois points variables d'une droite M_1, M_2, M_3 vérifient la relation (1), ou, ce qui revient au même, la relation (3), nous dirons que ces trois points forment une involution du troisième ordre ayant les points M', M'', M''' pour points triples. Dans une pareille division, on peut choisir arbitrairement deux des points, M_2, M_3, par exemple; le troisième point M_1 est alors déterminé; il y a de plus réciprocité entre les trois points homologues M_1, M_2, M_3. Nous verrons plus loin quelques autres propriétés de cette involution du troisième ordre.

4. Voyons maintenant comment on pourrait établir la théorie des pôles et des polaires dans les coniques. Une courbe du second ordre est une courbe unicursale; en d'autres termes, on peut exprimer les coordonnées d'un point de la courbe en fonction d'un paramètre par des équations de la forme

$$x=\frac{a\lambda^2+b\lambda+c}{\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma},\quad y=\frac{a'\lambda^2+b'\lambda+c'}{\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma}.$$

A chaque valeur de λ correspond un seul point de la courbe, et à chaque point de la courbe correspond une seule valeur de λ. Nous dirons que deux séries de points M_1, M_2 de la conique sont en involution si à un point M_1 de la première série correspond un seul point M_2 de la deuxième, et s'il y a réciprocité. Soient λ_1 et λ_2 les valeurs du paramètre correspondant aux points M_1, M_2; il y a évidemment entre ces deux paramètres une équation de la forme

$$A\lambda_1\lambda_2+B(\lambda_1+\lambda_2)+C=0. \tag{2}$$

Il est clair qu'en joignant les points homologues M_1, M_2 de l'involution à un point fixe O de la conique, on forme autour de ce point deux faisceaux de droites OM_1, OM_2 en involution. Une pareille involution de points sur une conique est déterminée par deux couples de points homologues, car la relation (2) ne contient que deux constantes arbitraires. Nous dirons de même que deux séries de droites tangentes à une conique forment une involution, quand à une tangente de la première série correspond une seule tangente de la deuxième, et qu'il y a réciprocité. Les points d'intersection des tangentes homologues avec une tangente fixe de la conique forment sur cette droite une involution. Une involution de tangentes est déterminée par deux couples de tangentes homologues. Il est évident que les tangentes à une conique aux points homologues de deux séries de points en involution sur la conique sont des tangentes en involution, et, réciproquement, que les points de contact des tangentes homologues de deux séries de tangentes en involution sont des points en involution.

Les droites passant par un point fixe coupent une conique en deux séries de points en involution; et, comme une involution est déterminée par deux couples de points homologues, on voit que les droites joignant les points homologues de deux divisions en involution sur une conique passent par un point fixe. De même, les tangentes menées à une conique des différents points d'une droite fixe forment deux séries de tangentes en involution, et, réciproquement, les points d'intersection des droites homologues de deux séries de tangentes en involution sont sur une droite fixe.

De ce qui précède il résulte immédiatement que, si d'un point fixe P on mène des sécantes à une conique, et si l'on mène les tangentes aux deux points d'intersection avec la conique de chacune de ces sécantes, le lieu du point d'intersection de ces tangentes sera une droite, la droite des contacts des deux tangentes menées du point P à la conique; et, réciproquement, si de chaque point d'une droite fixe D on mène les deux tangentes à une conique, les droites joignant les deux points de contact passent par un point fixe, intersection des tangentes à la courbe aux points où elle est rencontrée par la droite D. Ces deux théorèmes renferment toute la théorie des pôles et des polaires. Nous allons établir pour les cubiques gauches deux théorèmes analogues.

5. Une cubique gauche est, comme on sait, l'intersection de deux surfaces du second ordre ayant une génératrice commune. Une cubique gauche est une courbe unicursale, c'est-à-dire que les coordonnées d'un point de cette courbe peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre.

En effet, prenons deux points fixes A et B sur la courbe; un plan passant par la droite AB coupera la courbe en un seul point variable dont les coordonnées seront, par suite, des fonctions rationnelles du paramètre dont dépend la position du plan. Ces fonctions rationnelles sont évidemment du troisième degré :

$$x = \frac{a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d}{\alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta},$$
$$y = \frac{a'\lambda^3 + b'\lambda^2 + c'\lambda + d'}{\alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta},$$
$$z = \frac{a''\lambda^3 + b''\lambda^2 + c''\lambda + d''}{\alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta}.$$

D'ailleurs toute courbe définie par des équations de cette forme est une cubique gauche; en effet, il est aisé de s'assurer qu'en joignant un point fixe de cette courbe à tous les points de la courbe on forme un cône du second ordre.

Nous dirons que trois points variables M_1, M_2, M_3 de la cubique forment une involution du troisième ordre si, deux d'entre eux étant choisis arbitrairement, M_1 et M_2 par exemple, le troisième M_3 est parfaitement déterminé, et s'il y a réciprocité entre les trois points M_1, M_2, M_3. Comme à un point M de la cubique il ne correspond qu'une valeur du paramètre λ, et qu'à une valeur de ce paramètre il ne correspond qu'un point de la courbe, on voit que les trois paramètres λ_1, λ_2, λ_3, correspondant à trois points M_1, M_2, M_3 en involution, sont liés par une relation symétrique du premier degré par rapport à chacun d'eux. Cette relation est de la forme

$$(1) \qquad A\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + B(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) + C(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + D = 0.$$

Dans cette involution de trois points M_1, M_2, M_3 sur une cubique, il existe trois points triples, c'est-à-dire trois points pouvant chacun être considérés comme trois points homologues confondus. En effet, si les trois points M_1, M_2, M_3 sont confondus avec le point M, on a

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda :$$

donc

$$A\lambda^3 + 3B\lambda^2 + 3C\lambda + D = 0.$$

Les trois racines λ', λ'', λ''' de cette équation donneront les trois points triples M', M'', M'''.

Il est essentiel de faire remarquer que les points triples sont trois points homologues de l'involution. On a, en effet,

$$\lambda'\lambda''\lambda''' = -\frac{D}{A}, \quad \lambda'\lambda'' + \lambda''\lambda''' + \lambda'''\lambda' = \frac{3C}{A}, \quad \lambda' + \lambda'' + \lambda''' = -\frac{3B}{A};$$

d'où il résulte que l'on a aussi

$$A\lambda'\lambda''\lambda''' + B(\lambda'\lambda'' + \lambda''\lambda''' + \lambda'''\lambda') + C(\lambda' + \lambda'' + \lambda''') + D = 0.$$

Remarquons aussi qu'il existe deux points N_1 et N_2 sur la courbe dont l'homologue N_3 est indéterminée. Ce sont les deux points dont les paramètres μ_1 et μ_2 vérifient les deux équations

$$A\mu_1\mu_2 + B(\mu_1 + \mu_2) + C = 0,$$
$$B\mu_1\mu_2 + C(\mu_1 + \mu_2) + D = 0$$

ou l'équation unique

$$\mu^2(AC - B^2) + \mu(AD - BC) + BD - C^2 = 0.$$

On voit que, si les deux valeurs μ_1 et μ_2 sont imaginaires, les trois valeurs λ', λ'', λ''' correspondant aux points triples sont réelles. Si, au contraire, μ_1 et μ_2 sont réels, une seule des valeurs λ', λ'', λ''' est réelle.

6. Étant donnée sur la cubique une involution de trois points M_1, M_2, M_3, considérons une corde D de la cubique, c'est-à-dire une droite s'appuyant en deux points sur la courbe. Les plans (DM_1), (DM_2), (DM_3) déterminés par la droite D et les trois points variables M_1, M_2, M_3 forment une involution du troisième ordre, ce qui signifie qu'ils déterminent sur une transversale quelconque des points m_1, m_2, m_3 formant sur cette transversale une involution du troisième ordre comme nous l'avons définie.

Soient M', M'', M''' les points triples de l'involution sur la cubique; les trois plans (DM'), (DM''), (DM''') coupent la transversale considérée en trois points m', m'', m''', qui sont les points triples de l'involution formée sur cette droite par les points m_1, m_2, m_3. On a donc la relation suivante :

$$m_1m'.m_2m''.m_3m''' + m_1m''.m_2m'''.m_3m' + m_1m'''.m_2m'.m_3m'' = 0.$$

On déduit de là la relation suivante entre les dièdres formés par les trois plans variables (DM_1), (DM_2), (DM_3) et les trois plans fixes (DM') (DM''), (DM''') :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin M_1M' \sin M_2M'' \sin M_3M''' + \sin M_1M'' \sin M_2M''' \sin M_3M' \\ &\qquad + \sin M_1M''' \sin M_2M' \sin M_3M'' = 0, \end{aligned}\right.$$

$\sin M_1M'$ désignant le sinus du dièdre des plans (DM_1), (DM'),... et ainsi des autres.

Cela posé, remarquons que les trois points d'intersection M_1, M_2, M_3 d'une cubique avec un plan variable passant par un point fixe P forment sur la cubique une involution du troisième ordre. En effet, deux des points M_1 et M_2 étant choisis arbitrairement sur la courbe, le plan (DM_1M_2) coupe la cubique en un troisième point M_3 parfaitement déterminé, et il y a réciprocité entre les points M_1, M_2, M_3. On pourrait aussi vérifier que, en prenant l'équation d'un plan passant par un point fixe et cherchant les trois valeurs du paramètre correspondant aux trois points d'intersection de ce plan avec la cubique, on a entre ces valeurs une relation de la forme indiquée (1).

Un point triple d'une pareille involution est évidemment le point de contact d'un plan osculateur à la courbe mené par le point donné. Comme il y a trois points triples et que ces points triples sont trois points homologues de l'involution, on peut mener par le point P trois plans osculateurs à la courbe et les trois points de contact sont sur un plan passant par le point P. Voyons aussi quels sont les deux points N_1 et N_2 de cette involution dont l'homologue est indéterminé. Deux points N_1, N_2 étant choisis sur la courbe, leur homologue N_3 est indéterminé en même temps que le plan PN_1N_2. Or ce plan n'est indéterminé que si les trois points P, N_1, N_2 sont en ligne droite; donc, par un point P on peut toujours mener une droite PN_1N_2 s'appuyant en deux points N_1 et N_2, réels ou imaginaires, sur la courbe. Il résulte de plus, de la remarque faite à la fin du n° 5, que, si les deux points N_1 et N_2 sont imaginaires, les trois points de contact M', M'', M''' des plans osculateurs menés à la cubique par le point P sont réels, et que, si les deux points N_1 et N_2 sont réels, un seul des trois points M', M'', M''' est réel.

Réciproquement, étant donnée une division en involution sur une cubique les plans déterminés par trois points homologues M_1, M_2, M_3, passent par un point fixe P. Cela résulte de ce que la relation involutive (1) ne contient que trois constantes arbitraires, de sorte que la division est déterminée par trois ternes de points homologues. Alors, étant donnés trois ternes de points homologues et le point P d'intersection de leurs plans, l'involution qu'ils déterminent coïncide forcément avec celle que l'on obtient en coupant la courbe par des plans menés par le point P.

7. Nous dirons aussi que trois plans osculateurs variables p_1, p_2, p_3 d'une cubique gauche sont en involution si, deux d'entre eux étant choisis arbitrairement, p_1 et p_2 par exemple, le troisième p_3 est déterminé, et s'il y a réciprocité entre les trois plans p_1, p_2, p_3. Il y a alors entre les paramètres qui déterminent ces plans, c'est-à-dire entre les paramètres de leurs points de contact, une relation de la forme (1). Cela

revient à dire que les points de contact de trois plans osculateurs variables en involution sont trois points formant une involution, et que les plans osculateurs en trois points variables en involution sont des plans formant une involution, ce qui est évident. Dans une pareille involution de plans il y a trois plans triples p', p'', p''' qui sont en même temps trois plans homologues de l'involution. Il y a aussi deux plans osculateurs dont l'homologue est indéterminé.

Considérons une droite fixe D, intersection de deux plans osculateurs fixes de la cubique q_1, q_2. D'un point quelconque M de cette droite on ne peut mener qu'un plan p osculateur à la cubique, différent des plans fixes q_1 et q_2. Donc trois plans homologues, p_1, p_2, p_3 de l'involution coupent la droite D en trois points variables, M_1, M_2, M_3 formant sur cette droite une involution du troisième ordre. Les points triples de cette involution sont les points M′, M″, M‴, où la droite D est coupée par les plans triples p', p'', p'''. On a donc sur la droite D la relation segmentaire (3).

Les plans osculateurs menés à la cubique d'un point variable d'un plan fixe P sont trois plans en involution. En effet, deux plans osculateurs p_1 et p_2 étant choisis arbitrairement, leur droite d'intersection coupe le plan P en un point d'où l'on ne peut mesurer qu'un troisième plan p_3, osculateur à la cubique. De plus, il y a réciprocité entre les plans p_1, p_2, p_3. Les plans triples d'une pareille involution sont les plans osculateurs à la cubique aux trois points où elle est rencontrée par le plan P. Ces trois plans osculateurs se coupent en un point du plan P, car les plans triples sont trois plans homologues. Les deux plans dont l'homologue est indéterminé sont deux plans osculateurs, tels que leur droite d'intersection soit située dans le plan P; donc, étant donné un plan P, il y a toujours deux plans osculateurs se coupant suivant une droite du plan. Ces deux plans osculateurs sont réels si le plan P coupe la courbe en un seul point réel; imaginaires si le plan P coupe la courbe en trois points réels.

Étant donnés des plans osculateurs d'une cubique en involution, le lieu des points d'intersection de trois plans homologues est un plan. Cela résulte de ce qu'il suffit de trois ternes de plans homologues pour déterminer l'involution. Alors, étant donnés trois ternes de plans homologues et le plan P passant par leurs trois points d'intersection, l'involution que déterminent ces trois ternes de plans coïncide avec celle que l'on obtient en menant les plans osculateurs à la cubique des différents points du plan P.

8. Nous appelons *plan polaire* p d'un point P le plan passant par les points de contact des trois plans osculateurs menés à la courbe par le point P. D'après ce qui précède, le plan polaire p d'un point P passe par ce point. Nous appelons de même *pôle d'un plan* p le point de concours P des plans osculateurs à la cubique, aux trois points où elle est rencontrée par le plan p. Le pôle d'un plan est sur ce plan. Il résulte des théorèmes précédemment démontrés que, si un plan variable passe par un point fixe P, son pôle décrit le plan polaire p du point P; et que, si un point variable décrit un plan fixe p, son plan polaire passe par un point fixe P, pôle du plan p. Le plan polaire d'un point de la cubique est le plan osculateur en ce point, et le pôle d'un plan osculateur est le point de contact.

Soit une droite D, intersection de deux plans p et p'; soit Δ la droite joignant les pôles P et P' de ces plans. Si nous prenons un point M quelconque sur la droite D, comme ce point se trouve à la fois dans les deux plans p et p', son plan polaire passera à la fois par les pôles P et P' de ces plans, il passera donc par la droite Δ. Si, au contraire, nous prenons un plan quelconque passant par Δ, ce plan, passant à la fois par les pôles P et P' des deux plans p et p', aura son pôle sur l'intersection de ces plans, c'est-à-dire sur la droite D. Inversement, le plan polaire d'un point quelconque de Δ passe par D et le pôle d'un plan quelconque passant par D se trouve sur Δ. Les deux droites D et Δ forment un couple de droites conjuguées par rapport à la cubique. Par exemple, une droite joignant deux points de la courbe et la droite intersection des deux plans osculateurs en ces points forment un couple de droites conjuguées.

Il est évident que, si une droite décrit un plan, sa conjuguée passe par le pôle du plan; et, réciproquement, si une droite passe par un point fixe, sa conjuguée est située dans le plan polaire du point.

9. Cherchons le lieu des pôles des plans parallèles à un plan fixe. De pareils plans peuvent être considérés comme passant par une même droite éloignée indéfiniment; le lieu de leurs pôles est donc une droite.

Appelons cette droite le *diamètre conjugué* de la direction commune des plans parallèles. Tous les diamètres sont parallèles. Pour le démontrer, il suffit de faire voir que, quelle que soit la manière dont un plan s'éloigne indéfiniment, le pôle du plan s'éloigne à l'infini, toujours dans la même direction. Le pôle d'un plan est le point d'intersection des plans osculateurs aux points où le plan coupe la cubique. Quelle que soit la manière dont un plan s'éloigne à l'infini, les plans osculateurs aux points où il coupe la cubique tendent vers trois plans limites qui sont les plans osculateurs à la cubique, aux points à l'infini de cette courbe. Ces trois plans osculateurs sont parallèles à une même direction, car le pôle d'un plan éloigné indéfiniment est à l'infini, et cette direction est celle suivant laquelle le pôle du plan considéré est allé à l'infini. Elle est donc indépendante de la manière dont le plan s'est éloigné indéfiniment. Par chaque point de l'espace il passe un diamètre conjugué du plan qui a son pôle en ce point.

Parmi tous les diamètres d'une cubique, il en est un seul qui est perpendiculaire à la direction de son plan conjugué : ce diamètre est l'axe de la cubique. Nous arrivons ainsi à ce résultat important qu'une cubique possède un axe. Nous verrons plus loin suivant quelles lois simples les éléments de la courbe sont distribués autour de cet axe.

10. Il peut arriver qu'une droite soit à elle-même sa conjuguée, c'est-à-dire qu'une droite D coïncide avec sa conjuguée Δ. Cherchons les propriétés de ces droites. Pour qu'une droite soit à elle-même sa conjuguée, il suffit que le pôle d'un plan p passant par la droite soit sur la droite. En effet, menons par la droite un autre plan quelconque; ce plan passant par le pôle du plan p aura son pôle dans ce plan, mais il contient son pôle; ce pôle ne peut donc être situé que sur la droite donnée, intersection du plan p et du plan mené par la droite. La droite est donc bien alors le lieu des pôles des plans qui la contiennent. Il résulte de ce qui précède que l'on peut dire aussi : pour qu'une droite soit à elle-même sa conjuguée, il suffit que le plan polaire d'un point de la droite passe par la droite. L'une quelconque de ces deux conditions est évidemment nécessaire.

Par chaque point de l'espace il passe donc une infinité de droites qui sont à elles-mêmes leurs conjuguées; toutes ces droites sont dans le plan polaire du point. Dans chaque plan de l'espace il se trouve une infinité de droites conjuguées d'elles-mêmes : ces droites passent toutes par le pôle du plan.

Une droite qui rencontre deux droites conjuguées D et Δ est à elle-même sa conjuguée. En effet, le pôle du plan déterminé par la droite donnée et par la droite D, par exemple, est à l'intersection de ce plan avec la droite Δ, c'est-à-dire sur la droite donnée, ce qui suffit pour que celle-ci soit à elle-même sa conjuguée. Réciproquement, si une droite est conjuguée d'elle-même, et si elle rencontre une droite D, elle rencontre sa conjuguée Δ. En effet, le plan déterminé par la droite donnée et par la droite D a son pôle à la fois sur la droite donnée et sur Δ; donc ces deux droites se rencontrent. Il résulte de là que deux droites quelconques D, D' et leurs conjuguées Δ, Δ' sont quatre génératrices d'un même hyperboloïde. En effet, considérons l'hyperboloïde défini sur les trois droites D, D', Δ. Une génératrice de cette surface rencontrant les deux droites D et Δ est à elle-même sa conjuguée; elle rencontre aussi D', et, comme elle est à elle-même sa conjuguée, elle rencontre Δ' conjuguée de D'. La droite Δ' est donc sur l'hyperboloïde.

Si une droite rencontre l'axe principal d'une cubique et lui est perpendiculaire, elle est à elle-même sa conjuguée. En effet, menons par une pareille droite un plan perpendiculaire à l'axe principal; le pôle de ce plan sera à l'intersection de ce plan avec l'axe, c'est-à-dire sur la droite considérée, ce qui suffit, comme on l'a vu, pour que celle-ci soit conjuguée. Il résulte de là que le plan polaire d'un point contient la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe. En particulier, le plan osculateur en un point d'une cubique gauche contient la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe de la courbe. Comme autre conséquence du théorème précédent, remarquons qu'un plan perpendiculaire à l'axe rencontre deux droites conjuguées D et Δ et l'axe lui-même en trois points en ligne droite. En effet, la droite joignant le point d'intersection du plan avec l'axe au point d'intersection avec la droite D est à elle-même sa conjuguée; elle rencontre donc Δ.

Cette conséquence peut encore s'énoncer de la manière suivante. Par deux droites conjuguées par rapport à une cubique D et Δ et l'axe de la courbe, on peut faire passer un paraboloïde dont les génératrices sont perpendiculaires à l'axe. Mais, dans un paraboloïde, trois génératrices d'un même système sont parallèles à un même plan; d'où il résulte que la perpendiculaire commune entre la droite D et l'axe est perpendiculaire à la droite Δ; d'ailleurs cette droite rencontre Δ. Donc la perpendiculaire commune à deux droites conjuguées rencontre l'axe et lui est perpendiculaire.

11. Cinq droites choisies arbitrairement peuvent toujours être considérées comme cinq droites conjuguées d'elles-mêmes par rapport à une certaine cubique gauche. En effet, nous verrons plus loin que l'équation du plan polaire d'un point par rapport à une cubique gauche contient cinq constantes arbitraires. En exprimant que cinq droites sont conjuguées d'elles-mêmes, on a cinq équations de condition qui déterminent ces cinq constantes. Les équations étant du premier degré, le système des pôles et des polaires est entièrement déterminé quand on connaît cinq droites conjuguées d'elles-mêmes.

Voyons comment on pourra construire géométriquement le pôle d'un plan, ou le plan polaire d'un point. Si, parmi les cinq droites données, nous en choisissons quatre, les deux droites D_1 et Δ_1, qui rencontrent ces quatre droites, sont deux droites conjuguées par rapport à la cubique. Nous savons en effet que, si une droite rencontre une droite conjuguée d'elle-même, sa conjuguée la rencontre aussi; dans le cas présent, la droite D_1 rencontre quatre droites conjuguées d'elles-mêmes : sa conjuguée les rencontre donc aussi; elle coïncide donc avec Δ_1. Si nous associons d'une autre manière quatre des cinq droites données, nous obtenons deux nouvelles droites conjuguées D_2 et Δ_2. Pour avoir alors le plan polaire d'un point P, il suffit de mener par ce point deux droites, l'une rencontrant D_1 et Δ_1, l'autre D_2 et Δ_2. Le plan de ces deux droites est le plan polaire du point P.

Pour avoir le pôle d'un plan p, il suffit de mener deux droites de ce plan rencontrant, l'une D_1 et Δ_1, l'autre D_2 et Δ_2; ces deux droites se coupent en un point qui est le pôle du plan p. Dû moment que l'on sait construire le plan polaire d'un point donné et le pôle d'un plan donné, on sait construire la conjuguée d'une droite donnée, ainsi que les droites conjuguées d'elles-mêmes.

Voyons enfin comment on déterminera l'axe de la cubique. Pour cela, considérons deux couples de droites conjuguées D_1 et Δ_1, D_2 et Δ_2.

La perpendiculaire commune d_1 à D_1 et Δ_1 rencontre l'axe et lui est perpendiculaire; de même la perpendiculaire commune d_2 à D_2 et Δ_2 rencontre normalement l'axe : cet axe est donc la perpendiculaire commune à d_1 et d_2.

12. Cherchons maintenant la forme de l'équation du plan polaire d'un point. Soient x, y, z les coordonnées courantes; x_1, y_1, z_1 les coordonnées du pôle; l'équation cherchée doit être linéaire en x_1, y_1, z_1, car, si l'on pose $x = a$, $y = b$, $z = c$, on doit avoir pour le lieu du point $(x_1 y_1 z_1)$ un plan, le plan polaire du point (abc). L'équation la plus générale linéaire en xyz, $x_1 y_1 z_1$ est

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}x_1 + \mathrm{B}y_1 + \mathrm{C}z_1 + \mathrm{D})\,x + (\mathrm{A}'x_1 + \mathrm{B}'y_1 + \mathrm{C}'z_1 + \mathrm{D}'y)\\ + (\mathrm{A}''x_1 + \mathrm{B}''y_1 + \mathrm{C}''z_1 + \mathrm{D}'')\,z + \mathrm{A}'''x_1 + \mathrm{B}'''y_1 + \mathrm{C}'''z_1 + \mathrm{D}''' = 0.\end{aligned}$$

Mais, comme le plan polaire d'un point contient ce point, cette équation doit être vérifiée par

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1;$$

il faut donc que l'on ait

$$\begin{gathered}\mathrm{A} = 0, \quad \mathrm{B}' = 0, \quad \mathrm{C}'' = 0, \quad \mathrm{D}''' = 0,\\ \mathrm{B} + \mathrm{A}' = 0, \quad \mathrm{C} + \mathrm{A}'' = 0, \quad \mathrm{C}' + \mathrm{B}'' = 0,\\ \mathrm{D} + \mathrm{A}''' = 0, \quad \mathrm{D}' + \mathrm{B}''' = 0, \quad \mathrm{D}'' + \mathrm{C}''' = 0.\end{gathered}$$

Posons

$$\begin{gathered}-\mathrm{B} = \mathrm{A}' = \gamma, \quad \mathrm{C} = -\mathrm{A}'' = \beta, \quad -\mathrm{C}' = \mathrm{B}'' = \alpha,\\ \mathrm{D} = -\mathrm{A}''' = a, \quad \mathrm{D}' = -\mathrm{B}''' = b, \quad \mathrm{D}'' = -\mathrm{C}''' = c;\end{gathered}$$

l'équation est alors

$$(\beta z_1 - \gamma y_1 + a)x + (\gamma x_1 - \alpha z_1 + b)y + (\alpha y_1 - \beta z_1 + c)z - a x_1 - b y_1 - c z_1 = 0,$$

ou bien

$$(\beta z_1 - \gamma y_1 + a)(x - x_1) + (\gamma x_1 - \alpha z_1 + b)(y - y_1) + (\alpha y_1 - \beta z_1 + c)(z - z_1) = 0.$$

Comme le lieu des pôles des plans passant par un point fixe est le plan polaire du point, il faut que l'équation soit symétrique en xyz, $x_1 y_1 z_1$, ce qui a lieu dans l'équation précédente. On peut, en effet, la mettre sous la forme suivante, où la symétrie est en évidence :

$$\alpha(zy_1-yz_1)+\beta(xz_1-zx_1)+\gamma(yx_1-xy_1)+a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0.$$

Voyons ce que devient cette équation si l'on prend pour axe des z un diamètre de la cubique, et pour plan des xy le plan conjugué de ce diamètre. Il faut, dans ce cas, que l'équation du plan polaire d'un point de l'axe des z se réduise à $z=z_1$. Or, en faisant dans l'équation $x_1=y_1=0$, elle devient

$$\beta z_1 x-\alpha z_1 y+ax+by+c(z-z_1)=0.$$

Pour que cette équation se réduise à $z=z_1$, il faut

$$\beta=\alpha=a=b=0.$$

L'équation du plan polaire du point $(x_1 y_1 z_1)$ devient alors

$$xy_1-yx_1-k(z-z_1)=0,$$

en posant

$$k=+\frac{c}{\gamma}.$$

Supposons, en particulier, que l'on ait pris pour axe des z l'axe de la cubique. Les coordonnées sont alors rectangulaires. Soit

$$xy_1-yx_1-k(z-z_1)=0$$

l'équation du plan polaire du point $(x_1 y_1 z_1)$. La forme même de cette équation nous permet de faire une remarque très-importante. Cette équation, en effet, ne change pas si l'on transporte l'origine des coordonnées en un autre point de l'axe Oz, car il n'y entre que la différence $(z-z_1)$. Elle ne change pas non plus si l'on fait tourner le système des axes coordonnés autour de Oz, car alors z et z_1 ne changent pas, et la différence xy_1-yx_1, que l'on peut considérer comme le moment d'un certaine force par rapport à Oz, reste invariable. Donc le système des pôles et des plans polaires par rapport à une cubique se superpose à lui-même si on le fait tourner autour de l'axe de la cubique ou glisser le long de cet axe; ou bien, en d'autres termes, le système des pôles et des plans polaires par rapport à une cubique reste le même si l'on fait tourner la cubique autour de l'axe et si on la transporte parallèlement à cet axe.

13. Il résulte de là que, pour étudier la position des plans polaires des différents points de l'espace, il suffit de voir comment varient les plans polaires des différents points d'une perpendiculaire à l'axe, perpendiculaire que nous pouvons toujours supposer être l'axe des x. Cherchons l'équation du plan polaire d'un point de l'axe des x ayant pour coordonnées

$$y_1 = 0, \quad z_1 = 0, \quad x_1 = x_0.$$

Cette équation est

$$yx_0 + kz = 0.$$

Elle montre que le plan polaire passe par l'axe Ox, ce que nous savions déjà, et que l'axe de ce plan fait avec l'axe de la cubique Oz un angle ε donné par la relation

$$\operatorname{tang}\varepsilon = -\frac{x_0}{k}.$$

La tangente de l'angle que fait l'axe du plan polaire d'un point avec l'axe de la cubique est donc proportionnelle à la distance de ce point à l'axe. En particulier, la tangente de l'axe du plan osculateur à la cubique en un point avec l'axe de la courbe est proportionnelle à la distance de ce point à l'axe.

D'après ce que nous avons vu, si l'on prend pour axes de coordonnées un diamètre et son plan conjugué, l'équation du plan polaire conserve la forme

$$xy_1 - yx_1 - h'(z - z_1) = 0.$$

Voyons quelle relation il y a entre ce paramètre k' et le paramètre k, qui se rapporte à l'axe de la cubique. Pour cela transportons les axes parallèlement à eux-mêmes au point

$$x = x_0, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

puis prenons pour nouveau plan des xy le plan ayant son pôle en ce point, ce qui revient simplement à faire tourner l'axe des y dans le nouveau plan des zy d'un angle ε. Les formules de transformation sont

$$x = x' + x_0, \quad z = z' + y' \sin\varepsilon, \quad y = y' \cos\varepsilon.$$

En substituant dans l'équation

$$xy_1 - yx_1 - k(z - z_1) = 0,$$

nous avons

$$(x'y'_1 - y'x'_1)\cos\varepsilon + x_0(y'_1 - y')\cos\varepsilon - k(z' - z'_1) + h(y'_1 - y)\sin\varepsilon = 0.$$

Mais $\tang\varepsilon = -\frac{x_0}{k}$; le terme $(y'_1 - y')$ disparaît, et il reste l'équation

$$x'y'_1 - y'x'_1 - \frac{k}{\cos\varepsilon}(z' - z'_1) = 0.$$

On voit donc que l'on a

$$k' = \frac{k}{\cos\varepsilon}.$$

Le paramètre k' est le même pour tous les diamètres également distants de l'axe; il est le plus petit possible pour l'axe lui-même.

14. Cherchons les équations de la droite conjuguée d'une droite donnée. Soient

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

les équations d'une droite D. Pour avoir les équations de la droite conjuguée Δ, il suffit de prendre l'équation du plan polaire du point

$$x = p, \quad y = q, \quad z = 0,$$

et celle du plan polaire du point

$$z = \infty, \quad \frac{x}{z} = a, \quad \frac{y}{z} = b.$$

On a ainsi les équations

$$qx - py - kz = 0, \quad bx - ay + k = 0$$

ou bien

$$x = \frac{-k}{bp - aq}(az + p), \quad y = \frac{-k}{bp - aq}(bz + q).$$

Appelons r la distance de la droite D à l'axe, ρ la distance de la droite Δ à l'axe; (DZ) l'angle de la droite D avec l'axe, (ΔZ) l'angle de Δ avec l'axe. On a

$$\cos(\Delta Z) = \frac{pb - aq}{\sqrt{k^2(a^2 + b^2) + (pb - aq)^2}},$$

d'où

$$\operatorname{tang}^2(\Delta Z) = \frac{k^2(a^2+b^2)}{(pb-aq)^2}.$$

Mais on a aussi

$$r^2 = \frac{(pb-aq)^2}{a^2+b^2};$$

donc

$$\operatorname{tang}^2(\Delta Z) = \frac{k^2}{r^2} \quad \text{ou} \quad r \operatorname{tang}(\Delta Z) = k$$

et, par raison de symétrie, $\rho \operatorname{tang}(\mathrm{DZ}) = k$.

Ainsi l'angle d'une droite avec l'axe ne dépend que de la distance de sa conjuguée à l'axe. En particulier, si les deux droites conjuguées sont rectangulaires, on a, parce qu'elles sont parallèles à un plan parallèle à l'axe,

$$\operatorname{tang}(\mathrm{DZ}) \operatorname{tang}(\mathrm{AZ}) = 1;$$

donc, pour de pareilles droites,

$$r\rho = k^2.$$

Ainsi le produit des distances à l'axe de deux droites conjuguées rectangulaires est constant.

Cherchons enfin la condition pour que la droite D soit conjuguée d'elle-même : cette condition s'obtiendra en exprimant que la droite D coïncide avec sa conjuguée Δ. Elle est donc

$$pb - aq + k = 0;$$

dans ce cas, on a

$$r \operatorname{tang}(\mathrm{DZ}) = k.$$

Le produit de la distance à l'axe d'une droite conjuguée d'elle-même par la tangente de l'angle qu'elle fait avec l'axe est constant. Ce théorème s'applique en particulier aux tangentes de la cubique gauche qui sont toutes des droites conjuguées d'elles-mêmes.

DEUXIÈME PARTIE.

15. Nous avons ainsi établi dans la première Partie les propriétés des pôles et des plans polaires (P, p) par rapport à une cubique gauche. On connaît d'un autre côté (Chasles, *Comptes rendus*, 1843) les propriétés d'un système de plans p' et de points P' obtenu en faisant correspondre à un point P' d'un corps solide en mouvement le plan p' mené par ce point perpendiculairement à sa vitesse, et à un plan p' le point P' dont la vitesse est perpendiculaire au plan. La comparaison des propriétés des systèmes (P, p), (P', p') montre qu'il y a identité complète entre ces propriétés. Nous sommes ainsi conduit à nous poser deux problèmes.

Le premier consiste, étant donné le mouvement hélicoïdal d'un corps solide, à déterminer les cubiques pour lesquelles le système des pôles et des plans polaires (P, p) coïncide avec le système des points P' et des plans p' relatif à ce mouvement. Dans le deuxième nous nous proposons, étant donnée une cubique gauche, de déterminer un mouvement hélicoïdal tel que le système des points P' et des plans p' relatif à ce mouvement coïncide avec le système des pôles et des plans polaires (P, p) par rapport à la cubique donnée.

16. Résolvons d'abord le premier problème :

Étant donné un mouvement hélicoïdal, déterminer les cubiques gauches correspondantes.

Prenons, pour simplifier, pour axe des z l'axe du mouvement hélicoïdal. Soit V la vitesse de translation le long de cet axe, ω la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe. L'équation du plan p', ayant son pôle P' au point $(x_1 y_1 z_1)$, sera

$$xy_1 - yx_1 - \frac{V}{\omega}(z - z_1) = 0$$

ou

$$xy_1 - yx_1 - k(z - z_1) = 0,$$

en posant

$$k = \frac{V}{\omega}.$$

On voit que l'axe du mouvement hélicoïdal est l'axe principal de toutes les cubiques qui lui correspondent, et que le paramètre k, relatif à toutes ces cubiques, est le rapport $\frac{V}{\omega}\cdot$ Considérons une de ces cubiques : la vitesse d'un de ses points (x, y, z) doit être normale au plan osculateur en ce point, la vitesse de ce point ayant pour projections $-\omega y$, ωx, V, on doit avoir

$$\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{-\omega y} = \frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{\omega x} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{V}.$$

Ces conditions peuvent se remplacer par les deux conditions suivantes :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &x\,dy - y\,dx + \frac{V}{\omega}\,dz = 0,\\ &x\,d^2y - y\,d^2x + \frac{V}{\omega}\,d^2z = 0;\end{aligned}\right.$$

mais la deuxième de ces conditions est une conséquence de la première. Les cubiques cherchées doivent donc vérifier l'équation différentielle (1), et toutes les cubiques satisfaisant à cette équation différentielle répondent à la question. Remarquons en passant que toute courbe vérifiant l'équation différentielle (1) est telle que, si on la suppose liée à l'axe, la vitesse de chacun de ses points est normale au plan osculateur en ce point, et que chacune de ses tangentes est conjuguée d'elle-même. Chacune de ces courbes peut donc servir à définir le système des points et des plans (P, p). Comme il n'y a qu'une équation différentielle, on peut choisir arbitrairement la projection d'une de ces courbes sur le plan des xy, l'équation (1) donne alors z par une intégrale. L'expression $(x\,dy - y\,dx)$ représente le double de la différentielle de l'aire S décrite par le rayon vecteur allant de l'origine des coordonnées à un point variable de la projection de la courbe sur le plan des xy. L'équation (1) peut donc s'écrire

$$2\,dS + \frac{V}{\omega}\,dz = 0.$$

Donc, pour toutes ces courbes et en particulier pour les cubiques gauches, la variation de l'aire décrite par le rayon vecteur allant de l'origine des coordonnées à la projection d'un point variable de la courbe sur le plan des xy est égale à la variation de la hauteur de ce point multipliée par la constante $\frac{V}{2\omega}$.

Revenons maintenant à la recherche des cubiques gauches vérifiant l'équation différentielle (1). Remarquons que pour une cubique x, y, z peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre variable λ. Donnons-nous les expressions de x et y en fonction de ce paramètre et cherchons à déterminer z de manière à vérifier l'équation (1). Supposons les fractions rationnelles en λ décomposées en fractions simples

$$(2)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \dfrac{A}{\lambda - a} + \dfrac{B}{\lambda - b} + \dfrac{C}{\lambda - c}, \\ y = y_0 + \dfrac{A'}{\lambda - a} + \dfrac{B'}{\lambda - b} + \dfrac{C'}{\lambda - c}, \end{cases}$$

d'où

$$\frac{dx}{d\lambda} = -\left[\frac{A}{(\lambda - a)^2} + \frac{B}{(\lambda - b)^2} + \frac{C}{(\lambda - c)^2}\right],$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = -\left[\frac{A'}{(\lambda - a)^2} + \frac{B'}{(\lambda - b)^2} + \frac{C'}{(\lambda - c)^2}\right];$$

on doit avoir

$$\begin{aligned}\frac{V}{\omega}\frac{dz}{d\lambda} = y_0\frac{dx}{d\lambda} - x_0\frac{dy}{d\lambda} &+ \left(\frac{A}{\lambda-a} + \frac{B}{\lambda-b} + \frac{C}{\lambda-c}\right)\left[\frac{A'}{(\lambda-a)^2} + \frac{B'}{(\lambda-b)^2} + \frac{C'}{(\lambda-c)^2}\right] \\ &- \left(\frac{A'}{\lambda-a} + \frac{B'}{\lambda-b} + \frac{C'}{\lambda-c}\right)\left[\frac{A}{(\lambda-a)^2} + \frac{B}{(\lambda-b)^2} + \frac{C}{(\lambda-c)^2}\right]\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}\frac{V}{\omega}\frac{dz}{d\lambda} = y_0\frac{dx}{d\lambda} - x_0\frac{dy}{d\lambda} &+ \frac{(BC' - CB')}{(\lambda - b)^2(\lambda - c)^2}(c - b) \\ &+ \frac{AB' - BA'}{(\lambda - a)^2(\lambda - b)^2}(b - a) + \frac{CA' - AC'}{(\lambda - c)^2(\lambda - a)^2}(a - c).\end{aligned}$$

Décomposons les fractions rationnelles du deuxième membre en fractions simples

$$\frac{1}{(\lambda - a)^2(\lambda - b)^2} = \frac{1}{(a - b)^2}\left[\frac{1}{(\lambda - a)^2} + \frac{1}{(\lambda - b)^2}\right] - \frac{2}{(a - b)^3}\left(\frac{1}{\lambda - a} - \frac{1}{\lambda - b}\right).$$

La décomposition étant ainsi faite, on peut intégrer immédiatement;

mais, z devant être fonction rationnelle de λ, les termes en $\frac{1}{\lambda-a}$, $\frac{1}{\lambda-b}$, $\frac{1}{\lambda-c}$ doivent avoir leurs coefficients nuls. En écrivant que ces coefficients sont nuls, on a les conditions

$$(3)\qquad \frac{AB'-BA'}{(a-b)^2}=\frac{BC'-CB'}{(b-c)^2}=\frac{CA'-AC'}{(a-c)^2}=h.$$

Ces conditions étant supposées remplies, on a, en intégrant,

$$\frac{V}{\omega}(z-z_0)=xy_0-yx_0+\frac{AB'-BA'}{a-b}\left(\frac{1}{\lambda-a}+\frac{1}{\lambda-b}\right)$$
$$+\frac{BC'-CB'}{b-c}\left(\frac{1}{\lambda-b}+\frac{1}{\lambda-c}\right)+\frac{CA'-AC'}{c-a}\left(\frac{1}{\lambda-c}+\frac{1}{\lambda-a}\right).$$

En appelant h la valeur commune des rapports (3), on peut écrire l'expression de z de la manière suivante :

$$(4)\qquad \frac{V}{\omega}(z-z_0)=xy_0-yx_0+h\left(\frac{c-b}{\lambda-a}+\frac{a-c}{\lambda-b}+\frac{b-a}{\lambda-c}\right).$$

On voit que z est aussi une fraction rationnelle du troisième degré de λ ayant même dénominateur que les deux fonctions rationnelles correspondant à x et y. Les courbes ainsi déterminées sont donc des cubiques gauches satisfaisant à la question. Les trois équations (2) et (4) comprennent d'ailleurs toutes les cubiques cherchées. La forme même de l'équation (4) montre que, si une cubique satisfait à la question, toutes celles qu'on en déduit en la faisant tourner autour de l'axe ou en la faisant glisser le long de l'axe satisfont également à la question.

17. Reprenons les équations (3)

$$\frac{AB'-BA'}{(a-b)^2}=\frac{BC'-CB'}{(b-c)^2}=\frac{CA'-AC'}{(c-a)^2},$$

qui expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que la courbe unicursale du troisième ordre, représentée par les équations (2), puisse être considérée comme la projection sur le plan des xy d'une cubique gauche ayant son axe parallèle à l'axe Oz. Ces équations (3) signifient que les trois points d'inflexion de la courbe du troisième ordre considérée sont à l'infini. En effet les équations de cette courbe sont

$$x = x_0 + \frac{A}{\lambda - a} + \frac{B}{\lambda - b} + \frac{C}{\lambda - c},$$

$$y = y_0 + \frac{A'}{\lambda - a} + \frac{B'}{\lambda - b} + \frac{C'}{\lambda - c}.$$

Pour $\lambda = a$ par exemple, on a un point à l'infini de la courbe. L'équation de l'asymptote correspondante est

$$A(y - y_0) - A'(x - x_0) = \frac{AB' - BA'}{a - b} + \frac{AC' - CA'}{a - c}.$$

Les valeurs du paramètre λ correspondant aux points d'intersection de cette droite avec la courbe sont données par l'équation

$$\frac{AB' - BA'}{\lambda - b} + \frac{AC' - CA'}{\lambda - c} = \frac{AB' - BA'}{a - b} + \frac{AC' - CA'}{a - c}$$

ou

$$\frac{AB' - BA'}{(\lambda - b)(a - b)}(\lambda - a) + \frac{AC' - CA'}{(\lambda - c)(a - c)}(\lambda - a) = 0.$$

Cette équation admet la racine $\lambda = a$, ce qui devait arriver; elle admet une autre racine qui donne le point d'intersection de l'asymptote avec la courbe. Si le point à l'infini est point d'inflexion, ce point d'intersection doit lui-même être à l'infini, c'est-à-dire que cette autre racine de l'équation précédente doit aussi être a. Or c'est ce qu'exprime précisément la condition

$$\frac{AB' - BA'}{(a - b)^2} = \frac{CA' - AC'}{(a - c)^2}.$$

Les conditions (3) expriment donc que les trois points d'inflexion de la courbe sont à l'infini. Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe unicursale du troisième ordre située dans un plan puisse être considérée comme la projection sur ce plan d'une cubique ayant son axe perpendiculaire au plan est que la courbe ait ses trois points d'inflexion à l'infini.

18. Maintenant, étant donnée une cubique définie par des équations de la forme

$$x = x_0 + \frac{A}{\lambda - a} + \frac{B}{\lambda - b} + \frac{C}{\lambda - c},$$
$$y = y_0 + \frac{A'}{\lambda - a} + \frac{B'}{\lambda - b} + \frac{C'}{\lambda - c},$$
$$z = z_0 + \frac{A''}{\lambda - a} + \frac{B''}{\lambda - b} + \frac{C''}{\lambda - c},$$

déterminons le mouvement hélicoïdal correspondant. Pour cela, simplifions les équations de la cubique en transportant l'origine des coordonnées au point (x_0, y_0, z_0). Les équations de la cubique deviennent alors

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{A}{\lambda - a} + \dfrac{B}{\lambda - b} + \dfrac{C}{\lambda - c}, \\[2mm] y = \dfrac{A'}{\lambda - a} + \dfrac{B'}{\lambda - b} + \dfrac{C'}{\lambda - c}, \\[2mm] z = \dfrac{A''}{\lambda - a} + \dfrac{B''}{\lambda - b} + \dfrac{C''}{\lambda - c}. \end{cases}$$

Soient, dans le mouvement hélicoïdal correspondant à la cubique, p, q, r les trois composantes de la rotation suivant les trois axes; ν_x, ν_y, ν_z les trois composantes de la translation suivant ces mêmes axes. L'équation du plan mené par le point (x, y, z), perpendiculairement à la vitesse de ce point, est

$$(6)\quad (qz - ry + \nu_x)(X - x) + (rx - pz + \nu_y)(Y - y) + (py - qx + \nu_z)(Z - z) = 0.$$

Si le point (x, y, z) est un point de la cubique, le plan déterminé par l'équation (6) doit coïncider avec le plan osculateur à la cubique en ce point. L'équation du plan osculateur à la cubique au point (x, y, z) est

$$(7)\qquad \left(\frac{dy}{d\lambda}\frac{d^2z}{d\lambda^2} - \frac{dz}{d\lambda}\frac{d^2y}{d\lambda^2}\right)(X - x) + \ldots = 0.$$

On a

$$\frac{dy}{d\lambda} = -\left[\frac{A'}{(\lambda - a)^2} + \frac{B'}{(\lambda - b)^2} + \frac{C'}{(\lambda - c)^2}\right],$$
$$\frac{d^2y}{d\lambda^2} = 2\left[\frac{A'}{(\lambda - a)^3} + \frac{B'}{\lambda - b)^3} + \frac{C'}{(\lambda - c)^3}\right];$$

de même

$$\frac{dz}{d\lambda} = -\left[\frac{A''}{(\lambda-a)^2} + \frac{B''}{(\lambda-b)^2} + \frac{C''}{(\lambda-c)^2}\right],$$

$$\frac{d^2z}{d\lambda^2} = 2\left[\frac{A''}{(\lambda-a)^3} + \frac{B''}{(\lambda-b)^3} + \frac{C''}{(\lambda-c)^3}\right].$$

Posons

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= B'C'' - C'B'', & \mathcal{B} &= C'A'' - A'C'', & \mathcal{C} &= A'B'' - B'A'',\\
\mathcal{A}' &= B''C - C''B, & \mathcal{B}' &= C''A - A''C, & \mathcal{C}' &= A''B - B''A,\\
\mathcal{A}'' &= BC' - C'B, & \mathcal{B}'' &= CA' - AC', & \mathcal{C}'' &= AB' - BA'.
\end{aligned}$$

L'équation du plan osculateur au point (x, y, z) est alors

$$(8)\quad [\mathcal{A}(b-c)(\lambda-a)^3 + \mathcal{B}(c-a)(\lambda-b)^3 + \mathcal{C}(a-b)(\lambda-c)^3](X-x) + \ldots = 0.$$

Ce plan osculateur (8) devant coïncider avec le plan (6), il faut que, en remplaçant dans les coefficients de l'équation (6) x, y, z par leurs valeurs (5), ces coefficients, après qu'on aura chassé les dénominateurs, soient proportionnels aux coefficients de l'équation (8). Cette identification donne pour $p, q, r, \nu_x, \nu_y, \nu_z$ les valeurs suivantes :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
p &= A\,(b-c)^2 + B\,(c-a)^2 + C\,(a-b)^2,\\
q &= A'\,(b-c)^2 + B'\,(c-a)^2 + C'\,(a-b)^2,\\
r &= A''(b-c)^2 + B''(c-a)^2 + C''(a-b)^2,\\
\nu_x &= \mathcal{A}\,(c-b) + \mathcal{B}\,(a-c) + \mathcal{C}\,(b-a),\\
\nu_y &= \mathcal{A}'(c-b) + \mathcal{B}'(a-c) + \mathcal{C}'(b-a),\\
\nu_z &= \mathcal{A}''(c-b) + \mathcal{B}''(a-c) + \mathcal{C}''(b-a).
\end{aligned}\right.$$

Le mouvement hélicoïdal correspondant à la cubique est ainsi entièrement défini. Les équations de l'axe du mouvement hélicoïdal ou de l'axe de la cubique sont

$$\frac{qz - ry + \nu_x}{p} = \frac{rx - pz + \nu_y}{q} = \frac{py - qx + \nu_z}{r}.$$

Comme exemple, considérons la cubique intersection des deux surfaces du deuxième ordre

$$y^2 - xz = 0, \quad yz - x^2 - x = 0.$$

En posant

$$y = \lambda x,$$

on a

$$x = \frac{1}{\lambda^3 - 1}, \quad y = \frac{\lambda}{\lambda^3 - 1}, \quad z = \frac{\lambda^2}{\lambda^3 - 1}.$$

Soient α, α^2 les racines cubiques imaginaires de l'unité; on voit, en décomposant les fractions rationnelles en fractions simples, que l'on a dans le cas actuel

$$A = A' = A'' = B'' = C'' = \tfrac{1}{3},$$

$$B = C' = \frac{\alpha}{3}, \quad B' = C = \frac{\alpha^2}{3},$$

$$a = 1, \quad b = \alpha, \quad c = \alpha^2;$$

par conséquent, en appliquant les formules (9),

$$p = -3, \quad q = 0, \quad r = 0,$$
$$\nu_x = -1, \quad \nu_y = 0, \quad \nu_z = 0;$$

L'équation du plan polaire du point (x, y, z) par rapport à la cubique est donc

$$Yz - Zy - \tfrac{1}{3}(X - x) = 0.$$

L'axe des x est l'axe de la cubique.

19. Terminons ce travail en démontrant une propriété que l'on pourrait appeler une propriété cinématique de la cubique gauche, parce qu'elle se rattache directement au mouvement hélicoïdal correspondant à cette cubique. Cette propriété consiste en ce que, si l'on suppose une cubique gauche amenée du mouvement hélicoïdal correspondant, le rayon de torsion de la cubique en un point est proportionnel au carré de la vitesse de ce point. Supposons que l'axe Oz soit l'axe de la cubique. Les composantes de la vitesse d'un point $M(x, y, z)$ de la cubique sont

$$-\omega y, \quad \omega x, \quad V.$$

Ces composantes sont proportionnelles aux cosinus des angles que fait la normale au plan osculateur en M avec les axes : on sait, en effet, que la vitesse d'un point est normale au plan osculateur en ce point. La normale au plan osculateur infiniment voisin fait de même avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à

$$-\omega(y + dy), \quad \omega(x + dx), \quad V.$$

Soit $d\tau$ l'angle de ces deux droites, on a

$$d\tau^2 = \frac{\omega^4(x\,dy - y\,dx)^2 + V^2\omega^2(dx^2 + dy^2)}{[(x^2+y^2)\omega^2 + V^2]^2}.$$

Mais l'équation différentielle à laquelle satisfait la cubique donne

$$x\,dy - y\,dx = -\frac{V}{\omega}\,dz;$$

donc

$$d\tau^2 = \frac{V^2\omega^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{[(x^2+y^2)\omega^2 + V^2]^2}.$$

Soit T le rayon de torsion

$$T = \frac{ds}{d\tau},$$

et v la vitesse du point $M(x, y, z)$,

$$v^2 = (x^2+y^2)\omega^2 + V^2,$$

la formule précédente donne

(10) $$T = \frac{v^2}{V\omega}.$$

Ainsi le rayon de torsion en un point de la cubique est proportionnel au carré de la vitesse de ce point.

La formule précédente qui donne T peut encore se mettre sous la forme suivante, en appelant r la distance du point M à l'axe et k le rapport $\frac{V}{\omega}$,

$$T = \frac{r^2}{k} + k.$$

Soit une autre cubique, k_1 le rapport de la vitesse de translation à la vitesse de rotation, r_1 la distance du point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ à l'axe, T_1 le rayon de torsion en ce point, on a

$$T_1 = \frac{r_1^2}{k_1} + k_1.$$

Si l'on choisit les deux points M et M_1, de telle façon qu'on ait

$$\frac{r}{r_1} = \sqrt{\frac{k}{k_1}},$$

on a

$$T - T_1 = k - k_1.$$

Donc étant données deux cubiques, si à un point M de l'une on fait correspondre un point M_1 de l'autre, de telle façon que le rapport $\frac{r}{r_1} = \sqrt{\frac{k}{k_1}}$, la différence des rayons de torsion en ces deux points est constante et égale à $k - k_1$.

20. De la formule (10), qui donne le rayon de torsion, on peut encore déduire la propriété suivante : si sur l'axe du plan osculateur, en chaque point M (x, y, z) d'une cubique, on porte une longueur MM′ proportionnelle à la vitesse de ce point ou bien à la racine carrée du rayon de torsion (ce qui est la même chose); le lieu des points M′ est une nouvelle cubique de même axe que la première. Soient x', y', z' les coordonnées du point M′, on a

$$\frac{x' - x}{-\omega y} = \frac{y' - y}{\omega x} = \frac{z' - z}{V} = l.$$

Le paramètre l est égal à

$$\frac{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}}{\sqrt{\omega^2 (x^2 + y^2) + V^2}} = \frac{MM'}{v}.$$

Comme MM′ est proportionnel à v, l est constant. Les coordonnées du point M′ sont donc données par les équations suivantes, où l est constant :

$$x' = x - l\omega y, \quad y' = y + l\omega x, \quad z' = z + lV.$$

On voit que le lieu est une nouvelle cubique, car, si x, y, z sont des fonctions rationnelles du troisième degré d'un paramètre variable, il en sera de même de x', y', z'. De plus, cette cubique a même axe que la proposée. On a, en effet,

$$(x'\,dy' - y'\,dx') = (x - l\omega y)(dy + l\omega\,dx) - (y + l\omega x)(dx - l\omega\,dy)$$

ou

$$(x' dy' - y' dx') = (x dy - y dx)(1 + l^2 \omega^2).$$

Comme on a

$$x dy - y dx + \frac{V}{\omega} dz = 0,$$

et comme

$$dz = dz',$$

on a

$$x' dy' - y' dx' + \frac{V}{\omega}(1 + l^2\omega^2) dz' = 0.$$

Ce qui montre que la nouvelle cubique a même axe que la proposée, et que le rapport $\frac{V'}{\omega'}$ pour cette cubique est égal à

$$\frac{V}{\omega}(1 + l^2\omega^2).$$