ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PIERRE SCHAPIRA

Conditions de positivité dans une variété symplectique complexe. Application à l'étude des microfonctions

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 14, nº 1 (1981), p. 121-139
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1981_4_14_1_121_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 14, 1981, p. 121 à 139.

CONDITIONS DE POSITIVITÉ DANS UNE VARIÉTÉ SYMPLECTIQUE COMPLEXE. APPLICATION A L'ÉTUDE DES MICROFONCTIONS

PAR PIERRE SCHAPIRA

Introduction

Dans [7], [8], A. Melin et J. Sjöstrand ont introduit la notion de variété lagrangienne (complexe) positive dans le presque complexifié d'une variété symplectique réelle de classe C^∞, et construit des distributions de Fourier associées, ce qui leur permet d'aborder de nombreux problèmes d'équations aux dérivées partielles.

Nous interprétons ici leur théorie dans le cadre analytique en étudiant particulièrement le cas où la variété symplectique réelle est le fibré conormal extérieur au bord d'un ouvert strictement pseudo-convexe Ω dans une variété analytique complexe X, ce bord étant supposé analytique réel.

Soit $(T^*_{\partial\Omega} X)^+$ ce fibré conormal dans $T^* X$, le fibré cotangent à X, et soit Λ une partie $\mathbb{C}^\times$-conique de $T^* X$. Nous démontrons que si Λ est positive par rapport à $(T^*_{\partial\Omega} X)^+$, la projection de la restriction de Λ à un voisinage de $(T^*_{\partial\Omega} X)^+$ sur X ne rencontre pas Ω et nous donnons une réciproque à ce théorème quand Λ est le fibré conormal à une hypersurface analytique complexe de X. Ces résultats sont motivés par le fait que si M est une variété analytique réelle de complexifié X, le faisceau C_M des microfonctions de M. Sato (*cf.* [11]) sur $T^*_M X$, le fibré conormal à M dans X, est localement isomorphe, par transformation canonique complexe en dehors de $T^*_X X$, au faisceau sur $(T^*_{\partial\Omega} X)^+$ des valeurs au bord des fonctions holomorphes de l'ouvert Ω, cet isomorphisme étant compatible à l'action du faisceau $\mathscr{E}_X$ des opérateurs microdifférentiels.

Soit alors Λ une variété de $T^* X$ obtenue par transformation canonique complexe homogène à partir de $T^*_M X$. Nous démontrons que si les espaces tangents $T_p \Lambda$ et $T_p T^*_M X$ en un point $p \notin T^*_X X$ ont un hyperplan commun, on peut trouver au voisinage de p une transformation canonique qui échange simultanément Λ et $T^*_M X$ en les fibrés conormaux extérieurs aux bords de deux ouverts strictement pseudo-convexes de X. Si l'on suppose de plus $\mathbb{C}^\times (T^*_M X)$ positive par rapport à Λ, et si l'on désigne par C_Λ un faisceau de microfonctions sur Λ, on peut ainsi construire au voisinage de p, un morphisme injectif de $\mathscr{E}_X$-modules du faisceau $C_M | \Lambda \cap T^*_M X$ dans le faisceau des sections de C_Λ à support dans $\Lambda \cap T^*_M X$.

On en déduit immédiatement des résultats d'hypo-ellipticité analytique pour un système microdifférentiel $\mathscr{M}$ sur $T^*_M X$ connaissant des résultats de propagation des singularités des solutions de $\mathscr{M}$ sur Λ.

Nous donnons ici des résultats partiels dans cette direction et considérons aussi le cas où le couple $(T^*_M X, \Lambda)$ change de type le long d'une hypersurface commune, quand le système $\mathscr{M}$ est hyperbolique sur Λ.

Nous étudions enfin le cas où Λ est une variété lagrangienne complexe positive par rapport à $T^*_M X$. On peut alors construire des solutions non nulles d'une équation $P u = 0$ dans $T^*_M X$ connaissant des solutions de cette équation dans un faisceau de microfonctions holomorphes sur Λ. On retrouve ainsi des résultats de [1], [15] et aussi [16], [10], mais les résultats de [5] permettent de remplacer l'hypothèse usuelle de simplicité des caractéristiques par une hypothèse plus générale, d'existence de direction non microcaractéristique le long de Λ.

Les résultats principaux de ce travail ont été annoncés dans la note [14] et aussi dans l'exposé [13].

Nous avons bénéficié pendant la rédaction de cet article de fructueuses discussions avec J. Sjöstrand. Nous l'en remercions très sincèrement.

1. Variétés lagrangiennes réelles dans une variété symplectique complexe

Soit X une variété analytique complexe, $T^* X$ son fibré cotangent, π la projection de $T^* X$ sur X, ω_X (aussi noté ω) la 1-forme canonique sur $T^* X$. Dans un système de coordonnées symplectiques homogènes (z, ζ), ω s'écrit :

$$\omega = \sum_i \zeta_i \, dz_i.$$

Nous dirons qu'une partie Λ de $T^* X$ est conique (resp. $\mathbb{C}^\times$-conique) si Λ est invariant par l'action de $\mathbb{R}^+$ (resp. de $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$) qui a (z, ζ) associe $(z, k\zeta)$, où $k \in \mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{C}^\times$). Nous notons $\mathbb{C}^\times \Lambda$ l'enveloppe $\mathbb{C}^\times$-conique d'une partie conique Λ. Enfin nous désignons par $\dot{T}^* X$ l'espace $T^* X$ privé de sa section nulle.

Soit $\overline{X}$ la variété anti-holomorphe associée à X et $X^{\mathbb{R}}$ la variété analytique réelle sous-jacente à X. On identifiera $X^{\mathbb{R}}$ avec la diagonale de $X \times \overline{X}$, ce dernier espace définissant un complexifié de $X^{\mathbb{R}}$. On note d' la différentielle sur X, d'' sur $\overline{X}$, $d = d' + d''$ sur $X^{\mathbb{R}}$. L'espace $T^*(X \times \overline{X})$ est muni de la 1-forme $\omega_X + \omega_{\overline{X}}$ dont la restriction à $X^{\mathbb{R}}$ vaut $2 \operatorname{Re} \omega$ ($\operatorname{Re} \omega$: partie réelle de ω). Par exemple si $X = \mathbb{C}^n$, $T^* X$ est muni du produit scalaire :

$$(z, \zeta) \to \langle z, \zeta \rangle = \sum_i z_i \zeta_i$$

et $T^*(X^{\mathbb{R}})$ du produit :

$$(z, \zeta) \to 2 \operatorname{Re} \langle z, \zeta \rangle = 2 \operatorname{Re} \sum_i z_i \zeta_i.$$

Soit Y une sous-variété analytique réelle de X. Le fibré conormal à Y dans X, $T_Y^* X$, est par définition l'image inverse du fibré conormal à Y dans $X^{\mathbb{R}}$ par l'isomorphisme analytique réel $(T^* X)^{\mathbb{R}} \to T^* X^{\mathbb{R}}$. Par exemple si Y est une hypersurface définie par une équation réelle $Y = \{ z \in X; f(z) = 0 \}$, on a :

$$T_Y^* X^{\mathbb{R}} = \{ (z, w, \lambda, \mu) \in T^*(X \times \overline{X});\ z = w, f(z, w) = 0,\ \lambda = kd' f(z, w),\ \mu = kd'' f(z, w),\ k \in \mathbb{R} \},$$

$$T_Y^* X = \{ (z, \zeta) \in T^* X; f(z) = 0,\ \zeta = kd' f(z),\ k \in \mathbb{R} \}.$$

Soit Ω un ouvert de X de bord $\partial\Omega$ hypersurface analytique réelle. Supposons Ω défini par l'équation $f < 0$ avec $df \neq 0$ sur $\partial\Omega$. On appelle fibré conormal extérieur à $\partial\Omega$, et on note $(T_{\partial\Omega}^* X)^+$ la partie de $T_{\partial\Omega}^* X$ définie par :

$$(T_{\partial\Omega}^* X)^+ = \{ (z, \zeta) \in T^* X; f(z) = 0,\ \zeta = kd' f(z),\ k \in \mathbb{R}^+ \}.$$

DÉFINITION 1.1. — Soit Λ une partie de $T^* X$:

(*a*) nous dirons que Λ est une variété $\mathbb{C}$-lagrangienne si Λ est une variété analytique complexe, $\mathbb{C}^\times$-conique, lagrangienne dans $T^* X$;

(*b*) nous dirons que Λ est une variété $\mathbb{R}$-lagrangienne si Λ est une variété analytique réelle, conique, lagrangienne dans $T^*(X^{\mathbb{R}})$;

(*c*) nous dirons d'une variété $\mathbb{R}$-lagrangienne qu'elle est I-symplectique si la restriction de $\operatorname{Im} d\omega$ (la partie imaginaire de $d\omega$) à Λ est non dégénérée.

Remarquons que si Λ est une variété analytique complexe $\mathbb{C}^\times$-conique, Λ est $\mathbb{R}$-lagrangienne si et seulement si Λ est $\mathbb{C}$-lagrangienne.

Soit Λ une variété $\mathbb{R}$-lagrangienne; alors Λ est I-symplectique si et seulement si $T^* X$ s'identifie à un complexifié de Λ. En effet la vérification se fait en chaque point $x \in \Lambda$ sur $T_x \Lambda$ l'espace tangent à Λ en x dans $T_x T^* X$.

LEMME 1.2. — *Soit* E *un espace vectoriel complexe symplectique pour la 2-forme* $d\omega$. *Soit* Λ *un* $\mathbb{R}$*-sous-espace vectoriel lagrangien pour* $\operatorname{Re} d\omega$. *Alors* Λ *est symplectique pour* $\operatorname{Im} d\omega$ *si et seulement si* E *est le complexifié de* Λ.

Démonstration. — Soit $\alpha = \operatorname{Re} d\omega$, $\beta = \operatorname{Im} d\omega$:

(*a*) soit $x \in \Lambda$, $x \neq 0$. Il existe $y \in E$, avec $d\omega(x, y) \neq 0$. On peut écrire $y = y_1 + iy_2$, avec y_1, $y_2 \in \Lambda$. Alors $d\omega(x, y_1 + iy_2) = i\beta(x, y_1) - \beta(x, y_2)$ et par suite $\beta(x, y_1)$ ou $\beta(x, y_2)$ est différent de 0;

(*b*) soit L le complexifié de Λ dans E. Alors Λ est lagrangien dans L pour $\operatorname{Re} \omega|_L$. Par suite $\dim_{\mathbb{R}} L = 2 \dim_{\mathbb{R}} \Lambda$ et $L = E$.

Remarque 1.1. — Soit Λ_0 et Λ_1 deux variétés analytiques réelles, $\mathbb{R}$-lagrangiennes et I-symplectiques. Localement il existe une transformation canonique complexe homogène de $T^* X$ qui échange Λ_0 et Λ_1 : il suffit de complexifier une transformation canonique homogène des variétés symplectiques réelles $(\Lambda_0, \operatorname{Im} d\omega)$ et $(\Lambda_1, \operatorname{Im} d\omega)$.

Exemple 1. — Soit M une variété analytique réelle de complexifiée X. Alors $T_M^* X$ est $\mathbb{R}$-lagrangien et I-symplectique.

Exemple 2 ([3], [4]). — Soit Y une hypersurface analytique réelle de X, définie par une équation réelle $f=0$. Soit Z le complexifié de $Y^{\mathbb{R}}$ dans $X \times \overline{X}$, $f(z, w)=0$ une équation de Z. On définit l'application $\psi : Z \times \mathbb{C} \to T^* X$ par :

$$((z, w, k), f(z, w)=0) \to (z, kd' f(z, w)).$$

On munit $Z \times \mathbb{C}$ de la 1-forme $\psi^*(\omega_X)=kd' f$.

Remarquons que $T^*_Y X$ est une variété $\mathbb{R}$-lagrangienne.

LEMME 1.3. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $\dot{T}^*_Y X$ *est* I-*symplectique;*

(*b*) $Z \times \mathbb{C}^\times$ *muni de la* 1-*forme* $kd' f$ *est une variété symplectique homogène complexe;*

(*c*) *l'application* ψ *est un isomorphisme de* $Z \times \mathbb{C}$ *sur* $T^* X$ *au voisinage de* $Y \times \mathbb{R}^+$;

(*d*) *le déterminant* $\begin{vmatrix} 0 & d' f \\ d'' f & d' d'' f \end{vmatrix}$ *est différent de* 0 *sur* Y;

(*e*) *la forme de Levi de f est non dégénérée sur* Y.

Démonstration. — L'application ψ définit un isomorphisme de $Y \times \mathbb{R}^+$ sur $(T^*_Y X)^+$ et $Z \times \mathbb{C}^\times$ est un complexifié de $Y \times \mathbb{R}^+$: l'équivalence de (*a*) et (*b*) en résulte, ainsi que l'équivalence de (*b*) et (*c*) compte tenu du lemme 1.2.

Montrons l'équivalence de (*c*) et (*d*).

Le système d'équations :

$$\begin{cases} f(z, w)=0, \\ \zeta - k\, d' f(z, w)=0 \end{cases}$$

est résoluble en (w, k) si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & d'' f \\ -d' f & -k\, d' d'' f \end{vmatrix}$ est différent de 0, et cette condition équivaut à la condition (*d*).

L'équivalence de (*d*) et de (*e*) est classique.

Quand les conditions du lemme 1.3 sont satisfaites, on peut calculer la signature de la forme de Levi de f en $x^0 \in Y$ à partir des espaces tangents à $T^*_Y X$ et $T^*_{\{x^0\}} X$. Rappelons comment (*cf.* [2], [4]).

DÉFINITION 1.4. — Soit E un espace vectoriel symplectique complexe, $d\omega$ la 2-forme sur E. Soit Λ un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de E, lagrangien pour Re $d\omega$ et symplectique pour Im $d\omega$ et soit L un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel lagrangien de E. Soit $N=\Lambda \cap L$, $N^{\mathbb{C}}$ le complexifié de N dans E. On définit la forme bilinéaire γ_Λ sur $L/N^{\mathbb{C}}$ par :

$$\gamma_\Lambda(u, v)=(d\omega)(u, \overline{v}),$$

où $\overline{v}$ désigne le conjugué de v dans l'isomorphisme $\mathbb{C} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \Lambda = E$.

Remarquons d'abord que $d\omega$ passe au quotient par $N^{\mathbb{C}}$ puisque si $v \in N^{\mathbb{C}}$, $v=v_1+iv_2$ pour $v_1 \in N$, $v_2 \in N$ et par suite $\overline{v} \in L$. Alors $d\omega(u, \overline{v})=0$ pour tout $u \in L$.

PROPOSITION 1.5. — *γ_Λ est une forme hermitienne non dégénérée sur l'espace vectoriel* $L/N^{\mathbb{C}}$.

Démonstration. — Soit $\alpha = \operatorname{Re} d\omega$, $\beta = \operatorname{Im} d\omega$. Soit x, y, x', y' des éléments de Λ avec $x+iy \in L$, $x'+iy' \in L$:

$$d\omega(x+iy,\, x'-iy') = i(\beta(x, x') + \beta(y, y')) + (\beta(x', y) + \beta(x, y'))$$

donc γ_Λ est hermitienne.

Soit $x+iy \in L - N^{\mathbb{C}}$. Alors $(x-iy)$ n'appartient pas à L car sinon x, $y \in N \cap \Lambda$. Il existe donc $x'+iy' \in L$, avec :

$$d\omega(x'+iy',\, x-iy) \neq 0$$

et par suite :

$$\gamma_\Lambda(x'+iy',\, x+iy) \neq 0$$

Soit maintenant Y une hypersurface analytique réelle d'équation $f=0$. Soit $x^0 \in Y$, $p = d' f(x^0) \in T^*_{\{x^0\}} Y$. Soit $T^{\mathbb{C}}_{x^0} Y$ l'espace vectoriel complexe tangent à Y en x^0 :

$$T^{\mathbb{C}}_{x^0} Y = \{ \delta z \in T_{x^0} X;\ \langle \delta z,\, d' f(x^0) \rangle = 0 \}$$

et supposons la forme de Levi de f non dégénérée sur cet espace.

PROPOSITION 1.6. — *Soit N_p la droite réelle de $T_p T^* X$ engendrée par le champ radial en p, soit $\Lambda = T_p T^*_Y X$ et $L = T_p T^*_{\{x^0\}} X$. La signature de la forme de Levi de f sur $T^{\mathbb{C}}_{x^0} Y$ est égale à la signature de la forme γ_Λ sur $L/N^{\mathbb{C}}_p$.*

Démonstration. — Soit Z le complexifié de Y dans $X \times \overline{X}$, ψ l'isomorphisme de $Z \times \mathbb{C}^\times$ sur $\dot{T}^* X$ défini dans le lemme 1.3.

On a alors :

$$\psi^{-1}(T^*_Y X) = \{ (z, w, k) \in X \times \overline{X} \times \mathbb{C};\, f(z, w) = 0,\ z = w,\ k \in \mathbb{R} \},$$
$$\psi^{-1}(T^*_{\{x^0\}} X) = \{ (z, w, k) \in X \times \overline{X} \times \mathbb{C};\, f(z, w) = 0,\ z = x^0 \}$$

et par suite :

$$\psi^{-1}(\Lambda) = \{ (\lambda, \mu, k) \in T_{(x^0, x^0)}(X \times \overline{X} \times \mathbb{C});\ k \in \mathbb{R}\ \lambda = \mu,\ \operatorname{Re}\langle \lambda,\, d' f(x^0) \rangle = 0 \},$$
$$\psi^{-1}(L) = \{ (\lambda, \mu, k) \in T_{(x^0, x^0)}(X \times \overline{X} \times \mathbb{C});\ \lambda = 0,\ \langle \mu,\, d'' f(x^0) \rangle = 0 \},$$
$$\psi^{-1}(N_p) = \{ (\lambda, \mu, k) \in T_{(x^0, x^0)}(X \times \overline{X} \times \mathbb{C});\ \lambda = \mu = 0,\ k \in \mathbb{R} \}.$$

Comme on calcule γ_Λ sur $L/N^{\mathbb{C}}_p$ nous pouvons prendre $k=0$, et pour simplifier les notations nous ne l'écrirons plus.

Le conjugué du vecteur $(0, \mu) \in \psi^{-1}(L)$ par rapport à $\psi^{-1}(\Lambda)$ vaut $(\mu, 0)$. D'autre part la 2-forme de $Z \times \mathbb{C}$ est la forme $d(d'f) = d'' d' f$. Par suite si $u = (0, \lambda) \in L$, $v = (0, \mu) \in L$, $\gamma_\Lambda(u, v) = d'' d' f(x^0, x^0)$ $((0, \lambda), (\mu, 0))$. Si on calcule cette 2-forme dans un système de coordonnées locales holomorphes sur X, X s'identifie à l'ensemble des $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^n \times \overline{\mathbb{C}}^n$ tels que $\lambda = \bar{\mu}$ et l'on retrouve ainsi la forme de Levi de f.

Soit E un espace vectoriel symplectique sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ la variété grasmannienne de ses plans lagrangiens.

LEMME 1.7. — *Soit* L_0 *et* L_1 *deux plans lagrangiens de* E *contenant une même droite* N. *Pour tout voisinage* $\mathscr{U}$ *de* L_1 *dans* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ *il existe* $\mathrm{L}_2 \in \mathscr{U}$ *avec* $\mathrm{L}_2 \cap \mathrm{L}_0 = \mathrm{N}$.

Démonstration. — Soit $\mathrm{N}^\perp$ l'orthogonal de N dans E, F l'espace vectoriel symplectique $\mathrm{N}^\perp/\mathrm{N}$, j l'application de $\mathrm{N}^\perp$ sur F. Si $\mathscr{U}$ est un voisinage de L_1 dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, $j(\mathscr{U} \cap \mathrm{N}^\perp)$ sera un voisinage de $j(\mathrm{L}_1)$ dans $\mathscr{L}(\mathrm{F})$ et il est alors classique que l'on peut trouver un plan $\mathrm{K} \in \mathscr{L}(\mathrm{F})$ dans $j(\mathscr{U} \cap \mathrm{N}^\perp)$ avec $\mathrm{K} \cap j(\mathrm{L}_0) = \{0\}$. Soit L_2 l'unique élément de $\mathscr{U} \cap \mathrm{N}^\perp$ d'image K : alors $\mathrm{L}_2 \cap \mathrm{L}_0 = \mathrm{N}$.

PROPOSITION 1.8. — *Soit* Λ *une variété analytique* $\mathbb{R}$*-lagrangienne et* I*-symplectique de* $\mathrm{T}^*\mathrm{X}$, L *une variété* $\mathbb{C}$*-lagrangienne, au voisinage d'un point* $p \in \dot{\mathrm{T}}^*\mathrm{X}$. *Il existe une transformation canonique complexe homogène de* $\dot{\mathrm{T}}^*\mathrm{X}$ *au voisinage de p qui échange* Λ *en le fibré conormal extérieur au bord d'un ouvert strictement pseudo-convexe de* X *et* L *en le fibré conormal à une hypersurface complexe lisse de* X.

Démonstration. — D'après le lemme 1.3 et la remarque 1.1 on peut supposer que Λ est le fibré conormal extérieur au bord d'un ouvert strictement pseudo-convexe Ω de X. Soit $p \in \Lambda = (\mathrm{T}^*_{\partial\Omega}\mathrm{X})^+$, $x^0 \in \partial\Omega$ sa projection sur X.

Soit $\mathrm{L}_0 = \mathrm{T}_p\mathrm{L}$, $\mathrm{L}_1 = \mathrm{T}_p\mathrm{T}^*_{\{x^0\}}\mathrm{X}$, $\mathrm{N}_p^{\mathbb{C}}$ la droite complexe de $\mathrm{T}_p\mathrm{T}^*\mathrm{X}$ engendré par le champ radial en p.

Il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de L_1 dans $\mathscr{L}(\mathrm{T}_p\mathrm{T}^*\mathrm{X})$ tel que si L_2 appartient à $\mathscr{U}$ et contient $\mathrm{N}_p^{\mathbb{C}}$, on ait :

- $\mathrm{L}_2 \cap \mathrm{T}_p\Lambda = \mathrm{L}_1 \cap \mathrm{T}_p\Lambda$;
- $\gamma_{\mathrm{T}_p\Lambda}(\,.\,)$ est définie positive sur $\mathrm{L}_2/\mathrm{N}_p^{\mathbb{C}}$.

D'après le lemme 1.7 on peut trouver un tel L_2 satisfaisant à $\mathrm{L}_2 \cap \mathrm{L}_0 = \mathrm{N}_p^{\mathbb{C}}$. Il suffit alors de prendre un nouveau système de coordonnées symplectiques homogènes dans lequel $\mathrm{L}_2 = \mathrm{T}_p(\mathrm{T}^*_{\{y^0\}}\mathrm{X})$, y^0 désignant la nouvelle projection de p.

Il n'est pas toujours possible d'échanger simultanément deux variétés $\mathbb{R}$-lagrangiennes et I-symplectiques en les fibrés conormaux extérieurs aux bords de deux ouverts strictement pseudo-convexes. Nous allons donner une condition qui sera suffisante pour les applications que nous avons en vue.

PROPOSITION 1.9. — *Soit* Λ_0 *et* Λ_1 *deux variétés* $\mathbb{R}$*-lagrangiennes et* I*-symplectiques dans* $\dot{\mathrm{T}}^*\mathrm{X}$, *définie au voisinage du point p. Supposons la codimension* (sur $\mathbb{R}$) *de* $\mathrm{T}_p\Lambda_0 \cap \mathrm{T}_p\Lambda_1$ *dans* $\mathrm{T}_p\Lambda_0$, *inférieure ou égale à* 1. *Alors on peut trouver une transformation canonique complexe homogène au voisinage de p, qui échange simultanément* Λ_0 *et* Λ_1 *en les fibrés conormaux extérieurs aux bords* $\partial\Omega_0$ *et* $\partial\Omega_1$ *de deux ouverts strictement pseudo-convexes* Ω_0 *et* Ω_1 *de* X.

Démonstration. — Si $T_p \Lambda_0 = T_p \Lambda_1$ le résultat est une conséquence de la proposition 1.6. Supposons donc $T_p \Lambda_0 \cap T_p \Lambda_1$ de codimension 1 dans $T_p \Lambda_0$ et soit N_p la droite réelle de $T_p T^* X$ engendrée par le champ radial en p. Il faut trouver un espace vectoriel $\mathbb{C}$-lagrangien $L \subset T_p T^* X$, tel que :

– $L \cap T_p \Lambda_0 = L \cap T_p \Lambda_1 = N_p$;

– $\gamma_{T_p \Lambda_0}(\ ,\ )$ et $\gamma_{T_p \Lambda_1}(\ ,\ )$ sont définis positives sur $L/N_p^{\mathbb{C}}$.

Pour simplifier les notations nous écrirons Λ_0 et Λ_1 à la place de $T_p \Lambda_0$ et $T_p \Lambda_1$.

On peut supposer que pour un choix de coordonnées symplectiques (z, ζ) sur $T_p T^* X$ on a, en posant $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$:

$$\Lambda_0 = \{ (z, \zeta);\ y = \xi = 0 \},$$

$$N_p = \{ (z, \zeta);\ z = 0,\ \zeta_1 = \ldots = \zeta_{n-1} = \xi_n = 0 \}.$$

Deux cas se présentent alors :

(a) $\omega(p)|_{\Lambda_0 \cap \Lambda_1} = 0$ c'est-à-dire $\eta_n \, dx_n = 0$ sur $\Lambda_0 \cap \Lambda_1$: $\Lambda_0 \cap \Lambda_1$ est défini par l'équation $x_n = 0$;

(b) $\omega(p)|_{\Lambda_0 \cap \Lambda_1} \neq 0$. On peut supposer que l'équation de $\Lambda_0 \cap \Lambda_1$ est $x_1 = 0$.

Dans le cas (a) on prendra L de la forme $L' \oplus L''$, L' étant un plan lagrangien de $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1}$, et :

$$L'' = \{ (z_n, \zeta_n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C};\ z_n = 0 \}.$$

Alors $L \cap \Lambda_1 = L \cap \Lambda_1 \cap \{ z_n = 0 \} = L \cap \Lambda_0$ et par suite $L \cap \Lambda_1 = N$. De plus γ_{Λ_1} et γ_{Λ_0} sont égales sur $L' \times \{0\}$ et donc ont même signature sur $L/N_p^{\mathbb{C}}$.

Traitons alors le cas (b) en supposant $\Lambda_0 \cap \Lambda_1$ d'équation $x_1 = 0$. On peut écrire un vecteur $\lambda \in \Lambda_1$ sous la forme :

$$\lambda = ((0, x'), i\eta) + x_1 (ia, b) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$$

et on peut évidemment supposer $b \in \mathbb{R}^n$, $a = (\alpha + i\beta, a')$, $(\alpha, a') \in \mathbb{R}^n$. Calculons $\operatorname{Re} d\omega(\lambda, \tilde{\lambda})$ pour deux vecteurs $\lambda, \tilde{\lambda} \in \Lambda_1$ dont les coordonnées x', η' et $\tilde{x}'$, $\tilde{\eta}'$ sont nulles. On obtient :

$$d\omega(\lambda, \tilde{\lambda}) = ix_1 a \tilde{x}_1 b - x_1 a_1 \tilde{\eta}_1 - ix_1 a \tilde{x}_1 b + \tilde{x}_1 a_1 \eta_1 = a_1 (\tilde{x}_1 \eta_1 - x_1 \tilde{\eta}_1).$$

Pour que Λ_1 soit $\mathbb{R}$-lagrangien il faut donc que $\alpha = 0$, et pour que Λ_1 soit I-symplectique il faut alors que β soit différent de 0. On peut donc écrire les vecteurs λ de Λ_1 sous la forme :

$$\lambda = (x, i\eta) + x_1 (ia, b)$$

avec $a \in \mathbb{R}^n$, $a_1 = 0$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Calculons alors Re $d\omega(\lambda, \tilde{\lambda})$ pour $\lambda = (x, i\eta) + x_1 (ia, b)$, et $\tilde{\lambda} = (\tilde{x}, i\tilde{\eta}) + \tilde{x}_1 (ia, b)$. On obtient :

$$\operatorname{Re} \begin{vmatrix} x + x_1 ia, & \tilde{x} + \tilde{x}_1 ia \\ i\eta + x_1 b, & i\tilde{\eta} + \tilde{x}_1 b \end{vmatrix} = \langle b, \tilde{x}_1 x - x_1 \tilde{x} \rangle - \langle a, x_1 \tilde{\eta} - \tilde{x}_1 \eta \rangle.$$

Comme cette quantité doit être nulle pour tout $(x, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $(\tilde{x}, \tilde{\eta}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a :

$$a = 0, \qquad b = (b_1, 0, \ldots, 0).$$

En écrivant $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \oplus (\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1})$ et en cherchant L de la forme $L' \oplus L''$, L' étant lagrangien dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et L'' dans $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1}$, on est ramené à un problème en dimension 1.

Soit donc :

$$\Lambda_0 = \{(x, 0; 0, i\eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}\},$$
$$\Lambda_1 = \{(x, 0; \varepsilon x, i\eta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}\}.$$

Soit $(z, \zeta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Calculons $\overline{(z, \zeta)}^1$ son conjugué par rapport à la variété réelle Λ_1 :

$$(z, \zeta) = (x + iy, \xi + i\eta) = (x; \varepsilon x + i(\eta - \varepsilon y)) + i(y; \varepsilon y + i(-\xi + \varepsilon x)),$$

$$\overline{(z, \zeta)}^1 = (x; \varepsilon x + i(\eta - \varepsilon y)) - i(y; \varepsilon y + i(-\xi + \varepsilon x)).$$

On a donc :

$$\gamma_{\Lambda_1}((z, \zeta), (z, \zeta)) = (x + iy, \xi + i\eta) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - iy \\ -\xi + i\eta + 2\varepsilon(x - iy)) \end{pmatrix}$$
$$= (x + iy)(-\xi + i\eta + 2\varepsilon(x - iy) + (\xi + i\eta)(-x + iy).$$

Choisissons L de la forme :

$$L = \{(\lambda\zeta, \zeta); \zeta \in \mathbb{C}\} \text{ pour un } \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

On obtient en posant donc $(x + iy) = \lambda(\xi + i\eta)$:

$$\gamma_{\Lambda_1}((\lambda\zeta, \zeta), (\lambda\zeta, \zeta)) = (\xi^2 + \eta^2)(-2\lambda + 2\varepsilon\lambda^2).$$

Il suffit alors de prendre λ assez petit.

2. Positivité

Rappelons brièvement la définition de A. Melin et J. Sjöstrand ([7], [8]). Soit d'abord V une variété analytique réelle, W un complifié de V. Soit (x) un système de coordonnées holomorphes sur W, réelles sur V. On peut alors considérer l'application qui à $x \in W$ associe $\nu(x) = (\mathrm{Re}(x), \mathrm{Im}(x)) \in T(V)$. Soit $I_p(V)$ l'espace des fonctions sur W nulles à l'ordre p sur V. Alors l'application ν est bien définie, indépendemment du choix des coordonnées, modulo $I_3(V)$. Plus exactement si α est une 1-forme sur V, la fonction $x \to \langle \alpha, \nu(x) \rangle$ est bien définie modulo $I_3(V)$.

Soit maintenant X une variété analytique complexe, Λ_0 une variété $\mathbb{R}$-lagrangienne et I-symplectique dans T^*X (ou plus généralement dans une variété symplectique complexe homogène).

DÉFINITION 2.1 [8]. — Soit Λ une partie conique de T^*X, p un point de Λ_0. On dit que (Λ_0, Λ) est positif en p si on a au voisinage de p dans Λ :

$$(2.1) \qquad -\frac{1}{i}\langle \omega, \nu \rangle \geqq 0 \bmod I_3(\Lambda_0).$$

Remarquons que dans [7], [8], Melin et Sjöstrand ne considèrent que le cas où Λ est une variété $\mathbb{C}$-lagrangienne. Par contre ils supposent seulement Λ_0 de classe C^∞ et utilisent un « presque complexifié » de Λ_0.

Exemple 2.1. — Soit M une variété analytique réelle, X un complexifié de M, $z=x+iy$ des coordonnées holomorphes sur X, réelles sur M, (z, ζ) les coordonnées symplectiques sur T^*X, avec $\zeta=\xi+i\eta$. Alors :

$$T^*_M X = \{(x+iy;\ \xi+i\eta)\in T^*X;\ y=\xi=0\},$$

$$\omega \mid T^*_M X = i\sum_j \eta_j\, dx_j.$$

La condition de positivité par rapport à $T^*_M X$ s'écrit donc :

$$-\langle y, \eta\rangle \geqq -C(|y|+|\xi|)^3. \tag{2.2}$$

Nous allons étudier comment s'interprète la condition de Melin et Sjöstrand quand Λ_0 est le fibré conormal extérieur à un ouvert strictement pseudo-convexe.

THÉORÈME 2.2. — *Soit Ω un ouvert strictement pseudo-convexe de la variété analytique complexe* X, *$\partial\Omega$ le bord de Ω, que l'on suppose être une hypersurface analytique réelle, $\Lambda_0=(T^*_{\partial\Omega}X)^+$ le fibré conormal extérieur à $\partial\Omega$, p un point de Λ_0. Soit Λ une partie $\mathbb{C}^\times$-conique de* T^*X, *et supposons (Λ_0, Λ) positif en p. Il existe alors un voisinage $\mathcal{U}$ de p dans* T^*X *tel que :*

$$\pi(\Lambda\cap\mathcal{U})\cap\Omega=\emptyset.$$

Démonstration. — Nous écrirons Y pour $\partial\Omega$. Soit $f=0$ une équation analytique réelle de Y, Ω étant définie par $f<0$. Soit Z le complexifié de Y dans $X\times\overline{X}$, X étant identifié à la diagonale de $X\times\overline{X}$ (*cf.* § 1). Nous noterons $f^{\mathbb{C}}=0$ l'équation de Z :

$$Z=\{(z, w)\in X\times\overline{X};\ f^{\mathbb{C}}(z, w)=0\},$$

$$Y=Z\cap X\underset{X}{\times}\overline{X}.$$

On a vu au paragraphe 1 que, la forme de Levi de f étant non dégénérée, l'application :

$$\psi:\quad (z, w, k)\to(z, kd'f^{\mathbb{C}}(z, w))$$

définissait un isomorphisme de la variété symplectique homogène $(Z\times\mathbb{C}^\times, kd'f^{\mathbb{C}})$ sur T^*X au voisinage de $Y\times\mathbb{R}^+$.

Soit n la dimension de X, et choisissons une paramétrisation analytique réelle φ de Y par un ouvert de $\mathbb{R}^{2n-1}$, que l'on complexifie en une paramétrisation holomorphe de Z par un ouvert de $\mathbb{C}^{2n-1}$. Pour simplifier les notations nous écrirons $\mathbb{R}^{2n-1}$ et $\mathbb{C}^{2n-1}$ pour ces ouverts. Nous noterons aussi φ l'application (φ, Id) de $\mathbb{C}^{2n-1}\times\mathbb{C}^{\times}$ dans $Z\times\mathbb{C}^{\times}$ associée à φ.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{C}^{2n-1}\times\mathbb{C}^{\times} & \xrightarrow[\varphi]{} & Z\times\mathbb{C}^{\times} & \xrightarrow[\psi]{} & T^*X \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\mathbb{R}^{2n-1}\times\mathbb{R}^{+} & \xrightarrow{\sim} & Y\times\mathbb{R}^{+} & \xrightarrow{\sim} & (T^*_Y X)^{+}
\end{array}$$

Soit π_1 la projection de $X\times\overline{X}$ sur X : remarquons que $\pi_1 \mid Z$ est égale à $\pi\circ\psi$, π désignant la projection de T^*X sur X. Soit $\tilde{\varphi}=\pi_1\circ\varphi=\pi\circ\psi\circ\varphi$ la complexifiée de l'application de $\mathbb{R}^{2n-1}$ dans X, composée de $\varphi \mid \mathbb{R}^{2n-1}$ et de l'injection de Y dans X.

Posons $F=f\circ\tilde{\varphi}$. Alors $\varphi^*(kd'f^{\mathbb{C}})=kd'F$, puisqu'il en est trivialement ainsi sur $\mathbb{R}^{2n-1}\times\mathbb{R}^{+}$. (Rappelons que $d'f^{\mathbb{C}}$ désigne la différentielle de l'espace X appliquée à la fonction $f^{\mathbb{C}}$ sur $X\times\overline{X}$, et que $d'F$ est la différentielle holomorphe de F sur $\mathbb{C}^{2n-1}$.)

La condition de positivité (2.1) s'énonce alors sur $\mathbb{C}^{2n-1}\times\mathbb{C}^{\times}$:

$$(2.3)\qquad -\frac{1}{i}\langle \operatorname{Im}\tau, (\operatorname{Re}k)\, d'F(\operatorname{Re}\tau)\rangle \geqq -C(|\operatorname{Im}\tau|+|\operatorname{Im}k|)^3$$

pour $(\tau, k)\in(\psi\circ\varphi)^{-1}(\Lambda)$ dans un voisinage de $(\psi\circ\varphi)^{-1}(p)$, pour une constante C.

Désignons alors par $\tilde{\Omega}$ l'image inverse de l'ouvert Ω de X par l'application $\tilde{\varphi}=\pi_1\circ\varphi$. C'est un tuboïde d'holomorphie de $\mathbb{C}^{2n-1}$ défini par :

$$\tilde{\Omega}=(\pi_1\circ\varphi)^{-1}(\Omega)=\{\tau\in\mathbb{C}^{2n-1};\ F(\tau)<0\}$$

et il suffit de démontrer que l'inégalité (2.3) entraîne $F(\tau)>0$ pour $|\operatorname{Im}\tau|$ assez petit.

On peut supposer que $k=1$ au point $(\psi\circ\varphi)^{-1}(p)$, et comme on a supposé Λ $\mathbb{C}^{\times}$-conique on peut se restreindre à $k=1$ dans l'inégalité (2.3). On obtient :

$$(2.4)\qquad -\frac{1}{i}\langle \operatorname{Im}\tau, d'F(\operatorname{Re}\tau)\rangle \geqq -C|\operatorname{Im}\tau|^3.$$

La forme $d''d'f(z)$ est définie positive pour $z\in Y$ sur les vecteurs $\theta\in T_z Y$ tels que $\langle\theta, d'f(z)\rangle=0$. Par suite la forme $d''d'F(t)$ est définie positive pour $t\in\mathbb{R}^{2n-1}$ sur les vecteurs $\theta\in\mathbb{R}^{2n-1}$ tels que $\langle\theta, d'F(t)\rangle=0$.

Posons $\tau=t+i\theta$, $F(\tau)=G(t,\theta)$. Alors $G(t,0)\equiv 0$, $G''_{\theta\theta}(t,0)$ est une forme définie positive sur les vecteurs θ tels que $\langle\theta, G'_\theta(t,0)\rangle=0$ et l'inégalité (2.4) s'écrit maintenant $\langle\theta, G'_\theta(t,0)\rangle\geqq C|\theta|^3$. On en conclut $G(t,\theta)\geqq 0$ pour $(t,\theta,1)\in(\psi\circ\varphi)^{-1}(\Lambda)$ ce qui achève la démonstration.

Nous allons donner des critères de positivité.

LEMME 2.3 [8]. — *Soit* K *un compact de* $\mathbb{R}^n$, U *un ouvert conique de* $i\mathbb{R}^n$, $\varphi(z,\theta)$ *une fonction homorphe dans* $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n$ *au voisinage de* $K\times U$, *homogène de degré* 1 *en* θ.

Supposons $\operatorname{Re}\varphi \geqq 0$ *sur* $K \times U$. *Alors pour tout compact de* U *il existe un voisinage* W *de ce compact dans* $\mathbb{C}^n$ *et une constante* C *tels que :*

$$\operatorname{Re}\langle \varphi'_\theta(x, \theta), i \operatorname{Im}\theta \rangle \geqq -C |\operatorname{Re}\theta|^3$$

pour $(x, \theta) \in K \times W$.

Démonstration. — Le paramètre x ne jouant aucun rôle dans la démonstration, nous ne l'écrirons pas. On a :

$$\varphi(\zeta) = \varphi(\theta) - \langle \theta - \zeta, \varphi'(\theta) \rangle + \frac{1}{2} \langle \theta - \zeta, \varphi''(\theta)(\theta - \zeta) \rangle + O(|\zeta - \theta|^3)$$

et :

$$\begin{aligned} \langle \varphi'(\theta) - \varphi'(\zeta), \zeta \rangle &= \langle \varphi'(\theta), \theta \rangle - \langle \varphi'(\zeta), \zeta \rangle + \langle \varphi'(\theta), \zeta - \theta \rangle \\ &= \varphi(\theta) - \varphi(\zeta) - \langle \varphi'(\theta), \theta - \zeta \rangle = -\frac{1}{2} \langle \varphi''(\theta)(\theta - \zeta), (\theta - \zeta) \rangle + O(|\zeta - \theta|^3) \\ &= -\frac{1}{2} \langle \varphi''(\zeta)(\theta - \zeta), (\theta - \zeta) \rangle + O(|\zeta - \theta|^3). \end{aligned}$$

Prenons $\zeta = i \operatorname{Im}\theta$. On trouve :

$$\operatorname{Re}\langle \varphi'(\theta), i \operatorname{Im}\theta \rangle = \operatorname{Re}\varphi(i \operatorname{Im}\theta) + \frac{1}{2} \langle \varphi''(i \operatorname{Im}\theta) \operatorname{Re}\theta, \operatorname{Re}\theta \rangle + O(|\operatorname{Re}\theta|^3)$$

et cette quantité est positive, modulo $O(|\operatorname{Re}\theta|^3)$ (*cf.* [8], lemme 1.6).

Supposons maintenant la fonction $\varphi(x, \theta)$ tangente à l'application $\langle x, \theta \rangle$ en un point $p \in K \times U \subset \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n$.

Soit T_φ la transformation canonique complexe qui a $(z, \zeta) \in T^* \mathbb{C}^n$ associe $(w, \theta) \in T^* \mathbb{C}^n$ au voisinage de p, par la relation :

$$w = \varphi'_\theta(z, \theta), \qquad \zeta = \varphi'_z(z, \theta).$$

THÉORÈME 2.4. — *On suppose* $\operatorname{Re}\varphi \geqq 0$ *pour* $(x, \theta) \in K \times U \subset \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n$. *Soit* $\Lambda_0 = T^*_{\mathbb{R}^n} \mathbb{C}^n$, $\Lambda_0^K = \{(x, i\eta) \in \Lambda_0 ; x \in K\}$, $\Lambda = T_\varphi(\Lambda_0^K)$. *Alors* $(\Lambda_0, \mathbb{C}^\times \Lambda)$ *est positif en* p.

Démonstration. — Soit $(w, \theta) \in \Lambda$, $k \in \mathbb{C}$, $|k| = 1$, $k \sim 1$.

Alors :

$$-\langle \operatorname{Im} w, \operatorname{Im}(k\theta) \rangle = \operatorname{Re}\langle \varphi'_\theta(x, k\theta), i \operatorname{Im}(k\theta) \rangle,$$

car $\varphi'_\theta(x, k\theta) = \varphi'_\theta(x, \theta) = w$.

D'après le lemme 2.3 cette quantité est supérieure à $-C|\operatorname{Re}(k\theta)|^3$.

Étudions la positivité des variétés $\mathbb{C}$-lagrangiennes.

DÉFINITION 2.5 [7]. — Soit Λ_0 une variété $\mathbb{R}$-lagrangienne et I-symplectique, Λ une variété $\mathbb{C}$-lagrangienne, définie au voisinage de $p\in\Lambda_0$. On dit que Λ est strictement positive par rapport à Λ_0 si :

(i) $\Lambda_0\cap\Lambda$ est une sous-variété de Λ_0;

(ii) la forme $\gamma_{T_p(\Lambda_0)}(\ ,\ )$ (*cf.* déf. 1.4) est définie négative sur $T_p\Lambda/N^{\mathbb{C}}$, où $N=T_p\Lambda_0\cap T_p\Lambda$.

THÉORÈME 2.6 [7]. — *Si* Λ *est strictement positive par rapport à* Λ_0 *en* p, (Λ_0, Λ) *est positif en* p.

Soit M une variété analytique réelle, X un complexifié de M, $\Lambda_0=T^*_M X$, Λ une variété $\mathbb{C}$-lagrangienne de T^*X, définie au voisinage de $p\in T^*_M X$. Rappelons ([7], lemme 3.4) que l'on peut toujours trouver des coordonnées holomorphes sur X, réelles sur M, et une fonction φ holomorphe homogène de degré 1, tel que Λ soit la variété :

$$\Lambda=\{(z, \zeta)\in T^*X;\ z=\varphi'(\zeta)\},$$

(z,ζ) désignant les coordonnées symplectiques associées aux coordonnées (z) de X. On a alors le résultat de Melin et Sjöstrand :

THÉORÈME 2.7 [8]. — *Dans la situation précédente*, (Λ_0, Λ) *est positif en* $p=(x^0, i\eta^0)\in\Lambda_0$ *si et seulement si* $\operatorname{Re}\varphi(\zeta)$ *est positif pour* $\zeta\in i\mathbb{R}^n$ *au voisinage de* $i\eta^0$.

On peut aussi construire des variétés $\mathbb{C}$-lagrangiennes positives à partir des « fonctions de type positif » définies dans [11], chap. 1, déf. 3.1.4.

Rappelons cette définition.

DÉFINITION 2.8 [11]. — Soit M une variété analytique réelle, φ une fonction analytique au voisinage de $x^0\in M$. On dit que φ est de type positif en x^0, si $\varphi(x')\neq 0$ ou si $\varphi(x^0)=0$, $d\varphi(x^0)=\eta^0$, $\eta^0\in\mathbb{R}$, $\eta^0\neq 0$ et $\operatorname{Re}\varphi=0$ implique $\operatorname{Im}\varphi\geqq 0$.

THÉORÈME 2.9. — *Soit* φ *une fonction de type positif en* $x^0\in M$. *Soit* X *un complexifié de* M, Y *la variété analytique complexe des zéros de* φ *dans* X. *Alors* $(T^*_M X, T^*_Y X)$ *est positif en* $p=(x^0, i\,d\varphi(x^0))$.

Démonstration. — On peut écrire, pour un choix de coordonnées réelles $x=(x_1, x')$ sur M :

$$\varphi(x)=x_1+ih(x),$$

avec $h(0)=0$, $dh(0)=0$, $h(0, x')\geqq 0$. On peut aussi écrire, par le théorème de division de Weïerstrass :

$$\varphi(x)=g(x)\,(x_1+l(x')+ik(x'))$$

pour des fonctions analytiques réelles l et k de x'. On a :

$$\operatorname{Re} g(0, x')\,l(x')-\operatorname{Im} g(0, x')\,k(x')=0,$$
$$h(0, x')=\operatorname{Im} g(0, x')\,l(x')+\operatorname{Re} g(0, x')\,k(x').$$

Mais $g(0)=1$. On obtient en substituant $(\operatorname{Im} g(0, x'))(\operatorname{Re} g(0, x'))^{-1}(k(x'))$ à $l(x')$:

$$h(0, x')=((\operatorname{Im} g(0, x'))^2+(\operatorname{Re} g(0, x'))^2)\, k(x')\operatorname{Re}(g(0, x'))^{-1}.$$

Comme $\operatorname{Re} g\,(0, x')>0$, $h\,(0, x')\geqq 0$, on a $k\,(x')\geqq 0$.

On est donc ramené à démontrer le théorème pour une fonction φ vérifiant $\operatorname{Im}\varphi\geqq 0$.

Comme nous l'a fait remarquer J. Sjöstrand, il suffit alors d'appliquer le théorème 3.6 de [7] en prenant comme fonction de phase :

$$\psi(z, \theta)=\frac{1}{i}\,\varphi(z).\theta,$$

avec $\theta\in\mathbb{C}$, θ voisin de i.

Nous sommes alors en mesure de donner une réciproque partielle au théorème 2.2.

THÉORÈME 2.10. — *Soit* Ω *un ouvert strictement pseudo-convexe de* X, *de bord* $\partial\Omega$, *hypersurface analytique réelle. Soit* $\Lambda_0=(T^*_{\partial\Omega}X)^+$ *le fibré conormal extérieur à* $\partial\Omega$, z^0 *un point de* $\partial\Omega$, $p=(z^0, \zeta^0)\in\Lambda_0$ *un point correspondant. Soit* S *une hypersurface analytique complexe tangente en* z^0 *à* $\partial\Omega$. *On suppose :*

$$S\cap\Omega=\emptyset \textit{ au voisinage de } z^0.$$

Alors $(\Lambda_0, T^*_S X)$ *est positif en* p.

Démonstration. — Plaçons nous dans la situation décrite dans la démonstration du théorème 2.2. Soit donc $Y=\partial\Omega$, Z le complexifié de Y dans $X\times\overline{X}$, φ une paramétrisation holomorphe de Z par $\mathbb{C}^{2n-1}$, qui envoie $\mathbb{R}^{2n-1}$ sur Y, et soit $\tilde{\varphi}=\pi_1\circ\varphi=\pi\circ\psi\circ\varphi$ la complexifiée de l'application de $\mathbb{R}^{2n-1}$ dans X, composée de $\varphi|_{\mathbb{R}^{2n-1}}$ et de l'injection de Y dans X :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{C}^{2n-1}\times\mathbb{C}^{\times} & \xrightarrow[\varphi]{} & Z\times\mathbb{C}^{\times} & \xrightarrow[\psi]{} & \dot{T}^*X & \xrightarrow[\pi]{} & X\\
\cup & & \cup & & \cup & & \\
\mathbb{R}^{2n-1}\times\mathbb{R}^{+} & \xrightarrow{\sim} & Y\times\mathbb{R}^{+} & \xrightarrow{\sim} & (T^*_Y X)^+ & &
\end{array}$$

$$Z\subset X\times\overline{X}\underset{\pi_1}{\rightarrow} X.$$

Soit f une équation réelle de Y, g une équation de S, telle que $d'f(z^0)=d'g(z^0)$. Posons

$$F=f\circ\tilde{\varphi},\qquad G=g\circ\tilde{\varphi},\qquad \tilde{Y}=F^{-1}(0),\qquad \tilde{S}=G^{-1}(0),$$
$$\tilde{\Omega}=\tilde{\varphi}^{-1}(\Omega)=\{\tau\in\mathbb{C}^{2n-1};\ F(\tau)<0\}.$$

Comme l'hypersurface complexe $\tilde{S}$ ne rencontre pas le tuboïde $\tilde{\Omega}$, la fonction $(1/i)\,G$ est de type positif en τ^0 d'après [11], chap. 1, lemme 3.1.6. On déduit du théorème 2.9 que $(T^*_{\mathbb{R}^{2n-1}}\mathbb{C}^{2n-1}, T^*_{\tilde{S}}\mathbb{C}^{2n-1})$ est positif en $(\tau^0, G'(\tau^0))$, d'où l'inégalité :

$$(2.5)\qquad -\langle \operatorname{Im}\tau, \operatorname{Im}(\lambda\, d'G(\tau))\rangle\geqq -C(|\operatorname{Im}\tau|+|\operatorname{Re}(\lambda\, d'G(\tau))|)^3$$

pour $\tau\in\tilde{S}$, λ voisin de 1.

Soit $(z, \zeta) \in \dot{T}^*_S X$. Alors $g(z)=0$, $\zeta=\lambda\, d' g(z)$. Soit $(\tau, k) \in \mathbb{C}^{2n-1} \times \mathbb{C}^\times$ d'image (z, ζ) par $\psi \circ \varphi$. On a vu dans la démonstration du théorème 2.2 que $\varphi^* \circ \psi^*(\omega)$ vaut $k\, d' \mathrm{F}(\tau)$ en ce point.

Comme :

$$\mathrm{G}(\tau)=g \circ \tilde{\varphi}(\tau)=g \circ \pi \circ \psi \circ \varphi(\tau),$$
$$\lambda\, d' \mathrm{G}(\tau)=\lambda \varphi^* \circ \psi^* \circ \pi^*\, d' g(\tilde{\varphi}(\tau))=\varphi^* \circ \psi^*(\omega)$$

puisque ω vaut $\lambda \pi^*\, d' g(\tilde{\varphi}(\tau))$ en (z, ζ). Par suite :

$$\lambda\, d' \mathrm{G}(\tau)=k\, d' \mathrm{F}(\tau). \tag{2.6}$$

D'autre part :

$$|\operatorname{Im} \tau|+|\operatorname{Re}(\lambda\, d' \mathrm{G}(\tau))| \sim |\operatorname{Im} \tau|+|\operatorname{Re}(k\, d' \mathrm{F}(\tau))|$$
$$\sim |\operatorname{Im} \tau|+|\operatorname{Re}(k\, d' \mathrm{F}(\operatorname{Re} \tau))| \sim |\operatorname{Im} \tau|+|(\operatorname{Im} k)\, d' \mathrm{F}(\operatorname{Re} \tau)|$$

et donc :

$$|\operatorname{Im} \tau|+|\operatorname{Re}(\lambda\, d' \mathrm{G}(\tau))| \sim |\operatorname{Im} \tau|+|\operatorname{Im} k|. \tag{2.7}$$

De plus :

$$(\operatorname{Im} k)(\operatorname{Re} d' \mathrm{F}(\tau))=\mathrm{O}(|\operatorname{Im} k|+|\operatorname{Im} \tau|)^2 \tag{2.8}$$

puisque $d' \mathrm{F}(\operatorname{Re} \tau)$ est purement imaginaire. Pour la même raison on a :

$$\operatorname{Im} d' \mathrm{F}(\tau)=\operatorname{Im} d' \mathrm{F}(\operatorname{Re} \tau)+\mathrm{O}(|\operatorname{Im} \tau|^2). \tag{2.9}$$

On déduit de (2.5), (2.7), (2.8), (2.9) l'inégalité :

$$-\frac{1}{i}\langle \operatorname{Im} \tau, (\operatorname{Re} k)\, d' \mathrm{F}(\operatorname{Re} \tau)\rangle \geqq -\mathrm{C}(|\operatorname{Im} \tau|+|\operatorname{Im} k|)^3, \tag{2.10}$$

c'est-à-dire l'inégalité (2.3).

Le théorème en résulte.

Remarque. — On ne peut espérer une réciproque au théorème 2.2 même quand Λ est une variété $\mathbb{R}$-lagrangienne et I-symplectique, sans hypothèse sur la signature de la forme de Levi γ_Λ sur $\mathrm{T}^*_{\{\pi(p)\}}\mathrm{X}$, comme le montre l'exemple suivant.

Sur $\mathrm{T}^* \mathbb{C}^n$, muni des coordonnées (z, ζ), avec $z=x+iy$, soit :

$$\Omega_0=\{z;\ \sum_j y_j^2<1\},$$
$$\Omega'_0=\{z;\ \sum_j y_j^2>1\},$$
$$\Omega_1=\{z;\ (y_1+2)^2+\sum_{j>1} y_j^2<9\},$$
$$\Omega'_1=\{z;\ (y_1-2)^2+\sum_{j>1} y_j^2<1\}$$

et soit Λ_0, Λ'_0, Λ_1, Λ'_1 les fibrés conormaux extérieurs à ces ouverts.

Soit :

$$p=(-i, 0, \ldots, 0; i, 0, \ldots, 0) \in \Lambda_0 \cap \Lambda_1,$$
$$q=(i, 0, \ldots, 0; i, 0, \ldots, 0) \in \Lambda'_0 \cap \Lambda'_1.$$

La transformation canonique :

$$(z, \zeta) \to (z-2i\zeta/\sqrt{\sum \zeta_i^2}, \zeta),$$

échange p et q et Λ_0 et Λ'_0, Λ_1 et Λ'_1 et pourtant on a les inclusions $\Omega_0 \subset \Omega_1$, $\Omega'_0 \supset \Omega'_1$.

3. Une application à l'étude de l'hypo-ellipticité analytique

Soit X une variété analytique complexe, $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X. On désigne par $\mathcal{E}_X$ le faisceau sur T^*X des opérateurs microdifférentiels d'ordre fini (*cf.* [11]). Si M est une variété analytique réelle de complexité X, on note par C_M le faisceau sur $T^*_M X$ des microfonctions de M. Sato (*cf.* [11]).

Soit Ω un ouvert strictement pseudo-convexe de X, de frontière $\partial\Omega$ hypersurface analytique réelle, et soit $\mathcal{O}^+_{\partial\Omega}$ le faisceau sur $\partial\Omega$ des valeurs au bord de fonctions holomorphes de Ω :

$$\mathcal{O}^+_{\partial\Omega} = \mathcal{H}^1_{X-\Omega}(\mathcal{O}_X)|_{\partial\Omega}.$$

On désigne par $C^+_{\partial\Omega}$ le faisceau sur $(T^*_{\partial\Omega}X)^+$ image réciproque de $\mathcal{O}^+_{\partial\Omega}$ par la projection $\pi : (T^*_{\partial\Omega}X)^+ \to \partial\Omega$. Le faisceau $C^+_{\partial\Omega}$ est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{E}_X$-modules ([3], [6]).

Soit φ une transformation canonique complexe homogène de $\dot{T}^*X$ qui échange, localement, $\dot{T}^*_M X$ et $(T^*_{\partial\Omega}X)^+$. Il est connu que l'on peut (localement) quantifier φ en isomorphisme de $\mathcal{E}_X$-modules des faisceaux C_M et $C^+_{\partial\Omega}$ (*cf.* [3], [4], ou encore [2] dans le cadre des distributions).

Soit maintenant Z une sous-variété analytique complexe de X. Le faisceau $C^{\mathbb{R}}_{Z|X}$ sur $T^*_Z X$ est défini dans [11] (*cf.* aussi [3]), et est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{E}_X$-module. Si Y et Z sont deux sous-variétés analytiques complexes de X, et φ une transformation canonique complexe homogène qui échange localement $T^*_Y X$ et $T^*_Z X$, on peut (localement) quantifier φ en un isomorphisme de $\mathcal{E}_X$-modules de $C^{\mathbb{R}}_{Y|X}$ sur $C^{\mathbb{R}}_{Z|X}$ (*cf.* [11]).

Rappelons comment l'on peut représenter une section du faisceau $C^{\mathbb{R}}_{Z|X}$ quand Z est une hypersurface. Supposons $X=\mathbb{C}^n$, Z défini par l'équation $z_n=0$, avec $z_n=x_n+iy_n$, dans les coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$. Soit $u \in (C^{\mathbb{R}}_{Z|X})_p$, où $p=(0; dx_n)$. On peut alors trouver un cone Γ convexe fermé propre de sommet l'origine dans $\mathbb{C}$, dont le polaire est un voisinage de dx_n, un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}^n$, et une fonction f holomorphe dans $(\mathbb{C}^{n-1} \times (\mathbb{C}-\Gamma)) \cap U$, dont la classe modulo $\mathcal{O}(U)$ vaille u.

DÉFINITION 3.1. — Soit Λ une variété $\mathbb{R}$-lagrangienne et I-symplectique (resp. $\mathbb{C}$-lagrangienne) de $\dot{T}^*X$. Nous dirons qu'un faisceau C_Λ sur Λ est un faisceau de microfonctions (resp. de microfonctions holomorphes) sur Λ si :

1° C_Λ est muni d'une structure de $\mathcal{E}_X$-module;

2° C_Λ est localement isomorphe par transformation canonique quantifiée, en tant que $\mathscr{E}_X$-module, au faisceau C_M sur T^*_M (resp. au faisceau $C^{\mathbb{R}}_{Z|X}$ sur $T^*_{Z|X}$ pour une sous-variété complexe Z de X).

THÉORÈME 3.2. — *Soit Λ_0 une variété $\mathbb{R}$-lagrangienne et* I-*symplectique de* T^*X *définie au voisinage de* $p \in \dot{T}^*X$ *et soit* Λ_1 *une sous-variété de* T^*X *au voisinage de p vérifiant l'une des deux hypothèses suivantes :*

(H.$\mathbb{R}$) Λ_1 *est une variété $\mathbb{R}$-lagrangienne et* I-*symplectique dans* T^*X, *et* $T_p\Lambda_0 \cap T_p\Lambda_1$ *est de codimension inférieure ou égale à un dans* $T_p\Lambda_0$.

(H.$\mathbb{C}$) Λ_1 *est une variété $\mathbb{C}$-lagrangienne* (*donc* $\mathbb{C}^\times$-*conique*).

On suppose $(\Lambda_0, \mathbb{C}^\times \Lambda_1)$ *positif en p. Soit* C_{Λ_i} *un faisceau de microfonctions* (*de microfonctions holomorphes dans le cas complexe*) *sur* Λ_i $(i=0, 1)$. *Il existe alors dans un voisinage de p, un morphisme injectif de* $\mathscr{E}_X$-*modules du faisceau* $C_{\Lambda_1} | \Lambda_0 \cap \Lambda_1$ *dans le faisceau* $\Gamma_{\Lambda_0 \cap \Lambda_1}(C_{\Lambda_0})$ *des sections à supports dans* $\Lambda_0 \cap \Lambda_1$ *du faisceau* C_{Λ_0}.

Remarque. — Le cas où Λ_1 est une variété lagrangienne complexe [hypothèse (H.$\mathbb{C}$)], correspond à celui déjà traité par Melin et Sjöstrand [7] : on obtient ainsi des « hyperfonctions de Fourier à phase complexe » (en se restreignant aux sections de C_{Λ_1} définies sur toute l'orbite de l'action de $\mathbb{C}^\times$).

Démonstration. — Faisons d'abord l'hypothèse (H.$\mathbb{R}$). On peut trouver par la proposition 1.9 une transformation canonique qui échange respectivement Λ_0 et Λ_1 en $(T^*_{\partial\Omega_0}X)^+$ et $(T^*_{\partial\Omega_1}X)^+$, pour deux ouverts strictement pseudo-convexes Ω_0 et Ω_1. L'hypothèse de positivité et le théorème 2.2 impliquent $\Omega_0 \subset \Omega_1$ et par suite $\pi(\Lambda_0 \cap \Lambda_1) = \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1$. Les fonctions holomorphes de Ω_1 définissent donc des sections du faisceau $\mathscr{O}^+_{\partial\Omega_0}$, nulles en dehors de $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1$, donc des sections du faisceau $C^+_{\partial\Omega_0}$ à support dans $(T^*_{\partial\Omega_0}X)^+ \cap (T^*_{\partial\Omega_1}X)^+$.

Si l'on fait maintenant l'hypothèse (H.$\mathbb{C}$), la démonstration est analogue. On peut échanger, par la proposition 1.8 Λ_0 et Λ_1 en $(T^*_{\partial\Omega_0}X)^+$ et $T^*_Z X$, pour un ouvert strictement pseudo-convexe Ω_0 et une hypersurface analytique complexe Z de X. L'hypothèse de positivité implique que Z ne rencontre pas Ω_0. On représente alors une section du faisceau $C^{\mathbb{R}}_{Z|X}$ par une fonction holomorphe dans un ouvert U qui contient $\Omega_0 \cup (\partial\Omega_0 \setminus Z)$.

Le théorème 3.2 permet de trouver des solutions non nulles d'une équation microdifférentielle dans C_{Λ_0}, connaissant des solutions de cette équation dans C_{Λ_1} : le résultat suivant se déduit immédiatement de ce théorème et du lemme 5.4 de [5]. Nous ne rappelons pas ici la définition de « direction microcaractéristique le long de Λ_1 », en renvoyant le lecteur à [5].

COROLLAIRE 3.3. — *Soit Λ_0 une variété $\mathbb{R}$-lagrangienne et* I-*symplectique dans* $\dot{T}^*X$, Λ_1 *une variété $\mathbb{C}$-lagrangienne, p un point de* $\Lambda_0 \cap \Lambda_1$, θ *un vecteur de* T_pT^*X *avec* $H(\theta)_\Lambda\omega \neq 0$, H *désignant l'isomorphisme symplectique de* TT^*X *sur* T^*T^*X, P *un opérateur microdifférentiel au voisinage de p de symbole principal* $\sigma(P)$. *On suppose :*

(*a*) (Λ_0, Λ_1) *est positif en p;*

(*b*) θ *est non microcaractéristique pour* P *sur* Λ_1 *et* $\sigma(P)(p)=0$. *Alors si* C_{Λ_0} *est un faisceau de microfonctions sur* Λ_0, *il existe une section u de* C_{Λ_0} *définie au voisinage de p, non nulle, à support dans* $\Lambda_0 \cap \Lambda_1$, *et solution de* $Pu=0$.

Quand l'opérateur P est à caractéristiques simples, et quand $\Lambda_0 = T^*_M X$, des résultats analogues (mais plus précis ou plus complets) ont déjà été donnés par Baouendi-Trèves-Zachmanoglou dans [1] et par Sjöstrand dans [15]. Le même problème a aussi été traité (là encore essentiellement quand P est à caractéristiques simples) quand $\Lambda_0 = T^*_{\partial\Omega_0} X$ pour un ouvert strictement pseudo-convexe Ω_0, par Tsuno [16] et Persson [10].

Le théorème 3.2 permet aussi d'obtenir des résultats d'hypo-ellipticité analytique.

COROLLAIRE 3.4. — *Soit* Λ_0 *et* Λ_1 *deux variétés* $\mathbb{R}$-*lagrangiennes et* I-*symplectiques dans* $\dot{T}^* X$, *définies au voisinage d'un point p. On suppose :*

(*a*) *la codimension de* $T_p \Lambda_0 \cap T_p \Lambda_1$ *dans* $T_p \Lambda_0$ *est inférieure ou égale à un;*

(*b*) $(\Lambda_1, \mathbb{C}^\times \Lambda_0)$ *est positif en p.*

Soit C_{Λ_i} *un faisceau de microfonctions sur* Λ_i $(i=0, 1)$ *et soit* $\mathscr{M}$ *un* $\mathscr{E}_X$-*module cohérent au voisinage de p, ayant la propriété :*

$$(\star) \qquad \mathscr{H}om_{\mathscr{E}_X}(\mathscr{M}, \Gamma_{\Lambda_0 \cap \Lambda_1}(C_{\Lambda_1}))_p = 0.$$

Alors :

$$(\star\star) \qquad \mathscr{H}om_{\mathscr{E}_X}(\mathscr{M}, C_{\Lambda_0})_p = 0.$$

Autrement dit $\mathscr{M}$ est hypo-elliptique analytique sur Λ_0 en p.

Remarquons que l'hypothèse $(\star)$ et la conclusion $(\star\star)$ ne dépendent pas du choix de faisceaux de microfonctions C_{Λ_i} sur Λ_i.

Remarque. — Dans [13] nous annoncions les principaux résultats de cet article, mais avec quelques incorrections. Il faut supprimer la remarque suivant l'énoncé du théorème 1, et remplacer respectivement les théorèmes 2 et 3 de [13] par les corollaires 3.3 et 3.4.

UN EXEMPLE : OPÉRATEURS DE LEWY-MIZOHATA GÉNÉRALISÉS. — Plaçons-nous dans $T^* \mathbb{C}^n$ muni des coordonnées $(z; \zeta) = (z_1, \ldots, z_n; \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, et posons $\zeta = (\zeta_1, \zeta'', \zeta_n)$. Soit P un opérateur microdifférentiel d'ordre $m > 0$, défini au voisinage du point $p^\pm = (0; 0, \ldots, \pm i)$ dont le symbole principal s'écrit :

$$\sigma(P)(z, \zeta) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(z, \zeta) (\zeta_1 + i z_1^k \zeta_n)^{\alpha_1} (\zeta'')^{\alpha''} \left(\left(z_n - \frac{i}{k+1} z_1^{k+1} \right) \zeta_n \right)^{\alpha_n},$$

où les a_α sont des symboles d'ordre 0, $\alpha = (\alpha_1, \alpha'', \alpha_n)$ et $a_{(m, 0, \ldots, 0)} \equiv 1$. On suppose que k est un entier impair.

(*a*) L'opérateur P n'est pas hypo-elliptique analytique au point p^- : il existe des microfonctions sur $\mathbb{R}^n$, non nulles, définies au voisinage de p^-, solutions de l'équation $Pu = 0$. Pour le voir désignons par Z l'hypersurface complexe d'équation $z_n - (i/(k+1)) z_1^{k+1} = 0$.

Alors $(T^*_{\mathbb{R}^n} \mathbb{C}^n, T^*_Z \mathbb{C}^n)$ est positif en p^- et on peut appliquer le corollaire 3.3.

(*b*) L'opérateur P est hypo-elliptique au point p^+ [c'est un morphisme injectif de $(C_{\mathbb{R}^n})_{p^+}$]. Pour appliquer le corollaire 3.4 désignons par Λ la variété déduite de $T^*_{\mathbb{R}^n} \mathbb{C}^n$ par la transformation canonique associée à la fonction :

$$\varphi(z, \theta) = \langle z, \theta \rangle + i \frac{z_1^{k+1}}{k+1} \theta_n,$$

en appliquant le théorème 2.4. On est ramené à vérifier que si l'opérateur Q a pour symbole principal :

$$Q_m(z,\zeta)=\sum_{|\alpha|=m} b(z,\zeta)(\zeta')^{\alpha'}(z_n\zeta_n)^{\alpha_n},$$

avec $\zeta=(\zeta',\zeta_n)$, b_α symboles d'ordre 0, $b_{(m,0,\dots,0)}\equiv 1$, les microfonctions sur $\mathbb{R}^n$, définies au voisinage de p^+ et à support dans l'hypersurface N d'équation $\{x_1=0\}$, solutions de l'équation $Qu=0$, sont nulles. Cela résulte du théorème 2.2 de [12].

(*c*) En fait le théorème 2.2 de [12] est plus précis. Si u est une microfonction sur $\mathbb{R}^n$ à support dans $N=\{x_1=0\}$, (au voisinage de p^+) et si les (v_j) $(j=0,\dots,m-1)$ sont des microfonctions de la variété N, l'équation :

$$Qu+\sum_{j=0}^{m-1} v_j\otimes\delta_N^{j}=0,$$

entraîne $u=0$. On en conclut facilement que l'opérateur P n'est pas résoluble dans les microfonctions au point p^+ (ce n'est pas un morphisme surjectif de $(C_{\mathbb{R}^n})_{p^+}$).

Le corollaire 3.4 ne rend pas compte d'opérateurs tels que $D_1+ix_1^2D_2$, mais on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3.5. — *Soit* Λ_0 *et* Λ_1 *deux variétés* $\mathbb{R}$-*lagrangiennes et* I-*symplectiques dans* $\dot{T}^*X$, *définies au voisinage d'un point p, et se rencontrant suivant une hypersurface conique analytique* N *de* Λ_0. *Soit* Λ_0^+ *l'un des demi-espaces fermés de* Λ_0 *de frontière* N, $\theta\in T^*\Lambda_0$ *la conormale à* Λ_0^+ *en p* [*si* Λ_0^+ *est définie par* $f>0$ *dans* Λ_0, *alors* $\theta=c\,df(p)$ *avec* $c>0$]. *Soit* $\mathcal{M}$ *un* $\mathcal{E}_X$-*module cohérent au voisinage de p et* C_{Λ_0} *un faisceau de microfonctions sur* Λ_0. *On suppose :*

(*a*) Λ_0 *et* Λ_1 *sont tangentes en p et* $(\Lambda_1,\mathbb{C}^\times\Lambda_0)$ *est positif en p.*

(*b*) θ *est micro-hyperbolique pour* $\mathcal{M}$ *sur* Λ_1, *c'est-à-dire* $\theta\notin C(SS(\mathcal{M}),\Lambda_1)$ (*cf.* [6]).

Alors $\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},C_{\Lambda_0})_p=0$.

La démonstration de cette proposition est une adaptation facile de la démonstration du théorème 5.1.2 de [6] que nous ne ferons pas ici.

Soit alors $\varphi(x,\theta)$ une fonction sur $\mathbb{R}^n\times i\mathbb{R}^n$, définie au voisinage d'un point $p\in\mathbb{R}^n\times i\dot{\mathbb{R}}^n$, qui se prolonge en fonction holomorphe au voisinage de p dans $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n$, homogène de degré 1 en θ, et posons $\psi(x,\theta)=\langle x,\theta\rangle$.

Supposons :

1° $(\operatorname{grad}\varphi=\operatorname{grad}\psi)\Leftrightarrow(x_1=0)$;

2° φ et ψ sont tangentes à l'ordre $\geqq 2$ en p;

3° $\operatorname{Re}\varphi\geqq 0$ pour $x_1\geqq 0$.

Soit $P(x,D_x)$ un opérateur microdifférentiel au voisinage de p, microhyperbolique dans la direction dx_1 sur $T^*_{\mathbb{R}^n}\mathbb{C}^n$ et soit T_φ la transformation canonique $(z,\zeta)\to(w,\theta)=T_\varphi(z,\zeta)$:

$$w=\varphi'_\theta(z,\theta),\qquad \zeta=\varphi'_z(z,\theta).$$

Soit $Q(x,D_x)$ un opérateur microdifférentiel au voisinage de $p\in T^*_{\mathbb{R}^n}\mathbb{C}^n$, de symbole principal :

$$\sigma(Q)(z,\zeta)=\sigma(P)(T_\varphi(z,\zeta)).$$

Alors Q est hypo-elliptique analytique en p : si u est une microfonction sur $\mathbb{R}^n$ au voisinage de p, solution de $Qu=0$, u est nulle au voisinage de p.

L'opérateur $Q(x, D_x)=D_1+ix_1^{2k}D_2$ avec $p=(0, 0; 0, \pm i)$, $k \geqq 1$ est un exemple typique de cette situation, avec $P=D_1$.

Le corollaire 3.4 et la proposition 3.5 permettent aussi d'étendre les résultats sur le prolongement des solutions holomorphes d'une équation aux dérivées partielles de [16], [9], [10] à des opérateurs de multiplicités variables.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. BAOUENDI, F. TREVES et E. C. ZACHMANOGLOU, *Flat Solutions and Singular Solutions of Homogeneous Linear Partial Differential Equations with Analytic Coefficients* (*Duke Math. J.* vol. 46, n° 2, 1979, p. 409-440).

[2] L. BOUTET DE MONVEL, *Convergence dans le domaine complexe des séries de fonctions propres* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 287, série A, 1978, p. 855-856).

[3] M. KASHIWARA, Exposés à l'Université Paris-Nord, 1976, non publiés et cours à l'Université Paris-Nord, 1976-1977.

[4] M. KASHIWARA et T. KAWAI, *Some Applications of Boundary Value Problems for Elliptic Systems of Linear Differential Equations* (*Ann. of Math. Studies*, n° 93, Princeton, Princeton Univ. Press, 1980).

[5] M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA, *Problème de Cauchy pour les systèmes microdifférentiels dans le domaine complexe* (*Invent. Math.*, vol. 46, 1978, p. 17-38).

[6] M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA, *Micro-Hyperbolic Systems* (*Acta Mathematica*, vol. 142, 1979, p. 1-55).

[7] A. MELIN et J. SJÖSTRAND, *Fourier Integral Operators with Complex Valued Phase Functions* (*Lecture Notes in Math.*, n° 459, Springer, 1975, p. 120-223).

[8] A. MELIN et J. SJÖSTRAND, *Fourier Integral Operator with Complex Phase Functions and Parametrix for an Interior Boundary Value Problem* (*Comm. Partial Diff. Eq.*, vol. 1, 1976, p. 313-400).

[9] Ph. PALLU DE LA BARRIÈRE, *Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles* (*J. Math. pures et Appl.*, t. 55, 1976 p. 21-46).

[10] J. PERSSON, *Local Analytic Continuation of Holomorphic Solutions of Partial Differential Equation* (*Ann. Mat. pura appl.*, vol. 4, n° 112, 1977, p. 193-204).

[11] M. SATO, T. KAWAI et M. KASHIWARA, *Hyperfunctions and Pseudodifferential Equations* (*Lecture Notes in Math.*, n° 287, Springer, 1973, p. 265-529).

[12] P. SCHAPIRA, *Propagation au bord et réflexion des singularités analytiques des solutions des équations aux dérivées partielles II* (*Séminaire Goulaouic-Schwartz*, 1976-1977), exposé n° 9).

[13] P. SCHAPIRA, *Rencontre sur les E.D.P. linéaires*, Saint-Cast, mai 1979.

[14] P. SCHAPIRA, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 289, série A, 1979, p. 783-785.

[15] J. SJÖSTRAND, *Applications of Fourier Distributions with Complex Phase Functions* (*Lecture Notes in Math.*, n° 459, Springer, 1975, p. 255-282).

[16] J. TSUNO, *On the Prolongation of Local Holomorphic Solutions of Partial Differential Equations* (*J. Math. Soc. Japan*, vol. 26, 1974, p. 523-548).

(Manuscrit reçu le 12 mai 1980.)

Pierre SCHAPIRA,
Département de Mathématiques,
C.S.P. Université Paris-Nord,
avenue J.-B. Clément,
93430 Villetaneuse.