J.-F. MATTEI
R. MOUSSU

Holonomie et intégrales premières

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 13, nº 4 (1980), p. 469-523
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1980_4_13_4_469_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 13, 1980, p. 469 à 523.

HOLONOMIE ET INTÉGRALES PREMIÈRES

PAR J.-F. MATTEI ET R. MOUSSU

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
0. *Introduction*	470
1. Critères calculatoires	471
2. Critères formels	471
3. Critère topologique	472
4. Prolongement d'intégrale première	473
5. Plan de l'article	474
6. Autres types d'intégrale première	474
I. *Sous-groupes de difféomorphismes de* $(\mathbb{C}, 0)$	475
1. Groupe d'invariance d'une série d'une variable	475
2. Critère topologique de finitude	477
II. *Critères topologiques d'existence en dimension* 2, *dans le cas réduit*	479
1. Holonomie d'une variété invariante	480
2. Linéarisation des 1-formes irréductibles	482
3. Démonstration du théorème B	484
III. *Notions d'éclatements*	485
1. Éclatement d'un point	485
2. Éclaté d'une série formelle	486
3. Saturation d'un feuilletage singulier	487
4. Éclatement d'un germe de feuilletage	488
5. Holonomie de ω	489
6. Calcul de l'holonomie linéaire lorsque $n=2$	491
IV. *Convergence d'intégrales premières en dimension* 2 *dans le cas réduit*	492
1. Critère de convergence	492
2. Intégrale première et holonomie	495
3. Démonstration du théorème A dans le cas réduit, $n=2$	497
4. Démonstration du théorème de factorisation dans le cas réduit, $n=2$	499
V. *Démonstration des théorèmes en dimension* 2	499
1. Recollement d'intégrales premières locales	500
2. Démonstration du lemme 1	502
3. Démonstration du théorème 1	503

4. Démonstration du théorème 3. 504
5. Démonstration du théorème 2. 505
VI. *Extension d'intégrales premières*. 506
1. Théorème de Prolongement. 506
2. Théorème de transversalité. 507
3. Démonstration des théorèmes A et B. 509
Appendice I. 510
Réduction d'un germe de 1-forme holomorphe en $0 \in \mathbb{C}^2$, d'après A. Ven den Essen et A. Seidenberg. . 510
Appendice II. 517
Existence de variétés intégrales d'une 1-forme réduite de $(\mathbb{C}^2, 0)$. 517
Bibliographie. 522

Introduction

Soient $\mathcal{O}_n$ l'anneau des germes en $0 \in \mathbb{C}^n$ de fonctions holomorphes, $\hat{\mathcal{O}}_n$ l'anneau des séries formelles sur $\mathbb{C}$ à n indéterminées et soit

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i \, dx_i, \qquad a_i \in \mathcal{O}_n,$$

un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme différentielle holomorphe, intégrable, i.e. $\omega \wedge d\omega = 0$, qui s'annule en 0. Un élément $f \in \mathcal{O}_n$ (resp. $\hat{\mathcal{O}}_n$) non constant tel que

$$\omega \wedge df = 0,$$

est une *intégrale première* holomorphe (resp. formelle de ω). Si de plus, il existe $g \in \mathcal{O}_n$ (resp. $\hat{\mathcal{O}}_n$) tel que

$$g\,\omega = df, \qquad g(0) \neq 0,$$

nous dirons que f est une *intégrale première forte* (1) de ω. Ces deux notions ne sont pas équivalentes; on peut s'en convaincre avec l'exemple suivant :

$$\omega = p x_2 \, dx_1 + q x_1 \, dx_2;$$
$$f = x_1^p x_2^q; \qquad p, q \in \mathbb{N}, \quad p.q > 1.$$

On peut distinguer trois types de critères relatifs à l'existence d'intégrales premières :

1° critères calculatoires : ils portent essentiellement sur le *lieu singulier* $S(\omega)$ de ω, i.e. le germe d'ensemble analytique d'équations

$$a_1(x) = a_2(x) = \ldots = a_n(x) = 0;$$

(1) Nous adoptons ici une terminologie plus précise et appelons intégrale première forte, ce que nous avons appelé intégrale première dans [17].

2° critères formels : il s'agit de trouver des relations entre les anneaux des intégrales premières formelles et holomorphes;

3° critère topologique : l'existence d'une intégrale première peut-elle être lue sur la topologie du « feuilletage singulier » défini par ω?

1. CRITÈRES CALCULATOIRES. — Lorsque ω possède une intégrale première forte, la différentielle $d\omega$ de ω s'annule en 0 et le jet d'ordre 1 de ω en $0 \in \mathbb{C}^n$, $j^1\omega$, est la différentielle d'une forme quadratique Q. Réciproquement, G. Reeb démontre dans sa thèse [19] :

Critère de Reeb. — Si $j^1\omega$ est la différentielle d'une forme quadratique Q de rang maximal, ω possède une intégrale première forte.

Dans [18], il est montré que ce résultat est encore vrai avec les hypothèses plus faibles

$$S(\omega)=\{0\}, \qquad J^1_\omega = dQ \quad \text{avec rang } Q \geqq 2.$$

Enfin, dans [15], B. Malgrange donne le critère très général suivant :

Critère de Malgrange. — Si codim $S(\omega) \geqq 3$, alors ω possède une intégrale première forte.

Il est clair que la condition codim $S(\omega) \geqq 3$ n'est pas nécessaire. D'autre part, le cas codim $S(\omega) \geqq 2$, peut-être considéré comme le cas général; en effet, on peut toujours factoriser le plus grand commun diviseur g des composantes a_i de ω si codim $S(\omega)=1$. On obtient ainsi :

$$\omega = g\,\omega', \qquad g \in \mathcal{O}_2, \quad \text{codim } S(\omega') \geqq 2.$$

Le théorème suivant montre qu'alors l'existence d'intégrales premières se ramène à un problème à deux variables.

THÉORÈME DE PROLONGEMENT. — *Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe intégrable tel que* codim $S(\omega) \geqq 2$ *et soit j un prolongement de* $(\mathbb{C}^2, 0)$ *dans* $(\mathbb{C}^n, 0)$ *tel que*

$$S(j^*(\omega))=\{0\}.$$

Si $j^*(\omega)$ possède une intégrale première (resp. forte) $f_0 \in \mathcal{O}_2$, alors ω possède une unique intégrale première (resp. forte) $f \in \mathcal{O}_n$ telle que

$$f_0 = f \circ j.$$

L'existence de plongements j vérifiant la condition $S(j^*(\omega))=\{0\}$ a été montrée dans [17]. Cependant nous reprendrons cette démonstration dans le chapitre VI (th. 2). Le théorème de prolongement proprement dit est démontré dans ce même chapitre dans le cas des intégrales premières (th. 1). Le cas des intégrales premières fortes s'en déduit immédiatement en utilisant le lemme de division de G. de Rham.

2. CRITÈRES FORMELS. — Supposons que ω possède une intégrale première formelle f. Deux questions bien distinctes se posent alors :

— ω possède-t-il une intégrale première holomorphe ? Dans [15], B. Malgrange donne une réponse positive dans le cas des intégrales premières fortes [et codim $S(\omega) \geqq 2$]. Nous verrons avec le théorème A ci-dessous que ce résultat reste vrai dans le cas général;

— trouver des critères de convergence de f. Le résultat suivant qui sera démontré dans le chapitre IV (th. 1) est de ce type.

THÉORÈME DE CONVERGENCE. — *Soit* $f \in \hat{\mathcal{O}}_n$ *une intégrale première de* ω *et soit* $c : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ *un germe de courbe holomorphe transverse à* ω, *i. e. tel que* $c^*(\omega) \not\equiv 0$. *Alors* f *converge, i. e.* $f \in \mathcal{O}_n$, *dès que* $f \circ c$ *converge, i. e.* $f \circ c \in \mathcal{O}_1$.

Notons $f = f_1^{k_1} . f_2^{k_2} \dots f_p^{k_p}$ la décomposition de f en facteurs irréductibles et soit d le plus grand commun diviseur de $k_1, k_2, \dots, k_p$. Nous dirons que f *n'est pas une puissance* si $d = 1$. Si f est une puissance, il est clair que « sa » racine d-ième :

$$\sqrt[d]{f} = f_1^{k'_1} . f_2^{k'_2} \dots f_p^{k'_p}, \qquad k'_i = \frac{k_i}{d}$$

est encore une intégrale première de ω si f en est une. La condition « n'est pas une puissance » n'est donc pas restrictive et elle s'interprète géométriquement comme nous le verrons dans le paragraphe suivant :

THÉORÈME A. — *Soit* ω *un germe en* $0 \in \mathbb{C}^n$ *de* 1*-forme intégrable, holomorphe qui possède une intégrale première formelle* $f \in \hat{\mathcal{O}}_n$ *qui n'est pas une puissance. Alors, il existe* $l \in \hat{\mathcal{O}}_1$ *tel que*

$$g = l \circ f \in \mathcal{O}_n \qquad \text{et} \qquad l'(0) \neq 0.$$

De plus, l'anneau des intégrales premières holomorphes (resp. formelles) de ω *est l'ensemble des composés* $\mathcal{O}_1 \circ g = \mathbb{C}\{g\}$ *(resp.* $\hat{\mathcal{O}}_1 \circ g = \mathbb{C}[[g]]$*).*

La deuxième partie du théorème A se déduit visiblement de la première et du résultat suivant :

THÉORÈME DE FACTORISATION. — *Soient* $f, g \in \mathcal{O}_n$ *(resp.* $\hat{\mathcal{O}}_n$*) tels que* $df \wedge dg = 0$. *Alors, si* f *n'est pas une puissance il existe* $l \in \mathcal{O}_1$ *(resp.* $\hat{\mathcal{O}}_1$*) tel que* $g = l \circ f$.

Il nous semble que les résultats de H. Dulac dans [10], chap. II, soient une autre forme de la première partie du théorème A, dans le cas $n = 2$. Les techniques employées par H. Dulac sont sensiblement différentes des notres; en effet, elles reposent essentiellement sur des majorations fines alors que celles utilisées ici sont purement « géométriques ».

3. CRITÈRES TOPOLOGIQUES. — Soit toujours ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme intégrable, holomorphe. Nous notons encore $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i \, dx_i$ un représentant de ω qui est holomorphe sur un voisinage U de 0 et S(ω) le sous-ensemble analytique de U d'équations

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Sur U $-$ S(ω), ω définit un feuilletage holomorphe de codimension 1, $\mathcal{F}_\omega/\mathrm{U}$. Le *feuilletage singulier défini par* ω est le couple

$$\underline{\mathcal{F}}_\omega/\mathrm{U} = \{ \mathrm{S}(\omega), \mathcal{F}_\omega/\mathrm{U} \}.$$

Au germe de ω en 0 correspond, en un sens clair, le germe de $\underline{\mathcal{F}}_\omega/\mathrm{U}$ en 0, noté $\underline{\mathcal{F}}_\omega$ et appelé *germe de feuilletage singulier défini* par ω.

Soit ω' un second germe de 1-forme intégrable, holomorphe. Nous dirons que ω et ω', ou encore $\underline{\mathscr{F}}_\omega$ et $\underline{\mathscr{F}}_{\omega'}$ sont topologiquement équivalents s'il existe des voisinages U et U' de 0 sur lesquels ω et ω' possèdent respectivement des représentants holomorphes et s'il existe un homéomorphisme h de U sur U' qui applique $S(\omega)$ sur $S(\omega')$ et les feuilles de $\mathscr{F}_\omega/U$ sur les feuilles de $\mathscr{F}_{\omega'}/U'$. Nous allons voir que si ω et ω' sont topologiquement équivalents, alors ω possède une intégrale première holomorphe dès que ω' en possède une. C'est-à-dire que l'existence d'une intégrale première est uniquement une propriété topologique.

Supposons qu'un germe $f \in \mathcal{O}_n$ soit une intégrale première de ω et que ω et f possèdent des représentants holomorphes notés encore ω, f, sur U, un voisinage de 0. La condition $\omega \wedge df = 0$ signifie que f est constante sur les feuilles de $\mathscr{F}_\omega/U$, c'est-à-dire que les feuilles de $\mathscr{F}_\omega/U$ sont les composantes connexes des hypersurfaces de niveau de f. Dans ce cas, on peut donc affirmer que :

(*a*) les feuilles de $\mathscr{F}_\omega/U$ sont des fermés de $U - S(\omega)$;

(*b*) l'ensemble des feuilles de $\mathscr{F}_\omega/U$ adhérentes à 0 est fini.

Plus généralement, nous dirons que le germe de feuilletage singulier $\underline{\mathscr{F}}_\omega$ *est simple* s'il existe un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{C}^n$ sur lequel $\mathscr{F}_\omega/U$ vérifie (*a*) et :

(*b'*) l'ensemble des feuilles de $\mathscr{F}_\omega/U$ adhérentes à 0 est au plus dénombrable.

La condition (*a*) signifie en fait que les feuilles de $\mathscr{F}_\omega/U$ sont des sous-variétés analytiques de $U - S(\omega)$. En effet, une feuille fermée ne peut être ni localement dense, ni exceptionnelle (*voir* [19]); elle est donc propre et c'est une sous-variété de U.

THÉORÈME B. — *Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme intégrable, holomorphe. Alors ω possède une intégrale première holomorphe si et seulement si $\underline{\mathscr{F}}_\omega$ est simple.*

4. PROLONGEMENT D'INTÉGRALES PREMIÈRES. — Soit h un germe d'application holomorphe de $(\mathbb{C}^p, 0)$ dans $(\mathbb{C}^n, 0)$. Nous dirons que h est transverse à ω si

$$S(h^*(\omega)) = h^{-1}(S(\omega)),$$
$$\operatorname{codim} S(h^*(\omega)) = \inf(p, \operatorname{codim} S(\omega)).$$

Si h est transverse à ω, il est clair que h est transverse à $\mathscr{F}_\omega$. Dans le chapitre VI nous prouvons que, pour $p < n$, l'ensemble des plongements de $(\mathbb{C}^p, 0)$ dans $(\mathbb{C}^n, 0)$ transverses à ω est « générique ». Nous déduisons alors facilement des théorèmes A, B et du théorème de prolongement énoncé dans le paragraphe 1 le corollaire suivant :

COROLLAIRE C. — *Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe intégrable et h un germe d'application de $(\mathbb{C}^p, 0)$ dans $(\mathbb{C}^n, 0)$ transverse à η, où $\omega = g\eta$ avec* $\operatorname{codim} S(\eta) \geqq 2$, $g \in \mathcal{O}_n$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) ω *possède une intégrale première holomorphe;*

(ii) $h^*(\omega)$ *possède une intégrale première formelle;*

(iii) *le germe de feuilletage singulier $\underline{\mathscr{F}}_{h^*(\omega)}$ est simple.*

Nous reprendrons dans le chapitre VI la démonstration faite dans [17], de l'équivalence entre (i) et (ii), pour des intégrales premières fortes.

5. PLAN DE LA DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES A ET B. — Dans l'appendice I nous montrons qu'un germe ω en $0 \in \mathbb{C}^2$ de 1-forme holomorphe peut se ramener par des éclatements successifs aux deux cas irréductibles. Nous dirons que ω *est irréductible* s'il existe un germe de 1-forme holomorphe tel que $\omega \wedge \eta = 0$ et tel que le jet d'ordre 1 de η en 0 s'écrive :

$$j^1 \eta = \lambda_1 y\, dx - \lambda_2 x\, dy,$$

où (λ_1, λ_2) vérifie l'une des deux conditions :

$$(\star) \qquad \lambda_1 . \lambda_2 \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1/\lambda_2, \quad \lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{N},$$

$$(\star\star) \qquad \lambda_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 \neq 0.$$

Ce résultat est bien connu, cependant nous avons pensé qu'il était utile d'en reprendre la démonstration de A. Ven den Essen [23], et une partie de la démonstration de A. Seidenberg. Nous désignons par $N(\omega)$ le nombre d'éclatements utilisés dans la réduction d'une 1-forme ω.

Nous sommes maintenant en mesure de décrire le plan de la démonstration des théorèmes A et B. Elle repose sur deux réductions :

1° réduction à la dimension 2; c'est le théorème de prolongement déjà énoncé;

2° réduction aux cas irréductibles lorsque $n = 2$; c'est l'objet du chapitre V. Sa démonstration se fait par récurrence sur $N(\omega)$.

La démonstration du théorème A dans le cas irréductible repose sur la notion de groupe d'invariance d'une série formelle à une indéterminée (chap. I) et sur la notion d'holonomie du feuilletage éclaté (chap. III). Enfin, dans le chapitre IV nous terminons cette démonstration et montrons le théorème de convergence énoncé dans le paragraphe 1.

La démonstration du théorème B dans le cas irréductible repose sur l'interprétation de l'existence d'une intégrale première à l'aide du difféomorphisme d'holonomie d'une variété invariante de ω (chap. II). L'existence d'une telle variété est bien connue (nous rappelons sa démonstration dans l'appendice II). Dans le chapitre I nous démontrons un critère topologique de périodicité d'un germe de difféomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$ qui sera la clef du passage topologique-analytique.

6. AUTRES TYPES D'INTÉGRALES PREMIÈRES. — Des classes plus étendues d'intégrales premières ont été étudiées notamment par H. Dulac dans sa thèse [10] et dans [11]. Soient ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe intégrable, $f_1, f_2, \ldots, f_p$ des éléments de $\mathcal{O}_n$ (resp. $\hat{\mathcal{O}}_n$) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, p nombres complexes. On dit que $f_1^{\lambda_1} . f_2^{\lambda_2} \ldots . f_p^{\lambda_p}$ est une intégrale première convergente (resp. formelle) de ω si

$$\omega \wedge \eta = 0,$$

où η est la forme intégrable définie par

$$\begin{cases} \eta = \lambda_1 F_1\, df_1 + \ldots + \lambda_p F_p\, df_p, \\ F_j = f_1 \ldots f_{j-1} . f_{j+1} \ldots f_p, \qquad j = 1, 2, \ldots, p. \end{cases}$$

Lorsque les λ_j sont des entiers relatifs, f est méromorphe convergente (resp. formelle) et lorsque les $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$ nous dirons que f est *multiforme* convergente (resp. formelle). On peut chercher, comme dans le cadre holomorphe, des critères formels ou topologiques d'existence d'intégrales premières convergentes méromorphes ou multiformes.

1. *Cas méromorphe*. — Il n'existe pas de critère topologique d'existence d'intégrale première méromorphe : M. Suzuki construit dans [22] un germe ω de 1-forme en $0 \in \mathbb{C}^2$, holomorphe dont toutes les feuilles sont des germes de courbes analytiques et qui n'a pas d'intégrale première méromorphe. Dans [8], il est prouvé que le germe de feuilletage singulier $\mathcal{F}_\omega$ est topologiquement conjugué à un germe $\mathcal{F}_{gdf-fdg}$ où $f, g \in \mathcal{O}_2$.

Les problèmes de convergence en dimension 2 ont été étudiés par H. Dulac dans un cadre un peu plus restrictif. Dans [8], il est montré que toute intégrale première méromorphe formelle est convergente. Plus précisément si

$$\omega \wedge (fdg - gdf) = 0, \qquad f, g \in \hat{\mathcal{O}}_n,$$

il existe $u \in \hat{\mathcal{O}}_n$ tel que uf, $ug \in \mathcal{O}_n$, si f/g et g/f ne sont pas des éléments de $\mathcal{O}_n$.

2. *Cas multiforme* [7]. — Il existe alors de nouveau un critère topologique. Le passage formel-convergent nécessite dans ce cadre des conditions de petits dénominateurs sur les exposants λ_j.

Signalons enfin que tous les résultats obtenus dans ce travail, sauf évidemment le critère topologique, restent vrais dans le cadre analytique réel.

Nous remercions vivement D. Cerveau, I. Kupka et J. Lewowicz pour les nombreuses conversations que nous avons eues avec eux.

I. — Sous-groupes de difféomorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$

1. Groupes d'invariance d'une série d'une variable. — Soit $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ *le groupe des difféomorphismes formels de* $(\mathbb{C}, 0)$:

$$\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}, 0) = \{ h \in \hat{\mathcal{O}}_1 \mid h'(0) \neq 0 \text{ et } h(0) = 0 \},$$

et soit $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ le sous-groupe de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ des germes de difféomorphisme analytiques de $(\mathbb{C}, 0)$. Deux sous-groupes H et H′ de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ [resp. de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$] sont dits formellement (resp. analytiquement) conjugués s'ils se déduisent l'un de l'autre par un changement de variables formel, (resp. analytique) de $(\mathbb{C}, 0)$, i.e. s'il existe un automorphisme intérieur $\tau_g : h \to g \circ h \circ g^{-1}$ de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$, [resp. de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$] qui applique l'un sur l'autre. Énonçons un résultat bien connu.

Proposition 1.1. — *Tout sous-groupe fini* H *de* $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ [*resp. de* $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$] *est formellement* (*resp. analytiquement*) *conjugué au groupe* R_q, $q = \# H$, *engendré par la rotation* $r_q : x \to e^{(2i\pi/q)x}$.

Démonstration. — On vérifie immédiatement que

$$g(x)=\sum_{h\in \mathrm{H}} \frac{h(x)}{h'(0)}$$

est un difféomorphisme et que

$$g\circ h\circ g^{-1}(x)=h'(0)\,x, \qquad \text{si} \quad h\in \mathrm{H};$$

c'est-à-dire que g conjugue H au groupe $\mathrm{J}^1\,\mathrm{H}$ des jets d'ordre 1 de H en 0, qui est visiblement le groupe R_q.

Nous pouvons associer à toute série formelle $f\in\hat{\mathcal{O}}_1$ son *groupe d'invariance*

$$\mathrm{H}(f)=\{h\in \widehat{\mathrm{Diff}}\,(\mathbb{C}, 0)/f\circ h=f\}.$$

Remarquons que $\mathrm{H}(f)$ est fini. En effet, notons

$$f(x)=\sum_{k\geqq \nu} a_k x_k = x^{\nu}(a_{\nu}+u(x)), \qquad a_{\nu}\neq 0,$$

et soit $g(x)=x(a_{\nu}+u(x))^{1/\nu}$ une racine ν-ième de f,

$$f\circ g^{-1}(x)=x^{\nu}.$$

L'automorphisme intérieur τ_g associé à g conjugue le groupe $\mathrm{H}(f)$ au groupe $\mathrm{H}(f\circ g^{-1})=\mathrm{R}_{\nu}$; or g est analytique dès que f est analytique, et τ_g induit un automorphisme de Diff $(\mathbb{C}, 0)$. On a alors : $\mathrm{H}(f)\subset\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. La réciproque est fausse puisque

$$\mathrm{H}(f)=\mathrm{H}(l\circ f), \qquad \text{pour} \quad l\in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}, 0).$$

Cependant, supposons que $\mathrm{H}(f)$ soit contenu dans Diff$(\mathbb{C}, 0)$. D'après la proposition précédente nous pouvons choisir un paramétrage analytique z de $(\mathbb{C}, 0)$ de sorte que $\mathrm{H}(f)$ soit engendré par la rotation $r_{\nu}(z)=e^{2i\pi/\nu}z$. De l'égalité

$$f(z)=f(e^{2i\pi/\nu}z),$$

il est facile de déduire que

$$f(z)=\sum_{k\geqq 1} b^{k\nu} z^{k\nu}=l(z^{\nu}), \qquad l'(0)=b_{\nu}\neq 0.$$

Ainsi $l^{-1}\circ f(z)=z^{\nu}$ est un germe analytique. On a prouvé la proposition suivante :

PROPOSITION 1.2. — *Si* $f\in\hat{\mathcal{O}}_1$ *est une série formelle d'une variable, d'ordre* ν, $\mathrm{H}(f)$ *est formellement conjugué à* R_{ν}; *si, de plus,* f *est analytique,* $\mathrm{H}(f)$ *est contenu dans* Diff$(\mathbb{C}, 0)$ *et la conjugaison à* R_{ν} *est aussi analytique. Réciproquement, si* $\mathrm{H}(f)\subset\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ *il existe une série* $l\in\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ *telle que* $l\circ f$ *soit analytique.*

2. UN CRITÈRE TOPOLOGIQUE DE FINITUDE. — Pour prouver la finitude d'un sous-groupe H de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, il suffit de montrer que tous ses éléments sont *périodiques*, i. e. pour tout $h \in \mathrm{H}$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $h^p = \mathrm{Id}$. En effet H est alors commutatif car tout commutateur s'écrit :

$$c(x) = h \circ g \circ h^{-1} \circ g^{-1}(x) = x + a_\nu x^\nu + \ldots,$$

et il est clair que c ne peut être périodique que si $a_\nu = 0$.

Ainsi pour obtenir un critère de finitude de H, on est ramené à déterminer un critère de périodicité d'un germe de difféomorphisme h quelconque. Soit U un voisinage ouvert de 0 sur lequel h est défini, holomorphe et injectif. Si V est un sous-ensemble de U, nous appelons V-*orbite* d'un point $x \in \mathrm{V}$ l'ensemble des itérés positifs et négatifs de x contenus dans V :

$$\mathrm{O_V}(x) = \{ h^p(x) / h(x), \ldots, h^p(x) \in \mathrm{V} \} \cup \{ h^{-q}(x) / h^{-1}(x), \ldots, h^{-q}(x) \in \mathrm{V} \} \cup \{ x \}.$$

Notons $\mu_\mathrm{V}(x) \in \mathbb{N} \cup \{ \infty \}$ le *nombre d'itérations de x dans* V :

$$\mu_\mathrm{V}(x) = \sup \{ p > 0 \mid h^p(x) \in \mathrm{O_V}(x) \} + \sup \{ p > 0 \mid h^{-p}(x) \in \mathrm{O_V}(x) \} + 1.$$

Si $\mu_\mathrm{V}(x) = \infty$ et $\# \mathrm{O_V}(x) < \infty$ le point x est *périodique dans* V. Si $\mu_\mathrm{V}(x)$ est fini, il est égal au nombre d'éléments de $\mathrm{O_V}(x)$. Nous dirons que le germe h est *à orbites finies* s'il existe un voisinage ouvert V de 0 sur lequel h est défini, holomorphe, injectif et tel que

$$\# \mathrm{O_V}(x) < \infty, \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{V}.$$

THÉORÈME 2. — *Un élément $h \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ est périodique si et seulement s'il est à orbites finies. De façon plus précise, si $h \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ n'est pas périodique, il existe un système fondamental de voisinages ouverts* U *de* 0 *dans* $\mathbb{C}$ *sur lesquels h est holomorphe, injectif et tels que : pour chaque* U, *l'ensemble des points* $x \in \mathrm{U}$ *dont la* U-*orbite est infinie est non dénombrable et contient* 0 *dans son adhérence.*

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant dont nous devons la démonstration à J. Lewowicz.

LEMME 2.2. — *Soit* K *un voisinage compact connexe de* $0 \in \mathbb{R}^n$ *et h un homéomorphisme de* K *sur* $f(\mathrm{K}) \subset \mathbb{R}^n$ *vérifiant* $f(0) = 0$. *Il existe alors un point x de la frontière* $\partial\mathrm{K}$ *de* K *dont le nombre d'itérations dans* K *soit infini.*

Démonstration du lemme. — Notons plus simplement $\bar{\mu} = \mu_\mathrm{K}$, et $\mu = \mu_{\mathring{\mathrm{K}}}$ le nombre d'itérations dans l'intérieur $\mathring{\mathrm{K}}$ de K. Remarquons que $\bar{\mu}(x) = p$ si et seulement si $p = p_1 + p_2 + 1$, p_1 et p_2 étant des entiers $\geqq 0$ vérifiant :

$$\begin{cases} x, h(x), \ldots, h^{p_1}(x), h^{-1}(x), \ldots, h^{-p_2}(x) \in \mathrm{K}, \\ \qquad h^{p_1+1}(x) \quad \text{et} \quad h^{-p_2-1}(x) \notin \mathrm{K}. \end{cases}$$

Il est clair que $\bar{\mu}$ est inférieur ou égal à $\bar{\mu}(x)$ au voisinage de tout point x de K. On voit de même que μ est supérieur ou égal à $\mu(x)$ au voisinage de tout $x \in \mathring{\mathrm{K}}$. Supposons la conclusion du lemme fausse : $\bar{\mu}$ serait à valeurs finies; $\partial\mathrm{K}$ étant compact, $\bar{\mu}$ est borné sur $\partial\mathrm{K}$. Supposons

$$\bar{\mu} \mid \partial\mathrm{K} < \mathrm{N} < \infty.$$

Les ouverts de K suivants sont non vides

$$A=\{x\in K/\bar{\mu}(x)<N\}\supset\partial K,$$
$$B=\{x\in \mathring{K}/\mu(x)\geqq N\}\ni 0.$$

De plus ils sont disjoints car $\mu\leqq\bar{\mu}$. Il existe un point x_0 de K n'appartenant pas à $A\cup B$ ($\bar{\mu}(x_0)\geqq N>\mu(x_0)$) et donc $O_K(x_0)\neq O_{\mathring{K}}(x_0)$. L'orbite de x_0 coupe ∂K. Soit $y\in O_K(x_0)\cap\partial K$, on a $\bar{\mu}(y)=\bar{\mu}(x_0)\geqq N$, ce qui contredit $\bar{\mu}\,|\,K<N$.

Démonstration du théorème 2.1. — Il est clair qu'il suffit de montrer la deuxième assertion. Supposons que $h\in \mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ est non périodique, et soit U un voisinage de 0 sur lequel h est holomorphe et injectif. Notons D_{ρ_0} un disque fermé de centre 0 et de rayon ρ_0, contenu dans U. Décomposons-le en l'union disjointe

$$D_{\rho_0}=P\cup F\cup I,$$

où P est l'ensemble des points périodiques dans $D\rho_0$, F l'ouvert des points x non périodiques dans $D\rho_0$ mais dont l'orbite $O_{D\rho_0}(x)$ est finie et I l'ensemble des x tels que $\# O_{D\rho_0}=\infty$. D'après le lemme précédent, pour tout $\rho\leqq\rho_0$,

$$(P\cup I)\cap\partial D\rho\neq\emptyset.$$

Ainsi I est non dénombrable dès que P est dénombrable. Supposons désormais P non dénombrable et considérons les ensembles compacts suivants :

$$A_1=D\rho_0,\ \ldots,\ A_n=D\rho_0\cap h^{-1}(A_{n-1}),\ \ldots.$$

Notons C_n la composante connexe (compacte) de A_n qui contient 0, et soit

$$C=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n.$$

C est visiblement un sous-ensemble de $I\cup P$. Examinons séparément les deux possibilités.

C *est non dénombrable*. — Si I était dénombrable, $P\cap C$ serait non dénombrable. On le décompose en

$$P\cap C=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n,$$

où P_n est l'ensemble des points de $P\cap C$ de période n. Il existe n_0 tel que P_{n_0} soit infini et P_{n_0} admet un point d'accumulation dans C_{n_0}. Comme h^{n_0} est holomorphe sur un voisinage ouvert U_0 de C_{n_0}, $h^{n_0}(z)=z$ sur U_0, ce qui contredit l'hypothèse de non-périodicité du germe h.

C *est dénombrable*. — Il existe alors $\rho<\rho_0$ tel que $C\cap\partial D_\rho$ soit vide. Les compacts $C_n\cap\partial D_\rho$ étant emboîtés, il existe n_0 tel que $C_{n_0}\cap\partial D_\rho=\emptyset$. Soit K un voisinage compact connexe de C_{n_0} qui ne rencontre pas les autres composantes connexes (compactes) de A_{n_0}, en particulier $\partial K\cap A_{n_0}=\emptyset$. Pour tout $x\in\partial K$ il existe $p\leqq n_0$ tel que $h^p(x)$ n'appartienne pas à D_ρ. On en déduit que $P\cap\partial K=\emptyset$. Montrons qu'alors I est non dénombrable.

Notons P′, F′ et I′ respectivement l'ensemble des points de K périodiques dans K, des points non périodiques dans K mais dont la K-orbite est finie et l'ensemble des points dont la K-orbite est infinie. Notons aussi

$$P' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P'_n,$$

où P'_n est l'ensemble des points périodiques dans K de période n. Montrons d'abord que pour tout n la frontière $P''_n = P'_n - \mathring{P}_n$ de P'_n est finie. Il suffit pour cela de prouver que tout point d'accumulation de P'_n est dans l'intérieur de P_n. Soit $x_0 \in P'_n$ un tel point, il existe un voisinage ouvert connexe W de x_0 où h^n est définie et holomorphe. $h^n(x) = x$ sur $P'_n \cap W$ et donc h^n est l'identité sur W. D'autre part, comme la K-orbite de x_0 ne coupe pas ∂K on peut choisir W assez petit de sorte que

$$h(W),\ h^2(W),\ \ldots,\ h^n(W) \subset \mathring{K}.$$

Ceci prouve que $W \subset P'_n$ et en particulier $x_0 \in \mathring{P}'_n$.

De la finitude des P''_n on déduit facilement que la frontière P″ de P′ est dénombrable. Décomposons K de la manière suivante :

$$K = \mathring{P}' \cup F' \cup (I' \cup P'').$$

F′ est un ouvert de K et $\mathring{P}'$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ puisque on a supposé que P, et *a fortiori* P′, ne coupe pas ∂K. Si F′ est vide, ∂K est contenu dans $I' \cup P''$ et I′ est non dénombrable puisque ∂K est non dénombrable. Si F′ n'est pas vide et $\mathring{P}'$ est vide, la conclusion résulte du fait qu'alors, d'après le lemme 2, pour ρ assez petit, $I' \cup P''$ coupe le bord de D_ρ. Supposons $\mathring{P}'$ et F′ tout deux non vides; $\mathring{P}'$ et $\mathring{F}'$ sont deux ouverts disjoints non vides de $\mathring{K}$ et visiblement $(I' \cup P'') \cap \mathring{K}$ ne peut être dénombrable. P″ étant dénombrable, I′ est non dénombrable.

II. — Critères topologiques d'existence en dimension 2, dans le cas réduit

Soit $\omega = a\,dx + b\,dy$ un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de 1-forme holomorphe et $g \in \mathcal{O}_2$ le plus grand commun diviseur de a, $b \in \mathcal{O}_2$;

$$\omega = g\,\omega' = g\,(a'\,dx + b'\,dy), \qquad a',\ b' \in \mathcal{O}_2.$$

Nous dirons que ω est irréductible (par éclatements) lorsque les valeurs propres λ_1, λ_2 de la matrice

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial b'}{\partial x}(0) & \dfrac{\partial b'}{\partial y}(0) \\ -\dfrac{\partial a'}{\partial x}(0) & \dfrac{\partial a'}{\partial y}(0) \end{bmatrix}$$

vérifient l'une des deux conditions suivantes :

$$(\star)\qquad \lambda_1.\lambda_2\neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\notin \mathbb{N},$$

$$(\star\star)\qquad \lambda_1\neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2=0.$$

Le but essentiel de ce chapitre est de prouver le théorème B dans le cas irréductible.

THÉORÈME B_0. — *Soit* ω *un germe en* $0\in\mathbb{C}^2$ *de* 1-*forme holomorphe irréductible. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1° *il existe des coordonnées* (x, y) *dans* $\mathbb{C}^2$ *et deux entiers positifs* p, q *tels que :*

$$\omega \wedge (py\,dx+qx\,dy)=0;$$

2° ω *possède une intégrale première holomorphe;*

3° *le germe de feuilletage* $\underline{\mathscr{F}}_\omega$ *est simple.*

L'équivalence entre 1° et 3° est une caractérisation topologique des germes de 1-forme irréductibles qui possèdent une intégrale première holomorphe. La démonstration de ce théorème repose sur la notion d'holonomie d'une variété invariante. Nous la définissons dans le paragraphe 1 et calculons les premiers termes de son développement de Taylor. Dans le paragraphe 2 nous montrons qu'un germe de 1-forme irréductible est linéarisable, modulo un facteur multiplicatif, si et seulement si l'holonomie d'une de ses variétés invariantes est linéarisable. Enfin, dans le paragraphe 3, nous en déduisons le théorème B_0 en utilisant le critère topologique de périodicité démontré au chapitre précédent.

1. HOLONOMIE D'UNE VARIÉTÉ INVARIANTE. — Soit ω un germe en $0\in\mathbb{C}^2$ de 1-forme holomorphe irréductible dont le jet d'ordre 1 en 0 est non nul. D'après les théorèmes 1 et 2 de l'appendice II, il existe des coordonnées (x, y) dans $\mathbb{C}^2$ telles que, à un facteur multiplicatif près inversible, ω s'écrive respectivement dans les cas $(\star)$ et $(\star\star)$:

$$(1.1)\qquad \omega=-\lambda\, y(1+A(x, y))\,dx+x\,dy,$$

$$(1.2)\qquad \omega=y^m\,dx-(x+y\,A(x, y))\,dy, \qquad m>1,$$

Nous pouvons toujours supposer que A est holomorphe sur un voisinage U du polydisque fermé

$$P_{1,1}=\{(x, y)\in\mathbb{C}^2/\,|x|\leqq 1 \text{ et } |y|\leqq 1\}.$$

et que 0 est le seul zéro de ω dans U. Ainsi, ω définit un feuilletage singulier $\underline{\mathscr{F}}_\omega=(\{0\},\mathscr{F}_\omega)$ dont

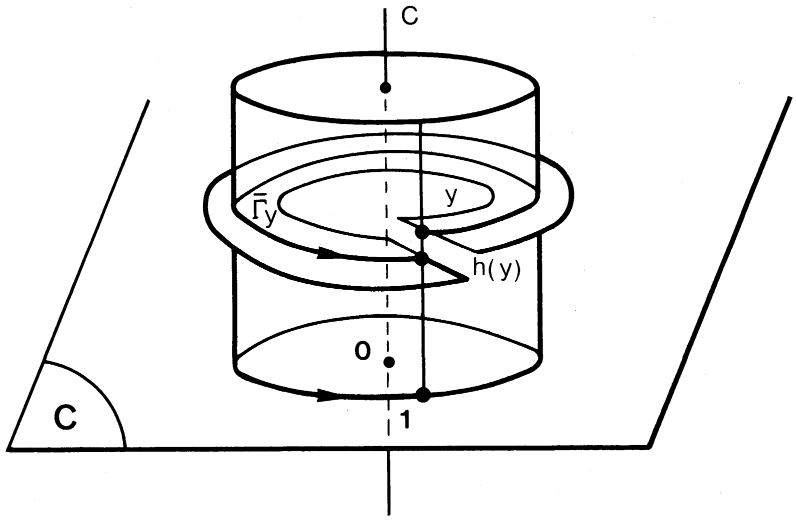
$$L_0=(U-\{0\})\cap\{y=0\}$$

est une feuille. Nous allons étudier l'holonomie de cette feuille; plus présicément nous cherchons les premiers termes du développement de Taylor du difféomorphisme d'holonomie $h \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ qui correspond au lacet

$$\gamma : \quad [0, 1] \to \mathrm{L}_0, \qquad \gamma(\theta) = (e^{2i\pi\theta}, 0).$$

Dès que y est suffisamment petit, γ possède un relèvement $\overline{\Gamma}_y$ dans la feuille de $\mathscr{F}_\omega$ qui passe par le point $(1, y)$, ce relèvement se faisant suivant la projection $(x, y) \to x$. Par définition de h on a

$$\overline{\Gamma}_y(1) = (1, h(y)).$$



D'autre part, le feuilletage $\mathscr{F}_\omega$ étant analytique on peut écrire $\overline{\Gamma}_y$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \overline{\Gamma}_y(\theta) = (\gamma(\theta), \Gamma(\theta, y)), \\ \Gamma(\theta, y) = \sum_{k \geqq 0} c_k(\theta) y^k, \end{cases}$$

c'est-à-dire que Γ est une série convergente en y, à coefficients des fonctions analytiques en $\theta \in [0, 1]$ qui sont déterminées par l'équation différentielle

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\overline{\Gamma}_y(\theta)\right) = 0.$$

Étudions séparément cette équation dans les cas ($\star$) et ($\star\star$).

Cas ($\star$). — En utilisant (1.1) nous obtenons :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta}(\theta, y) = 2\, i\, \pi\lambda\, \Gamma(\theta, y)\, (1 + \Gamma(\theta, y))\, \mathrm{A}\, (e^{2i\pi\theta}, \Gamma(\theta, y)).$$

En identifiant les coefficients de y dans les deux membres de cette équation, on obtient :

$$c_1'(\theta)=2i\pi\lambda c_1(\theta).$$

On en déduit, puisque $c_1(0)=1$,

$$h(y)=c_1(1)y+y^2(\ldots)=e^{2i\pi\lambda}y+y^2(\ldots).$$

Cas ($\star\star$). — En utilisant (1.2) nous obtenons :

$$2i\pi e^{2i\pi\theta}\Gamma(\theta,y)^m=(e^{2i\pi\theta}+\Gamma(\theta,y)\,\mathrm{A}(e^{2i\pi\theta},\Gamma(\theta,y)))\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}(\theta,y).$$

En identifiant les coefficients de y^k de chacun des membres de cette équation, on obtient :

$$c_k'(\theta)=0 \quad \text{si} \quad k<m, \qquad c^m(\theta)=2i\pi c_1(\theta)^m.$$

On en déduit par intégration

$$h(y)=y+y^m(2i\pi+yg(y)), \qquad g\in\mathcal{O}_2.$$

Nous dirons que l'holonomie de la variété invariante $y=0$ est *périodique* (*resp. linéarisable*) si h est périodique (resp. linéarisable).

2. Linéarisation des 1-formes irréductibles. — Soit ω un germe en $0\in\mathbb{C}^2$ de 1-forme irréductible, holomorphe, du type ($\star$). Si ω est *linéarisable*, i.e. s'il existe des coordonnées (x, y) telles que

$$\omega=g(-\lambda\,y\,dx+x\,dy), \qquad \text{où} \quad g\in\mathcal{O}_2, \quad g(0)\neq 0,$$

l'holonomie de la variété invariante $y=0$ est l'application linéaire $y\to e^{2i\pi\lambda}\,y$. Réciproquement, on a le théorème suivant :

Théorème 2. — *Soit ω un germe en $0\in\mathbb{C}^2$ de 1-forme holomorphe irréductible du type ($\star$) avec $\lambda\in\mathbb{C}-\mathbb{R}_+$ dont le jet d'ordre 1 en 0 est non nul. Alors ω est linéarisable si et seulement si l'holonomie d'une variété invariante de ω est linéarisable.*

Lorsque $\lambda\in\mathbb{R}_+$, ce résultat est encore vrai. Mais comme nous ne l'utiliserons pas dans la suite, nous n'en ferons pas la démonstration. Signalons une conséquence de ce théorème : une forme ω du type ($\star$), avec $\lambda\notin\mathbb{R}_+$, est linéarisable si et seulement si elle est *topologiquement linéarisable* [i.e. il existe un germe d'homomorphisme de $(\mathbb{C}^2,0)$ envoyant les feuilles de $\mathcal{F}_\omega$ sur les feuilles de $\mathcal{F}_{J^1\omega}$]. En effet, lorsque $\lambda\notin\mathbb{R}$, (λ_1, λ_2) appartient au domaine de Poincaré et il est bien connu (*cf.* [2], par exemple) que ω est linéarisable. D'autre part, si $\lambda\in\mathbb{R}$, un résultat classique, *cf.* [3], chap. I, nous dit qu'un difféomorphisme h de $(\mathbb{C}, 0)$ tel que $h'(0)=e^{2i\pi\lambda}$ est linéarisable si et seulement si il existe un *domaine invariant* D, i.e. $h(\mathrm{D})=\mathrm{D}$, ce qui est un critère purement topologique.

Démonstration. — Il suffit de montrer le théorème pour

$$\omega=x\,dy-\lambda y(1+\mathrm{A}(x,y))\,dx,$$

où λ est un réel négatif et A est holomorphe sur un voisinage U du polydisque fermé $P_{1,1}$. De plus, nous pouvons supposer que

$$|A(x, y)| < \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad (x, y) \in P_{1,1},$$

et que le difféomorphisme d'holonomie h correspondant au lacet

$$\gamma: \quad [0,1] \to L_0, \qquad \gamma(\theta) = (e^{2i\pi\theta}, 0)$$

est la rotation $h: y \to e^{2i\pi\lambda} y$. Soit

$$\omega_1 = x\,dy - \lambda\, y\, dx.$$

Pour montrer le théorème il suffit de construire un difféomorphisme holomorphe

$$G: \quad V \to V', \qquad G(x, y) = (x, g(x, y))$$

qui possède les propriétés suivantes :

(i) il existe des voisinages ouverts U_1, U'_1 de $0 \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$V = U_1 - \{x=0\}, \qquad V' = U'_1 - \{x=0\};$$

(ii) l'application g est bornée sur V;

(iii) G conjugue les feuilletages (non singuliers) $\mathscr{F}_\omega | U_1$ et $\mathscr{F}_{\omega_1} | U'_1$.

En effet, d'après (i) et (ii), G s'étend en un difféomorphisme holomorphe de U_1 sur U'_1, noté encore G, et (iii) implique

$$G^*(\omega_1) \wedge \omega = 0.$$

Le lemme de division de De Rham permet d'écrire :

$$\omega = u\, G^*(\omega_1), \qquad u \in \mathcal{O}_2 \quad \text{et} \quad u(0) \neq 0.$$

Ce qui prouve le théorème. La construction de G s'effectue par la méthode classique de relèvement des chemins contenus dans la feuille L_0 ($L_0 = (U - \{0\}) \cap \{y=0\}$) dans les feuilles de $\mathscr{F}_\omega$ (ou $\mathscr{F}_{\omega_1}$), suivant la projection $(x, y) \to x$. De façon plus précise, nous allons tout d'abord définir la restriction G_1 de G à $S^1 \times D^1$; ensuite nous prolongerons G_1 à un certain V :

1. *Construction de* G_1. — Le difféomorphisme d'holonomie h, de L_0, en $(0, 1)$ étant une rotation, il existe un réel positif ρ tel que : la feuille de $\mathscr{F}_\omega | S^1 \times D^1$ qui passe par $(1, y)$ pour $|y| < \rho$ est contenue dans $S^1 \times D^1$. La réunion V_ρ de ces feuilles est un voisinage ouvert de $S^1 \times \{0\}$ dans $S^1 \times D^1$. Ainsi, le chemin

$$\bar{\alpha} : \quad \mathbb{R} \to L_0, \qquad \bar{\alpha}_0(\theta) = (e^{i\theta}, 0),$$

se relève dans la feuille de $\mathcal{F}_\omega$ passant par $(1, y)$, pour $|y| < \rho$ en

$$\bar{\alpha}_y : \quad \mathbb{R} \to V_\rho, \qquad \bar{\alpha}_y(\theta) = (e^{i\theta}, \alpha_y(\theta)),$$

avec la condition initiale $\alpha_y(0) = y$. Dans la feuille de $\mathcal{F}_{\omega_1}$ passant par $(1, y)$, $\bar{\alpha}_0$ se relève de la même façon en le chemin

$$\theta \to (e^{i\theta}, ye^{i\lambda\theta}) = (e^{i\theta}, g_1(e^{i\theta}, y)).$$

Soit $G_1 : V_\rho \to S^1 \times D_\rho$ définie par

$$G_1(e^{i\theta}, \alpha_y(\theta)) = (e^{i\theta}, g_1(e^{i\theta}, y)).$$

Il est clair que G_1 conjugue les restrictions $\mathcal{F}_\omega | V_\rho$ et $\mathcal{F}_{\omega_1} | D_\rho$ et que G_1 est la restriction d'un difféomorphisme holomorphe (unique) d'un voisinage W de V_ρ sur un voisinage W_1 de $S^1 \times D_p$ qui conjugue $\mathcal{F}_\omega | W$ et $\mathcal{F}_{\omega_1} | W_1$.

2. *Construction de G.* — Le prolongement de G_1 en G est obtenu par relèvement des chemins radiaux

$$r_x : \quad [0, -\operatorname{Log}|x|] \to L_0, \qquad r_x(t) = (xe^t, 0),$$

pour $0 < |x| \leqq 1$. Montrons tout d'abord que r_x se relève dans les feuilles de $\mathcal{F}_\omega$ en

$$r_{x,y} : \quad t \to (xe^t, y(t)), \qquad y(0) = y,$$

pour tout $y \in D^1$; c'est-à-dire que la solution $y(t)$ de l'équation différentielle, à paramètre x, $0 < |x| < 1$,

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y (1 + A(xe^t, y)),$$

avec la condition initiale $y(0) = y$ est définie sur $[0, -\operatorname{Log}|x|]$. Or nous avons

$$\operatorname{Log}\left|\frac{y(t)}{y}\right| = \lambda t + |k(t)|,$$

où $k(t)$ est la partie réelle de $\lambda \int_0^t A(xe^s, y(s))\, ds$. De l'hypothèse $|A(x, y)| < 1/2$ on déduit

$$|y(t)| \leqq |y|\, e^{\lambda t/2} \leqq |y| < 1.$$

L'ensemble V des points $(x, y) \in U$ tels que l'extrémité de $r_{x,y}$ appartient à V_ρ est un ouvert et visiblement $V \cup \{x = 0\}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^2$.

D'autre part le chemin inverse de r_x,

$$r_x^{-1} : \quad t \to (xe^{t - \operatorname{Log}|x|}, 0),$$

se relève dans la feuille de $\mathcal{F}_{\omega_1}$ passant par le point $(x/|x|, y_1)$ en un chemin d'origine ce même point et d'extrémité notée $g_2(x/|x|, y_1)$. Soit alors G l'application de V dans $\mathbb{C}^2$ définie par

$$G: \quad (x, y) \to (x, g(x, y)), \qquad \text{avec} \quad g(x, y) = g_2\left(\frac{x}{|x|}, g_1(x, y)\right);$$

G étant construite à partir de relèvements de chemins, conjugue les feuilletages $\mathcal{F}_\omega|V$ et $\mathcal{F}_{\omega_1}|G(V)$; elle est holomorphe (dépendance des conditions initiales dans une équation différentielle) et enfin elle est bornée.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME B_0. — Il est clair que (1)⇒(2)⇒(3). Démontrons tout d'abord que (3)⇒(1) dans les cas suivants :

cas $j^1\omega \neq 0$. — Choisissons des coordonnées (x, y) telles que ω s'écrive, à une unité près, sous l'une des formes normales (1.1) ou (1.2). Si ω est du type (1.2) le difféomorphisme d'holonomie h (*voir* § 1) s'écrit :

$$h(y) = y + 2i\pi y^m + \ldots$$

Il n'est pas périodique. D'après le théorème (I.2), il existe une infinité de points $y \in D^1$ dont l'orbite par h est infinie. La feuille de $\mathcal{F}_\omega$ passant $(1, y)$ où y est un tel point n'est pas fermée et $\mathcal{F}_\omega$ n'est pas simple.

Ainsi ω est du type (1.1) et le raisonnement que nous venons de faire montre que h est périodique; en particulier λ est un rationnel négatif $-p/q$ et h est linéarisable. L'implication (3)⇒(1) résulte du théorème précédent.

Cas $j^1\omega = 0$. — Choisissons des coordonnées (x, y) telles que

$$\omega = g\,\omega', \qquad g \in \mathcal{O}_2,$$

où ω' est l'une des formes normales (1.1) ou (1.2); g, ω' sont holomorphes sur un voisinage U du polydisque $P_{1,1}$ et $\mathcal{F}_\omega|U$ est simple. Notons Z le sous-ensemble analytique de U d'équation $g = 0$. Distinguons deux cas :

1. $\{y = 0\} \subset Z$. — La feuille $L_0 = (U - \{0\}) \cap \{y = 0\}$ de $\mathcal{F}_\omega$ a une holonomie périodique puisque $\mathcal{F}_\omega$ est simple (th. I.2). Cette holonomie est la même que celle de L_0 considérée comme feuille de $\mathcal{F}_{\omega'}$.

2. $\{y = 0\} \subset Z$. — Soit $\rho > 0$ tel que l'intersection du disque fermé $\{1\} \times \overline{D}_\rho$ avec Z ne contienne que le point (1, 0). La feuille L_y de $\mathcal{F}_\omega$ qui passe par le point $(1, y)$, avec $y \in D_\rho$, coupe $\{1\} \times D_\rho$ suivant un sous-ensemble analytique noté l_y (puisque L_y est un sous-ensemble analytique de $U - Z$). Si l_y est infini, il est dénombrable et $0 \in D_\rho$ en est un point d'accumulation. L'adhérence de L_y contient l'axe $\{y = 0\}$ et en particulier $0 \in \mathbb{C}^2$. Le feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ étant simple, il n'existe qu'un ensemble dénombrable de telles feuilles. Puisque l_y est aussi dénombrable, l'ensemble I des points $y \in D_\rho$ tels que l_y est infini est de même dénombrable.

Nous pouvons toujours supposer que le difféomorphisme d'holonomie h de la feuille L_0 en (1, 0) est défini, injectif, holomorphe sur D_ρ. La D_ρ-orbite $O(y)$ d'un point $y \in D_\rho$ par h est contenue dans l_y. L'ensemble des points y tels que $O(y)$ soit infini est contenu dans I. D'après le théorème de finitude (I.2), h est périodique.

Dans les deux cas, nous avons montré que h est linéarisable (périodique), ainsi ω' est linéarisable, ce qui achève la démonstration du théorème.

III. — Notions d'éclatements

1. ÉCLATEMENT D'UN POINT. — Cette technique est bien connue; nous ne ferons ici qu'un bref rappel pour fixer les notations. Éclater un point m d'une variété analytique complexe M, de dimension n, consiste à remplacer m par l'espace projectif $\mathbb{PC}(n-1)$, considéré comme l'espace des directions limites en m. Plus précisément, soit $\mathcal{A}$ un atlas sur M, tel que toute carte ψ définie sur un voisinage ouvert U de m soit un isomorphisme sur $\mathbb{C}^n$ et $\psi(m)=0$. Notons $\mathbb{P}_m\mathrm{M}$ l'espace projectif associé au plan tangent $\mathrm{T}_m\mathrm{M}$ et $v\to[v]$ l'application de passage au quotient $\mathrm{T}_m\mathrm{M}-\{0\}\to\mathbb{P}_m\mathrm{M}$. Le *transformé de* M *par l'éclatement du point* m est l'ensemble

$$\tilde{\mathrm{M}}^m=(\mathrm{M}-\{m\})\cup\mathbb{P}_m\mathrm{M},$$

muni de la structure de variété analytique complexe obtenue en remplaçant toute carte en m :

$$\psi=(x_1,\ldots,x_n):\mathrm{U}\to\mathbb{C}^n,\qquad \psi(m)=0,$$

par les n cartes ψ_i, $i=1,\ldots,n$ définies de la façon suivante : soit P_i l'ensemble des droites de $\mathrm{T}_m\mathrm{M}$ contenues dans $\mathrm{Ker}\, d_m x_i$,

$$\psi_i:\quad \mathrm{U}_i=(\mathrm{U}-x_i^{-1}(0))\cup(\mathbb{P}_m\mathrm{M}-\mathrm{P}_i)\simeq\mathbb{C}^n,$$

$$\psi_i=\left(\frac{x_1}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},x_i,\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_n}{x_i}\right)\quad\text{sur U},$$

$$\psi_i\left(\left[\sum\alpha_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\right)=\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_i},\ldots,\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i},0,\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i},\ldots,\frac{\alpha_n}{\alpha_i}\right).$$

Dans toute la suite nous noterons E l'application analytique

$$\begin{cases}\mathrm{E}:\quad \tilde{\mathrm{M}}^m\to\mathrm{M},\\ \mathrm{E}(z)=z\quad\text{si}\quad z\notin\mathbb{P}_m\mathrm{M},\qquad \mathrm{E}(z)=m\quad\text{si}\quad z\in\mathbb{P}_m\mathrm{M}.\end{cases}$$

Sa restriction à $\tilde{\mathrm{M}}^m-\mathbb{P}_m\mathrm{M}$ est un difféomorphisme sur $\mathrm{M}-\{m\}$; dans la carte ψ_i E s'écrit :

$$\mathrm{E}(z_1,\ldots,z_n)=(z_iz_1,\ldots,z_iz_{i-1},z_i,z_iz_{i+1},\ldots,z_iz_n).$$

Précisons ces notations lorsque $\mathrm{M}=\mathbb{C}^n$ et $m=0$. Nous écrirons simplement $\tilde{\mathbb{C}}^n$ pour $\tilde{\mathbb{C}}^{n^0}$, $(x,y)=(x,y_1,\ldots,y_{n-1})$ les coordonnées de $\mathbb{C}^n$ et

$$t:\quad[(x,y)]\to\frac{y}{x},$$

la première carte canonique sur $W_1 = \mathbb{P}\mathbb{C}(n-1) - P_1$, les $n-1$ autres s'en déduisant par permutation des variables sur $\mathbb{C}^n$. Soit $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^n \to \mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ la fibration de fibre $\mathbb{C}$ définie par

$$(1.1) \qquad \pi(z) = [z] \quad \text{si } z \notin \mathbb{P}\mathbb{C}(n-1), \qquad \pi(z) = z \quad \text{si } z \in \mathbb{P}\mathbb{C}(n-1).$$

La carte $\psi_1 = (x, y)_1$ de $\tilde{\mathbb{C}}^n$ précédemment définie s'écrit alors :

$$(x \circ E,\ t \circ \pi) : V_1 = \pi^{-1}(W_1) \to \mathbb{C}^n.$$

Nous la désignerons, abusivement, par

$$(1.2) \qquad (x, y)_1 = (x, t) \qquad \text{où} \quad t = \frac{y}{x};$$

les $n-1$ autres cartes associées s'en déduisent par permutation des variables. Dans cette même carte nous avons

$$E(x, t) = (x, xt).$$

2. Éclaté d'une série formelle. — Si $f(x, y)$ un élément de $\hat{\mathcal{O}}_n$, $f(x, xt)$ est une série en x à coefficients polynômes en $t = (t_1, \ldots, t_{n-1})$. Cette remarque nous permet de définir le composé $f \circ E$ globalement sur $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$, et de manière intrinsèque :

Notons $\mathscr{E}$ la restriction à $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ du faisceau des fonctions holomorphes dans $\tilde{\mathbb{C}}^n$, et $\mathscr{D}$ la restriction à $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ de l'idéal des fonctions holomorphes nulles sur $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$. Soit $\hat{\mathscr{E}}$ le faisceau associé au préfaisceau qui à tout ouvert U de $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ fait correspondre le complété séparé de $\mathscr{E}(U)$ pour la topologie de Krull définie par $\mathscr{D}(U)$. Les éléments de $\hat{\mathscr{E}}(U)$ sont appelés *germes le long de* U *de fonctions holomorphes transversalement formelles*. Il est clair que la fibre $\hat{\mathscr{E}}_a$ en un point $a \in \mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ du faisceau $\hat{\mathscr{E}}$ est le complété séparé de $\mathscr{E}_a$ pour la topologie de Krull définie par $\mathscr{D}_a$. Soit W un ouvert contenu dans la carte $(t; W_1)$ et (x, t) la carte correspondante sur $\tilde{\mathbb{C}}^n$, *cf.* (1.2). L'isomorphisme

$$\pi^{-1}(W) \simeq \mathbb{C} \times W = \{(x, t) \in V_1 / t \in W\}$$

permet d'identifier la restriction $\hat{\mathscr{E}}_W$ de $\hat{\mathscr{E}}$ à W à l'anneau $\mathcal{O}_W[x]$ des séries formelles en x à coefficients holomorphes dans W.

C'est-à-dire qu'un élément F de $\hat{\mathscr{E}}(W)$ s'écrit :

$$F(x, t) = \sum_{k \geqq 0} A_k(t)\, x^k,$$

les coefficients A_k étant holomorphes sur W. Le germe de F en $t_0 \in W$ est la série formelle $F_{,t_0} \in \hat{\mathscr{E}}_{t_0}$ à coefficients les germes des A_k au point t_0. Nous noterons d'autre part

$$F_{t_0}(x) = \sum_{k \geqq 0} A_k(t_0)\, x^k \in \mathbb{C}[x],$$

la série formelle en x dont les coefficients sont les valeurs de A_k en t_0. Visiblement $f \in \hat{\mathcal{O}}_n$ définit une section globale

$$(2.1) \qquad f \circ E \in \hat{\mathscr{E}}(\mathbb{PC}(n-1)),$$

dont le germe en un point t de $\mathbb{PC}(n-1)$ est le composé $f \circ E_t$ de la série f avec le germe E_t de l'application E en t.

De façon analogue nous pourrions définir le $\hat{\mathscr{E}}$-module $\widehat{\Omega^p}$ des germes le long de $\mathbb{PC}(n-1)$ de p-formes holomorphes transversalement formelles; par exemple si $f \in \hat{\mathscr{E}}(U)$, alors $df \in \widehat{\Omega^1}(U)$. Nous pouvons utiliser sur $\widehat{\Omega^p}$ les mêmes règles de calcul que sur Ω^p. Précisons cependant la notion de composition.

Soit S une variété analytique complexe (resp. C^∞ ou C^k), et soit A l'anneau des fonctions holomorphes (resp. C^∞ ou C^k) de S dans $\mathbb{C}$, A $[x]$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans A. Nous écrirons :

$$\Gamma(x, s) = \sum_{k \geqq 0} \gamma_k(s)\, x^k$$

un élément de cet anneau. Si $\gamma : S \to W_1$ et $f = \sum A_k(t)\, x^k \in \hat{\mathscr{E}}(W_1)$ nous pouvons définir le composé $f \circ \overline{\Gamma}$ de f et de $\overline{\Gamma} = (\Gamma, \gamma)$ dès que $\gamma_0 \equiv 0$:

$$f \circ \overline{\Gamma}(x, s) = \sum_{k \geqq 0} A_k(\gamma(s))\, \Gamma(x, s)^k;$$

c'est encore un élément de A $[x]$. D'autre part, remarquons que $f \circ \overline{\Gamma}$ ne dépend pas de s, i. e. $f \circ \overline{\Gamma} \in \mathbb{C}[x]$ si et seulement si

$$\frac{\partial}{\partial s}(f \circ \overline{\Gamma})(x, s) = df_{\overline{\Gamma}(x, s)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\Gamma(x, s), \frac{d}{ds}\gamma(s)\right) \equiv 0.$$

3. Saturation d'un feuilletage singulier. — Soit M une variété holomorphe. Une 1-forme ω holomorphe, intégrable (i. e. $\omega \wedge d\omega = 0$) sur M définit un *feuilletage singulier*.

$$\underline{\mathscr{F}}_\omega = (S(\omega), \mathscr{F}_\omega),$$

où $S(\omega)$ est *l'ensemble singulier de* ω, c'est-à-dire l'ensemble des points de M où ω s'annule, et $\mathscr{F}_\omega$ est le feuilletage régulier de $M - S(\omega)$ défini par ω. En tout point m de M le germe de ω peut s'écrire $g\eta$, où g est le plus grand commun diviseur des composantes de ω dans un système de coordonnées en m. Alors $S(\eta)$ est de codimension $\geqq 2$. Au voisinage de m, η définit le feuilletage singulier

$$\underline{\mathscr{F}}_\eta = (S(\eta), \mathscr{F}_\eta),$$

qui coïncide avec $\underline{\mathscr{F}}_\omega$ en dehors de $S(\omega)$. Puisque g — et donc η, sont uniques à un facteur inversible près, $\underline{\mathscr{F}}_\eta$ ne dépend pas de la décomposition $\omega = g\eta$ choisie. Par recollement on obtient ainsi un *feuilletage singulier* unique de M :

$$\underline{\overline{\mathscr{F}}}_\omega = (\mathrm{S}(\underline{\overline{\mathscr{F}}}_\omega),\ \overline{\mathscr{F}}_\omega),$$

où $\mathrm{S}(\underline{\overline{\mathscr{F}}}_\omega)$ est un sous-ensemble analytique de M de codimension $\geqq 2$, $\overline{\mathscr{F}}_\omega$ un feuilletage du complémentaire qui coïncide avec $\mathscr{F}_\omega$ en restriction à $\mathrm{M}-\mathrm{S}(\omega)$. Nous l'appelons *saturé de* $\mathscr{F}_\omega$.

Soit ω' une seconde forme holomorphe sur M telle que $\omega \wedge \omega' = 0$. Il résulte directement du lemme de division de De Rham que $\underline{\overline{\mathscr{F}}}_\omega = \underline{\overline{\mathscr{F}}}_{\omega'}$. En particulier si f est une intégrale première de ω, i. e. $\omega \wedge df = 0$, $\mathrm{S}(\overline{\mathscr{F}}_\omega)$ est l'ensemble des points m où l'hypersurface $f^{-1}(f(m))$ est singulière et les feuilles de $\overline{\mathscr{F}}_\omega$ sont les composantes connexes des parties lisses des hypersurfaces de niveau de f.

4. ÉCLATEMENT D'UN GERME DE FEUILLETAGE. — Soit ω une 1-forme holomorphe intégrable sur un voisinage ouvert U de O. Son image réciproque $\mathrm{E}^*(\omega)$ sur $\tilde{\mathrm{U}} = \mathrm{E}^{-1}(\mathrm{U})$ définit un feuilletage saturé que nous notons

$$\underline{\tilde{\mathscr{F}}}_\omega = (\mathrm{S}(\tilde{\mathscr{F}}_\omega),\ \tilde{\mathscr{F}}_\omega \,|\, \tilde{\mathrm{U}})$$

et appelons *éclaté de* $\underline{\mathscr{F}}_\omega$ *en* O. Si l'on considère le germe de ω, $\underline{\tilde{\mathscr{F}}}_\omega$ sera considéré comme un germe de feuilletage singulier le long de $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$. *Le cône tangent* de ω est le sous-ensemble analytique de $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$ suivant :

$$\tilde{\mathscr{F}}_\omega = \mathrm{S}(\underline{\tilde{\mathscr{F}}}_\omega) \cap \mathbb{P}\mathbb{C}(n-1).$$

Il est clair que $\mathrm{C}_\omega = \mathrm{C}_\eta$ dès que $\omega \wedge \eta = 0$. Supposons donc que $\mathrm{S}(\omega)$ est de codimension $\geqq 2$ et déterminons une équation homogène de C_ω. Notons $(x, y) = (x, y_1, \ldots, y_{n-1})$ les points de $\mathbb{C}^n$, $\omega = a\,dx + b_1\,dy_1 + \ldots + b_{n-1}\,dy_{n-1}$, et soit ν *l'ordre de* ω *en* O, i. e. le plus petit entier k tel que le k-jet $\mathrm{J}^k\omega$ de ω en O soit non nul. Nous écrirons :

$$\omega_\nu = \mathrm{J}^\nu \omega = a_\nu\,dx + b_{1,\nu}\,dy_1 + \ldots + b_{n-1,\nu}\,dy_{n-1},$$
$$\mathrm{P}_{\nu+1}(x, y) = x a_\nu + y_1 b_{1,\nu} + \ldots + y_{n-1} b_{n-1,\nu},$$

Un calcul élémentaire montre que, dans la carte (x, t) on a

$$\mathrm{E}^*(\omega) = x^\nu \left((\mathrm{P}_{\nu+1}(1, t) + x\,\mathrm{Q}(x, t))\,dx + x \sum_{j=1}^{n-1} (b_{j,\nu}(1, t) + x\,\mathrm{Q}_j(x, t))\,dt_j \right).$$

Il est alors nécessaire de distinguer deux cas :

Cas dicritique. — $\mathrm{P}_{\nu+1}(x, y) \equiv 0$. Il existe alors j tel que $b_{j,\nu}$ ne soit pas identiquement nul. $\mathrm{E}^*(\omega)$ est divisible par $x^{\nu+1}$. Le coefficient de dt_j dans $\mathrm{E}^*(\omega)/x^{\nu+1}$ s'écrit :

$$b_{j,\nu}(1, t) + x\,\mathrm{Q}_j(x, t).$$

En tout point de l'ouvert analytique de W_1 défini par $b_{j,\nu}(1, t) \neq 0$ les feuilles de $\tilde{\mathscr{F}}_\omega$ sont transverses à $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$. Une infinité non dénombrable de feuilles de $\mathscr{F}_\omega$ adhèrent à 0 et $\underline{\mathscr{F}}_\omega$

n'est pas simple. D'autre part, ω ne peut avoir d'intégrale première formelle f, car le polynôme homogène de plus bas degré $f_{\nu'}$ de f, devrait vérifier $\omega_\nu \wedge df_{\nu'} = 0$. Ainsi ω ne vérifie aucune des hypothèses considérées dans les théorèmes A et B et, dans toute la suite, nous écarterons toujours ce cas.

Cas non dicritique. — $P_{\nu+1}(x, y) \not\equiv 0$. $E^*(\omega)$ est alors divisible par x^ν et

$$\tilde{\omega} = \frac{E^*(\omega)}{x^\nu} = P_{\nu+1}(1, t)\, dx + x\,\eta,$$

où η est une 1-forme holomorphe sur $W_1 \cap \tilde{U}$. Le lieu singulier de $\tilde{\omega}$ est de codimension 2. En effet

$$\operatorname{codim}(S(\tilde{\omega}) - \mathbb{PC}(n-1)) = \operatorname{codim}(S(\omega) - \{0\}),$$

puisque E est un isomorphisme en dehors de $\mathbb{PC}(n-1)$. $P_{\nu+1}(x, y) = 0$ est donc l'équation homogène de C_ω et

$$C_{\omega_\nu} \subset C_\omega.$$

PROPOSITION 4.1. — *Si f est une intégrale première formelle de ω, le polynôme homogène de plus bas degré $f_{\nu'}$ de f est une équation homogène de C_ω de plus $C_\omega = C_{df_{\nu'}}$.*

$C_{df_{\nu'}}$ *s'appelle alors* cône tangent de f *et se note* C_f.

Démonstration. — Il résulte de l'égalité $\omega \wedge df = 0$ que $\omega_\nu \wedge df_{\nu'} = 0$ et d'après ce qui précède

$$C_{\omega_\nu} = C_{df_{\nu'}} \subset C_\omega,$$

D'autre part, il est clair que $f_{\nu'}(x, y) = 0$ est l'équation homogène de $C_{df_{\nu'}}$.

Réciproquement soit $t_0 \in \mathbb{PC}(n-1) - C_{df_{\nu'}}$. Choisissons des coordonnées dans $\mathbb{C}^n$ telles que $t_0 = [\partial/\partial x]$. On a alors :

$$f \circ E_{t_0}(x, t) = x^{\nu'} g(x, t), \qquad \text{avec} \quad g(0) \neq 0.$$

Soit $X(x, t) = x g(x, t)^{1/\nu'}$ une racine ν'-ième de $f \circ E_{t_0}$. C'est une intégrale première formelle du germe de $E^*(\omega)_{t_0}$. Puisque sa différentielle dX n'est pas nulle en t_0, on a

$$\tilde{\omega}_{t_0} = h\, dX \qquad \text{avec} \quad h(0, t_0) \neq 0.$$

Ainsi $\tilde{\omega}(t_0)$ est non nul et $t_0 \notin C_\omega$.

5. HOLONOMIE DE ω. — Le complémentaire L_ω de C_ω dans $\mathbb{PC}(n-1)$ est une feuille de $\tilde{\mathscr{F}}_\omega$. Nous allons étudier son holonomie en un point t_0,

$$\mathscr{H}(\omega, t_0) : \quad \pi_1(L, t_0) \to \operatorname{Diff}(\mathbb{C}, 0),$$

$(\mathbb{C}, 0)$ étant ici identifié à $(\pi^{-1}(t_0), t_0)$. L'homomorphisme $\mathscr{H}(\omega, t_0)$ peut se calculer, à l'aide de la projection π, en intégrant une équation différentielle d'une variable réelle à paramètre holomorphe : soit $\gamma : [0, 1] \to L_\omega$ un chemin différentiable d'origine t_0 et supposons que γ soit contenu dans la carte $((x, t); V_1)$, *cf.* 1.2. Nous écrirons :

$$\gamma(s)=(0, \gamma(s)), \qquad t_0=(0, t_0)=\gamma(0).$$

Pour x assez petit γ se relève dans la feuille de $\tilde{\mathscr{F}}_\omega$ passant par (x, t_0) suivant la projection π : $(x, t) \to t$, en le chemin

$$\overline{\Gamma}_x=(\Gamma_x, \gamma) : s \to (\Gamma_x(s), \gamma(s)).$$

de même classe que γ, où Γ_x est la solution de l'équation différentielle en la variable s, dépendant analytiquement de x :

$$\tilde{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial s}\overline{\Gamma}_x\right)=\tilde{\omega}\left(\frac{\partial \Gamma_x}{\partial s}, \gamma'(s)\right)=0,$$

avec la condition initiale $\Gamma_x(0)=x$. On en déduit que $\Gamma(x, s)=\Gamma_x(s)$ est une série convergente en x à coefficients des fonctions $c_k(s)$, $s \in [0, 1]$, de même classe que γ :

$$\begin{cases} \Gamma(x, s)=\sum_{k \geqq 1} c_k(s)\, x^k, \\ c_1(0)=1 \qquad \text{et} \qquad c_k(0)=0, \quad \text{si } k>1. \end{cases}$$

Supposons maintenant que γ soit un lacet en t_0. Notons $\dot{\gamma}$ sa classe d'homotopie dans L_ω. Alors :

$$\mathscr{H}(\omega, t_0)(\dot{\gamma})=h, \qquad \text{avec} \quad h(x)=\Gamma(x, 1).$$

Dans le paragraphe suivant nous allons calculer l'holonomie de L_ω lorsque $n=2$. Cette restriction est justifiée par la remarque suivante :

Remarque. — Il existe un plongement $j : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ tel que $\mathscr{H}(\omega, t_0)$ soit complètement caractérisé par $\mathscr{H}(j^*(\omega), t_0)$; c'est-à-dire : l'holonomie de ω peut être lue sur la restriction de ω à un deux plan bien choisi. En effet, il existe un plongement j de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dans $(\mathbb{C}^n, 0)$ qui vérifie :

(i) j est transverse à ω, c'est-à-dire :

$$S(j^*(\omega))=\{0\};$$

(ii) le plongement T de $\mathbb{PC}(1)$ dans $\mathbb{PC}(n-1)$ défini par l'application tangente de j en 0 coupe C_ω transversalement et

$$C_{j^*(\omega)}=T^{-1}(C_\omega);$$

(iii) le morphisme de groupe

$$T_\# : \quad \pi_1(L_{j^*(\omega)}, t'_0) \to \pi_1(L_\omega, t_0)$$

est surjectif.

Les propriétés (i) et (ii) sont des conséquences immédiates du théorème (VI. 2); la propriété (iii) se déduit d'un théorème bien connu de Zariski ([9], [25]); puisque T est surjective, $\mathscr{H}(\omega, t_0)$ est déterminé par $\mathscr{H}(j^*(\omega), t'_0)$ où $t_0 = \mathrm{T}(t'_0)$.

6. Calcul de l'holonomie linéaire lorsque $n=2$. — Soit

$$\omega = a\,dx + b\,dy, \qquad (x, y) \in \mathbb{C}^2,$$

une 1-forme holomorphe sur un voisinage ouvert U de $0 \in \mathbb{C}^2$. Notons ν son ordre et

$$\omega_\nu = a_\nu\,dx + b_\nu\,dy,$$

son jet d'ordre ν en 0. Supposons choisies les coordonnées (x, y) telles que l'axe des y ne soit pas dans le cône tangent C_ω de ω (non dicritique); c'est-à-dire que

$$\mathrm{P}_{\nu+1}(x, y) = x a_\nu + y b_\nu = \prod_{j=1}^{p} (y - t_j x)^{\nu_j}.$$

Ainsi $\mathrm{C}_\omega = \{ t_1, \ldots, t_p \}$ est contenu dans le domaine de définition V_1 de la carte (x, t), $t = y/x$. Désignons par $\gamma_j, j = 1, \ldots, p$ un lacet différentiable dans $\mathrm{L}_\omega - \{ x = 0 \} = \mathrm{W}_1 - \mathrm{C}_\omega$, d'origine t_0 dont l'indice par rapport aux points t_k est 1 si $j = k$ et 0 si $j \neq k$. Les classes d'homotopie $\dot\gamma_1, \ldots, \dot\gamma_p$ engendrent $\pi_1(\mathrm{L}_\omega, t_0)$ et les difféomorphismes

$$h_j = \mathscr{H}(\omega, t_0)(\dot\gamma_j), \qquad j = 1, \ldots, p,$$

constituent un système de générateurs du *groupe d'holonomie*

$$\mathrm{H}(\omega, t_0) = \mathrm{Im}(\mathscr{H}(\omega, t_0)).$$

Proposition. — *La partie linéaire de $\mathscr{H}(\omega, t_0)$ est l'holonomie $\mathscr{H}(\omega_\nu, t_0)$ de ω_ν. De façon plus précise soit $\dot\gamma \in \pi_1(\mathrm{L}_\omega, t_0)$ et h le difféomorphisme d'holonomie correspondant, alors :*

$$h'(0) = e^{-\int_\gamma b_\nu(1, t)\,dt/\mathrm{P}_{\nu+1}(1, t)}$$

En particulier si $\gamma = \gamma_j$, $h'_j(0) = e^{-2i\pi\lambda_j}$, où λ_j est le résidu de $b_\nu(1, t)/\mathrm{P}_{\nu+1}(1, t)$ au point t_j.

Démonstration. — Dans la carte (x, t) on a

$$\tilde\omega = \frac{\mathrm{E}^*(\omega)}{x^\nu} = \mathrm{P}(x, t)\,dx + x\,\mathrm{B}(x, t)\,dt,$$

$$\mathrm{P}(x, t) = \frac{a(x, tx) + t b(x, tx)}{x^\nu}, \qquad \mathrm{P}(0, t) = \mathrm{P}_{\nu+1}(1, t),$$

$$\mathrm{B}(x, t) = \frac{b(x, tx)}{x^\nu}, \qquad \mathrm{B}(0, t) = b_\nu(1, t).$$

Soit $\overline{\Gamma}_x = (\Gamma_x, \gamma)$ le relèvement de γ suivant la projection $\pi(x, t) = t$, $\Gamma_x(s) = \sum_{k \geqq 1} c_k(s) x^k$.

On a

$$P(\Gamma(x, s), \gamma(s))\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(x, s) = -\Gamma(x, s)\,B(\Gamma(x, s), \gamma(s))\frac{d\gamma}{ds}(s).$$

En identifiant les coefficients de x des deux membres de cette équation, on obtient l'équation différentielle

$$P(0, \gamma(s))\,c_1'(s) = -c_1(s)\,B(0, \gamma(s))\frac{d\gamma}{ds}(s).$$

Compte tenu de la condition initiale $c_1(0)=1$, on obtient :

$$c_1(1) = h'(0) = e^{-\int_0^1 (b_\nu(1, \gamma(s))/P_{\nu+1}(1, \gamma(s))(d\gamma/ds)\,ds}$$

Lorsque $\omega = \omega_\nu$ est homogène, on a

$$\tilde{\omega}_\nu = \frac{E^*(\omega_\nu)}{x^\nu} = P_{\nu+1}(1, t)\,dx + x b_\nu(1, t)\,dt,$$

et il est clair que le difféomorphisme d'holonomie est alors linéaire.

IV. Convergence d'intégrales premières en dimension 2, dans le cas réduit

1. Un critère de convergence. — Nous verrons dans ce paragraphe que la convergence d'une intégrale première formelle f peut se lire, en dimension 1, sur tout chemin complexe c qui n'annule pas le germe de 1-forme ω. Ce résultat nous sera par la suite très utile. Au chapitre VI notamment, il rend évidente la convergence d'une extension formelle d'une intégrale première sur un 2-plan.

Dans ce chapitre, ainsi qu'au chapitre suivant, ce critère nous permet de ramener la recherche d'une intégrale première holomorphe du type $l \circ f$ à l'étude du groupe d'invariance de la série d'une variable $f \circ c$, *cf.* le chapitre 1.

Nous verrons au paragraphe 2 que l' « holonomie » de ω, *cf.* le chapitre III, est un sous-groupe de $H(f \circ c)$, et étudierons au paragraphe 3 un cas où l'on a l'égalité. On en déduira (§ 4) la démonstration du théorème B, dans le cas réduit $n=2$, en s'aidant de la théorie des formes normales formelles des champs de vecteurs, *cf.* Appendice I.

Théorème 1. — *Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe intégrable qui possède une intégrale première formelle $f \in \hat{\mathcal{O}}_n$, et $c : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ un germe de courbe analytique telle que $c^*(\omega)$ ne soit pas identiquement nul. Alors f converge, i. e. $f \in \mathcal{O}_n$, si et seulement si $f \circ c$ converge, i. e. $f \circ c \in \mathcal{O}_1$.*

Démonstration. — Remarquons d'abord qu'une série formelle $f \in \hat{\mathcal{O}}_n$ converge dès que son éclaté $F = f \circ E$ converge en un point quelconque t_0 de $\mathbb{P}\mathbb{C}(n-1)$. En effet notons comme précédemment $(x, y) = (x, y_1, \ldots, y_{n-1})$ les coordonnées de $(\mathbb{C}^n, 0)$ et supposons que t_0 soit la direction de l'axe des x. Dans la carte (x, t), $t = y/x$, au point t_0, $F = f \circ E_{,t_0}$ s'écrit :

$$F = f(x, tx),$$

et en notant

$$f(x, y) = \sum_{i, \mathrm{I}} a_{i, \mathrm{I}} x^i y^{\mathrm{I}},$$

nous avons

$$F(x, t) = \sum_{i, \mathrm{I}} a_{i, \mathrm{I}} x^{i + |\mathrm{I}|} t^{\mathrm{I}},$$

$|\mathrm{I}|$ désignant la longueur $i_1 + \ldots + i_{n-1}$ du multiindice $\mathrm{I} = (i_1, \ldots, i_{n-1})$. Si F est convergente il existe un réel $M \geqq 1$ tel que pour tout i, I, on ait $|a_{i, \mathrm{I}}| \leqq M^{i + 2|\mathrm{I}|}$ et donc

$$|a_{i, \mathrm{I}}| \leqq (M^2)^{i + |\mathrm{I}|};$$

ce qui prouve la convergence de f.

Nous allons voir maintenant qu'il suffit de montrer le théorème lorsque c est un germe de courbe lisse tel que $[c'(0)] \notin C_\omega$. Par des éclatements successifs ponctuels nous désingularisons tout d'abord c; c'est-à-dire qu'il existe une application

$$\pi : \quad (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0), \qquad \omega_0 = \overline{\pi^*(\omega)},$$

qui est une composée d'applications d'éclatements telle que

$$c = \pi \circ c_0,$$

et c_0 est un germe de courbe lisse. Nous pouvons, quitte à changer les coordonnées et la paramétrisation, supposer que

$$c_0(x) = (x, 0, 0, \ldots, 0).$$

Montrons maintenant que par la série d'éclatements

$$E_k(x, t) = (x, x^k t),$$

nous pouvons obtenir la propriété supplémentaire

$$[c_k'(0)] \notin C_{E_k^*(\omega)} \qquad \text{où} \quad c_0 = E_k \circ c_k.$$

En effet, soit ν' le plus petit entier r tel que x^r divise $E_k^*(\omega_0)$. Notons

$$\omega_0 = a\,dx + b_1\,dy_1 + \ldots + b_{n-1}\,dy_{n-1},$$

$$\tilde{\omega}_0 = \frac{E^*(\omega_0)}{x^{\nu'}} = \left(\frac{a(x, x^k t)}{x^{\nu'}} + t\,A\right) dx + B_1\,dt_1 + \ldots + B_{n-1}\,dt_{n-1}.$$

Si $\tilde{\omega}_0$ est encore singulière au point $t_0=0$, il est clair que $\nu' \geqq k$. Ceci ne peut se produire pour k arbitrairement grand que si $a(x, 0)$ est identiquement nul. Mais alors :

$$c_0^*(\omega_0)=a(x, 0)\,dx \equiv 0,$$

ce qui contredirait les hypothèses du théorème. Enfin, d'après la remarque précédente f est convergente dès que $f \circ \pi \circ E_k$ est convergente.

Supposons donc : $c(x)=(x, 0, \ldots, 0)$ et $t_0=[(1, 0, \ldots, 0)] \notin C_\omega$. Notons de nouveau

$$\tilde{\omega}=\frac{E^*(\omega)}{x^\nu},$$

où ν est l'ordre de ω en 0 et $F=f \circ E_{,t_0}$. Il est clair que F est une intégrale première de $\tilde{\omega}$. Le germe de $\tilde{\omega}$ en $t_0=0$ étant non singulier, il existe un germe de fonction analytique en t_0, $X(x, t) \in \mathbb{C}\{x, t\}$ vérifiant :

$$\tilde{\omega} \wedge dX=0 \qquad \text{et} \qquad X(x, 0)=x.$$

Ainsi (X, t) constituent un système de coordonnées en t_0 où la condition $\tilde{\omega} \wedge dF$ s'écrit :

$$dX \wedge d\overline{F}=0,$$

$\overline{F} \in \mathbb{C}\,[X, t]$ étant la série formelle en les variables X et t définie par

$$\overline{F}(X(x, t), t)=F(x, t).$$

On a donc

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial t_1}=\ldots=\frac{\partial \overline{F}}{\partial t_{n-1}}=0.$$

Il en résulte que $\overline{F}(X, t)=\overline{F}(X, o)$ et que

$$F(x, t)=\overline{F}(X(x, t), 0)=f(X(x, t), 0).$$

Ainsi, si $f \circ c(x)=f(x, 0)$ converge, il en est de même de F et, d'après la première remarque de cette démonstration, f est convergente. La réciproque est triviale.

En appliquant les résultats du premier chapitre sur les groupes d'invariance (prop. 1.2), on obtient immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe intégrable qui possède une intégrale première formelle $f \in \hat{\mathcal{O}}_n$ et $c:(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ un germe de courbe analytique telle que $c^*(\omega) \not\equiv 0$. Si*

$$H(f \circ c) \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0),$$

ω possède une intégrale première holomorphe; de façon plus précise, il existe $l \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ tel que $l \circ f \in \mathcal{O}_n$.

2. Intégrales premières et holonomie. — Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme intégrable possédant une intégrale première formelle $f \in \hat{\mathcal{O}}_n$, et t_0 un point de $\mathbb{PC}(n-1) - \mathrm{C}_\omega \cup \{x=0\}$. Considérons un germe de plongement $c : (\mathbb{C}, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ vérifiant $[c'(0)] = t_0$. Notons $\bar{c} : (\mathbb{C}, 0) \hookrightarrow (\tilde{\mathbb{C}}^n, t_0)$ le relevé de c dans l'éclaté de $\mathbb{C}^n$, i. e. $c = \mathrm{E} \circ \bar{c}$, et $\mathrm{F} = f \circ \mathrm{E}_{t_0}$:

$$\mathrm{F}(x, t) = \sum_{k \geqq 0} a_k(t) x^k,$$

les $a_k(t)$ étant des polynômes en t, *cf.* § 2, chap. III. Posons

$$\mathrm{F}_{t_0}(x) = \sum_{k \geqq 0} a_k(t_0) x^k \in \mathbb{C}[x],$$

et soit $\mathrm{H}(f, t_0)$ le groupe d'invariance de la série $\mathrm{F}_{t_0}(x)$. Remarquons que $\mathrm{H}(f \circ c)$ se déduit de $\mathrm{H}(f, t_0)$ par un difféomorphisme holomorphe $s \to x(s)$. En effet donnons nous, comme dans la démonstration du théorème 1 la coordonnée $\mathrm{X}(x, t)$ vérifiant :

$$\tilde{\omega} \wedge d\mathrm{X} = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{X}(x, t_0) = x,$$

$t = y/x$ désignant la variable sur $\mathbb{PC}(n-1)$. Alors F s'écrit comme la série de la seule variable X :

$$\bar{\mathrm{F}}(\mathrm{X}) = \mathrm{F}_{t_0}(\mathrm{X}) \in \mathbb{C}[\mathrm{X}], \qquad \bar{\mathrm{F}}(\mathrm{X}(x, s)) = \mathrm{F}(x, s).$$

Le composé $x(s) = \mathrm{X} \circ \bar{c}(s)$ est un automorphisme holomorphe de $(\mathbb{C}, 0)$ ($[c'(t_0)] = t_0$ et $(\mathrm{X} \circ \bar{c})'(0) \neq 0$). On vérifie facilement que

$$\mathrm{F}_{t_0}(x(s)) = f \circ c(s).$$

Le sous-groupe $\mathrm{H}(f, t_0)$ de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ est donc défini modulo un automorphisme intérieur $h \to g \circ hg^{-1}$, $g \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C})$, indépendamment du choix des coordonnées de $(\mathbb{C}^n, 0)$.

Proposition. — *Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe intégrable qui possède une intégrale première formelle $f \in \hat{\mathcal{O}}_n$ et soit $t_0 \in \mathrm{L}_\omega = \mathbb{PC}(n-1) - \mathrm{C}_\omega$. Alors $\mathrm{H}(\omega, t_0)$ est un sous-groupe de $\mathrm{H}(f, t_0)$ analytiquement conjugué à un sous-groupe fini de rotation.*

Démonstration. — Choisissons des coordonnées (x, y) dans $\mathbb{C}^n$ telles que t_0 soit la direction de l'axe des x et que $\dot{\gamma} \in \pi_1(\mathrm{L}_\omega, t_0)$ soit représenté par un lacet γ contenu dans le domaine de définition W_1 de la carte $t = y/x$. Reprenons les notations utilisées au chapitre précédent : $\bar{\Gamma}_x$ est le relèvement de γ dans la feuille de $\tilde{\mathscr{F}}_\omega$, d'origine (x, t_0) suivant π :

$$\bar{\Gamma}_x(s) = (\Gamma(x, s), \gamma(s)), \qquad \Gamma(x, 0) = x,$$

Nous pouvons supposer γ de classe C^∞ et

$$\Gamma(x, s) = \sum_{k \geqq 1} c_k(s) x^k \in \mathrm{C}^\infty([0, 1])[x].$$

Puisque $\Gamma(0, s)$ est identiquement nul, le composé $F \circ \overline{\Gamma}$, où $F = f \circ E \in \hat{\mathscr{E}}(W_1)$, est bien défini, *cf.* III.2. On a

$$\frac{\partial}{\partial s} F \circ \overline{\Gamma}(x, s) = dF\left(\frac{\partial}{\partial s}\overline{\Gamma}(x, s)\right) = \tilde{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial s}\overline{\Gamma}(x, s)\right) = 0.$$

On en déduit que $F \circ \overline{\Gamma}$ ne dépend pas de s et le difféomorphisme d'holonomie $h(x) = \Gamma(x, 1)$ laisse invariant $F_{t_0}(x)$:

$$F_{t_0}(x) = F \circ \overline{\Gamma}(x, 0) = F \circ \overline{\Gamma}(x, 1) = F_{t_0}(h(x)).$$

De plus $H(\omega, t_0) \subset H(f, t_0)$ est un sous-groupe fini de Diff $(\mathbb{C}, 0)$ puisque $H(f, t_0)$ est fini, *cf.* chap. I.

Remarque. — En utilisant la même technique de relèvement de chemin on pourrait montrer que, à un automorphisme intérieur près $h \to g \circ h \circ g^{-1}$, $g \in$ Diff $(\mathbb{C}, 0)$, le sous-groupe $H(f, t_0)$ de $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ ne dépend pas du point $t_0 \in L_\omega$.

Soit $c : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ un plongement tel que $[c'(0)] \in L_\omega$. Interprètons $H(f, t_0)$ comme le groupe d'invariance de $f \circ c$. Si on a l'égalité $H(f, t_0) = H(\omega, t_0)$, $H(f \circ c)$ est contenu dans Diff $(\mathbb{C}, 0)$ et, d'après la proposition du chapitre I, il existe $l \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ tel que $l \circ f \circ c$ converge. Il résulte alors du critère de convergence que $l \circ f \in \mathcal{O}_n$.

LEMME. — *Soit* ω *un germe de* 1-*forme holomorphe en* $0 \in \mathbb{C}^2$ *qui possède une intégrale première formelle d'ordre* $\nu', f \in \hat{\mathcal{O}}_2$. *Supposons que les multiplicités des différentes branches de* C_ω *soient premières dans leur ensemble i. e.* :

$$\begin{cases} f_{\nu'} = (y - t_1 x)^{\nu'_1} \dots (y - t_p x)^{\nu'_p}, \\ \text{p. g. c. d.}(\nu'_1, \dots, \nu'_p) = 1. \end{cases}$$

Alors il existe $l \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ *tel que* $l \circ f \in \mathcal{O}_2$. *Plus précisément, on a, pour tout* $t_0 \in L_\omega$:

$$H(\omega, t_0) = H(f, t_0).$$

Démonstration. — Il suffit de construire un élément h de $H(\omega, t_0)$ qui engendre $H(f, t_0)$, c'est-à-dire tel que

$$h'(0) = e^{-2i\pi/\nu'}.$$

Soit ν l'ordre de ω en 0 et

$$\omega_\nu = a_\nu\, dx + b_\nu\, dy.$$

Un calcul élémentaire montre que $df_{\nu'} \wedge \omega_\nu = 0$ implique

$$\frac{b_\nu(1, t)}{a_\nu(1, t) + t b_\nu(1, t)} = \frac{1}{\nu'} \sum_{j=1}^{p} \frac{\nu'_j}{t - t_j}.$$

Soient $n'_1, \ldots, n'_p$ tels que

$$n'_1 \nu'_1 + \ldots + n'_p \nu'_p = 1.$$

Notons γ un lacet dans L_ω d'indice n_j au point t_j, pour $j=1, \ldots, p$. D'après la proposition du paragraphe 6, chap. III, caractérisant l'holonomie linéaire,

$$h'(0) = e^{-1/\nu' \int_\gamma \sum_{j=1}^{p} (\nu'_j/(t-t_j))\, dt} = e^{-2i\pi/\nu' \sum_{j=1}^{p} n'_j \nu'_j} = e^{-2i\pi/\nu'}.$$

3. Démonstration du théorème A dans le cas réduit, $n=2$ (²). — Soit $\omega = a\,dx + b\,dy$, un germe en 0 de 1-forme holomorphe réduite, c'est-à-dire de 1-jet en 0 :

$$\omega_1 = \lambda_2\, x\, dy - \lambda_1\, y\, dx,$$

où λ_1 et λ_2 vérifient l'une des deux conditions :

$$(\star) \qquad \lambda_1 . \lambda_2 \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1/\lambda_2, \quad \lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{N},$$

$$(\star\star) \qquad \lambda_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 0.$$

Soit $f \in \hat{\mathcal{O}}_2$ une intégrale première formelle de ω qui n'est pas une puissance. Nous montrons ici la première partie du théorème B, c'est-à-dire l'existence d'un difféomorphisme formel $l \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ tel que $l \circ f$ converge. La deuxième partie résulte clairement du théorème de factorisation que nous prouverons dans le paragraphe suivant dans le cas réduit $n=2$.

Soit ν l'ordre de f et f_ν son jet d'ordre ν. Le cône tangent de f étant égal au cône tangent de ω,

$$C_\omega = \{ xy = 0 \},$$

f_ν s'écrit :

$$f_\nu = x^{p'} y^{q'}, \qquad p'.q' \neq 0.$$

Il suffit, d'après le lemme précédent, de montrer que p' et q' sont premiers entre eux. En explicitant la relation $\omega_1 \wedge df_\nu = 0$ on obtient :

$$\lambda_2 q' + \lambda_1 p' = 0.$$

Ainsi ω est du type $(\star)$ et

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{p'}{q'} = \frac{p}{q}, \qquad \text{p. g. c. d.}\,(p, q) = 1.$$

(²) Ce résultat est aussi une conséquence immédiate de la théorie de Brjuno [6] sur les formes normales de champs vecteurs (*cf.* [17]).

Supposons donc $\lambda_1 = -p$, $\lambda_2 = q$. Donnons-nous un système de coordonnées formelles X, Y où ω s'écrit *sous forme normale* (*cf.* appendice II.1) :

$$\omega = \mathrm{Y}\mathrm{A}(\mathrm{X}^p \mathrm{Y}^q)\, d\mathrm{X} + \mathrm{X}\mathrm{B}(\mathrm{X}^p \mathrm{Y}^q)\, d\mathrm{Y},$$

avec

$$\begin{cases} \mathrm{X}(x, y) = x(1 + \mathrm{A}_1(x, y)), & \mathrm{A}_1(0) = 0, \quad \mathrm{A}_1 \in \hat{\mathcal{O}}_2; \\ \mathrm{Y}(x, y) = y(1 + \mathrm{B}_1(x, y)), & \mathrm{B}_1(0) = 0, \quad \mathrm{B}_1 \in \hat{\mathcal{O}}_2; \\ \qquad \mathrm{A}(0) = p, \quad \mathrm{B}(0) = q, & \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \hat{\mathcal{O}}_1. \end{cases}$$

Soit $\mathrm{F} \in \mathbb{C}\, [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ la série formelle en les variables X, Y définie par

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}(x, y), \mathrm{Y}(x, y)) = f(x, y).$$

Mettons en évidence la partie « normale » de F :

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = l_1(\mathrm{X}^p \mathrm{Y}^q) + \sum_{qi \neq pj} a_{i,j} \mathrm{X}^i \mathrm{Y}^j, \qquad l_1 \in \hat{\mathcal{O}}_1.$$

Un calcul élémentaire explicitant la condition $\omega \wedge d\mathrm{F} = 0$ montre que

$$q\mathrm{A} = p\mathrm{B},$$
$$\mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = l_1(\mathrm{X}^p \mathrm{Y}^q).$$

Ainsi ω s'écrit dans les coordonnées X, Y :

$$\omega = \frac{\mathrm{A}}{p\mathrm{X}^{p-1}\mathrm{Y}^{q-1}}\, d(\mathrm{X}^p \mathrm{Y}^q), \qquad \mathrm{A}(0) \neq 0.$$

Ceci montre en particulier que si $\gamma(t) = (\mathrm{X}(t), \mathrm{Y}(t)) \in \hat{\mathcal{O}}_1^2$ est une *solution formelle* de ω, i. e., $\gamma^* \omega \equiv 0$, on a nécessairement

$$\mathrm{X}(t) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{Y}(t) = 0.$$

Comme ω divise $d\mathrm{F}$, on a $d\mathrm{F}(\gamma'(t)) \equiv 0$. Toute composante irréductible admettant une paramétrisation (théorème de Puiseux), F n'a que deux composantes X et Y, et de plus

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{X}^{p'} \mathrm{Y}^{q'} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \qquad \mathrm{G}(0) \neq 0,$$

ou encore, dans les coordonnées x, y :

$$f(x, y) = x^{p'} y^{q'} g(x, y), \qquad g(0) \neq 0.$$

Mais f n'étant pas une puissance, p' et q' sont premiers entre eux. Remarquons aussi que f est monomiale

$$f(x, y') = x^p y'^q \qquad \text{avec} \quad y' = y g(x, y)^{1/q'}.$$

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE FACTORISATION DANS LE CAS RÉDUIT, $n=2$. — Soit $f \in \hat{\mathcal{O}}_2$ une série formelle qui n'est pas une puissance et telle que la 1-forme formelle

$$\omega = df$$

soit réduite, à un facteur multiplicatif près. La même démonstration qu'au paragraphe précédent prouve que f est monomial : il s'écrit, dans un système de coordonnées x, y approprié

$$f = x^p y^q, \qquad \text{p. g. c. d.}\,(p, q) = 1.$$

Soit $g \in \hat{\mathcal{O}}_2$ vérifiant $df \wedge dg = 0$. En explicitant la relation

$$dg \wedge (py\,dx + qx\,dy) = 0,$$

un bref calcul montre que g est du type $l\,(x^p y^q)$, où $l \in \hat{\mathcal{O}}_1$.

Il est clair que lorsque f et g sont convergents, l l'est aussi. Cependant dans ce cas on pourrait aussi déterminer la factorisation l de manière purement topologique. En effet, il est facile de voir que, sur tout voisinage ouvert connexe U de O du type $f^{-1}(f(\mathrm{V}))$, les hypersurfaces de niveau de $f(x, y) = x^p y^q$ sont connexes.

V. — Démonstration des théorèmes en dimension 2

Nous allons prouver les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. — *Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de 1-forme holomorphe tel que $\mathcal{F}_\omega$ soit simple. Il existe alors $f \in \mathcal{O}_2$, non constant, vérifiant $\omega \wedge df = 0$.*

THÉORÈME 2. — *Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de 1-forme holomorphe possédant une intégrale première formelle $f \in \hat{\mathcal{O}}_2$ qui n'est pas une puissance. Il existe alors $l \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ tel que $l \circ f \in \mathcal{O}_2$.*

THÉORÈME 3. — *Soit $f \in \mathcal{O}_2$ (resp. $\hat{\mathcal{O}}_2$) qui n'est pas une puissance et $g \in \mathcal{O}_2$ (resp. $\hat{\mathcal{O}}_2$) vérifiant : $df \wedge dg = 0$. Il existe alors $l \in \mathcal{O}_1$ (resp. $\hat{\mathcal{O}}_1$) tel que $g = l \circ f$.*

La deuxième partie du théorème A en dimension 2 découle visiblement de ce dernier théorème. Le lemme ci-dessous, que nous utiliserons dans la démonstration du théorème 1, donne une interprétation topologique du théorème 3 lorsque f et g sont holomorphes. Il permet de construire directement la factorisation $l \in \mathcal{O}_1$.

LEMME 1. — *Soit $f \in \mathcal{O}_2$ holomorphe sur un voisinage ouvert* U *de* $0 \in \mathbb{C}^2$. *qui n'est pas une puissance. Alors il existe un voisinage ouvert* U_1 *de* 0 *dans* U *tel que les hypersurfaces de niveau de la restriction de f à* U_1 *soient connexes* ([3]).

([3]) J. Briançon, A. Galligo et M. Granger montrent un résultat analogue dans [4], en utilisant des techniques d'équisingularités.

Les démonstrations de ces théorèmes et du lemme sont basées sur le même argument : elles se font par récurrence sur le nombre d'éclatements nécessaires à la réduction de ω — ou de df. Nous prouverons successivement le lemme 1, puis les théorèmes 1, 3 et 2. Auparavant nous allons introduire les notations communes et montrer des lemmes de recollement.

1. RECOLLEMENT D'INTÉGRALES PREMIÈRES LOCALES. — Considérons une forme holomorphe ω sur un voisinage ouvert U de $0 \in \mathbb{C}^2$, non dicritique, $C_\omega = \{t_1, \ldots, t_p\}$ son cône tangent. Supposons choisies les coordonnées (x, y) telles que les droites $\{x=0\}$ et $t_0 = \{y=0\}$ ne soient pas dans C_ω. Notons encore $t = y/x$ la carte de $\mathbb{PC}(1)$ associée, et $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{PC}(1)$ la fibration de fibre $\mathbb{C}$ introduite au chapitre II.1, $\pi(x, t) = t$. Pour $t \in L_\omega = \mathbb{PC}(1) - C_\omega$, nous désignons par $(\mathbb{C}, t)$ le germe en t de la fibre $\pi^{-1}(t) \simeq \mathbb{C}$. Soient W un ouvert de L_ω, $t \in W$, et $H_W(\omega; t)$ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}; t)$ engendré par les difféomorphismes d'holonomie correspondant aux lacets contenus dans W. Énonçons un résultat bien connu :

LEMME 2. — *Soient* W *un ouvert de* L_ω, $t' \in W$, *et* $g : (\mathbb{C}, t') \to (\mathbb{C}, 0)$ *un germe de fonction holomorphe invariante par l'action de* $H_W(\omega; t')$. *Alors* g *se prolonge de manière unique au voisinage de* W *en une intégrale première holomorphe* G *de* $E^*(\omega)$.

Démonstration. — Soit $\gamma : [0, 1] \to W$ un chemin différentiable d'origine t', Son relèvement $\overline{\Gamma}(x, s) = (\Gamma(x, s), \gamma(s))$ dans les feuilles de $\tilde{\mathscr{F}}_\omega$ définit un difféomorphisme analytique

$$\tau_\gamma : \quad (\mathbb{C}, t') \simeq (\mathbb{C}, t),$$
$$\tau_\gamma(x) = \Gamma(x, 1), \qquad t = \gamma(1).$$

La fonction $g \circ \tau_\gamma$ est invariante par l'action du groupe $H_W(\omega; t) = \tau_\gamma^{-1} \circ H_W(\omega, t') \circ \tau_\gamma$; elle ne dépend donc pas du chemin γ reliant t à t' dans W; nous la notons G_t. Puisque le prolongement G doit être constant sur les feuilles de $\tilde{\mathscr{F}}_\omega$, sa restriction à $(\mathbb{C}, t)$ sera G_t; cela prouve l'unicité de G. Il est clair d'autre part qu'en tout point $t \in W$, G_t se prolonge de manière unique en un germe d'intégrale première holomorphe $G_{,t} : (\tilde{\mathbb{C}}^2, t) \to (\mathbb{C}, 0)$ et que tout t'' proche de t la restriction de $G_{,t}$ à $(\mathbb{C}, t'')$ est égale à $G_{t''}$. Il en résulte que les germes $G_{,t}$ se recollent en une application G holomorphe au voisinage de W, qui est une intégrale première de $E^*(\omega)$.

Supposons qu'en chaque point $t_j \in C_\omega$, le germe de $E^*(\omega)$ possède une intégrale première holomorphe non nulle $g_j \in \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{C}}^2, t_j}$. Donnons nous pour $j = 1, \ldots, p$ un voisinage ouvert simplement connexe de t_j, $W_j \subset L_\omega \cup \{t_j\}$, contenant t_0. Pour t'_j voisin de t_j la restriction de g_j à la fibre $(\mathbb{C}, t'_j)$ est invariante par l'action du groupe $H_{W'_j}(\omega; t'_j)$, où $W'_j = W_j - \{t_j\}$. D'après le lemme précédent nous pouvons supposer g_j holomorphe au voisinage de W_j. Désignons par g_j^0 sa restriction à $(\mathbb{C}, t_0)$ et par $H(g_j^0)$ le groupe d'invariance de g_j^0. Visiblement $H_{W'_j}(\omega; t_0)$ est contenu dans $H(g_j^0)$ et le groupe d'holonomie de ω, $H(\omega; t_0)$, est engendré par l'union des $H_{W'_j}(\omega; t_0)$. Le groupe engendré par l'union des $H(g_j^0)$, noté

$$H(g_1, \ldots, g_p; t_0) \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, t_0),$$

contient $H(\omega; t_0)$. Ainsi il ne dépend pas des W_j utilisés pour le définir.

LEMME 3. — *Si* $H(g_1, \ldots, g_p; t_0)$ *est fini,* ω *possède une intégrale première* $f \in \mathcal{O}_2$ *unique à composition à gauche près par un élément* $l \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, *telle que*

$$H(f; t_0) = H(g_1, \ldots, g_p; t_0). \tag{1.1}$$

Démonstration. — D'après la proposition 1.1 du chapitre I, on peut choisir la coordonnée x telle que $H(g_1, \ldots, g_p; t_0)$ soit engendré par la rotation $r_\nu(x) = e^{2i\pi/\nu}x$, où ν est l'ordre de $H(g_1, \ldots, g_p; t_0)$. Les sous-groupes $H(g_j^0)$ sont engendrés par les rotations r_{ν_j} et ν est le p. p. c. m. de $\nu_1, \ldots, \nu_p$. On déduit sans peine de l'égalité $g_j^0 \circ r_{\nu_j} = g_j^0$ que

$$g_j^0 = l_j(x^{\nu_j}) \qquad \text{avec} \quad l_j \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0).$$

L'application x^ν est invariante par l'action de $H(g_1, \ldots, g_p; t_0)$ et *a fortiori* de $H(\omega; t_0)$. Elle se prolonge de manière unique au voisinage de L_ω en une intégrale première holomorphe $\overline{F}$ de $E^*(\omega)$. D'autre part on a

$$x^\nu = (l_j^{-1} \circ g_j^0)^{m_j}, \qquad \text{avec} \quad m_j \nu_j = \nu.$$

Ainsi $\overline{F}$ coïncide au voisinage de t_j avec $(l_j^{-1} \circ g_j)^{m_j}$. La fonction holomorphe F définie au voisinage de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ par recollement de $\overline{F}$ et de ces fonctions est une intégrale première de $E^*(\omega)$. Alors $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ définie par $f \circ E = F$ est une intégrale première de ω.

Soit $g : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ une seconde intégrale première de ω vérifiant (1.1). On a $g(x, 0) = l(x^\nu)$ avec $l \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Ainsi $G = l^{-1} \circ g \circ E$ coïncide avec F sur $(\mathbb{C}, t_0)$ et donc aussi au voisinage de L_ω. Il en résulte que $F = G$ et $f = l^{-1} \circ g$.

Supposons maintenant que ω possède une intégrale première $f \in \mathcal{O}_2$. Les germes F_j de $F = f \circ E$ aux points $t_j \in C_\omega = C_f$ peuvent être des puissances

$$F_j = g_j^{m_j},$$

$g_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, t_j}$ n'étant pas une puissance.

LEMME 4. — *Si* $f \in \mathcal{O}_2$ *n'est pas une puissance on a l'égalité*

$$H(f; t_0) = H(g_1, \ldots, g_p; t_0).$$

Démonstration. — Montrons d'abord que p. g. c. d. $(m_1, \ldots, m_p) = 1$. Considérons la décomposition de f en facteurs irréductibles $f_{j,k}$:

$$\begin{cases} f = f_1^{n_1} \cdot \ \ldots \ \cdot f_p^{n_p}, & C_{f_j} = \{t_j\}, \\ f_j^{n_j} = f_{j,1}^{n_{j,1}} \cdot \ \ldots \ \cdot f_{j,p}^{n_{j,p_j}}, & \end{cases}$$

f_j n'est pas une puissance et

$$\text{p. g. c. d.}(n_{j,1}, \ldots, n_{j,p_j}) = n_j,$$
$$\text{p. g. c. d.}(n_1, \ldots, n_p) = 1.$$

Soit ν l'ordre de f. On a

$$F_j = x^\nu \tilde{f}_j^{n_j} u_j,$$

avec

$$f_k = \frac{\tilde{f}_k \circ E}{x^{\nu(f_k)}}, \qquad u_j = \prod_{k \neq j} \tilde{f}_k^{n_k}.$$

Soient $m_j = \text{p.g.c.d.}\,(n_j, \nu)$. Comme $u_j(t_j) \neq 0$, u_j possède une racine m_j-ième, $u_j = v_j^{m_j}$ et finalement

$$g_j = x^{\nu/m_j} \tilde{f}_j^{n_j/m_j} v_j.$$

Puisque $\nu = n_1 \nu(f_1) + \ldots + n_p \nu(f_p)$, il est clair que le p.g.c.d. de $m_1, \ldots, m_p$ est 1.

On a $f(x, 0) = F_{t_0}(x) = (g_j^0)^{m_j}$ et l'inclusion $H(g_1, \ldots, g_p;\, t_0) \subset H(f;\, t_0)$ est triviale. Montrons la réciproque. Soit $h \in H(f;\, t_0)$. Il découle de l'égalité

$$(g_j^0 \circ h)^{m_j} = (g_j^0)^{m_j},$$

que $g_j^0 \circ h = \alpha_j g_j^0$, où $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine m_j-ième de l'unité. Ainsi $h_j^{m_j}$ est un élément de $H(g_j^0)$, Soient $q_1, \ldots, q_p \in \mathbb{Z}$ tels que $m_1 q_1 + \ldots + m_p q_p = 1$, on obtient :

$$h = (h^{m_1})^{q_1} \circ \ldots \circ (h^{m_p})^{q_q}$$

ce qui achève la démonstration.

2. Démonstration du lemme 1 — Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert U de $0 \in \mathbb{C}^2$ dont le germe en 0 n'est pas une puissance. Nous raisonnons par récurrence sur le nombre d'éclatements nécessaires, $N(\omega)$ à la réduction de $\omega = df$. Si df est irréductible, à un facteur multiplicatif près, il existe, d'après les résultats du chapitre IV.3, un système de coordonnées (x, y) tel que

$$f = l(x^p y^q), \qquad l \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0), \quad \text{p.g.c.d.}\,(p, q) = 1.$$

Il est facile de voir que les surfaces de niveau de $x^p y^q$ — et donc de f, sont connexes.

Supposons ce résultat vrai lorsque $N(\omega) < N$ et considérons le cas $N(\omega) = N$. Nous conservons les notations introduites au chapitre précédent : F_j désigne le germe de $F = f \circ E$ au point $t_j \in C_\omega = C_f$ et

$$F_j = g_j^{m_j},$$

où g_j n'est pas une puissance Il est clair que dg_j se réduit en moins de N éclatements. Ainsi il existe pour $j = 1, \ldots, p$ des voisinages ouverts V'_j des $t_j \in C_\omega$ sur lesquels les surfaces de niveau des g_j sont connexes. Notons V' l'union des surfaces de niveau de $F : \tilde{U} = E^{-1}(U) \to \mathbb{C}$ qui coupent $\pi^{-1}(t_0) \cap \tilde{U} - \{t_0\}$; $V = V' \cup L_\omega$ est un voisinage ouvert de L_ω dans $\tilde{U}$. Posons

$$V_j = g_j^{-1}(g_j(V_j \cap V)),$$
$$U' = V \cup V_1 \cup \ldots \cup V_p,$$

et considérons la relation d'équivalence $\sim$ sur U' : « être dans la même composante connexe d'une surface de niveau de la restriction de F à U' ». Par construction tout point de U' est équivalent à un point de $\pi^{-1}(t_0) \cap \tilde{\mathrm{U}}$. Supposons la coordonnée x choisie de telle façon que $\mathrm{F}_{t_0}(x)=f(x, 0)=x^\nu$ et telle que $\pi^{-1}(t_0)$ coupe $\tilde{\mathrm{U}}$ suivant un disque. Il suffit de vérifier que l'égalité $x^\nu=x'^\nu$ implique $(x, t_0)\sim(x', t_0)$. La condition $x^\nu=x'^\nu$ est équivalente à l'existence de $h\in \mathrm{H}(f; t_0)$ tel que $x'=h(x)$. D'autre part, il est clair que tous les éléments d'une même orbite de $\mathrm{H}(g_j^0)$ sont équivalents pour $j=1, \ldots, p$. La conclusion résulte de l'égalité (lemme 4) :

$$\mathrm{H}(f; t_0)=\mathrm{H}(g_1, \ldots, g_p; t_0).$$

3. Démonstration du théorème 1. — Nous conservons les notations introduites au premier paragraphe et raisonnons par récurrence sur le nombre d'éclatements $\mathrm{N}(\omega)$ nécessaires à la réduction de ω. Nous avons vu au chapitre II que si $\mathrm{N}(\omega)=0$ et $\mathscr{F}_\omega$ est simple, il existe $f\in\mathcal{O}_2$ vérifiant $\omega\wedge df=0$. Supposons ce résultat vrai lorsque $\mathrm{N}(\omega)<\mathrm{N}$ et considérons le cas où $\mathrm{N}(\omega)=\mathrm{N}$. Les germes ω_j de $\mathrm{E}^*(\omega)$ aux points t_j définissent des germes de feuilletages simples. D'après l'hypothèse de récurrence, ils admettent des intégrales premières $g_j\in\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{C}}^2, t_j}$. Il suffit (lemme 3) de prouver que le groupe

$$\mathrm{H}(g_1, \ldots, g_p; t_0)\subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, t_0),$$

est fini. Les groupes $\mathrm{H}(g_j^0)$ étant finis on est ramené à montrer que tout élément de H est périodique : H est ainsi commutatif et donc fini (*cf.* chap. I).

Nous pouvons toujours supposer que les g_j ne sont pas des puissances, qu'ils sont définis, holomorphes sur des voisinages ouverts V_j des t_j, et que leurs surfaces de niveau sont connexes. Pour $j=1, \ldots, p$ désignons par h_j des générateurs des groupes $\mathrm{H}(g_j^0)$. Il existe des voisinages ouverts $v_j(t_0)$ de t_0 dans $\pi^{-1}(t_0)\cap\tilde{\mathrm{U}}$, invariants par h_j, tels que si $x\in v_j(t_0)$, alors $h_j(x)$ et x appartiennent à la même feuille de $\tilde{\mathscr{F}}_\omega\,|\,\tilde{\mathrm{U}}$. Soit h un élément de H :

$$h=h_{j_1}\circ\ldots\circ h_{j_k}, \qquad 1\leqq j_r\leqq p.$$

Il est défini holomorphe sur le voisinage ouvert de t_0 :

$$v(t_0)=\bigcap_{r=1}^{k} v_{j_r}(t_0).$$

Si x appartient à $v(t_0)$, x et $h(x)$ appartiennent à une même feuille $\tilde{\mathrm{L}}_x$ de $\tilde{\mathscr{F}}_\omega\,|\,\tilde{\mathrm{U}}$. Désignons par $\mathrm{O}(x)$ la $v(t_0)$-orbite de x par H. Visiblement

$$\mathrm{O}(x)\subset\tilde{\mathrm{L}}_x. \tag{3.1}$$

D'après le critère topologique de finitude d'un difféomorphisme, chap. I. 2, il suffit de montrer que l'ensemble suivant est dénombrable :

$$\mathrm{A}=\{x\in v(t_0)/\#\mathrm{O}(x)=\infty\}.$$

Pour cela écrivons $\omega = g\,\omega'$ avec $S(\omega') = \{0\}$. Notons $Z \subset U$ l'ensemble analytique d'équation $g(x, y) = 0$ et $\tilde{Z} = \overline{E^{-1}(Z) - \mathbb{P}\mathbb{C}(1)}$. Quitte à restreindre U et bien choisir la coordonnée y, nous pouvons supposer que $\tilde{Z}$ ne coupe pas $\pi^{-1}(t_0) \cap \tilde{U}$, où $\tilde{U} = E^{-1}(U)$. Pour $x \in \tilde{U} - S(\tilde{\mathcal{F}}_\omega)$, désignons par $\tilde{L}_x$ la feuille de $\tilde{\mathcal{F}}_\omega$ passant par x; $L'_x = \tilde{L}_x - \tilde{Z}$ est la feuille du feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_{E^*(\omega)}$ de $U - \tilde{Z} \cup \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ défini par $E^*(\omega)$ qui contient x. On a

$$L'_x = E^{-1}(L_{E(x)}),$$

où $L_{E(x)}$ est la feuille de $\mathcal{F}_\omega | U$ passant par $E(x)$. Comme $\mathcal{F}_\omega$ est simple, les feuilles L'_x sont des fermés de $\tilde{U} - \tilde{Z} \cup \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ et seulement un nombre au plus dénombrable adhèrent en un point de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$. Soit x un élément de $v(t_0)$. La feuille L'_x est un ensemble analytique de $\tilde{U} - \tilde{Z} \cup \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$, *cf.* chap. 0.3; son intersection avec $\pi^{-1}(t_0)$ est donc soit finie soit dénombrable si L'_x adhère à t_0. On déduit de l'inclusion (3.1) que l'ensemble A défini en (3.2) est au plus dénombrable, ce qui achève la démonstration.

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3. — Remarquons tout d'abord que les résultats obtenus dans le premier paragraphe restent vrais dans le cadre transversalement formel, *cf.* chap. III. Plus précisément considérons une forme holomorphe transversalement formelle $\omega \in \hat{\Omega}(\mathbb{P}\mathbb{C}(1))$. En tout point t de $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ le germe $\omega_{,t}$ de ω peut s'écrire :

$$\omega_{,t} = u_{,t}\,\eta_{,t}, \qquad \text{où} \quad u \in \hat{\mathcal{E}}_t, \quad \eta_{,t} \in \widehat{\Omega_t},$$

la forme η ne s'annulant pas sur un voisinage de t dans $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ sauf peut être au point t. Notons $\overline{S}(\omega)$ l'ensemble (fini) des points t où $\eta_{,t}$ s'annule et $L_\omega = \mathbb{P}\mathbb{C}(1) - S(\omega)$. Pour éviter le cas dicritique, nous exigeons qu'en tout point $t \in \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ la restriction de $\eta_{,t}$ à $\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ ne soit pas identiquement nulle. Nous pouvons alors définir « le relevé dans les feuilles » d'un chemin différentiable $\gamma : [0, 1] \to L_\omega$, $\overline{\Gamma} = (\Gamma, \gamma)$. Le lecteur peut vérifier sans peine que la solution de l'équation différentielle

$$\omega_{\overline{\Gamma}(x, s)}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(x, s), \gamma'(s)\right) = 0, \ \Gamma(x, 0) = x$$

est un élément de $C^\infty([0, 1])[x]$. De plus $\Gamma(0, s)$ est nul. La notion d'holonomie de ω, de groupe d'holonomie $H(\omega; t_0) \subset \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}; t_0)$, ainsi que toutes les constructions effectuées au paragraphe 1 se transposent dans ce cadre plus général :

LEMME 2' *Soient* ω *une section globale de* $\hat{\Omega}$, W *un ouvert de* L_ω, t *un point de* W *et* $g \in C[x]$ *une série invariante par l'action de* $H_W(\omega; t_0)$. *Alors il existe une section* $G \in \hat{\mathcal{E}}(W)$ *unique telle que* $G_t = g$ *et* $\omega \wedge dG = 0$.

LEMME 3'. — *Soit* ω *une section globale de* $\hat{\Omega}$ *qui possède en tout point* t_j *de* $\overline{S}(\omega)$, $j = 1, \ldots, p$, *une intégrale première* $g_j \in \hat{\mathcal{E}}_{t_j}$. *Si* $H(g_1, \ldots, g_p; t_0)$ *est fini, il existe une intégrale première globale de* ω, $G \in \hat{\mathcal{E}}(\mathbb{P}\mathbb{C}(1))$, *unique à composition à gauche près par un élément de* $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$, *telle que*

$$H(g_{t_0}) = H(g_1, \ldots, g_p; t_0).$$

LEMME 4′. — *Soient f un élément de $\hat{\mathcal{O}}_2$ qui n'est pas une puissance, $C_f=\{t_1, t_2, \ldots, t_p\}$ son cône tangent et soit, pour $j=1, 2, \ldots, p$, $g_j \in \hat{\mathcal{E}}_{t_j}$ qui n'est pas une puissance et tel que*

$$F \circ E_{/t_j} = g_j^{m_j}, \qquad m_j \in \mathbb{N}.$$

On a alors l'égalité

$$H(f; t_0) = H(g_1, g_2, \ldots, g_p; t_0).$$

Le théorème 3 dans le cas holomorphe se déduit du cas formel; en effet l est convergente dès que f et g le sont.

Soit f un élément de $\hat{\mathcal{O}}_2$ qui n'est pas une puissance et $g \in \hat{\mathcal{O}}_2$ vérifiant $dg \wedge df = 0$. Raisonnons de nouveau par récurrence sur le nombre d'éclatements $N(\omega)$ nécessaires à la réduction de $\omega = df$. Au chapitre IV nous avons prouvé ce théorème lorsque $N(\omega)=0$. Supposons le vrai pour $N(\omega) < N$ et considérons le cas $N(\omega) = N$. Nous pouvons supposer que g n'est pas une puissance; le cas général s'en déduit immédiatement. Comme $df \wedge dg = 0$, les cônes tangents de f et g sont égaux (chap. III) :

$$C_f = C_g = \{t_1, \ldots, t_p\}.$$

Les germes F_j et G_j de $F=f \circ E$ et $G=g \circ E$ aux points t_j peuvent être des puissances; notons les

$$F_j = f_j^{m_j}, \qquad G_j = g_j^{q_j},$$

où f_j, g_j ne sont pas des puissances. Comme $df_j \wedge dg_j = 0$, il existe d'après l'hypothèse de récurrence $l_j \in \hat{\mathcal{O}}_1$ tel que $g_j = l_j \circ f_j$. Il est clair que $H(g_j^0) = H(l_j \circ g_j^0)$ et aussi que les groupes $H(f_1, \ldots, f_p; t_0)$ et $H(g_1, \ldots, g_p; t_0)$ sont égaux. On déduit du lemme 4′ que

$$H(f; t_0) = H(g, t_0).$$

Il résulte facilement de cette égalité l'existence d'un $l \in \hat{\mathcal{O}}_1$ tel que $l \circ F_{t_0} = G_{t_0}$. Le prolongement de cette série en un germe d'intégrale première de $E^*(df)$ est unique d'après le lemme 2′. Ainsi on a l'égalité

$$l \circ F_{/t_0} = G_{/t_0} \in \hat{\mathcal{E}}_{t_0}.$$

Les sections globales $l \circ F$ et G de $\hat{\mathcal{E}}$ coïncident en t_0; elles sont égales et ainsi $g = l \circ f$.

5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. — Raisonnons encore par récurrence sur $N(df)$. Le cas $N(df)=0$ a été traité au chapitre IV. Supposons le théorème vrai lorsque $N(df) < N$ et supposons $N(df) = N$. Nous conservons les notations du paragraphe précédent : f_j désignent « la racine » du germe F_j de $F = f \circ E$ au point t_j du cône tangent $C_f = C_\omega$, $j=1, \ldots, p$. D'après l'hypothèse de récurrence il existe $l_j \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tel que $l_j \circ f_j$ converge. Comme $H(l_j \circ f_j^0) = H(f_j^0)$, on a l'égalité

$$H(l_1 \circ f_1^0, \ldots, l_p \circ f_p^0; t_0) = H(f_1, \ldots, f_p; t_0).$$

D'après le lemme 4', $H(f;\, t_0)$ est contenu dans $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},\, t_0)$ et d'après le corollaire 1.2 du chapitre III, il existe $l\in\hat{\mathcal{O}}_1$ tel que $l\circ f$ converge.

VI. — Extension d'intégrales premières

La démonstration des théorèmes A et B sera une conséquence d'un théorème de prolongement d'intégrales premières. Dans [17], nous avions démontré un résultat du même type, en reprenant la méthode de majoration utilisée par B. Malgrange dans [15]. Ici la convergence est une conséquence du critère de convergence, chap. IV.1. Enfin, la démonstration du théorème repose sur un argument de transversalité.

1. Théorème de prolongement

THÉORÈME 1. — *Soit* ω *un germe de* 1*-forme en* $0\in\mathbb{C}^m$ *holomorphe, intégrable et soit* $i : (\mathbb{C}^p,\, 0)\to(\mathbb{C}^m,\, 0)$, $p\geqq 2$ *un plongement qui possède les deux propriétés suivantes :*

(i) codim $S(\omega_0)\geqq 2$, *où* $\omega_0=i^*(\omega)$;

(ii) ω_0 *possède une intégrale première faible,* $f_0\in\mathcal{O}_p$ *(resp.* $\hat{\mathcal{O}}_p$*).*

Alors ω *possède une intégrale première faible unique,* $f\in\mathcal{O}_m$ *(resp.* $\hat{\mathcal{O}}_m$*), telle que* $f_0=i\circ f$.

Démonstration. — Il suffit naturellement de montrer ce résultat lorsque $p=m-1$. Choisissons des coordonnées

$$(x,\, t)=(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{m-1},\, t)\in\mathbb{C}^{m-1}\times\mathbb{C},$$

telles que

$$i(x)=(x,\, 0),\qquad i^*(\omega)=\omega_0.$$

Puisque $\omega_0\wedge df_0=0$ et codim $S(\omega_0)\geqq 2$, nous pouvons appliquer le théorème de De Rham : il existe $h_0\in\hat{\mathcal{O}}_{m-1}$, unique tel que

$$h_0.\omega_0=df_0. \tag{1.1}$$

Notons $\omega=\sum_{n\geqq 0} t^n(\omega_n+a_n\, dt)$, le développement de Taylor de ω suivant les puissances de t et posons

$$f_1=a_0\, h_0\in\hat{\mathcal{O}}_{m-1}.$$

On vérifie facilement que

$$(\mathrm{H}_1)\qquad \left\{\begin{array}{l} h_0\,\omega=d(f_0+tf_1) \text{ modulo } (t),\\ \text{avec } f_1,\, h_0\in\hat{\mathcal{O}}_{m-1} \text{ uniques.}\end{array}\right.$$

Supposons vrai

$$(\mathrm{H}_n)\qquad \left\{\begin{array}{l} (h_0+th_1+\ldots+t^{n-1}h_{n-1})\,\omega=d\left(\sum_{p=0}^{n} t^p f_p\right) \text{ modulo } (t^n),\\ \text{avec } f_1,\, \ldots,f_n,\, h_0,\, \ldots,\, h_{n-1}\in\hat{\mathcal{O}}_{m-1} \text{ uniques.}\end{array}\right.$$

Pour simplifier les notations, posons

$$\omega' = \left(\sum_{p=0}^{n-1} t^p h_p\right)\omega = d\left(\sum_{p=0}^{n} t^p f_p\right) + \sum_{p \geqq n} t^p (\omega'_p + a'_p\, dt). \tag{1.2}$$

La 1-forme ω' est intégrable. En écrivant que le coefficient de $t^{n-1}\, dt$ de $\omega' \wedge d\omega'$, est nul, on obtient :

$$df_0 \wedge \omega'_n = 0.$$

D'après le théorème de De Rham et (1.1), il existe $g_n \in \hat{\mathcal{O}}_{m-1}$ unique tel que

$$\omega'_n = g_n \omega_0.$$

Pour montrer H_{n+1}, il suffit de vérifier qu'il existe f_{n+1}, $h_n \in \mathcal{O}_{m-1}$ tels que

$$\omega' + t^n h_n (\omega_0 + a_0\, dt) = d\left(\sum_{p=0}^{n+1} t^p f_p\right) \text{modulo}\,(t^{n+1}).$$

Compte tenu de (1.2) cette équation s'écrit :

$$\begin{cases} \omega'_n + h_n \omega_0 = 0, \\ a'_n + h_n a_0 = (n+1) f_{n+1}. \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est

$$\begin{cases} h_n = -g_n, \\ f_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}(a'_n - g_n a_0). \end{cases}$$

Nous avons ainsi construit $f \in \hat{\mathcal{O}}_m$ unique tel que

$$\omega \wedge df = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x, 0) = f_0(x).$$

D'autre part si $f_0 \in \mathcal{O}_{m-1}$, le critère de convergence IV.1 permet d'affirmer que $f \in \mathcal{O}_m$.

2. Théorème de transversalité. — Ce théorème est purement géométrique; il ne fait pas intervenir la condition d'intégrabilité.

Théorème 2. — *Soit* ω *un germe en* $0 \in \mathbb{C}^m$ *de* 1*-forme holomorphe. Quel que soit l'entier* $p < m$, *il existe un plongement* i *de* $(\mathbb{C}^p, 0)$, *transverse à* ω, *i.e. tel que :*

(*a*) $$\mathrm{S}(i^*(\omega)) = i^{-1}(\mathrm{S}(\omega));$$

(*b*) $$\operatorname{codim} \mathrm{S}(i^*(\omega)) = \inf(\operatorname{codim} \mathrm{S}(\omega), p).$$

Nous reprenons la démonstration, déjà faite dans [17].

Démonstration. — Choisissons dans $\mathbb{C}^m$ des coordonnées adaptées à $S(\omega)$, i.e. si j est l'inclusion canonique $x \to (x, 0)$ de $\mathbb{C}^p$ dans $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{m-p}$:

$$\operatorname{codim} j^{-1}(S(\omega)) = \inf(\operatorname{codim} S(\omega), p).$$

Nous allons obtenir le plongement i cherché en perturbant l'inclusion j. Plus précisément, soit $I = (I_1, I_2, \ldots, I_m)$ l'application de $\mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^{mp})^2$ dans $\mathbb{C}^m$ définie par

$$I(x, A, B) = i(x) + A x + B x^2,$$

où $A, B \in \mathbb{C}^{mp}$ sont des matrices $m \times p$ et $x^2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_p^2)$. Pour A, B proche de 0, l'application partielle $I_{A, B} : x \to I(x, A, B)$ vérifie (comme j) la condition

$$\operatorname{codim} I_{A, B}^{-1}(S(\omega)) = \inf(\operatorname{codim} S(\omega), p).$$

Pour établir la proposition il suffit de montrer l'assertion suivante : il existe un sous-ensemble analytique propre Z de $(\mathbb{C}^{mp})^2$ tel que

$$S(I_{A, B}^*(\omega)) = I_{A, B}^{-1}(S(\omega)) \qquad \text{si} \quad A, B \notin Z. \tag{2.1}$$

Remarquons d'abord que l'application $\partial I/\partial x = (I, \partial I/\partial x_1, \ldots, \partial I/\partial x_p)$ de $\mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^{mp})^2$ dans $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{mp}$ est une submersion en dehors de $0 \times (\mathbb{C}^{mp})^2$. En effet $(x^0, A^0, B^0) \in \mathbb{C}^m \times (\mathbb{C}^{mp})$, avec $x^0 \neq 0$ étant fixé, la restriction de $\partial I/\partial x$ au sous-espace affine de dimension $m(p+1)$ paramétré par

$$(A, B_l) \to (x^0; A; B_1^0, \ldots, B_{l-1}^0, B_l; B_{l+1}, \ldots, B_p),$$

B_j^0 désignant les colonnes de B^0, et $x_l \neq 0$, s'écrit :

$$(A, B) \to (A x + B_l x^2; A + 2 x_l B) + (\lambda, u),$$

où $(\lambda, u) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{mp}$ est une constante. C'est donc un isomorphisme affine.

Soient U un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{C}^m$ sur lequel ω est holomorphe, $TU = U \times \mathbb{C}^m$ son espace tangent, π la projection de $U \times \mathbb{C}^{mp}$ sur U et Ω l'application de $U \times \mathbb{C}^{mp}$ dans $\mathbb{C}^p$ définie par

$$\Omega(x, X_1, \ldots, X_p) = (\omega_x(X_1), \ldots, \omega_x(X_p)).$$

Il est clair que $\pi^{-1}(S(\omega))$ est un sous-ensemble analytique de $\Omega^{-1}(0)$ et que $\Omega^{-1}(0) - \pi^{-1}(S(\omega))$ est une variété lisse de codimension p. De l'égalité

$$\frac{\partial I}{\partial x}^{-1}(\Omega^{-1}(0)) = \bigcup_{(A, B)} S(I_{A, B}^*(\omega)) \times (A, B)$$

on déduit que

$$H = \frac{\partial I}{\partial x}^{-1}(\Omega^{-1}(0) - \pi^{-1}(0)) = \frac{\partial I}{\partial x}^{-1}(\Omega^{-1}(0)) - I^{-1}(S(\omega)), \tag{2.2}$$

s'écrit sous la forme

$$H=\bigcup_{A,B}[S(I^*_{A,B}(\omega))-I^{-1}_{A,B}(S(\omega))]\times(A, B).$$

D'après ce qui précède H est une sous-variété analytique lisse de codimension p de $U\times\mathbb{C}^{mp}\times\mathbb{C}^{mp}$. On déduit de (2.2) que son adhérence est encore un ensemble analytique de codimension p [24]. Elle ne contient pas $0\times\mathbb{C}^{mp}\times\mathbb{C}^{mp}$ qui est aussi de codimension p. Ainsi le sous-ensemble

$$Z=\overline{H}\cap 0\times\mathbb{C}^{mp}\times\mathbb{C}^{mp}$$

vérifie (2.1).

Remarque 2.2. — Soit (X, 0) une hypersurface dans $(\mathbb{C}^m, 0)$ d'équation $f=0$. Il résulte de la démonstration que l'on peut toujours choisir A, B tel que $i=I_{A,B}$ vérifie les conditions (*a*), (*b*) et soit transverse à X, c'est-à-dire coupe la partie lisse de X transversalement. En particulier, si f n'est pas une puissance, $f_0=f\circ i$ ne sera pas une puissance.

3. Démonstration des théorèmes A et B. — Soit ω un germe en $0\in\mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe intégrable. Nous avons vu (chap. 0) que nous pouvions l'écrire :

$$\omega=u\,\eta,\qquad u\in\mathcal{O}_n,$$

où η est aussi un germe de 1-forme intégrable et $\operatorname{codim} S(\eta)\geqq 2$. Désignons par $i:(\mathbb{C}^2, 0)\hookrightarrow(\mathbb{C}^n, 0)$ un plongement transverse à η, c'est-à-dire que l'on a

$$S(\eta_0)=\{0\},\qquad \text{où}\qquad \eta_0=i^*(\eta).$$

(3.1) *Démonstration du théorème* B. — Ce théorème étant démontré en dimension deux, il suffit d'après le théorème de prolongement précédent de prouver que si $\mathcal{F}_\omega$ est simple, alors $\mathcal{F}_{\omega_0}$ est simple où $\omega_0=i^*(\omega)$. Soit U un voisinage ouvert de $0\in\mathbb{C}^n$ sur lequel $\mathcal{F}_\omega$ vérifie les deux conditions de simplicité et tel que $i:U_0=U\cap\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^n$ soit transverse à η en tout point. Notons encore ω_0 le représentant du germe $i^*(\omega)$ ainsi défini sur U_0 et $\mathcal{F}_{\omega_0}$ le feuilletage singulier correspondant.

Une feuille l de $\mathcal{F}_{\omega_0}$ est une composante connexe de l'intersection L_0 d'une feuille L de $\mathcal{F}_\omega$ avec U_0. Or L est une sous-variété analytique de $U-S(\omega)$, *cf.* chap. 0.3; il en est donc de même de l. Ainsi l est un fermé de $U-S(\omega_0)$.

Désignons par $A(\omega_0)$, resp. $A(\omega)$, l'ensemble des feuilles de $\mathcal{F}_{\omega_0}$, resp. $\mathcal{F}_\omega$, dont l'adhérence dans U_0, resp. U, contient 0. L'ensemble des composantes connexes des $L_0=L\cap U_0$, où L décrit $A(\omega)$, contient $A(\omega_0)$. Il est dénombrable : en effet $A(\omega)$ est dénombrable d'après l'hypothèse; de plus chaque L_0, $L\in\mathcal{F}_\omega$, n'a qu'un nombre dénombrable de composantes connexes, car L est analytique dans $U-S(\omega)$. Ainsi $\mathcal{F}_{\omega_0}$ vérifie la deuxième condition de simplicité.

(3.2) *Démonstration du théorème de factorisation.* — Soit f un élément de $\hat{\mathcal{O}}_n$ qui n'est pas une puissance et $g\in\hat{\mathcal{O}}_n$ vérifiant la condition $df\wedge dg=0$. Nous avons montré au chapitre précédent lorsque $n=2$, qu'il existe $l\in\hat{\mathcal{O}}_1$ tel que $g=l\circ f$. Raisonnons par récurrence :

supposons ce résultat vrai lorsque $n=N-1$ et considérons le cas $n=N$. Écrivons la décomposition de f en facteurs irréductibles distincts f_j :

$$f=f_1^{\nu_1}\dots f_p^{\nu_p}.$$

La condition : ne pas être une puissance, signifie que le p. g. c. d. de $\nu_1, \dots, \nu_p$ est égal à 1. D'autre part la restriction des $f_j, j=1, \dots, p$, à un $(n-1)$-plan linéaire générique est réduite, i. e. sans facteur multiple; ainsi la restriction de f à ce $(n-1)$-plan n'est pas une puissance. Il existe un système de coordonnées $(x, y)=(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ tel que $g_0(x)=g(x, 0)$ ne soit pas identiquement nulle et que $f_0(x)=f(x, 0)$ ne soit pas une puissance.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $l\in\hat{\mathcal{O}}_1$ vérifiant $l\circ f_0=g_0$. Montrons l'égalité $l\circ f=g$. Écrivons :

$$l\circ f=g+y^\alpha h \qquad \text{avec} \quad h(x, 0)\not\equiv 0.$$

Un bref calcul montre que la condition $d(l\circ f)\wedge dg=0$ implique

$$h(x, 0)\frac{\partial g}{\partial x_1}(x, 0)=\dots=h(x, 0)\frac{\partial g}{\partial x_{n-1}}(x, 0)=0.$$

Puisque g_0 n'est pas identiquement nulle, h est nulle.

(3.3) *Démonstration du théorème* A. — Soit ω un germe en $0\in\mathbb{C}^n$ de 1-forme intégrable holomorphe et soit f un élément de $\hat{\mathcal{O}}_n$ qui n'est pas une puissance tel que $\omega\wedge df=0$. D'après la remarque 2.2, il existe un plongement $i:(\mathbb{C}^2, 0)\to(\mathbb{C}^n, 0)$ transverse à ω et tel que $f_0=f\circ i$ ne soit pas une puissance. D'après le théorème V.2, il existe $l\in\hat{\mathcal{O}}_1$ tel que $l\circ f_0$ converge et d'après le théorème IV.1 (critère de convergence) $l\circ f$ converge.

APPENDICE I

Réduction d'un germe de 1-forme holomorphe en $0\in\mathbb{C}^2$

(d'après A. Ven den Essen et A. Seidenberg)

La réduction des singularités d'un champ de vecteurs de $\mathbb{C}^2$ a été étudiée par I. Bendixon [1] et H. Dulac [10]. Plus récemment ce problème a été résolu par F. Dumortier [12] (cas C^∞) et par A. Seidenberg [21] dans le cas formel. Nous indiquons ici la nouvelle démonstration de A. Ven den Essen [23] qui utilise la notion de multiplicité d'intersection de deux courbes. Nous rappelons très brièvement cette notion, pour plus de détail nous renvoyons le lecteur à [13].

1. Préliminaires sur la multiplicité d'intersection. — Il est bien connu (théorème de Puiseux) qu'un germe de courbe analytique irréductible $X\subset(\mathbb{C}^2, 0)$ d'équation réduite $f(x, y)=0$, possède une *paramétrisation analytique* $\gamma:(\mathbb{C}, 0)\to(\mathbb{C}^2, 0)$, i.e. $f\circ\gamma=0$, « universelle » dans le sens suivant :

si μ est une seconde paramétrisation de X, il existe $u:(\mathbb{C}, 0)\to(\mathbb{C}, 0)$ tel que $\mu=\gamma\circ u$.

On dit alors que γ est une *paramétrisation primitive de* X *ou de* f. Si μ est aussi une paramétrisation primitive de X, alors u est inversible. On peut parler de « *la* » paramétrisation primitive de X ou de f.

Soit $f, g \in \mathcal{O}_2$; supposons g irréductible et désignons par γ sa représentation primitive. La *multiplicité d'intersection de* f *et* g *en* 0, $\mathrm{I}(f, g; 0)$ est l'ordre de $f \circ \gamma$ en 0, noté $\nu_0(f \circ \gamma)$.

Si g n'est pas irréductible et si

$$g = g_1^{\alpha_1} \dots g_k^{\alpha_k}$$

est sa décomposition en facteurs irréductibles, on définit la *multiplicité d'intersection de* f *et* g *en* 0 par

$$\mathrm{I}(f, g; 0) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathrm{I}(f, g_i; 0)$$

Énonçons ici les propriétés élémentaires de la multiplicité d'intersection :

1° $\mathrm{I}(f, g; 0) = 0$ si $f(0) \neq 0$;

2° $\mathrm{I}(f, g; 0) = \infty$ si $f^{-1}(0)$ et $g^{-1}(0)$ ont une branche commune en 0;

3° $\mathrm{I}(f_1 . f_2, g; 0) = \mathrm{I}(f_1, g; 0) + \mathrm{I}(f_2, g; 0)$;

4° si $\mathrm{M} \in \mathcal{O}_2^4$ désigne une matrice inversible et si $(f_1, g_1) = \mathrm{M}.(f, g)$, alors $\mathrm{I}(f_1, g_1; 0) = \mathrm{I}(f, g; 0)$;

5° $\mathrm{I}(f, g; 0) = \mathrm{I}(g, f; 0)$;

6° considérons l'éclaté de 0, $\mathrm{E} : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2$ et notons pour tout point $c \in \mathbb{PC}(1)$, $\tilde{f}_{,c}$ et $\tilde{g}_{,c}$, *l'éclaté divisé de* f *et* g *au point* c, i. e., si h est une équation locale de $\mathbb{PC}(1)$ en c et si $\mathrm{E}_{,c}$ est le germe de E en c,

$$\tilde{f}_{,c} = \frac{f \circ \mathrm{E}_{,c}}{h^{\nu(f)}} \qquad \text{et} \qquad \tilde{g}_{,c} = \frac{g \circ \mathrm{E}_{,c}}{h^{\nu(g)}};$$

on a alors l'égalité suivante :

$$\mathrm{I}(f, g; 0) = \nu(f)\nu(g) + \sum_{c \in \mathbb{PC}(1)} \mathrm{I}(\tilde{f}_{,c}, \tilde{g}_{,c}; c).$$

2. Réduction de $\omega = a\,dx + b\,dy$ au cas $\nu(\omega) = 1$ [23]. — Soient η une 1-forme holomorphe sur une variété holomorphe M de dimension 2. Dans une carte (x, y) en un point $m \in \mathrm{M}$, nous écrivons :

$$\eta = a\,dx + b\,dy \qquad \text{où} \quad a, b \in \mathcal{O}_{\mathrm{M}, m}.$$

Nous notons $\overline{\eta}_{,m}$ ou encore $\overline{\eta}$, le germe en m de la 1-forme holomorphe $\overline{\eta}_{,m} = \eta/(a, b) = a'\,dx + b'\,dy$ où (a, b) désigne le PGCD de a et b; $\overline{\eta}_{,m}$ est définie à un facteur inversible près. Soient $\nu_m(\eta)$ l'ordre en m et de η, $\bar{\nu}_m(\eta)$ l'ordre en m de $\overline{\eta}_{,m}$, et $\mathrm{I}_m(\eta) = \mathrm{I}_m(\overline{\eta}')$ la multiplicité d'intersection de a', b'.

THÉORÈME 2. — *Soit* $\omega = a\,dx + b\,dy$ *une forme de Pfaff holomorphe sur un ouvert* U *de* $\mathbb{C}^2$, *à singularité isolée* $0 \in \mathrm{U}$. *Il existe alors une application analytique propre* $\pi : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$, *obtenue par composition d'éclatements, d'une variété analytique complexe* V *de dimension* 2 *sur* U, *telle que :*

(i) $\pi^{-1}(0)$ *soit une hypersurface à* croisements normaux;

(ii) $\pi \mid (\mathrm{V} - \pi^{-1}(0))$ *soit un isomorphisme sur* $\mathrm{U} - \{0\}$;

(iii) $\nu_m(\pi^*(\omega)) \leqq 1$, *pour tout* $m \in \mathrm{V}$.

Démonstration. — Soit ν l'ordre de ω en 0 et soient

$$\mathrm{J}_0^\nu\,\omega = \omega_\nu = a_\nu\,dx + b_\nu\,dy,$$
$$\mathrm{P}_{\nu+1} = x a_\nu + y b_\nu.$$

Notons, comme dans le chapitre III, $\mathrm{E} : \tilde{\mathbb{C}}^2 \to \mathbb{C}^2$, l'application d'éclatement de $0 \in \mathbb{C}^2$. Dans la carte (x, t), $t = y/x$ on a

$$\mathrm{E}^*(\omega) = (a(x, tx) + t b(x, tx))\,dx + x b(x, tx)\,dt,$$
$$\mathrm{E}^*(\omega) = x^\nu(\mathrm{P}_{\nu+1}(1, t) + x(\ldots))\,dx + x(b_\nu(1, t) + x(\ldots))\,dt.$$

Posons, pour $c \in \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$,

$$\tilde{\omega}_{.c} = \overline{\mathrm{E}^*(\omega)}_{.c} \qquad \text{et} \qquad \nu_c(\tilde{\omega}) = \nu(\overline{\mathrm{E}^*(\omega)}_{.c}).$$

D'après la propriété 4° de I, la *multiplicité d'intersection de* ω en 0 :

$$\mathrm{I}_0(\omega) = \mathrm{I}(a, b; 0)$$

est bien définie. De même en $c \in \mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ on définit $\mathrm{I}_c(\tilde{\omega})$. Distinguons deux cas :

(*a*) *Cas dicritique* ($\mathrm{P}_{\nu+1} = 0$). — Nous allons prouver l'égalité suivante :

$$(2.1) \qquad \mathrm{I}_0(\omega) = \nu^2 + \nu - 1 + \sum_{c \in \mathbb{P}\mathbb{C}(1)} \mathrm{I}_c(\tilde{\omega}).$$

Soient $\mathrm{X} = x + \ldots$, $\mathrm{Y} = y + \ldots$ des éléments de $\mathcal{O}_2$ tels que $\mathrm{X}a + \mathrm{Y}b$ soit d'ordre $\nu + 2$. Le champ de vecteurs $\mathrm{X}(\partial/\partial x) + \mathrm{Y}(\partial/\partial y)$ étant linéarisable on peut toujours supposer que

$$\nu(\mathrm{P}) = \nu + 2 \qquad \text{avec} \quad \mathrm{P} = xa + yb.$$

En outre, on peut choisir les coordonnées (x, y) de telle façon que $\mathrm{P}(0, y) = y^{\nu+2}$ et ainsi $b(0, y) = y^{\nu+1}$. On a alors :

$$\mathrm{I}(\mathrm{P}, b) = \mathrm{I}(x, b) + \mathrm{I}(a, b)$$

et d'après la propriété 6° de I, on obtient l'égalité cherchée puisque $\mathrm{I}_c(\tilde{\mathrm{P}}, \tilde{b}) = \mathrm{I}_c(\tilde{\omega})$.

(*b*) *Cas non dicritique.* — Nous allons démontrer l'égalité suivante :

$$\mathrm{I}_0(\omega)=\nu^2-\nu+1+\sum_{c\in\mathbb{P}\mathbb{C}(1)}\mathrm{I}_c(\tilde{\omega}, c). \tag{2.2}$$

Rappelons (*cf.* III) que le cône tangent $c_\omega\subset\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$ de ω a pour équation homogène $\mathrm{P}_{\nu+1}=0$. Si $c\neq[\partial/\partial y]$, on a

$$\tilde{\omega}_{,c}=(\mathrm{P}_{\nu+1}(1, t)+x(\ldots))\,dx+x(b_\nu(1, t)+x(\ldots))\,dt$$

et il est clair que

$$\mathrm{I}_c(\tilde{\omega}, c)=\nu_c(\tilde{\omega})=0 \qquad \text{si} \quad c\notin \mathrm{C}_\omega.$$

Choisissons des coordonnées (x, y) dans $\mathbb{C}^2$ telles que $a_\nu.b_\nu\neq 0$ et $[\partial/\partial y]\notin \mathrm{C}_\omega$. Désignons par μ_c la multiplicité de $c\in\mathrm{C}_\omega$ comme racine de l'équation homogène $\mathrm{P}_{\nu+1}=0$, ou plus simplement, comme racine de l'équation $\mathrm{P}_{\nu+1}(1, t)=0$. Par définition de I on a

$$\mu_c=\mathrm{I}(\tilde{a}+t\tilde{b}, x; c),$$

avec

$$\tilde{a}=\frac{a(x, tx)}{x^\nu} \qquad \text{et} \qquad \tilde{b}=\frac{b(x, tx)}{x^\nu}.$$

D'après les propriétés 3°, 4°, 5° de I on obtient :

$$\mathrm{I}_c(\omega)=\mathrm{I}(\tilde{a}+t\tilde{b}, x\tilde{b}; c)=\mu_c+\mathrm{I}(\tilde{a}, \tilde{b}; c).$$

D'autre part d'après 6° on a

$$\mathrm{I}_0(\omega)=\mathrm{I}(x, b; 0)=\nu^2+\sum_{c\in\mathrm{P}\mathbb{C}(1)}\mathrm{I}(a, b; c),$$

$$\mathrm{I}_0(\omega)=\nu^2+\sum_{c\in\mathrm{P}\mathbb{C}(1)}\mathrm{I}_c(\tilde{\omega})-\sum_{c\in\mathrm{P}\mathbb{C}(1)}\mu_c.$$

La formule (2.2) résulte de l'égalité $\sum\mu_c=\nu+1$.

Nous sommes maintenant en mesure de construire l'application π. Supposons que $0\in\mathbb{C}^2$ soit le seul point singulier de ω dans U. Posons

$$\mathrm{V}_0=\mathrm{U}, \qquad \mathrm{V}_1=\mathrm{E}^{-1}(\mathrm{U}),$$

$$\pi^1=\pi_1=\mathrm{E}\,|\,\mathrm{V}_1 : \mathrm{V}_1\to\mathrm{U}.$$

Éclatons simultanément tous les points $c\in\mathrm{P}\,\mathbb{C}(1)\subset\mathrm{V}_1$ tels que $\nu_c(\tilde{\omega})=\nu_c(\pi^{1*}(\omega))>1$. Nous allons construire ainsi

$$\pi_2 : \quad \mathrm{V}_2\to\mathrm{V}_1,$$

$$\pi^2=\pi_2\circ\pi_1 : \quad \mathrm{V}_2\to\mathrm{U}.$$

Par récurrence on construit des applications

$$\pi_i: \quad V_i \to V_{i-1},$$

en éclatant simultanément tous les points de V_{i-1} où $\bar{\nu}_c(\pi^{i-1*}(\omega))>1$ avec

$$\pi^{i-1}=\pi_{i-1}\circ\pi_{i-2}\circ\ldots\circ\pi_1.$$

Cette suite est nécessairement finie; i.e. que pour un certain i, en tout point de V_i on a

$$\bar{\nu}_c(\pi^{i*}(\omega))\leqq 1.$$

En effet, d'après (2.1)-(2.2) la multiplicité d'intersection I_c diminue lorsque $\bar{\nu}_c>1$.

3. Réduction de $\omega=a\,dx+b\,dy$ lorsque $\nu(\omega)=1$ [21]. — Le cas $\nu(\omega)=1$ n'est pas « stable » par éclatement. Nous allons pousser plus loin la réduction jusqu'à obtenir une classe de formes invariante par éclatement.

Théoreme 3. — *Sous les hypothèses du théorème 2, il existe une application analytique propre,* $\pi: V\to U$, *obtenue par composition d'éclatements, vérifiant :* (i), (ii), (iii) *et de plus, la propriété :* (iv) *en tout point* $m\in V$ *où* $\bar{\nu}_m(\pi^*(\omega))=1$, *il existe une carte* (u, v) *centrée en* m *dans lequel le* 1*-jet de* $\overline{\pi^*(\omega)}$ *en* m *s'écrit :*

$$(\star)\qquad \omega_1=\lambda_1 v\,du-\lambda_2 u\,dv \qquad \textit{avec}\quad \lambda_1.\lambda_2\neq 0,\quad \lambda_1/\lambda_2\notin\mathbb{N},\quad \lambda_2/\lambda_1\notin\mathbb{N},$$

ou bien

$$(\star\star)\qquad \omega_1=v\,du.$$

A $\omega=a\,dx+b\,dy$ nous associons la matrice

$$M_0(\omega)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial b}{\partial x}(0) & \dfrac{\partial b}{\partial y}(0) \\ -\dfrac{\partial a}{\partial x}(0) & -\dfrac{\partial a}{\partial y}(0) \end{bmatrix}.$$

Tout changement holomorphe de coordonnées en $0\in\mathbb{C}^2$ transforme cette matrice en une matrice semblable, ce qui permet de parler des valeurs propres de ω en 0.

Lemme. — *Soit* $\omega=a\,dx+b\,dy$ *un germe de* 1*-forme holomorphe non dicritique. Si en un point* $c\in\mathbb{PC}(1)$, $\mu_c=1$, *alors* $J^1\tilde{\omega}_{.c}\neq 0$ *et* $\tilde{\omega}_{.c}$ *possède une valeur propre non nulle.*

Démonstration. — Supposons $c=[\partial/\partial x]$ et notons $\nu=\nu_0(\omega)$,

$$xa_\nu+yb_\nu=y\prod_{j=1}^{k}(\alpha_j x+\beta_j y)^{\mu_j}=P_{\nu+1}(x, y).$$

Alors $\alpha=\prod_{j=1}^{k}\alpha_j\neq 0$ est une valeur propre de

$$\tilde{\omega}_{,c}=(\mathrm{P}_{\nu+1}(1,\,t)+x\,\mathrm{A}(x,\,t))\,dx+x\,\mathrm{B}(x,\,t)\,dt.$$

Démonstration du théorème 3. — Il reste à réduire ω dans les cas suivants :

Cas 1. — 0 est valeur propre double c'est-à-dire $\mathrm{J}_0^1\,\omega=y\,dy$. Notons

$$\omega=(y+\mathrm{A}_1(x,\,y))\,dy+\mathrm{B}_1(x,\,y)\,dx,$$

avec $\nu(\mathrm{A}_1)$, $\nu(\mathrm{B}_1)\geqq 2$. Le cône tangent de ω est réduit au point $c=[\partial/\partial x]$ et $\mu_c=2$. Après un éclatement on obtient en $c\in\mathrm{P}\,\mathbb{C}(1)$:

$$\tilde{\omega}_{,c}=x\,(t+x\,\mathrm{A}_2(x,\,t))\,dt+(t^2+x\,\mathrm{B}_2(x,\,t))\,dx,$$
$$\mathrm{A}_2=\frac{\mathrm{A}_1(x,\,tx)}{x^2},\qquad \mathrm{B}_2=\frac{\mathrm{B}_1(x,\,tx)}{x^2}+t\,\mathrm{A}_2(x,\,t).$$

Remarquons que l'ordre de $\omega_{,c}$ peut-être égal à 2. Nous allons prouver qu'alors dans la réduction de $\omega_{,c}$ (en appliquant le théorème 2) on n'obtient pas de nouveau le cas 1. Plus généralement considérons les 1-formes η du type suivant :

$$\eta=x\,(y+x\,\mathrm{A}(x,\,y))\,dy+(ny^2+x\,\mathrm{B}(x,\,y))\,dx,$$

où $n\in\mathrm{N}$. Envisageons les deux possibilités suivantes :

(1.*a*) $\mathrm{B}(0)=b_0\neq 0$. Le cône tangent est $c=[\partial/\partial y]$ avec $\mu_c=2$. Considérons E dans la carte $(t,\,y)$ avec $t=x/y$. On obtient :

$$\tilde{\eta}_{,c}=t\,((n+1)\,y+tb_0+\mathrm{A}_3(t,\,y))\,dy+(ny+tb_0+\mathrm{B}_3(t,\,y))\,dt,$$

avec $\nu(\mathrm{A}_3)$, $\nu(\mathrm{B}_3)\geqq 2$. Le cône tangent de $\tilde{\eta}_{,c}$ est donc donné par l'équation homogène

$$ty\,((2\,n+1)\,y+2\,b_0\,t)=0,$$

et ne contient que des points simples. La conclusion résulte alors du lemme.

(1.*b*) $\mathrm{B}(0)=0$. Le cône tangent est alors donné par une équation

$$x\,((n+1)\,y^2+\alpha\,xy+\beta\,x^2)=0,$$

que l'on écrira :

$$x\,(y-c_1\,x)(y-c_2\,x)=0.$$

D'après le lemme, il suffit d'étudier le cas : $c_1=c_2=c$. Si $c\neq 0$, il est clair que

$$\tilde{\eta}=x\,(t+x\,(\ldots))\,dt+(\ldots)\,dx,$$

a une valeur propre non nulle. Si $c=0$, $\mu(c)=2$ et on a

$$\tilde{\eta}_{,c}=x(t+A'(x, t))\,dt+((n+1)\,t^2+x\,B'(x, t))\,dx;$$

$\tilde{\eta}$ est donc encore du même type que η. Mais d'après le théorème 2, cette possibilité ne peut se répéter indéfiniment.

Il reste donc à considérer les cas suivants :

Cas 2. — $M_0(\omega)$ a deux valeurs propres égales à λ. Nous pouvons poser $\lambda=1$. Deux possibilités se présentent :

(2.*a*) $J_0^1\,\omega=y\,dx-x\,dy$. C'est le cas dicritique, il est résolu par un seul éclatement : $\tilde{\omega}_{,c}$ est non singulier en tout point $c\in\mathbb{P}\mathbb{C}(1)$.

(2.*b*) $J^1\,\omega=(y+x)\,dy-x\,dy$. Le cône tangent de ω est le point double $c=[\partial/\partial x]$, et

$$\tilde{\omega}_{,c}=x(1+t+A_1(x, t))\,dt+(t^2+x\,B_1(x, t))\,dx,$$

où

$$A_1=\frac{A(x, tx)}{x^2}, \qquad B_1=t\,A_1+\frac{B(x, tx)}{x^2}.$$

$M_c(\tilde{\omega})$ est équivalente à la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. On est dans le cas (★★).

Cas 3. — Le rapport des valeurs propres est un entier. $J_0^1\,\omega=\lambda_1\,x\,dy-\lambda_2\,y\,dx$ avec $\lambda_2/\lambda_1\in\mathbb{N}$. On peut poser $\lambda_1=1$, $\lambda_2=n$. Notons

$$\omega=(x+A(x, y))\,dy-(ny+B(x, y)\,dx.$$

Le cône tangent est constitué des deux points simples

$$c_1=\left[\frac{\partial}{\partial x}\right], \qquad c_2=\left[\frac{\partial}{\partial y}\right].$$

Considérons d'abord $E^*(\omega)$ en c_1 dans la carte (x, t), $t=y/x$:

$$\tilde{\omega}_{,c_1}=x(1+x\,A_1)\,dt-((n-1)\,t+x\,B_1(x, t))\,dx,$$

et donc

$$M_{c_1}(\omega)=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ * & \lambda_1-\lambda_2 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n-1 \end{bmatrix}.$$

Considérons $E^*(\omega)$ en c_2, dans la carte (t, y), $t=y/x$; on obtient :

$$M_{c_2}(\omega)=\begin{bmatrix} \lambda_1-\lambda_2 & * \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1-n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}.$$

Le rapport des valeurs propres est négatif puisque $n\neq 1$. Après $n-1$ éclatements on est ramené au cas $n=2$. Il se réduit au bout d'un éclatement au cas (2.*a*) ou (2.*b*).

APPENDICE II

Existence de variétés intégrales d'une 1-forme holomorphe réduite de $(\mathbb{C}^2, 0)$

Le problème de l'existence de variétés invariantes pour un germe de champ de vecteurs holomorphe en $0 \in \mathbb{C}^2$, dont le jet d'ordre 1 est non nul a été partiellement résolu par Briot-Bouquet [5] dans [10] H. Dulac donne les formes normales formelles et convergentes de ces champs et résoud complètement ce problème. Nous reprenons les démonstrations de l'existence de variété(s) invariante(s) dans les cas qui nous intéressent ici, — cas réduits, ainsi que la démonstration de la forme normale de H. Dulac lorsque X n'a qu'une seule valeur propre non nulle. Dans le premier paragraphe, nous utilisons la méthode utilisée par Camacho-Kuiper-Palis dans [7], et dans le deuxième paragraphe la méthode de H. Dulac.

Considérons un germe de champ de vecteurs holomorphe X au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ dont le 1-jet d'écrit :

$$J_0^1 X = \lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Nous distinguons les cas $\lambda_1 . \lambda_2 \neq 0$ et $\lambda_1 \neq 0$; $\lambda_2 = 0$.

1. Premier cas : X possède deux valeurs propres non nulles. — Pour faciliter les calculs, considérons X comme une équation différentielle holomorphe

$$(1.1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \lambda_1 x_1 + \varphi_1(x), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \lambda_2 x_2 + \varphi_2(x), \end{aligned} \right.$$

où

$$\varphi_j = \sum_{|Q|>1} \varphi_{j,Q} \, x^Q, \qquad j = 1, 2,$$

désignent des séries convergentes en la variable $x = (x_1, x_2)$ et Q le multi-indice (q_1, q_2) :

$$x^Q = x_1^{q_1} x_2^{q_2}, \qquad |Q| = q_1 + q_2.$$

Effectuons le changement de variable formel $x = y + \zeta(y)$:

$$(1.2) \qquad x_j = y_j + \zeta_j(y), \qquad \zeta_j(y) = \sum_{|Q|>1} \zeta_{j,Q} \, y^Q, \qquad j = 1, 2$$

et notons

$$(1.3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1 + \psi_1(y), \\ \frac{dy_2}{dt} &= \lambda_2 y_2 + \psi_2(y), \end{aligned} \right.$$

le transformé de (1.1) par ce changement de variable. En reportant (1.2) dans (1.1) nous obtenons les deux relations suivantes, $j=1, 2$:

$$(1.4)_j \qquad \sum_{|Q|>1} (\delta_{j,Q}\zeta_{j,Q}+\psi_{j,Q})\,y^Q=\varphi_j(y+\zeta)-\sum_{k=1,2}\frac{\partial\zeta_j}{\partial y_k}\psi_k,$$

où $\delta_{j,Q}=\lambda_1 q_1+\lambda_2 q_2-\lambda_j$. En fait, trouver un changement de variable formel transformant (1.1) en (1.3), équivaut à déterminer des séries (1.2) vérifiant les deux relations $(1.4)_j$. Le coefficient du membre de droite de $(1.4)_j$ est un polynôme en les variables $\zeta_{j,Q'}$, $\psi_{j,Q'}$ avec $|Q'|<|Q|$ et $j=1, 2$. Il est donc toujours possible de réduire formellement le champ X en un champ (1.3) tel que

$$(1.5) \qquad \psi_{j,Q}=0 \quad \text{si} \quad \delta_{j,Q}\neq 0, \qquad j=1, 2,$$

que l'on appelle *forme normale de* X. Par exemple si le rapport λ_1/λ_2 est un rationnel négatif non nul

$$(1.6) \qquad \frac{\lambda_1}{\lambda_2}=-\frac{p}{q} \quad \text{avec} \quad \text{p.g.c.d.}(p, q)=1,$$

le champ X s'écrit dans les coordonnées formelles (y_1, y_2) sous la forme

$$X=A(x^p y^q)\,x\frac{\partial}{\partial x}+B(x^p y^q)\,y\frac{\partial}{\partial y},$$

où A et B sont des séries d'une variable. Ces transformations ne sont pas convergentes en général, *cf* [6]. Cependant, pour mettre en évidence des variétés invariantes, il suffit d'une forme normale plus grossière, et cela est possible analytiquement :

PROPOSITION. — *Supposons que λ_1, λ_2 soient non nuls et que les rapports λ_1/λ_2 et λ_2/λ_1 ne soient pas des entiers >1. Il existe alors des coordonnées analytiques (y_1, y_2) dans lesquelles* X *s'écrit :*

$$X=\lambda_1 y_1(1+\dots)\frac{\partial}{\partial y_1}+\lambda_2 y_2(1+\dots)\frac{\partial}{\partial y_2};$$

les courbes $y_1=0$ et $y_2=0$ sont des variétés invariantes de X.

Démonstration. — Il est facile de voir que $\delta_{j,Q}$ n'est pas nul si y^Q n'appartient pas à l'idéal (y_1, y_2) engendré par $y_1 y_2$, $|Q|>1$. Nous posons donc, si $y^Q\notin(y_1 y_2)$, $|Q|>1$:

$$\begin{cases} \psi_{j,Q}=0, \\ \zeta_{j,Q}=\dfrac{1}{\delta_{j,Q}}\,[\text{coefficient de } y^Q \text{ du membre de droite de } (1.4)_j], \end{cases}$$

et si $y^Q\in(y_1 y_2)$, $|Q|>1$:

$$\begin{cases} \psi_{j,Q}=-[\text{coefficient de } y^Q \text{ du membre de droite de } (1.4)_j], \\ \zeta_{j,Q}=0. \end{cases}$$

Ceci résoud le problème formel.

Pour prouver la convergence de ζ, on détermine une série majorante convergente, comme dans la démonstration du théorème classique de linéarisation de Poincaré. Nous adoptons les notations de C. L. Siegel. Si $\xi=\sum_{Q}\xi_Q y^Q$, nous notons $\overline{\xi}=\sum_{Q}|\xi_Q|y^Q$ et $\overline{\overline{\xi}}$ la série d'une seule variable z :

$$\overline{\overline{\xi}}=\sum_{Q}|\xi_Q|z^{|Q|}\in \mathbb{C}[z].$$

Si $\eta=\sum_{Q}\eta_Q y^Q$, la notation $\eta\prec\xi$ signifie que, pour tout multiindice Q, $|\eta_Q|\leqq|\zeta_Q|$.

Remarquons qu'il existe $\delta>0$ tel que

$$|\delta_{j,Q}|>\delta,$$

si $y^Q\notin(y_1\, y_2)$, $|Q|>1$, $j=1, 2$. On obtient, d'après (1.4) :

$$(1.7)_j \qquad \delta\overline{\zeta}_j\prec\sum_{|Q|>1}|\zeta_{j,Q}|y^Q+\overline{\psi}\prec\overline{\varphi}_j(y_1+\overline{\zeta}_1,\, y_2+\overline{\zeta}_2)+\sum_{k=1,2}\frac{\partial\overline{\zeta}_j}{\partial y_k}\overline{\psi}_k.$$

Comme $\overline{\zeta}_j$ n'a pas de termes non nul dans l'idéal $(y_1\, y_2)$ et que $\sum_{k=1,2}(\partial\overline{\zeta}_j/\partial y_k)\overline{\psi}_k$ a tous ses termes non nuls dans cet idéal, on a

$$(1.8) \qquad \delta\overline{\zeta}_j\prec\overline{\varphi}_j(y_1+\overline{\zeta}_1,\, y_2+\overline{\zeta}_2), \qquad j=1, 2.$$

On obtient ainsi

$$(1.9) \qquad \overline{\overline{\zeta}}_1+\overline{\overline{\zeta}}_2\prec\frac{1}{\delta}(\overline{\varphi}_1(z+\overline{\overline{\zeta}}_1+\overline{\overline{\zeta}}_2,\, z+\overline{\overline{\zeta}}_1+\overline{\overline{\zeta}}_2)+\overline{\varphi}_2(z+\overline{\overline{\zeta}}_1+\overline{\overline{\zeta}}_2,\, z+\overline{\overline{\zeta}}_1+\overline{\overline{\zeta}}_2)).$$

Les séries φ_j étant convergentes, il existe des constantes a_0, $a>0$ vérifiant :

$$(1.10) \qquad \frac{1}{\delta}(\overline{\overline{\varphi}}_1+\overline{\overline{\varphi}}_2)\prec\frac{a_0 z^2}{1-az}.$$

Notons $u=\sum_{i}u_i z^i$ la série $1/z(\overline{\overline{\zeta}}_1+\overline{\overline{\zeta}}_2)$. D'après (1.9) et (1.10), u vérifie

$$(1.11) \qquad u\prec\frac{a_0 z(1+u)^2}{1-az(1+u)}.$$

Comparons u avec la série $v=\sum_{i}v_i z^i$, solution de l'équation

$$v=\frac{a_0 z(1+v)^2}{1-az(1+v)}.$$

v est convergente et $v_1=a_0$. Pour tout i, v_i est un polynôme à coefficients positifs $P_i(v_1, \ldots, v_{i-1})$ en les variables $v_1, \ldots, v_{i-1}$. Choisissons $a_0>u_1$. D'après (1.11) on a

$$u_i \leqq P_i(u_1, \ldots, u_{i-1}).$$

Montrons que $u \prec v$. Raisonnons par récurrence et supposons que $u_j \leqq v_j$ pour $j \leqq i-1$. Comme P_i est à coefficients positifs :

$$u_i \leqq P_i(u_1, \ldots, u_{i-1}) \leqq P_i(v_1, \ldots, v_{i-1})=v_i.$$

u converge et il en est visiblement de même pour ζ_1, ζ_2, ψ_1, ψ_2.

THÉORÈME 1. — *Sous les hypothèses de la proposition il existe des coordonnées analytiques* (y_1, y_2) *dans lesquelles* X *s'écrit :*

$$=\lambda_1 y_1 (1+y_1 y_2(\ldots))\frac{\partial}{\partial y_1}+\lambda_2 y_2 (1+y_1 y_2 (\ldots))\frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Démonstration. — Grâce à la proposition nous pouvons supposer que φ_1 et φ_2 appartiennent à l'idéal $(y_1 y_2)$. Les relations $(1.4)_j$ permettent encore de résoudre le problème formel en posant, si $y^Q \notin (y_1 y_2 y_j)$, $|Q|>1$:

$$\begin{cases} \psi_{j,Q}=0, \\ \zeta_{j,Q}=\dfrac{1}{\delta_{j,Q}}\,[\text{coefficient de } y^Q \text{ du membre de droite de } (1.4)_j], \end{cases}$$

et, si $y^Q \in (y_1 y_2 y_j)$, $|Q|>1$:

$$\begin{cases} \psi_{j,Q}=-[\text{coefficient de } y^Q \text{ du membre de droite de } (1.4)_j], \\ \zeta_{j,Q}=0. \end{cases}$$

Pour prouver la convergence de ζ nous faisons la même démonstration que dans la proposition il suffit de vérifier de nouveau la relation (1.8). Or il est facile de voir, par induction sur $|Q|$, que $\zeta_j \in (y_1 y_2)$, $j=1, 2$.

$\sum_{k=1,2} (\partial\overline{\zeta}_j/\partial y_k)\overline{\psi}_k$ appartient donc à l'idéal $(y_1 y_2 y_j)$. Tous les coefficients $\zeta_{j,Q}$ de y^Q sont nuls si $y^Q \in (y_1 y_2 y_j)$ et (1.8) découle de (1.7).

2. DEUXIÈME CAS : X A UNE SEULE VALEUR PROPRE NON NULLE $\lambda_1 \neq 0$ ET $\lambda_2=0$. — Conservons les notations précédentes. Pour $Q=(q_1, q_2)$ on a

$$\delta_{1,Q}=\lambda_1(q_1-1), \qquad \delta_{2,Q}=\lambda_1 q_1. \tag{2.1}$$

Les relations $(1.4)_j$, $j=1, 2$, nous permettent de construire un changement de variable formel unique $y+\zeta$ transformant (1.1) en (1.3) tel que, pour $j=1, 2$, $|Q|>1$ on ait

$$\begin{cases} \psi_{j,Q}=0 & \text{si} \quad y^Q \notin (y_2), \\ \zeta_{j,Q}=0 & \text{si} \quad y^Q \in (y_2). \end{cases}$$

Pour prouver la convergence de ζ, on remarque que ζ_j ne dépend que de la variable y_1, $\sum_{k=1,2} (\partial\overline{\zeta}_j/\partial y_k)\overline{\psi}_k \in (y_2)$, et la relation (1.7) est encore vérifiée. On obtient de nouveau

$$\delta\overline{\zeta}_j \prec \overline{\varphi}_j(y_1+\overline{\zeta}_1,\ y_2+\overline{\varepsilon}_2), \qquad j=1, 2.$$

La courbe $y_2=0$ est visiblement une variété invariante de X. Nous allons pousser plus loin la « normalisation » de X pour obtenir la forme normale de H. Dulac [10] en démontrant le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit* X *un germe en* $0 \in \mathbb{C}^2$ *de champ vecteurs holomorphe à singularité isolée dont le* 1-*jet s'écrit* $\lambda_1 x_1 (\partial/\partial x_1)$. *Alors il existe des coordonnées* (y_1, y_2) *de* $(\mathbb{C}^2, 0)$ *dans lesquelles*

$$X=f(y_1, y_2)\left((g(y_1)+y_2\,A(y_1, y_2))\frac{\partial}{\partial y_1}+y_2^m\frac{\partial}{\partial y_2}\right),$$

avec f, $A\in\mathcal{O}_2$, $g\in\mathcal{O}_1$ *et* $f(0)\neq 0$, $g'(0)=1$, $m>1$.

Démonstration ([4]). — D'après le lemme précédent, il existe un système de coordonnées (g_1, g_2) tel que $y_2=0$ soit une variété invariante de X. On a donc

$$\omega=i_X\,dy_1\,dy_2=A\,dy_2+B\,dy_1,$$

avec

$$A=f(y_1)+y_2\,g(y_1, y_2), \qquad B=y_2\,h(y_1, y_2),$$

où $f\in\mathcal{O}_1$ et $g, h\in\mathcal{O}_2$. Puisque 0 est un zéro isolé de ω, il existe $m\geqq 2$ tel que y_2^m appartient à l'idéal $I(\omega)=(A, B)$ engendré par A, B pour $n\geqq m$. D'autre part, l'hypothèse sur le 1-jet de X implique $\partial A/\partial y_1(0, 0)\neq 0$. De ces deux remarques on déduit que la division de B par A (suivant les puissances de y_1) s'écrit :

$$B=AQ+y_2^m.\,U(y_2) \qquad \text{avec} \quad U\in\mathcal{O}_1 \quad \text{et} \quad U(0)\neq 0.$$

Le champ de vecteurs

$$Y=-\frac{Q}{U}\,\frac{\partial}{\partial y_2}+\frac{1}{U}\,\frac{\partial}{\partial y_1}$$

ne s'annule pas en 0 et $y_2=0$ est la courbe intégrale de ce champ qui passe par 0. D'après le théorème de « rectification » d'un champ de vecteurs, il existe un système de coordonnées (z_1, z_2) tel que

$$Y=\frac{\partial}{\partial z_1} \qquad \text{et} \qquad z_2=y_2.$$

Puisque $\omega(Y)=y_2^m$, ω s'écrit dans ces nouvelles coordonnées

$$\omega=A(z_1, z_2)\,dz_2+z_2^m\,dz_1.$$

Il est alors clair que X s'écrit de façon requise dans les coordonnées (z_1, z_2).

([4]) Cette démonstration nous a été suggérée par J. Martinet.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. BENDIXSON, *Sur les points singuliers des équations différentielles* (*Ofv. Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlinger*, Stokholm, vol. 9, n° 186, 1898, p. 635-658).

[2] I. BENDIXSON, *Sur les points singuliers d'une équation différentielle linéaire* (*Ofv. Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlinger*, n° 148, 1895, p. 81-89).

[3] S. BOCHNER et W. T. MARTIN, *Several Complex Variables*, Princeton University Press, 1948.

[4] J. BRIANÇON, A. GALLIGO et M. GRANGER, *Déformation équisingulières de germes de courbes gauches réduites*, preprint, Université de Nice, 1979.

[5] BRIOT-BOUQUET, *Recherches sur les fonctions définies par des équations différentielles* (*J. École polytechnique*, vol. XXI, 1856, p. 134-198).

[6] A. D. BRJUNO, *Analytic form of Differential Equations* (*Trans. Moscou Math. Soc.*, vol. 25, 1971, p. 131-282).

[7] C. CAMACHO, N. KUIPER et J. PALIS, *The Topology of Linear Flow with Singularity*, preprint, I.H.E.S., 1977.

[8] D. CERVEAU et J. F. MATTEI, *Intégrales premières méromorphes d'une forme de Pfaff analytique*, Preprint, Université de Dijon.

[9] D. CHENIOT, *Une démonstration du théorème de Zariski...* (*Compositio Matematicae*, vol. 27, fasc. 2, 1972, p. 141-158).

[10] H. DULAC, *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles* (*J. École polytechnique*, vol. 2, sec. 9, 1904, p. 1-125).

[11] H. DULAC, *Intégrales d'une équation différentielle dans le voisinage d'un point singulier* (*Ann. Univ. Grenoble*, t. XVII, 1905, p. 1-51).

[12] F. DUMORTIER, *Singularities of Vector Field on the Plane* (*J. Diff. Equations*, vol. 23, n° 1, 1977).

[13] W. FULTON, *Algebraic Curves*, W. A. Benjamin Inc., 1969.

[14] A. HAEFLIGER, *Variétés feuilletées*, C.I.M.E., Inst. Mat. dell'Univ., Roma.

[15] B. MALGRANGE, *Frobenius avec singularités* 1. *Codimension un* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 46, 1976, p. 163-173).

[16] J. F. MATTEI, *Intégrales premières multiformes d'une forme de Pfaff analytique* (en préparation).

[17] J. F. MATTEI et R. MOUSSU, *Intégrales premières d'une forme de Pfaff analytique* (*Ann. Inst. Fourier*, vol. 28, fasc. 4, 1978, p. 229-237).

[18] R. MOUSSU, *Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de Pfaff* (*Ann. Inst. Fourier*, vol. 26, fasc. 2, 1976, p. 171-220).

[19] G. REEB, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées* (*Act. Sc. et Ind.*, Herman, Paris, 1952).

[20] K. SAITO, *On a Generalisation of de Rham Lemma* (*Ann. Inst. Fourier*, vol. 26, fasc. 2, 1976, p. 165-170).

[21] A. SEIDENBERG, *Reduction of Singularities of the Differentiable Equation* $A\,dY = B\,dX$ (*Amer. J. Math.*, 1968, p. 248-269).

[22] M. SUZUKI, *Sur les relations d'équivalence ouvertes dans les espaces analytiques* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 7, 1974, p. 531-542).

[23] A. VEN DEN ESSEN, *Reduction of Singularities of the Differentiable Equation* $A\,dy = B\,dx$, preprint, Université de Nijmegen, Pays-Bas.

[24] H. WITHNEY, *Complex Analytic Varieties*, Reading Addison Weysley, 1972.

[25] O. ZARISKI, *On the Poincaré Groups of a Projective Hypersurface* (*Ann. Math.*, vol. 38, n° 1, 1937, p. 131-141).

(Manuscrit reçu le 28 novembre 1979,
révisé le 9 juin 1980.)

J. F. MATTEI et R. MOUSSU,
Département de Mathématiques,
Université de Dijon,
214, rue de Mirande,
21000 Dijon.