

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J.-L. DUPONT

A. GUICHARDET

**À propos de l'article « Sur la cohomologie réelle des groupes de Lie simples réels »**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 11, n° 2 (1978), p. 293-295

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1978\\_4\\_11\\_2\\_293\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1978_4_11_2_293_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## A PROPOS DE L'ARTICLE « SUR LA COHOMOLOGIE RÉELLE DES GROUPES DE LIE SIMPLES RÉELS »

PAR J.-L. DUPONT et A. GUICHARDET

ABSTRACT. — We prove that the real continuous 2-cocycles for real simple Lie groups constructed in the preceding paper by Guichardet and Wigner are identical with those constructed by J. L. Dupont by integrating  $G$ -invariant differential forms on geodesic simplexes in the symmetric space  $G/K$ .

Cette note a pour but de démontrer que les 2-cocycles réels continus sur les groupes de Lie simples réels construits dans [2] sont identiques à ceux construits dans [1] par intégration de formes différentielles  $G$ -invariantes sur des simplexes géodésiques dans l'espace symétrique  $G/K$  où  $K$  est un sous-groupe compact maximal de  $G$  (cette dernière construction a aussi été introduite dans [3]).

Rappelons d'abord les constructions de [1] et [2]. On se donne un morphisme non trivial  $u$  de  $K$  dans  $T$ ; on définit une fonction  $v$  sur  $G$  par

$$v(g) = u(k) \quad \text{si } g = kp \quad \text{où } k \in K, \quad p \in \exp \mathfrak{p};$$

le 2-cocycle  $f$  construit dans [2] est caractérisé par

$$(1) \quad e^{2\pi i f(g_1, g_2)} = v(g_1)v(g_2)v(g_1 g_2)^{-1}.$$

D'autre part notons  $u_{*e}$  la différentielle de  $u$  en  $e$  et posons

$$P = u_{*e}/2\pi i;$$

notons  $P(\Omega)$  la 2-forme différentielle  $G$ -invariante sur  $G/K$  dont la valeur à l'origine  $0$  de  $G/K$  est donnée par

$$P(\Omega)_0(A, B) = -\frac{1}{2}P([A, B]) \quad \text{pour } A, B \in \mathfrak{p}$$

(rappelons que  $\mathfrak{p}$  s'identifie à l'espace tangent en  $0$  à  $G/K$ ). Notons enfin  $\Delta(g_1, g_2)$  le cône géodésique dans  $G/K$  ayant pour sommet  $0$  et pour base la géodésique joignant  $g_1 0$  à  $g_1 g_2 0$ . Le 2-cocycle  $c$  construit dans [1] est donné par

$$(2) \quad c(g_1, g_2) = \int_{\Delta(g_1, g_2)} P(\Omega).$$

THÉORÈME. — On a

$$(3) \quad f(g_1, g_2) = c(g_1, g_2) \quad \text{pour } g_1, g_2 \in G.$$

*Démonstration.* — Comme  $f$  et  $c$  ne changent pas si l'on remplace  $(g_1, g_2)$  par  $(k_0 g_1 k_1, k_1^{-1} g_2 k_2)$  avec  $k_0, k_1, k_2 \in K$ , il suffit de démontrer (3) lorsque  $g_1, g_2 \in \exp \mathfrak{p}$ . Écrivons alors :

$$g_1 g_2 = pk \quad \text{où } p \in \exp \mathfrak{p}, \quad k \in K,$$

il suffit de montrer que

$$(4) \quad e^{2\pi i c(g_1, g_2)} = u(k^{-1}).$$

La décomposition polaire  $G = \exp \mathfrak{p} \cdot K$  donne un plongement

$$\tau : G/K \rightarrow \exp \mathfrak{p} \in G$$

et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & \nearrow \tau & \downarrow \pi \\ G/K & & G/K \\ & \searrow \text{id} & \end{array}$$

Notons  $\Theta$  la 1-forme différentielle invariante à gauche sur  $G$ , à valeurs dans  $\mathfrak{f}$ , dont la valeur en  $e$  est la projection de  $g$  sur  $\mathfrak{f}$  parallèlement à  $\mathfrak{p}$ , et  $P(\Theta)$  la composée de  $\Theta$  avec  $P$ . Alors :

$$dP(\Theta) = \pi^*(P(\Omega))$$

car étant donnés  $X$  et  $Y \in \mathfrak{g}$ , on peut écrire

$$X = X_1 + X_2,$$

$$Y = Y_1 + Y_2,$$

avec  $X_1, Y_1 \in \mathfrak{f}$ ,  $X_2, Y_2 \in \mathfrak{p}$ , et on a

$$\begin{aligned} dP(\Theta)(X, Y) &= -\frac{1}{2} P(\Theta)([X, Y]) = -\frac{1}{2} P([X_2, Y_2]) \\ &= P(\Omega)(\pi_*(X), \pi_*(Y)). \end{aligned}$$

Par suite on peut remplacer l'intégrale qui figure dans (2) par l'intégrale de  $P(\Theta)$  le long de la frontière de  $\tau(\Delta(g_1, g_2))$ ; mais  $\Theta$  est nulle le long d'une courbe de la forme  $t \mapsto \exp t X$  où  $X \in \mathfrak{p}$ ; donc

$$c(g_1, g_2) = \int_{\tau(\gamma)} P(\Theta),$$

où  $\gamma$  est la géodésique joignant  $g_1 0$  à  $g_1 g_2 0$ . Posons

$$g_2 = \exp Z \quad \text{avec } Z \in \mathfrak{p},$$

$$g_t = \exp \frac{t}{2} Z \quad \text{avec } t \in [0, 2],$$

$$g_1 g_t = p_t k_t \quad \text{avec } p_t \in \exp \mathfrak{p}, \quad k_t \in K.$$

On a

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= g_1 g_t 0, \\ \tau(\gamma(t)) &= p_t, \\ c(g_1, g_t) &= \int_0^t P(\Theta(\dot{p}_s)) ds,\end{aligned}$$

où  $\dot{p}_s$  est le vecteur tangent à la courbe  $s \mapsto p_s$ . Pour établir (4) il suffit de montrer que

$$e^{2\pi i c(g_1, g_t)} = u(k_t^{-1})$$

ou encore que les dérivées logarithmiques des deux membres sont égales, i. e. :

$$(5) \quad 2\pi i P(\Theta(\dot{p}_t)) = u(k_t) \cdot du(k_t^{-1})/dt.$$

Pour tout  $g \in G$  notons  $L(g)$  et  $R(g)$  les translations à gauche et à droite par  $g$ ; on a

$$\begin{aligned}p_t &= g_1 \cdot \exp \frac{t}{2} Z \cdot k_t^{-1} \\ \dot{p}_t &= L(g_1)_* R(k_t^{-1})_* \left( \exp \frac{t}{2} Z \right)' + L \left( g_1 \exp \frac{t}{2} Z \right)_* (k_t^{-1})' \\ &= R(k_t^{-1})_* L \left( g_1 \exp \frac{t}{2} Z \right)_* Z + L \left( g_1 \exp \frac{t}{2} Z \right)_* (k_t^{-1})', \\ L(p_t^{-1})_* \dot{p}_t &= \text{Ad } k_t \cdot Z + L(k_t)_* (k_t^{-1})';\end{aligned}$$

Le premier terme est dans  $\mathfrak{p}$  et le second dans  $\mathfrak{k}$ ; donc

$$\begin{aligned}2\pi i P(\Theta(\dot{p}_t)) &= 2\pi i P(L(k_t)_*(k_t^{-1})') \\ &= u_{*e}(L(k_t)_*(k_t^{-1})') \\ &= u(k_t) \cdot u_*((k_t^{-1})') \\ &= u(k_t) \cdot du(k_t^{-1})/dt,\end{aligned}$$

d'où (5).

C.Q.F.D.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-L. DUPONT, *Simplicial de Rham Cohomology and Characteristic Classes of Flat Bundles (Topology, t. 15, 1976, p. 233-245).*
- [2] A. GUICHARDET et D. WIGNER, *Sur la cohomologie réelle des groupes de Lie simples réels. (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4<sup>e</sup> série, t. 11, 1978, p. 277.*
- [3] H. SHULMAN and D. TISCHLER, *Leaf Invariants for Foliations and the Van Est Isomorphism (J. Diff. Geometry, t. 11, 1976, p. 535-546).*

(Manuscrit reçu le 23 février 1978.)

A. GUICHARDET  
Centre de Mathématiques,  
École polytechnique,  
91120 Palaiseau

J.L. DUPONT,  
I.E.H.S.,  
Bures-sur-Yvette.