Annales scientifiques de l'É.N.S.

Jean-Pierre Vigué

Automorphismes analytiques des produits continus de domaines bornés

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 11, nº 2 (1978), p. 229-246

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1978_4_11_2_229_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 11, p. 229 à 246.

AUTOMORPHISMES ANALYTIQUES DES PRODUITS CONTINUS DE DOMAINES BORNÉS

PAR JEAN-PIERRE VIGUÉ

Dans un article publié au *Bull. Soc. math. Fr.*, 1936, p. 37-48, Henri Cartan a montré le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soient* $D_1 \subset \mathbf{C}^n$ *et* $D_2 \subset \mathbf{C}^p$ *deux domaines bornés, et soit* $D = D_1 \times D_2$ *leur produit. Alors tout automorphisme analytique* f *de* D, *suffisamment proche de la transformation identique, s'écrit*

$$f(x, y) = (g_1(x), g_2(y)),$$

où g_1 *est un automorphisme de* D_1, *et* g_2 *un automorphisme de* D_2. (*On dit aussi que* f *est produit d'un automorphisme de* D_1 *et d'un automorphisme de* D_2.)

Comme je l'ai déjà fait remarquer, la démonstration de ce théorème se généralise sans modification au cas du produit de deux domaines bornés d'un espace de Banach complexe. Cependant, ce théorème n'est pas suffisant en dimension infinie, car il ne permet pas d'étudier, par exemple, les automorphismes de la boule-unité ouverte B de l'espace $\mathscr{C}$ (S, **C**) des fonctions continues sur un espace topologique compact infini S. Pourtant, on peut considérer B comme un produit continu indexé par S de copies du disque-unité ouvert $\Delta \subset \mathbf{C}$. Je vais considérer maintenant l'espace des sections de certains fibrés en espaces de Banach $\mathscr{E} \to S$ (je dirai alors que $\mathscr{E}$ est un espace de Banach au-dessus de S), et je vais définir dans cet espace un domaine borné B, produit continu d'ouvert p B_s dans chaque fibre, et c'est un théorème sur les automorphismes d'un tel domaine que je vais montrer. Ma démonstration s'inspire de celle de H. Cartan [4]. En particulier, si S est un espace topologique discret fini, on retrouve le résultat de H. Cartan. Si S n'est pas supposé discret, je serai obligé de faire deux hypothèses supplémentaires : la plus naturelle est une hypothèse sur la « continuité des ouverts B_s », la seconde entraîne en particulier que, pour tout $s \in S$, B_s est un domaine étoilé. (Améliorer les hypothèses de façon notable nécessiterait une autre méthode de démonstration.)

En conclusion de cet article, je donnerai un certain nombre d'exemples et d'applications. En particulier, je proposerai une nouvelle définition des domaines bornés irréductibles en dimension infinie. (Bien sûr, cette définition est compatible avec la définition classique en dimension finie.)

Sans l'aide, les remarques et les encouragements de M. Henri Cartan, ce travail n'aurait pas été possible. Je le remercie de me les avoir donnés.

1. Définitions, premières propriétés et énoncé du théorème

Commençons par définir la notion d'espace de Banach au-dessus de S.

DÉFINITION 1.1. — Un espace de Banach $\mathscr{E}$ au-dessus de S est défini par la donnée de deux espaces topologiques $\mathscr{E}$ et S, de deux applications continues $p : \mathscr{E} \to \mathrm{S}$ et $q : \mathscr{E} \to \mathbf{R}^+$, et d'une structure d'espace de Banach complexe sur chaque fibre $\mathscr{E}_s = p^{-1}(s)$, avec $q_s = q|_{\mathscr{E}_s}$ comme norme, tels que les propriétés suivantes soient vérifiées :

(i) S est un espace topologique complètement régulier (au sens de Bourbaki [1]);

(ii) les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E} \times_{\mathrm{S}} \mathscr{E} \to \mathscr{E} & \text{et} & \mathbf{C} \times \mathscr{E} \to \mathscr{E}, \\ (x, y) \mapsto x+y & & (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{array}$$

sont continues;

(iii) pour toute section continue $f : \mathrm{S} \to \mathscr{E}$ (i. e., telle que $p \circ f = \mathrm{id}_s$), on définit une norme

$$\| f \| = \sup_{s \in \mathrm{S}} q(f(s)),$$

et on note $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{E})$ l'espace vectoriel des sections continues f de norme finie; c'est un espace de Banach pour la norme. Nous supposerons que, pour tout $s \in \mathrm{S}$, l'application d'évaluation

$$\begin{array}{c} \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{E}) \to \mathscr{E}_s, \\ f \mapsto f(s) \end{array}$$

est une application surjective.

Remarquons que la condition (iii) est de nature locale. En effet, elle est équivalente à la condition (iii *bis*) suivante :

(iii *bis*) pour tout $s \in \mathrm{S}$, pour tout $a \in \mathscr{E}_s$, il existe un voisinage T de s et une section continue f de $\mathscr{E}$ au-dessus de T telle que $f(s) = a$.

En effet, il est clair que (iii) entraîne (iii *bis*). Pour montrer la réciproque, on part de la section locale f dont on a supposé l'existence, on la multiplie par une fonction égale à 1 en s, nulle en dehors d'un voisinage T′ de s suffisamment petit. La section g ainsi obtenue se prolonge en une section continue bornée au-dessus de S tout entier.

Montrons le :

LEMME 1.2. — *Soit $\mathscr{E}$ un espace de Banach au-dessus de* S. *Soit $t \in \mathrm{S}$, et soit* T *un voisinage ouvert de t dans* S. *Pour tout $a \in \mathscr{E}_t$, il existe une section $f \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{E})$, nulle en dehors de* T, *égale à a en t, et telle que $\| f \| = q(f(t)) = q(a)$.*

Démonstration. — Le résultat est évident si $a = 0$. On peut donc supposer $q(a) \geqq \eta > 0$. Soit g une section continue bornée de $\mathscr{E} \to \mathrm{S}$, nulle sur $\mathrm{S}-\mathrm{T}$, prenant en t la valeur a. Soit $\beta(s) = \sup(\eta, q(g(s)))$. Posons

$$f(s) = (\beta(t)/\beta(s))\, g(s).$$

Il est clair que f répond à la question.

Soit $\mathscr{E}$ un espace de Banach au-dessus de S, et soit B un domaine borné de $\Gamma(S, \mathscr{E})$. Pour tout $s \in S$, soit $B_s \subset \mathscr{E}_s$ l'image de B par l'application

$$\Gamma(S, \mathscr{E}) \xrightarrow{\varphi} \mathscr{E}_s, \quad f \mapsto f(s).$$

D'après le théorème de Banach, l'application φ ,qui est linéaire surjective, est ouverte. Aussi B_s est un ouvert borné de $\mathscr{E}_s$. Montrons la

PROPOSITION 1.3. — *Soit* $\mathscr{B} = \bigcup_{s \in S} B_s \subset \mathscr{E}$. *Alors* $\mathscr{B}$ *est un ouvert de* $\mathscr{E}$.

Démonstration. — Soit $t \in S$, et soit $x_0 \in B_t$. Montrons qu'il existe un voisinage de x_0 dans $\mathscr{E}$ contenu dans $\mathscr{B}$. Soit $f \in B$, tel que $f(t) = x_0$. Comme B est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $g \in \Gamma(S, \mathscr{E})$, $\| g \| < \varepsilon$ entraîne $(f+g) \in B$. De la continuité de la section f, et de la continuité de q et de p, on déduit que

$$\mathscr{U} = \{ y \in \mathscr{E} \mid q(y - f(p(y))) < \varepsilon \}$$

est un ouvert de $\mathscr{E}$. Montrons maintenant que $\mathscr{B}$ contient $\mathscr{U}$. Soit $y \in \mathscr{U}$. D'après le lemme 1.2, il existe une section g de $\mathscr{E}$ de norme $< \varepsilon$ telle que $g(p(y)) = y - f(p(y))$. Du fait que $f+g \in B$, on déduit que $y \in B_{p(y)}$, et la proposition est démontrée.

Nous allons maintenant donner une condition nécessaire pour qu'une section f de $p|_{\mathscr{B}} : \mathscr{B} \to S$ appartienne à B.

PROPOSITION 1.4. — *Soit* $\mathscr{B} = \bigcup_{s \in S} B_s$. *Une condition nécessaire pour qu'une section* f *de* $p|_{\mathscr{B}} : \mathscr{B} \to S$ *appartienne à* B *est :*

(1) *il existe* $\varepsilon > 0$, *tel que, pour tout* $s \in S$, *la boule* $B_s(f(s), \varepsilon)$ *de centre* $f(s)$ *et de rayon* ε *dans* $\mathscr{E}_s$ *soit contenue dans* B_s.

Cette condition est une conséquence immédiate du fait que B est un ouvert de $\Gamma(S, \mathscr{E})$ contenu dans l'ensemble $\Gamma(S, \mathscr{B})$ des sections de $p|_{\mathscr{B}} : \mathscr{B} \to S$. Bien sûr, dès que S est infini, $\Gamma(S, \mathscr{B})$ n'est pas, en général, un ouvert de $\Gamma(S, \mathscr{E})$, comme le montre l'exemple suivant : soient $S = \mathbf{N}$, $\mathscr{E}_n = \mathbf{C}$, $\mathscr{E} = \coprod \mathscr{E}_n$. Pour tout $x \in \mathscr{E}_n$, on pose $q(x) = |x|$. Soit B la boule-unité ouverte de $\Gamma(S, \mathscr{E})$, et soit $\mathscr{B}$ l'ouvert de $\mathscr{E}$ associé. On vérifie facilement que $\Gamma(S, \mathscr{B})$ est l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|x_n| < 1$, et que ce n'est pas un ouvert de $\Gamma(S, \mathscr{E})$.

Nous pouvons maintenant définir les produits continus.

DÉFINITION 1.5. — On dit qu'un domaine borné $B \subset \Gamma(S, \mathscr{E})$ est produit continu des ouverts B_s associés, si toute section de $\mathscr{B} = \bigcup_{s \in S} B_s \to S$ vérifiant (1) appartient à B.

Ainsi, par exemple, la boule-unité ouverte de $\Gamma(S, \mathscr{E})$ est produit continu des boules-unités ouvertes B_s de chacun des $\mathscr{E}_s$.

Remarque 1. — A tout domaine borné $B \subset \Gamma(S, \mathscr{E})$ est associée une famille d'ouverts B_s, et on peut considérer le domaine borné B' produit continu des B_s.

Remarque 2. — Étant donné un ouvert $\mathscr{B}$ de $\mathscr{E}$ [pour tout $s \in S$, $B_s = \mathscr{B} \cap \mathscr{E}_s$ est supposé non vide et contenu dans une boule $B(0, R) \subset \mathscr{E}_s$], on peut considérer l'ensemble B des sections de $\mathscr{B} \to S$ vérifiant (1). Cet ensemble est un ouvert borné de $\Gamma(S, \mathscr{E})$; malheureusement, cet ouvert B peut être vide, comme le montre l'exemple suivant : soient $S = \mathbf{N}^*$, $\mathscr{E}_n = \mathbf{C}$, $\mathscr{E} = \coprod \mathscr{E}_n$. Soient $B_n = B(0, 1/n) \subset \mathscr{E}_n$, et $\mathscr{B} = \bigcup B_n \subset \mathscr{E}$. Alors, $\mathscr{B}$ est un ouvert de $\mathscr{E}$, et il est facile de vérifier que l'ouvert B associé est vide.

Avant d'étudier les automorphismes analytiques des produits continus de domaines bornés, nous avons besoin d'une définition.

DÉFINITION 1.6. — Soit $\mathscr{E}$ un espace de Banach au-dessus de S, et soient B et D deux domaines bornés de $\Gamma(S, \mathscr{E})$. (Les domaines associés dans chacun des $\mathscr{E}_s$ seront notés B_s et D_s respectivement, leurs réunions dans $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{D}$ respectivement.) On dit qu'un isomorphisme analytique $\varphi : B \to D$ est un S-isomorphisme s'il existe un homéomorphisme $\Phi : \mathscr{B} \to \mathscr{D}$, compatible avec les projections $\mathscr{B} \to S$ et $\mathscr{D} \to S$ tel que :

(1) pour tout $s \in S$, la restriction Φ_s de Φ à B_s soit un isomorphisme analytique de B_s sur D_s;

(2) pour tout $f \in B$, on ait

$$\varphi(f) = \Phi \circ f.$$

Si $B = D$, on dit que φ est un S-automorphisme.

La proposition suivante précise la notion de S-automorphisme.

PROPOSITION 1.7. — *Soit* B *un domaine borné produit continu des* B_s. *Soit* $\Phi : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ *un homéomorphisme de* $\mathscr{B}$, *compatible avec la projection* $\mathscr{B} \to S$, *la restriction de* Φ *à chacun des* B_s *étant un automorphisme analytique de* B_s. *Supposons de plus que* Φ *vérifie la condition suivante :*

(i) *pour tout* $f \in B$, *les sections de* $\mathscr{E} \to S$:

$$s \mapsto \Phi(f(s)) \qquad \text{et} \qquad s \mapsto \Phi^{-1}(f(s))$$

appartiennent à B.

Alors l'application

$$B \to B,$$
$$f \mapsto \varphi(f) = \{ s \mapsto \Phi(f(s)) \}$$

est holomorphe et c'est un S-*automorphisme de* B.

Démonstration. — Il est clair que φ est une application bijective de B dans B, et il reste seulement à démontrer que φ est analytique. Pour cela, montrons que φ est développable en série entière au voisinage de tout point de B. Soit $f_0 \in B$ et soit $s \in S$. Soit r un nombre réel > 0 tel que la boule $B(f_0, r)$ de centre f_0 et de rayon r soit contenue dans B. Pour tout $a \in B(f_0(s), r) \subset \mathscr{E}_s$, on a

$$\Phi(f_0(s)+a) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,s}(a),$$

où

$$P_{n,s}(a) = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} \Phi(f_0(s)+ae^{i\theta})\,e^{-ni\theta}\,d\theta.$$

Il existe une constante M telle que, pour tout $a \in B(f_0(s), r)$, on ait $\| P_{n,s}(a) \| \leqq M$. Par suite, $\| P_{n,s} \| \leqq M/r^n$. Sur l'écriture de $P_{n,s}$, il est clair que $s \mapsto P_{n,s}$ est continue et définit un polynôme homogène P_n de degré n sur $\Gamma(S, \mathscr{E})$, et on a : $\| P_n \| \leqq M/r^n$. On en déduit la convergence au voisinage de f_0 de la série

$$\varphi(f_0+f) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(f),$$

et la proposition est démontrée.

Remarque. — Si B est la boule-unité ouverte de $\Gamma(S, \mathscr{E})$, on peut remplacer dans l'énoncé de la proposition 1.7 la condition (i) par la condition (ii) plus faible suivante :

(ii) *il existe* $f \in B$ *tel que* $s \mapsto \Phi(f(s))$ *appartienne à* B.

Montrons que (ii) entraîne (i). Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout $g \in B$, $\varphi(g) : s \mapsto \Phi(g(s))$ appartient à B. Pour tout $s \in S$, on a

$$d_c^{B_s}(0, [\varphi(g)](s)) \leqq d_c^{B_s}(0, [\varphi(f)](s)) + d_c^{B_s}([\varphi(f)](s), [\varphi(g)](s)),$$

où $d_c^{B_s}$ est la métrique de Carathéodory sur B_s. (Pour la définition et les propriétés de la métrique de Carathéodory, *voir* par exemple l'appendice de [6].)

$$\begin{aligned} d_c^{B_s}(0, [\varphi(g)](s)) &\leqq d_c^{B_s}(0, [\varphi(f)](s)) + d_c^{B_s}(f(s), g(s)) \\ &\leqq d_c^{B_s}(0, [\varphi(f)](s)) + d_c^{B_s}(f(s), 0) + d_c^{B_s}(0, g(s)). \end{aligned}$$

Comme B_s est la boule-unité de $\mathscr{E}_s$, on a

$$d_c^{B_s}(0, a) = \operatorname{Arg\,th} \| a \|.$$

Par suite,

$$d_c^{B_s}(0, [\varphi(g)](s)) \leqq \operatorname{Arg\,th} \| \varphi(f) \| + \operatorname{Arg\,th} \| f \| + \operatorname{Arg\,th} \| g \|.$$

On déduit :

$$\| \varphi(g) \| \leqq \operatorname{th}[\operatorname{Arg\,th} \| \varphi(f) \| + \operatorname{Arg\,th} \| f \| + \operatorname{Arg\,th} \| g \|],$$

et par suite $\varphi(g) \in B$.

Q.E.D.

Rappelons que, si B est un domaine borné d'un espace de Banach E, le groupe G (B) des automorphismes analytiques de B est muni de la topologie de la convergence uniforme locale (*voir* [6]). Nous allons maintenant démontrer le théorème 1.8 qui est le résultat essentiel de cet article.

THÉORÈME 1.8. — *Soit* $\mathscr{E}$ *un espace de Banach au-dessus de* S, *et soit* B *un domaine borné de* $\Gamma(S, \mathscr{E})$ *contenant la section nulle, produit continu d'une famille d'ouverts* $B_s \subset \mathscr{E}_s$. *Supposons que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :*

(1) S *est discret;*

(2) (*a*) *pour tout* $t \in S$, *pour tout* $a \in B_t$, *pour tout* $b \in B_t$, *il existe une application analytique* $\tau : B_t \to B$ *telle que* $[\tau(a)](t) = a$ *et* $[\tau(b)](t) = b$;

(*b*) *il existe un voisinage* U *de* 0 *dans* B *tel que* B *soit étoilé par rapport à tout point de* U.

Alors le groupe G (B) *des automorphismes analytiques de* B *jouit de la propriété suivante :*
(P) *Il existe un voisinage de la transformation identique dans* G (B) *formé de* S-*automorphismes.*

Ce théorème entraîne pour l'algèbre de Lie des transformations infinitésimales de B le résultat suivant :

COROLLAIRE 1.9. — *Soit* B *un domaine borné de* Γ (S, $\mathscr{E}$) *vérifiant les hypothèses du théorème* 1.8. *Alors, pour tout groupe à un paramètre*

$$\mathbf{R}\times \mathrm{B}\to \mathrm{B},$$
$$(t,\ x)\mapsto \sigma(t,\ x)$$

d'automorphismes analytiques de B, *il existe une famille* $(\sigma_s)_{s\in \mathrm{S}}$ *de groupes à un paramètre d'automorphismes analytiques de* B_s *telle que, pour tout* $f\in \mathrm{B}$, *on ait*

$$[\sigma(t,\ f)](s)=\sigma_s(t,\ f(s)).$$

Remarque. — Si on suppose S muni d'un filtre $\mathscr{F}$ sans point adhérent dans S, la conclusion du théorème reste exacte pour l'intersection de B avec tout sous-espace vectoriel fermé Γ compris entre Γ_0 (S, $\mathscr{E}$) (l'espace de Banach des sections continues bornées de $\mathscr{E}\to \mathrm{S}$ convergeant vers 0 selon $\mathscr{F}$) et Γ (S, $\mathscr{E}$).

Remarquons enfin que le théorème que nous venons d'énoncer a des applications même dans le linéaire. Ainsi, nous avons le corollaire :

COROLLAIRE 1.10. — *Soit* E *un espace de Banach complexe, et soit* S *un espace topologique complètement régulier. Soit* $\mathscr{C}$ (S, E) *l'espace des fonctions continues bornées de* S *dans* E, *muni de la norme de la convergence uniforme. Le groupe des applications continues de* S *dans le groupe des isométries linéaires de* E *est un voisinage de l'identité dans le groupe des isométries linéaires de* $\mathscr{C}$ (S, E).

2. Quelques lemmes

LEMME 2.1. — *Soit* D *un domaine borné d'un espace de Banach complexe* E. *Soit* a *un point de* D, *et soient* $0<r\leqq \mathrm{R}$ *deux nombres réels tels que* $\mathrm{B}(a,\ r)\subset \mathrm{D}\subset \mathrm{B}(a,\ \mathrm{R})$. *Alors il existe une constante* $\rho>0$ (ρ *ne dépend que de* r *et* R) *telle que, quand le point* $x\in \mathrm{D}$ *parcourt un segment de droite d'origine* a, *la distance de Carathéodory* $d_c^{\mathrm{D}}(a,\ x)$ *est une fonction strictement croissante de* $\|x-a\|$ *sur* $[0,\ \rho]$.

Ce lemme figure dans l'article de H. Cartan [4]. Sa démonstration se généralise sans modification au cas des espaces de Banach. Rappelons rapidement l'argument utilisé : on sait que

$$d_c^{\mathrm{D}}(a,\ x)=\sup_{f\in \mathscr{H}(\mathrm{D},\ \Delta)}\delta(f(a),\ f(x))$$

[où Δ désigne le disque-unité ouvert dans $\mathbf{C}$, $\mathscr{H}$ (D, Δ) l'ensemble des applications analytiques de D dans Δ, et δ la métrique non euclidienne sur le disque Δ]. L'ensemble $\mathscr{H}$ (D, $\overline{\Delta}$) des fonctions holomorphes sur D à valeurs dans $\overline{\Delta}$ est équicontinu en chaque point. D'après le théorème d'Ascoli, $\mathscr{H}$ (D, $\overline{\Delta}$) est un compact de l'espace des applications de D dans $\overline{\Delta}$

muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. On déduit facilement de ce résultat que, les points a et x étant donnés, il existe une fonction f telle que $d_c^{\mathrm{D}}(a, x) = \delta(f(a), f(x))$. On peut supposer que $f(a) = 0$ et que $f(x)$ est réel positif. On déduit alors des majorations de Cauchy que, si x est suffisamment proche de a, $\|f(y)\|$ est une fonction strictement croissante de $\|y-a\|$, au voisinage de $\|x-a\|$, quand y parcourt une demi-droite d'origine a passant par x, ce qui prouve le résultat.

Soit $\mathscr{E}$ un espace de Banach au-dessus de S, et soit B un domaine borné de $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{E})$ produit continu d'une famille d'ouverts $\mathrm{B}_s \subset \mathscr{E}_s$. Si T est un ouvert non vide de S, on peut considérer le domaine borné $\mathrm{B}_0 \subset \Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{E})$ produit continu sur T des B_s. Comme l'application de restriction

$$\begin{aligned} &\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{B}_0, \\ &h \mapsto h\,|_{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

est analytique, et comme les applications analytiques sont contractantes pour la métrique de Carathédory, on a, pour tous f et $g \in \mathrm{B}$:

$$d_c^{\mathrm{B}}(f, g) \geqq d_c^{\mathrm{B}_0}(f\,|_{\mathrm{T}}, g\,|_{\mathrm{T}}).$$

Nous allons maintenant montrer un lemme qui, moyennant quelques hypothèses techniques, dit que, si $\|f-g\|_{\mathrm{S}-\mathrm{T}}$ est très petit devant $\|f-g\|_{\mathrm{T}}$, on a

$$d_c^{\mathrm{B}}(f, g) = d_c^{\mathrm{B}_0}(f\,|_{\mathrm{T}}, g\,|_{\mathrm{T}}).$$

LEMME 2.2 (comparer avec H. Cartan [4], lemme III). — *Soit $\mathscr{E}$ un espace de Banach au-dessus de* S, *et soit* B *un domaine borné de* $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{E})$ *contenant la section nulle, produit continu d'une famille d'ouverts* $\mathrm{B}_s \subset \mathscr{E}_s$, *vérifiant* (1) *ou* (2). *Soit* $\mathrm{B}(0, r_0)$ *une boule de* $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{E})$ *complètement intérieure à* B (*au sens de* [6], p. 206). *Dans le cas* (2), *supposons de plus que* B *est étoilé par rapport à tout point de* $\mathrm{B}(0, r_0)$. *Soit* T *un ouvert non vide de* S, *et soit* B_0 *le domaine borné de* $\Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{E})$ *produit continu sur* T *des* B_s. *Alors, pour tout* $r < r_0$, *il existe une constante* $\mathrm{K}(r)$ (*indépendante de* T) *telle que, pour tous f et $g \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{E})$ tels que*

$$\|f\| < r, \qquad \|g\| < r,$$

$$\|f-g\|_{\mathrm{S}-\mathrm{T}} = \sup_{s \in \mathrm{S}-\mathrm{T}} q(f(s)-g(s)) \leqq \mathrm{K}(r)\,\|f-g\|_{\mathrm{T}},$$

on ait

$$d_c^{\mathrm{B}}(f, g) = d_c^{\mathrm{B}_0}(f\,|_{\mathrm{T}}, g\,|_{\mathrm{T}}).$$

Démonstration. — Il nous reste à démontrer l'inégalité

$$d_c^{\mathrm{B}}(f, g) \leqq d_c^{\mathrm{B}_0}(f\,|_{\mathrm{T}}, g\,|_{\mathrm{T}}).$$

Pour cela, il suffit de construire une application linéaire affine

$$\varphi: \quad \Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{E}) \rightarrow \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{E})$$

telle que $\varphi(\mathrm{B}_0) \subset \mathrm{B}$, $\varphi(f\,|_{\mathrm{T}}) = f$, $\varphi(g\,|_{\mathrm{T}}) = g$.

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire σ de norme 1 sur $\Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{E})$ telle que

$$\sigma(f|_{\mathrm{T}} - g|_{\mathrm{T}}) = \| f|_{\mathrm{T}} - g|_{\mathrm{T}} \|_{\mathrm{T}}.$$

Soit $\mathrm{F} = \operatorname{Ker} \sigma$. On a

$$f|_{\mathrm{T}} = (\lambda+1) h_1 + h_2, \qquad g|_{\mathrm{T}} = \lambda h_1 + h_2,$$

où $h_1 = f|_{\mathrm{T}} - g|_{\mathrm{T}}$, et $h_2 \in \mathrm{F}$. On a

$$\lambda = \sigma(g|_{\mathrm{T}}) / \| f|_{\mathrm{T}} - g|_{\mathrm{T}} \|_{\mathrm{T}},$$

et par suite

$$|\lambda| \leqq \| g \|_{\mathrm{T}} / \| f - g \|_{\mathrm{T}}.$$

Tout élément $h \in \Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{E})$ s'écrit :

$$h = x_1(h) h_1 + k(h),$$

où $k(h) \in \mathrm{F}$, et on a

$$x_1(h) = \sigma(h) / \| f - g \|_{\mathrm{T}},$$

et donc

$$|x_1(h)| \leqq \| h \| / \| f - g \|_{\mathrm{T}}.$$

On prolonge h_1 et h_2 en des sections h'_1 et h'_2 de $\mathscr{E} \to \mathrm{S}$ par les formules

$$h'_1 = f - g, \qquad h'_2 = (\lambda+1) g - \lambda f,$$

et on a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}
\| h'_1 \|_{\mathrm{S}-\mathrm{T}} &= \| f - g \|_{\mathrm{S}-\mathrm{T}} \leqq \mathrm{K}(r) \| f - g \|_{\mathrm{T}}, \\
\| h'_2 \|_{\mathrm{S}-\mathrm{T}} &\leqq [\| g \|_{\mathrm{T}} / \| f - g \|_{\mathrm{T}}] \| g - f \|_{\mathrm{S}-\mathrm{T}} + \| g \|_{\mathrm{S}-\mathrm{T}} \\
&\leqq \mathrm{K}(r) \| g \|_{\mathrm{T}} + \| g \|_{\mathrm{S}-\mathrm{T}}, \\
\| h'_2 \|_{\mathrm{S}-\mathrm{T}} &\leqq \mathrm{K}(r) . r + r.
\end{aligned}$$

Pour tout $h \in \mathrm{B}(0, 1)$, on a

$$\begin{aligned}
&\| x_1(h) \times h'_1 + h'_2 \|_{\mathrm{S}-\mathrm{T}} \\
&\quad \leqq [\| h \| / \| f - g \|_{\mathrm{T}}] \mathrm{K}(r) \| f - g \|_{\mathrm{T}} + \mathrm{K}(r) . r + r \\
&\quad \leqq \mathrm{K}(r) + \mathrm{K}(r) . r + r.
\end{aligned}$$

La constante r_0 étant donnée, il existe une constante $\alpha < r_0$ et une constante $\mathrm{K}(r)$ telles que

$$\mathrm{K}(r) + \mathrm{K}(r) . r + r \leqq \alpha < r_0.$$

Définissons φ par la formule

$$[\varphi(h)](s) = \begin{cases} x_1(h) h'_1(s) + (1 - \theta(s)) h'_2(s) + \theta(s) [k(h)](s) & \text{si } s \in \mathrm{T}, \\ x_1(h) h'_1(s) + (1 - \theta(s)) h'_2(s) & \text{si } s \in \mathrm{S} - \mathrm{T}, \end{cases}$$

où $\theta(s)$ est une fonction continue sur S, à valeurs dans $[0, 1]$, nulle sur $\mathrm{S} - \mathrm{T}$, que nous allons maintenant définir. Il est clair que, pour tout $h \in \Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{E})$, $\varphi(h)$ est une fonction continue sur S tout entier, que $\varphi(f|_T) = f$, $\varphi(g|_T) = g$. Il nous faut choisir $\theta(s)$ de façon à ce que, pour tout $h \in B_0$, $\varphi(h)$ appartienne à B :

– cas (1) (S discret). On prend

$$\theta(s) = \begin{cases} 1, & s \in T, \\ 0, & s \in S-T; \end{cases}$$

– cas (2). Soit $\eta : S \to \mathbf{R}$ la fonction continue

$$\begin{aligned} \eta(s) &= [\sup_{h \in B_0} |x_1(h)|] \| h'_1(s) \| + \| h'_2(s) \| \\ &= [1/\| f-g \|_T] \| h'_1(s) \| + \| h'_2(s) \|. \end{aligned}$$

Soit β un nombre réel tel que $0 < \alpha < \beta < r_0$, et soit

$$\theta : \quad S \to [0, 1],$$

une fonction continue nulle sur le fermé $\{ \eta(s) \leqq \alpha \}$ (dont l'intérieur contient $S-T$) et qui vaut 1 sur le fermé $T' = \{ \eta(s) \geqq \beta \}$. La fonction θ étant ainsi définie, vérifions que, pour tout $h \in B_0$, $\varphi(h) \in B$. D'après la définition 1.5, il suffit de vérifier qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $s \in S$, $d([\varphi(h)](s), \complement_{\mathscr{E}_s} B_s) \geqq \varepsilon$. C'est immédiat pour $s \in T' \cup (S-T)$. Étudions le cas où $s \in T-T'$. On a

$$\| x_1(h) h'_1 + h'_2 \|_{T-T'} \leqq \beta < r_0.$$

D'autre part, pour tout $h \in B_0$, il existe une constante $\varepsilon_1 > 0$ telle, que pour tout $s \in T-T'$, on ait

$$d(x_1(h) h'_1(s) + [k(h)](s), \complement_{\mathscr{E}_s} B_s) \geqq \varepsilon_1.$$

En utilisant le fait que, pour tout $s \in T-T'$, B_s est étoilé par rapport à tous les points d'une boule de centre $[x_1(h) h'_1(s) + h'_2(s)]$ et de rayon $(r_0 - \beta)$, et en écrivant la décomposition

$$\begin{aligned} [\varphi(h)](s) = \theta(s) & [x_1(h) h'_1(s) + [k(h)](s)] \\ & + (1-\theta(s)) [x_1(h) h'_1(s) + h'_2(s)], \end{aligned}$$

on montre que

$$d([\varphi(h)](s), \complement_{\mathscr{E}_s} B_s) \geqq \inf(\varepsilon_1, r_0 - \beta),$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Soit $\mathscr{E}$ un espace de Banach au-dessus de S, et soit B un domaine borné de $\Gamma(S, \mathscr{E})$, produit continu d'ouverts $B_s \subset \mathscr{E}_s$. Soit $t \in S$. Comme l'application

$$\begin{aligned} & B \to B_t, \\ & f \mapsto f(t) \end{aligned}$$

est analytique, on a, pour tous f et $g \in B$:

$$d_c^B(f, g) \geqq d_c^{B_t}(f(t), g(t)).$$

Nous allons montrer que, si $f \in \mathrm{B}$ et $\xi_0 \in \mathrm{B}_t$ sont donnés, il existe une application $g \in \mathrm{B}$ telle que $g(t) = \xi_0$ et que

$$d_c^{\mathrm{B}}(f, g) = d_c^{\mathrm{B}_t}(f(t), g(t)) = d_c^{\mathrm{B}_t}(f(t), \xi_0).$$

De façon précise, on a le lemme suivant :

LEMME 2.3. — *Soit $\mathscr{E}$ un espace de Banach au-dessus de* S, *et soit* B *un domaine borné de* $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{E})$ *contenant la section nulle, produit continu d'une famille d'ouverts* $\mathrm{B}_s \subset \mathscr{E}_s$, *vérifiant* (1) *ou* (2). *Soit* $\mathrm{B}(0, r_0)$ *une boule de* $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{E})$ *complètement intérieure à* B. *Dans le cas* (2), *supposons de plus que* B *est étoilé par rapport à tout point de* $\mathrm{B}(0, r_0)$. *Soit* $t \in \mathrm{S}$, *et soit* T *un voisinage ouvert de t dans* S. *Soit* $f \in \mathrm{B}$, $\|f\|_{\mathrm{S}} < r_0/4$, *et soit* $\xi_0 \in \mathrm{B}_t \subset \mathscr{E}_t$. *Alors il existe* $g \in \mathrm{B}$, *égale à f sur* $\mathrm{S}-\mathrm{T}$, *telle que* $g(t) = \xi_0$, *et que*

$$d_c^{\mathrm{B}}(f, g) = d_c^{\mathrm{B}_t}(f(t), g(t)) = d_c^{\mathrm{B}_t}(f(t), \xi_0).$$

Démonstration. — Pour montrer ce lemme, compte tenu des propriétés de la métrique de Carathéodory, il suffit de construire une application analytique $\varphi : \mathrm{B}_t \to \mathrm{B}$ telle que, pour tout $a \in \mathrm{B}_t$,

$$\varphi(a)\,|_{\mathrm{S}-\mathrm{T}} = f\,|_{\mathrm{S}-\mathrm{T}}$$

et que

$$\varphi(f(t)) = f, \; [\varphi(\xi_0)](t) = \xi_0.$$

On pose alors $g = \varphi(\xi_0)$.

Cas (1) (S discret). Définissons $\varphi(a)$ par la formule

$$[\varphi(a)](s) = \begin{cases} a & \text{si} \quad s = t, \\ f(s) & \text{si} \quad s \neq t. \end{cases}$$

Il est clair que φ répond à la question.

Cas (2). Soit $\tau : \mathrm{B}_t \to \mathrm{B}$ l'application analytique telle que $[\tau(f(t))](t) = f(t)$ et $[\tau(\xi_0)](t) = \xi_0$ dont nous avons supposé l'existence. Quitte à multiplier τ par une fonction égale à 1 en t, nulle sur $\mathrm{S}-\mathrm{T}$, bien choisie, on peut supposer que, pour tout $a \in \mathrm{B}_t$, $\tau(a)$ est nul sur $\mathrm{S}-\mathrm{T}$, et que $\|\tau(f(t))\| = q(f(t))$. On définit φ par la formule : pour tout $a \in \mathrm{B}_t$,

$$[\varphi(a)](s) = (1-\alpha(s))^2[[\tau(a)](s) - [\tau(f(t))](s)] + f(s),$$

où

$$\alpha(s) = (1/r_0)\, q[f(s) - [\tau(f(t))](s)].$$

D'après les hypothèses, on a $\alpha(t) = 0$, $\alpha(s) < 1/2$. Il est clair que $\varphi(f(t)) = f$ et que $[\varphi(\xi_0)](t) = \xi_0$. Il reste seulement à vérifier que, pour tout $a \in \mathrm{B}_t$, $\varphi(a) \in \mathrm{B}$. Du fait que $\tau(a)$ appartient à B, on déduit l'existence d'une constante $\varepsilon > 0$ telle que, pour tout $s \in \mathrm{S}$, $d([\tau(a)](s), \complement_{\mathscr{E}_s} \mathrm{B}_s) \geqq \varepsilon$. On peut écrire $\varphi(a)$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}[\varphi(a)](s) = {} & (1-\alpha(s))^2[\tau(a)](s) \\ & + [1-(1-\alpha(s))^2][\tau(f(t))](s) + [f(s) - [\tau(f(t))](s)].\end{aligned}$$

En utilisant le fait que, pour tout $s \in \mathrm{S}$, B_s est étoilé par rapport à tous les points d'une boule de centre $[\tau(f(t))](s)$ et de rayon $3\,r_0/4$, on montre que

$$d([(1-\alpha(s))^2[\tau(a)](s)+[1-(1-\alpha(s))^2][\tau(f(t))](s)],\ \complement_{\mathscr{E}_s}\mathrm{B}_s) \geqq (1-\alpha(s))^2\varepsilon+(1-(1-\alpha(s))^2)\,3\,r_0/4.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} d([\varphi(a)](s),\ \complement_{\mathscr{E}_s}\mathrm{B}_s) &\geqq (1-\alpha(s))^2\varepsilon+(1-(1-\alpha(s))^2)\,3\,r_0/4-r_0\,\alpha(s) \\ &\geqq (r_0/4)(2\,\alpha(s)-3\,\alpha(s)^2)+\varepsilon/4 \\ &\geqq \varepsilon/4, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\varphi(a) \in \mathrm{B}$. Le lemme est démontré.

3. Démonstration du théorème

Montrons d'abord la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1. — *Soit $\mathscr{E}$ un espace de Banach au-dessus de* S, *et soit* B *un domaine borné de* $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{E})$ *contenant la section nulle, produit continu d'une famille d'ouverts* $\mathrm{B}_s \subset \mathscr{E}_s$, *vérifiant* (1) *ou* (2). *Alors il existe un voisinage* V *de la transformation identique dans le groupe* G (B) *des automorphismes analytiques de* B, *tel que, pour tout* $\varphi \in \mathrm{V}$, *pour tout* $f \in \mathrm{B}$, *pour tout* $t \in \mathrm{S}$, *pour toute section h de $\mathscr{E}$ nulle au point t, et telle que* $f+h \in \mathrm{B}$, *on ait*

$$[\varphi(f+h)](t) = [\varphi(f)](t).$$

(*Ainsi, pour tout* $\varphi \in \mathrm{V}$, $[\varphi(f)](t)$ *ne dépend que de la valeur de f au point t.*)

Démonstration du théorème 1.8. — Soit φ un automorphisme de B suffisamment proche de la transformation identique. On définit alors une application Φ de $\mathscr{B} = \bigcup_{s \in \mathrm{S}} \mathrm{B}_s$ dans $\mathscr{B}$ de la façon suivante : pour tout $t \in \mathrm{S}$, pour tout $a \in \mathrm{B}_t$, on choisit $f \in \mathrm{B}$ telle que $f(t) = a$, et on pose

$$\Phi(a) = [\varphi(f)](t).$$

(Cette définition a un sens d'après la proposition précédente.) Il est clair que Φ est une application continue de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}$. Le même raisonnement fait sur φ^{-1} montre que Φ est un homéomorphisme. Il reste à montrer que $\Phi|_{\mathrm{B}_s} : \mathrm{B}_s \to \mathrm{B}_s$ est analytique. D'après le lemme d'Osgood, il suffit de montrer que, pour tout $a \in \mathrm{B}_s$, il existe un voisinage V de a dans B_s tel que la restriction de Φ à l'intersection de V avec toute droite complexe soit analytique. Soit donc $a \in \mathrm{B}_s$, soit $f \in \mathrm{B}$ telle que $f(s) = a$. Soit $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(f, r) \subset \mathrm{B}$. Prenons $\mathrm{V} = \mathrm{B}(a, r/3) \subset \mathrm{B}_s$. Soit Δ une droite complexe. Il est facile de montrer l'existence d'une application linéaire affine

$$\tau : \quad \Delta \cap \mathrm{V} \to \mathrm{B}(f, r),$$

telle que, pour tout $x \in \Delta \cap \mathrm{V}$, $[\tau(x)](s) = x$. On a alors, pour tout $x \in \Delta \cap \mathrm{V}$,

$$\Phi(x) = [\varphi(\tau(x))](s),$$

ce qui montre que la restriction de Φ à $\Delta \cap \mathrm{V}$ est analytique, et le théorème est démontré.

Démonstration de la proposition 3.1 (la démonstration s'inspire de celle du lemme II de H. Cartan [4], p. 43). — D'après le théorème de prolongement analytique, il suffit de montrer la proposition quand f et h sont proches de la section nulle. La proposition 3.1 sera donc une conséquence du résultat suivant :

Soit $B(0, r_0)$ une boule de $\Gamma(S, \mathscr{E})$ complètement intérieure à B. [Dans le cas (2), supposons de plus que B est étoilé par rapport à tout point de $B(0, r_0)$.] Il est clair qu'il existe deux nombres réels R et R′ tels que, pour tout $x \in B(0, r_0/2)$, $B(x, R) \subset B \subset B(x, R')$. Soit ρ la constante >0 associée à cette situation par le lemme 2.1 (nous supposerons $\rho < r_0/8$) Soit α une constante strictement positive telle que $2\alpha < \rho$, et que $3\alpha < K(r_0/2)(\rho - 3\alpha)$, où $K(r_0/2)$ est la constante définie au lemme 2.2. Soit φ un automorphisme analytique de B tel que

$$\|\varphi - \mathrm{id}\|_{B(0, r_0/2)} < \alpha, \qquad \|\varphi^{-1} - \mathrm{id}\|_{B(0, r_0/2)} < \alpha.$$

Soit $f \in B$ tel que $\|f\|_S < r_0/8$. Soit $t \in S$, et soit $h \in B$ tel que $\|h\|_S < \alpha$ et $h(t) = 0$. Alors,

$$[\varphi(f+h)](t) = [\varphi(f)](t).$$

Remarquons qu'il suffit, en fait, de montrer ce résultat pour une section h nulle sur un voisinage ouvert T de t dans S. En effet, la démonstration faite dans ce cas, une section h nulle en t étant donnée, on peut trouver une suite $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sections de $\mathscr{E}$ convergeant vers h uniformément, chaque h_n étant nulle sur un voisinage T_n de t, et le résultat s'en déduit.

Soit donc T un voisinage ouvert de t dans S, et soit h une section, $\|h\|_S < \alpha$, h nulle sur T. Considérons dans B_t les points $[\varphi(f)](t)$ et $[\varphi(f+h)](t)$, et il nous faut montrer qu'ils sont égaux. De toutes façons, on a

$$\begin{aligned} &\|[\varphi(f)](t) - [\varphi(f+h)](t)\| \\ &\quad \leqq \|[(\varphi - \mathrm{id})(f)](t)\| + \|f(t) - (f+h)(t)\| \\ &\qquad + \|[(\mathrm{id} - \varphi)(f+h)](t)\| \leqq \alpha + 0 + \alpha = 2\alpha. \end{aligned}$$

Comme $2\alpha < \rho$, il existe un point $\xi_0 \in B_t$ tel que $\|\xi_0 - [\varphi(f)](t)\| = \rho$, et que $[\varphi(f+h)](t)$ appartienne au segment $[[\varphi(f)](t), \xi_0]$. On vérifie facilement que $\|\varphi(f+h)\|_S < r_0/4$. D'après le lemme 2.3, il existe un élément g de $B \subset \Gamma(S, \mathscr{E})$ tel que $g(t) = \xi_0$, $g|_{S-T} = \varphi(f+h)|_{S-T}$, et

$$(3) \qquad d_c^B(\varphi(f+h), g) = d_c^{B_t}([\varphi(f+h)](t), g(t)) = d_c^{B_t}([\varphi(f+h)](t), \xi_0).$$

Du fait que la distance de Carathéodory est invariante par les automorphismes de B, on a

$$(4) \qquad d_c^B(f, \varphi^{-1}(g)) = d_c^B(\varphi(f), g),$$

$$(5) \qquad d_c^B(f+h, \varphi^{-1}(g)) = d_c^B(\varphi(f+h), g).$$

Montrons l'égalité

$$(6) \qquad d_c^B(f, \varphi^{-1}(g)) = d_c^B(f+h, \varphi^{-1}(g)).$$

Soit B_0 le domaine borné de $\Gamma(T, \mathscr{E})$ produit continu sur T des B_s. Pour montrer (6), sachant que f et $(f+h)$ coïncident sur T, il suffit de montrer (7) et (8) :

$$d_c^B(f, \varphi^{-1}(g)) = d_c^{B_0}(f\,|_T, \varphi^{-1}(g)\,|_T), \tag{7}$$

$$d_c^B(f+h, \varphi^{-1}(g)) = d_c^{B_0}((f+h)\,|_T, \varphi^{-1}(g)\,|_T). \tag{8}$$

Montrons (7). On a

$$\begin{aligned} \|f-\varphi^{-1}(g)\|_{S-T} &\leqq \|f-(f+h)\|_{S-T}+\|(f+h)-\varphi(f+h)\|_{S-T} \\ &\quad +\|\varphi(f+h)-g\|_{S-T}+\|g-\varphi^{-1}(g)\|_{S-T} \\ &\leqq \alpha+\alpha+0+\alpha = 3\alpha, \\ \|f-\varphi^{-1}(g)\|_T &\geqq \|\varphi(f)-g\|_T-\|f-\varphi(f)\|_T-\|g-\varphi^{-1}(g)\|_T \\ &\geqq \rho-\alpha-\alpha = \rho-2\alpha. \end{aligned}$$

Comme $3\alpha < K(r_0/2)(\rho-2\alpha)$ et que $\|f\|_S < r_0/2$, $\|\varphi^{-1}(g)\|_S < r_0/2$, on peut appliquer le lemme 2.2, et (7) est démontré. Un raisonnement semblable montrerait (8). La formule (6) est donc démontrée. De (4), (5) et (6), on déduit :

$$d_c^B(\varphi(f), g) = d_c^B(\varphi(f+h), g). \tag{9}$$

Par construction de g, on a

$$d_c^B(\varphi(f+h), g) = d_c^{B_t}([\varphi(f+h)](t), g(t)).$$

On a donc

$$d_c^B(\varphi(f), g) = d_c^{B_t}([\varphi(f+h)](t), g(t)). \tag{10}$$

On sait que

$$d_c^B(\varphi(f), g) \geqq d_c^{B_t}([\varphi(f)](t), g(t)).$$

Par suite,

$$d_c^{B_t}([\varphi(f+h)](t), \xi_0) \geqq d_c^{B_t}([\varphi(f)](t), \xi_0). \tag{11}$$

Or, d'après le lemme 2.1, sur toute demi-droite issue de ξ_0, $d_c^{B_t}(\xi_0, x)$ est une fonction strictement croissante de $\|x-\xi_0\|$ sur $[0, \rho]$. Sachant que

$$\rho = \|[\varphi(f)](t)-\xi_0\| \geqq \|[\varphi(f+h)](t)-\xi_0\|,$$

on déduit :

$$d_c^{B_t}([\varphi(f+h)](t), \xi_0) = d_c^{B_t}([\varphi(f)](t), \xi_0). \tag{12}$$

En appliquant encore une fois le lemme 2.1, on trouve

$$[\varphi(f)](t) = [\varphi(f+h)](t).$$

Q.E.D.

4. Exemples et applications

4.1. La boule-unité d'un espace de Banach dont le groupe des automorphismes analytiques n'est pas un groupe de Lie. — Dans [6], p. 245 et suivantes, j'ai donné deux exemples de domaines bornés D tels que le groupe des automorphismes analytiques G (D) de D ne soit pas un groupe de Lie. Ces exemples, obtenus en faisant des trous dans la boule-unité d'un espace de Hilbert peuvent sembler « peu naturels ». Je vais montrer qu'on peut trouver un exemple qui est la boule-unité d'un espace de Banach (*voir* aussi l'exemple 6 de [5]).

Soit $Q_n \subset \mathbf{C}$ l'intérieur du polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre 0 et de rayon 1. Considérons dans $\mathbf{C}^2$ l'ensemble B_n des points $(x, y) \in \mathbf{C}^2$ tels qu'il existe $x_0 \in Q_n$, $\rho \in [0, 1[$, et $\theta \in \mathbf{R}$, tels que

$$x = x_0\, e^{i\theta}, \qquad y = \rho\, e^{i\theta}.$$

B_n est un domaine borné cerclé convexe de $\mathbf{C}^2$. Par suite, B_n est la boule-unité ouverte de $\mathbf{C}^2$ pour une norme q_n convenable. (Muni de cette norme q_n, $\mathbf{C}^2$ sera noté E_n.) L'application linéaire f_n :

$$\begin{gathered} E_n \to E_n, \\ (x, y) \mapsto f_n(x, y) = (x e^{2i\pi/n}, y) \end{gathered}$$

est un isomorphisme linéaire isométrique de E_n, et c'est un automorphisme analytique de B_n.

D'après les résultats de H. Cartan [3], th. 1, p. 544, tous les automorphismes analytiques de B_n laissent l'origine fixe; par suite, ce sont des isométries linéaires de E_n. Il est facile de vérifier que f_n n'appartient pas au plus grand groupe de Lie connexe opérant sur B_n. L'ensemble $\mathscr{E} = \coprod_{n \geqq 3} E_n$ est un espace de Banach au-dessus de $S = \{ n \in \mathbf{N} \mid n \geqq 3 \}$, et soit B la boule-unité ouverte de $\Gamma(S, \mathscr{E})$; B est produit continu des boules-unités ouvertes dans chacun des E_n.

La suite d'automorphismes de B :

$$F_n = (\mathrm{id}, \ldots, \mathrm{id}, f_n, \mathrm{id}, \ldots)$$

converge vers l'identité, et par application du théorème 1.8 et du corollaire 1.9, on montre que F_n n'appartient pas au plus grand groupe de Lie connexe opérant sur B. Par suite, le groupe G (B) des automorphismes analytiques de B n'est pas un groupe de Lie.

4.2. Les domaines bornés symétriques

Théorème 4.2.1. — *Soit $\mathscr{E}$ un espace de Banach au-dessus de* S, *et soit* B *un domaine borné symétrique de* $\Gamma(S, \mathscr{E})$ *produit continu d'une famille de domaines* $B_s \subset \mathscr{E}_s$. *Supposons de plus que le groupe* G (B) *vérifie la propriété* (P) *du théorème* 1.8. *Alors chacun des* B_s *est un domaine borné symétrique, et* B *est homogène sous l'action de* S-*automorphismes.*

Démonstration. — On sait (*voir* [6], th. 3.4.1, p. 262) que tout domaine borné symétrique B est isomorphe à un domaine borné cerclé étoilé. Par suite, pour tout élément x de B, la symétrie σ_x par rapport à x appartient à un groupe à un paramètre d'automorphismse de B. On déduit de la propriété (P) que cette symétrie σ_x provient d'une famille $(\sigma_{x(s)})_{s \in S}$ de symétries sur chacun des B_s; chacun des B_s est donc un domaine borné symétrique et le théorème s'en déduit.

A l'exception des majorations évidentes et des lemmes 2.2 et 2.3 de cet article (*voir* aussi Cartan [4], lemme III, p. 43), il y a peu de résultats sur la métrique de Carathéodory sur un produit (et *a fortiori* sur un produit continu). Cependant, si un domaine borné symétrique convexe B est produit continu d'une famille de domaines B_s, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 4.2.2. — *Soit* $\mathscr{E}$ *un espace de Banach au-dessus de* S, *et soit* B *la boule-unité ouverte de* $\Gamma(S, \mathscr{E})$. *Supposons de plus que* B *vérifie la propriété* (P) *et que* B *est un domaine borné symétrique. Alors, pour tous* f *et* $g \in B$, *on a*

$$d_c^B(f, g) = \sup_{s \in S} d_c^{B_s}(f(s), g(s)). \tag{13}$$

Démonstration. — On montre facilement à l'aide du lemme de Schwarz que, si B est la boule-unité ouverte d'un espace de Banach,

$$d_c^B(0, x) = \delta(0, \|x\|),$$

(où δ est la métrique non euclidienne sur le disque-unité Δ). Ce résultat appliqué au cas qui nous intéresse donne tout de suite

$$d_c^B(0, g) = \sup_{s \in S} d_c^{B_s}(0, g(s)).$$

Remarquons maintenant que la distance de Carathéodory est invariante par les automorphismes de B, et que la distance

$$d(f, g) = \sup_{s \in S} d_c^{B_s}(f(s), g(s))$$

est invariante par les S-automorphismes. Comme, d'après le théorème 4.2.1, B est homogène sous l'action de S-automorphismes, le résultat général s'en déduit.

Il serait intéressant de savoir si la formule (13) est encore vraie pour un domaine borné B produit continu d'une famille de domaines B_s.

4.3. LES DOMAINES BORNÉS SYMÉTRIQUES IRRÉDUCTIBLES. — La première étape de la classification par E. Cartan [2] des domaines bornés symétriques est la décomposition des domaines bornés symétriques en produit de domaines bornés symétriques irréductibles. Dans cet article, E. Cartan donne des domaines bornés irréductibles la définition suivante :

DÉFINITION 4.3.1. — Soit D un domaine borné de $\mathbf{C}^n$. On dit que D est réductible si D est analytiquement isomorphe au produit de deux domaines bornés. Il est dit irréductible dans le cas contraire.

Cette définition peut facilement se généraliser au cas d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Cependant, pour une telle définition, la boule-unité B de l'espace de Banach $\mathscr{C}(S, \mathbf{C})$ des fonctions continues sur un espace topologique connexe et compact S est irréductible. Cette définition n'est pas satisfaisante en dimension infinie puisque, avec les notations que j'ai introduites, B est un produit continu de copies du disque-unité $\Delta \subset \mathbf{C}$. Je proposerai donc la définition suivante des domaines bornés irréductibles.

DEFINITION 4.3.2. — Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. On dit que D est réductible s'il existe un espace de Banach $\mathscr{E}$ au-dessus de S, un domaine borné B de $\Gamma(S, \mathscr{E})$, isomorphe à D, produit continu d'une famille d'ouverts $B_s \subset \mathscr{E}_s$, vérifiant les propriétés suivantes :

(i) l'ensemble $\{ s \in S \mid \mathscr{E}_s \neq \{ 0 \} \}$ a au moins deux éléments;

(ii) le groupe G (B) vérifie la propriété (P).

Dans le cas contraire, D est dit irréductible.

Remarquons d'abord que, si D est un domaine borné d'un espace vectoriel complexe de dimension finie, pour des raisons de dimension, l'ensemble $\{ s \in S \mid \mathscr{E}_s \neq \{ 0 \} \}$ est fini discret. Compte tenu du théorème de H. Cartan [4], la définition 4.3.2 redonne la définition classique 4.3.1 en dimension finie.

Nous allons maintenant nous intéresser au cas des domaines bornés symétriques. Rappelons (*voir* [6]) que, si D est un domaine borné symétrique, D est isomorphe à un domaine borné cerclé étoilé. Nous allons montrer que, dans ce cas, la définition 4.3.2 qui est d'un emploi assez difficile, prend une forme plus maniable. Montrons d'abord la

PROPOSITION 4.3.3. — *Soit* D *un domaine borné symétrique d'un espace de Banach complexe* E, *réalisé comme un domaine borné cerclé étoilé. Soit* $\mathscr{E}$ *un espace de Banach au-dessus de* S, *et soit* B *un domaine borné de* $\Gamma(S, \mathscr{E})$ *produit continu d'une famille de domaines* $B_s \subset \mathscr{E}_s$. *Supposons que* B *vérifie la propriété* (P) *et qu'il existe un isomorphisme analytique* φ *de* D *sur* B. *Alors il existe un isomorphisme linéaire* T *de* E *sur* $\Gamma(S, \mathscr{E})$ *tel que le domaine* T (D) *soit produit continu des domaines* $T(D)_s \subset \mathscr{E}_s$ *et que* T (D) *vérifie la propriété* (P).

Démonstration (d'après une conversation avec M. Henri Cartan, sur le boulevard Saint-Michel). — Soit $T = \varphi'(0)$; l'application $\psi = T \circ \varphi^{-1}$ est un isomorphisme de B sur T (D). On définit un groupe à un paramètre d'automorphismes de B par la formule : pour tout $x \in B$,

$$\sigma_\theta(x) = \varphi(e^{i\theta} \varphi^{-1}(x)).$$

Du fait que ψ^{-1} est tangent à l'application identique en 0, et des résultats de [6] (§ 3.4), on déduit que

$$\psi(x) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \sigma_\theta(x) e^{-i\theta} d\theta.$$

D'autre part, comme B vérifie (P), il existe, pour tout $s \in S$, un groupe à un paramètre $\sigma_{\theta, s}$ d'automorphismes de B_s tel que

$$[\sigma_\theta(x)](s) = \sigma_{\theta, s}(x(s)).$$

Soit $T(D)_s$ l'image de $T(D)$ dans $\mathscr{E}_s$. L'application ψ provient donc d'une famille d'applications

$$\psi_s : \quad B_s \to T(D)_s,$$

où

$$\psi_s(x) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \sigma_{\theta, s}(x) e^{-i\theta} d\theta.$$

D'après le théorème 4.2.2, B_s est un domaine borné symétrique. Des résultats de [6] (§ 3.4) on déduit que ψ_s est un isomorphisme de B_s sur $T(D)_s$. L'application ψ est donc un S-isomorphisme de B sur T(D). Le domaine T(D) est contenu dans le domaine Δ produit continu des $(T(D)_s)_{s \in S}$, et il reste seulement à montrer que $T(D) = \Delta$.

Remarquons d'abord que l'application

$$\Delta \times \Delta \to \mathbf{R},$$
$$(f, g) \mapsto d(f, g) = \sup_{s \in S} d_c^{T(D)_s}(f(s), g(s))$$

[où $d_c^{T(D)_s}$ est la métrique de Carathéodory sur $T(D)_s$] est une distance sur Δ, que cette distance définit la topologie de Δ, et qu'elle est invariante par les S-automorphismes. Du fait que T(D) contient un voisinage de 0 dans $\Gamma(S, \mathscr{E})$, on déduit l'existence d'un nombre réel $r > 0$ tel que

$$B(0, r) = \{ g \in \Delta \mid d(0, g) < r \}$$

soit contenue dans T(D). Comme T(D) est homogène sous l'action de S-automorphismes, on a : pour tout $f \in T(D)$, $B(f, r) \subset T(D)$. Ceci entraîne que $T(D) = \Delta$.

Q.E.D.

De cette proposition, on déduit le

THÉORÈME 4.3.4. — *Soit* D *un domaine borné symétrique d'un espace de Banach complexe* E, *réalisé comme un domaine borné cerclé étoilé. Pour que* D *soit réductible au sens de la définition* 4.3.2, *il faut et il suffit qu'il existe un espace de Banach* $\mathscr{E}$ *au-dessus de* S, *l'ensemble* $\{ s \in S \mid \mathscr{E}_s \neq \{0\} \}$ *ayant au moins deux éléments, et un isomorphisme linéaire* T *de* E *sur* $\Gamma(S, \mathscr{E})$ *tels que le domaine* T(D) *soit produit continu d'une famille de domaines* $T(D)_s \subset \mathscr{E}_s$, *et que* T(D) *vérifie la propriété* (P).

A l'aide de ce théorème, on montre facilement l'existence de domaines bornés symétriques irréductibles en dimension infinie. Par exemple, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 4.3.5. — *Soit* H *un espace de Hilbert, et soit* B *sa boule-unité ouverte. Alors* B *est un domaine borné symétrique irréductible.*

Démonstration. — On sait que B est un domaine borné symétrique. Soit $\mathscr{E}$ un espace de Banach au-dessus de S tel qu'il existe un isomorphisme linéaire T de H sur $\Gamma(S, \mathscr{E})$ tel que T(B) soit produit continu des domaines bornés $(T(B)_s)_{s \in S}$. Du fait que tous les points du bord de T(B) sont extrémaux, on déduit que $\{ s \in S \mid \mathscr{E}_s \neq \{0\} \}$ est réduit à un point, ce qui prouve la proposition.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Hermann, Paris.

[2] E. CARTAN, *Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes* (*Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, vol. 11, 1936, p. 116-162).

[3] H. CARTAN, *Sur les transformations analytiques des domaines cerclés et semi-cerclés bornés* (*Math. Ann.*, vol. 106, 1932, p. 540-573).

[4] H. CARTAN, *Sur les fonctions de n variables complexes : les transformations du produit topologique de deux domaines bornés* (*Bull. Soc. math. Fr.*, vol. 64, 1936, p. 37-48).

[5] L. HARRIS and W. KAUP, *Linear Algebraic Groups in Infinite Dimensions* (à paraître dans l'*Illinois J. Math.*).

[6] J.-P. VIGUÉ, *Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Application aux domaines bornés symétriques* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, vol. 9, 1976, p. 203-282).

[7] J.-P. VIGUÉ, *Les domaines bornés symétriques d'un espace de Banach complexe et les systèmes triples de Jordan* (*Math. Ann.*, vol. 229, 1977, p. 223-231).

(Manuscrit reçu le 16 novembre 1977,
révisé le 20 février 1978.)

Jean-Pierre VIGUÉ
Mathématique, Bât. 425,
Université de Paris-Sud,
Centre d'Orsay,
91405 Orsay Cedex