ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

N. DANG-NGOC
M. YOR

Champs markoviens et mesures de Gibbs sur R

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 11, nº 1 (1978), p. 29-69
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1978_4_11_1_29_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 11, 1978, p. 29 à 69.

CHAMPS MARKOVIENS ET MESURES DE GIBBS SUR **R**

PAR N. DANG-NGOC (*) ET M. YOR (**)

ABSTRACT. — We study the Gibbs probability measures attached to a Markov process, using methods of statistical mechanics. Such a study has already been undertaken, by F. Spitzer and H. Kesten, for Markov chains with discrete state space. Our purpose is to extend their results to general Markov processes.

Some theorems obtained by Ph. Courrège, P. Renouard and G. Royer, on quasi-invariant measures on C (**R**, **R**) associated to one dimensional quantum fields are also generalized. In particular, we solve some problems raised by Ph. Courrège and P. Renouard on the connection between Markov processes and Markov fields in the sense of E. Nelson.

We show the uniqueness of Gibbs measures in the compact state space case (generalizing a result of R. L. Dobrushin), the uniqueness of invariant Gibbs measures with Markov property for positive recurrent semi-groups (generalizing results of F. Spitzer, H. Kesten and G. Royer) and the absence of Gibbs states for convolution semi-groups (generalizing a result of F. Spitzer).

1. Introduction

Nous nous proposons d'étudier l'ensemble des mesures de Gibbs associées à un processus de Markov (nous prenons pour ensemble des temps $T = \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{R}$), question que nous formulons sommairement comme suit :

Soit $(E, \mathscr{E})$ un espace polonais. Pour fixer les idées, on note $(X_t, t \in T)$ le processus des coordonnées sur l'espace mesurable $\mathscr{X}_T = (E, \mathscr{E})^T$, supposé d'autre part muni d'une probabilité P. Si $\Lambda \subset T$, on note $\mathscr{A}_\Lambda$ la sous-tribu de $\mathscr{A}$ engendrée par $(X_t, t \in \Lambda)$.

Si a et b sont deux points de T, avec $a < b$, on appelle loi locale de X sous P, entre a et b, tout noyau $\Pi_{[a,b]}(\omega, d\omega')$ de $(\mathscr{X}_T, \mathscr{A}_{[a,b]}$ dans $(\mathscr{X}_T, \mathscr{A}_{\complement[a,b]})$ tel que

$$\forall f \in b(\mathscr{A}_{[a,b]}), \quad E_P[f \mid \mathscr{A}_{\complement[a,b]}] = \Pi_{[a,b]}(.\,; f), \qquad \text{P-p. s.}$$

Le *problème général* des mesures de Gibbs consiste en l'étude suivante : pour tout intervalle fini $[a, b]$ de T, on suppose donné un noyau markovien $\Pi_{[a,b]}(x, y; d\omega)$ de $(\mathscr{X}_T, \mathscr{A}_{[a,b]})$ dans $(E, \mathscr{E})^2$. Il s'agit d'étudier l'ensemble $\mathscr{G}$ (éventuellement vide!) des probabilités (dites : de Gibbs) P sur $\mathscr{X}_T$ telles que le processus $(X_t, t \in T)$ admette pour lois locales, sous P, les noyaux $\Pi_{[a,b]}(X_a(\omega), X_b(\omega); d\omega')$ pour tout $a < b$.

(*) Université de l'État à Mons (Belgique).

(**) Laboratoire de Probabilités associé au C.N.R.S., n° 224, Université Pierre-et-Marie-Curie, 75230 Paris Cedex 05.

Nous traitons dans cet article, *le problème particulier* où les noyaux $\Pi_{[a,\,b]}(x, y; d\omega)$ sont les lois locales obtenues à partir du semi-groupe d'un processus de Markov.

Voici deux cas particuliers importants de ce problème :

Cas discret : $T = \mathbf{Z}$, E est dénombrable. — C'est le problème de la mécanique statistique étudiant la distribution des particules sur un réseau à une dimension. Les probabilités $\Pi_{[a,\,b]}(x, y; d\omega)$ sont des états de Gibbs locaux (un potentiel de « plus proche voisinage » étant donné) (lorsque E est fini, *voir* [5], [27] et les références qui s'y trouvent; lorsque E est infini dénombrable, *voir* [14], [28]).

Cas continu : $T = \mathbf{R}$, $E = \mathbf{R}$. — Ph. Courrège et P. Renouard ont montré en [3] que l'étude des champs quantiques en dimension 1 se ramène à l'étude de probabilités sur $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ [elles sont en fait pseudo-portées par $C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$], quasi-invariantes sous la translation des fonctions de $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ (fonctions de classe C^∞, à support compact) avec un module de quasi-invariance donné. G. Royer [25] a démontré que l'étude de telles probabilités revient à celle des mesures de Gibbs associées à une diffusion sur $\mathbf{R}$.

Dans le paragraphe 2, nous précisons les connexions qui existent entre différentes notions de champs markoviens. Nous montrons qu'une probabilité markovienne au sens ordinaire définit un champ de Markov au sens de Nelson ce qui résoud un problème posé par Ph. Courrège et P. Renouard (*cf.* [3], p. 66).

Nous donnons également un résultat de régularité des σ-algèbres associées aux champs markoviens construits en [3]. Ce résultat est une réponse affirmative à une autre question posée par ces auteurs (*voir* toujours [3], p. 66). Enfin, nous obtenons un résultat de décomposition de certaines σ-algèbres associées à un champ markovien (*voir* [18] pour ces questions de décomposition).

Dans les paragraphes 3 et 4, nous étudions l'ensemble $\mathscr{G}$ des mesures de Gibbs associées à une famille de spécifications locales, au sens de H. Föllmer (*cf.* [8]). Nous montrons que les mesures de Gibbs restreintes aux tribus engendrées par les intervalles sont équivalentes, il résulte alors d'un théorème de Dynkin-Föllmer (*cf.* [7], [8]) et de [4] (*voir* aussi [26]) que, si $\mathscr{G}$ n'est pas vide, il contient une mesure P possédant la propriété de Markov et que toutes les autres mesures de $\mathscr{G}$ sont « localement équivalentes » à P. Nous donnons une caractérisation des mesures de Gibbs qui possèdent la propriété de Markov et une description de la structure de $\mathscr{G}$, généralisant des résultats analogues de F. Spitzer dans le cas où E est discret (*cf.* [28]).

Dans le paragraphe 5, nous étudions plus en détails les mesures de Gibbs associées à un semi-groupe récurrent au sens de Harris et donnons différents exemples d'unicité ou de transition de phases (*voir* [12] pour d'autres exemples de semi-groupes récurrents).

Dans le paragraphe 6, nous montrons qu'il n'existe pas de mesures de Gibbs associées aux spécifications d'un semi-groupe de convolution généralisant ainsi un résultat de F. Spitzer.

Nous exprimons nos remerciements à J. Neveu et A. Brunel pour leurs remarques qui nous ont permis d'améliorer certains de nos résultats.

Notations et préliminaires

Nous complétons maintenant la liste des notations déjà introduites :

(n.1) Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace mesurable. Si on se donne μ, probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$, et $\mathscr{B}$ une sous-tribu de $\mathscr{A}$, on ne travaille – sauf avis contraire – que sur la tribu complétée de $\mathscr{B}$, par les ensembles $\mathscr{A}$ négligeables de $\mathscr{B}$, tribu que l'on note encore $\mathscr{B}$ (ou éventuellement, $\mathscr{B}^{\mu}$).

Si f est une variable $\mathscr{A}$ mesurable, positive, $E_{\mu}(f/\mathscr{B})$ désigne l'espérance conditionnelle de f quand $\mathscr{B}$, par rapport à μ.

(n.2) Soit μ probabilité donnée sur $(\Omega, \mathscr{A})$. $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, sous-tribus de $\mathscr{A}$, sont dites (μ–) conditionnellement indépendantes par rapport à une troisième sous-tribu $\mathscr{D}$ de $\mathscr{A}$ si, pour toutes f positives, $\mathscr{B}$ mesurables, et g positives, $\mathscr{C}$ mesurables, on a

$$E_{\mu}[fg \mid \mathscr{D}] = E_{\mu}(f \mid \mathscr{D})\, E_{\mu}(g \mid \mathscr{D}), \qquad \mu\text{-p. s.}$$

On écrit alors :

$$\mathscr{B} \coprod_{\mathscr{D}} \mathscr{C} \quad (\mu).$$

Nous donnons maintenant deux lemmes faciles, qui sont néanmoins les clés des résultats que nous obtenons au paragraphe 2.

LEMME 1.1. – *L'égalité de deux des trois opérateurs* [*sur* $L^1(\mathscr{A}, \mu)$] $E_{\mu}^{\mathscr{B}} E_{\mu}^{\mathscr{C}}$, $E_{\mu}^{\mathscr{C}} E_{\mu}^{\mathscr{B}}$, $E_{\mu}^{\mathscr{B} \cap \mathscr{C}}$ *équivaut à l'égalité de ces trois opérateurs* ■

Le second lemme est dû à F. Knight ([15], lemma 1).

LEMME 1.2. – *Soient* $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{F}$ *quatre sous-tribus de* $\mathscr{A}$, *telles que*

$$\mathscr{B} \coprod_{\mathscr{D}} \mathscr{C} \quad (\mu).$$

(a) *Si* $\mathscr{D} \subset \mathscr{F} \subset \mathscr{D} \vee \mathscr{C}$, *on a*

$$\mathscr{B} \coprod_{\mathscr{F}} \mathscr{C} \quad (\mu).$$

(b) *Si* $\mathscr{F} \subset \mathscr{D} \vee \mathscr{C}$, *on a*

$$\mathscr{B} \coprod_{\mathscr{D}} \mathscr{F} \quad (\mu).$$

Remarquons que, de (a) et (b), on déduit immédiatement :

(c) *Si* $\mathscr{D} \subset \mathscr{F} \subset \mathscr{D} \vee \mathscr{C}$,

$$\mathscr{B} \coprod_{\mathscr{F}} (\mathscr{C} \vee \mathscr{F}) \quad (\mu).$$

Nous utilisons également le lemme 1.2, sous la forme renforcée suivante :

LEMME 1.2′. – *Soient* $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ *trois sous-tribus de* $\mathscr{A}$ *telles que*

$$\mathscr{B} \coprod_{\mathscr{D}} \mathscr{C} \quad (\mu).$$

Si $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{C}_1$ *désignent deux autres sous-tribus de* $\mathscr{A}$ *telles que*

$$\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B} \vee \mathscr{D}; \qquad \mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C} \vee \mathscr{D}; \qquad \mathscr{D} \subset \mathscr{B}_1 \vee \mathscr{C}_1,$$

alors :

$$(d) \qquad \mathscr{B} \coprod_{\mathscr{B}_1 \vee \mathscr{C}_1} \mathscr{C}(\mu).$$

Démonstration. — Appliquons tout d'abord (*a*) (lemme 1.2) avec $\mathscr{F} = \mathscr{D} \vee \mathscr{C}_1$. On en déduit :

$$\mathscr{B} \coprod_{\mathscr{D} \vee \mathscr{C}_1} \mathscr{C} \quad (\mu).$$

De (*c*), utilisée avec $\mathscr{F} = \mathscr{D} \vee \mathscr{C}_1$, il découle

$$\mathscr{B} \vee \mathscr{C}_1 \coprod_{\mathscr{D} \vee \mathscr{C}_1} \mathscr{C} \quad (\mu).$$

En appliquant de nouveau (*a*) ($\mathscr{B} \vee \mathscr{C}_1$ joue maintenant le rôle de $\mathscr{C}$ dans le lemme 1.2), on a

$$\mathscr{B} \vee \mathscr{C}_1 \coprod_{\mathscr{D} \vee \mathscr{B}_1 \vee \mathscr{C}_1} \mathscr{C} \quad (\mu).$$

Le lemme est démontré, car $\mathscr{B}_1 \vee \mathscr{C}_1 = \mathscr{D} \vee \mathscr{B}_1 \vee \mathscr{C}_1$. ■

(*n*.3) L'ensemble des paramètres T pourra, mais peu fréquemment dans notre article, désigner un espace topologique général. On indiquera toujours très clairement lorsque l'on se place dans une telle situation générale.

Soit T un espace topologique, et Λ une partie de T. Si $(X_t, t \in T)$ est un processus défini sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, et à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathscr{E})$, $\mathscr{A}_\Lambda$ désigne la tribu engendrée par les variables $(X_t, t \in \Lambda)$, et $(\mathscr{A}, \mu)$ complétée (sauf avis contraire). μ_Λ est la restriction à $\mathscr{A}_\Lambda$ de la probabilité μ (définie sur $\mathscr{A}$). Soulignons que μ_Λ est une probabilité sur $(E, \mathscr{E})^T$. r_Λ est l'application de « restriction à $(X_t, t \in \Lambda)$ » c'est-à-dire précisément :

$$\begin{aligned} r_\Lambda : \quad & (\Omega, \mathscr{A}) \to (E, \mathscr{E}), \\ & \omega \quad \to X|_\Lambda(\omega) \end{aligned}$$

$r_\Lambda(\mu)$ est donc une probabilité sur $(E, \mathscr{E})^\Lambda$. Cependant, on note quelquefois, lorsqu'il n'y a pas de danger de confusion, μ_Λ à la place de $r_\Lambda(\mu)$ (et inversement).

(*n*.4) Supposons $T = \mathbf{R}$, et notons $\Delta = \{ (s, t) \in \mathbf{R}^2 / s < t \}$.

Si ν est une mesure positive σ-finie sur $(E, \mathscr{E})$, nous appelons semi-groupe de densités par rapport à ν toute application $p : \Delta \times E \times E \to \mathbf{R}_+$ qui soit $\mathscr{B}(\Delta) \otimes \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ mesurable,

$$((s, t), x, y) \to p_{s,t}(x, y)$$

et telle que $P_{s,t}(x, dy) = p_{s,t}(x, y)\, d\nu(y)$ soit un semi-groupe markovien non homogène sur $(E, \mathscr{E})$, c'est-à-dire que p vérifie :

$$\forall (s, t) \in \Delta, \quad \forall x \in E, \qquad \int p_{s,t}(x, y)\, d\nu(y) = 1,$$

$$\forall s < t < u, \quad (s, t, u) \in \mathbf{R}^3, \qquad \forall (x, z) \in E^2,$$

$$p_{s,u}(x, z) = \int p_{s,t}(x, y)\, p_{t,u}(y, z)\, d\nu(y).$$

2. Propriété de Markov et champs markoviens

Contrairement au titre de notre article, nous nous intéressons dans ce paragraphe à différentes notions de champs markoviens, lorsque l'ensemble des paramètres est un espace topologique général T. Lorsque $T = \mathbf{R}$, on compare ces notions avec celle de processus de Markov.

$\mathscr{V}$ désigne une sous-classe de $\mathscr{P}(T)$ (ensemble des parties de T), héréditaire pour l'inclusion, c'est-à-dire : si $A \subset B$, $B \in \mathscr{V}$, alors $A \in \mathscr{V}$. Si $T = \mathbf{R}$, $\mathscr{V}$ est la classe des sous-ensembles bornés de **R**.

On suppose donné sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un processus $(X_t,\ t \in T)$, à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathscr{E})$.

2.1. Champ (localement) markovien strict.

Définition 2.1. — *On dit que* μ *définit un champ markovien strict, respectivement : un champ* $\mathscr{V}$*-localement markovien strict* (sous-entendu : *relativement à* X), *si tout ouvert* U (*resp. : tout ouvert* $U \in \mathscr{U} \cap \mathscr{V}$) *vérifie la propriété de Markov :*

$$(M_U) \qquad \mathscr{A}_U \coprod_{\mathscr{A}_{\partial U}} \mathscr{A}_{\complement U} \quad (\mu).$$

On peut clairement remplacer $\mathscr{A}_U$ par $\mathscr{A}_{\bar{U}}$ dans l'écriture de (M_U); de plus, grâce au lemme 1.2, on a en fait la :

Proposition 2.2. — μ *définit un champ* ($\mathscr{V}$*-localement*) *markovien strict si, et seulement si, pour tout* $A \in \mathscr{P}(T)$ (*resp. : pour tout* $A \in \mathscr{V}$), *on a*

$$(M_A) \qquad \mathscr{A}_A \coprod_{\mathscr{A}_{\partial A}} \mathscr{A}_{\complement A} \quad (\mu).$$

Remarque. — Les inclusions $\bar{A} \setminus A \subseteq \partial A$, et $\overline{\complement A} \setminus \complement A \subset \partial A$ entraînent l'équivalence de (M_A) et

$$(\overline{M}_A) \qquad \mathscr{A}_{\bar{A}} \coprod_{\mathscr{A}_{\partial A}} \mathscr{A}_{\overline{\complement A}} \quad (\mu).$$

Démonstration. — Supposons que μ définisse un champ ($\mathscr{V}$-localement) markovien strict, et que A soit un sous-ensemble de T (resp. : appartienne à $\mathscr{V}$). Remarquons que, dans le second cas, $\mathscr{V}$ étant héréditaire, $\mathring{A} \in \mathscr{V}$. De plus, dans les deux cas, on a la propriété de Markov :

$$(\mathrm{M}_{\mathring{A}}) \qquad \mathscr{A}_{\mathring{A}} \coprod_{\mathscr{A}_{\partial(\mathring{A})}} \mathscr{A}_{\overline{\complement A}} \quad (\mu).$$

Or, $\partial(\mathring{A}) \subset \partial A \subset \complement \mathring{A}$ et on a les mêmes inclusions pour les tribus engendrées par ces ensembles. D'après le lemme 1.2, (a), on a donc :

$$\mathscr{A}_{\mathring{A}} \coprod_{\mathscr{A}_{\partial A}} \mathscr{A}_{\overline{\complement A}} \quad (\mu).$$

Comme $\mathscr{A}_{\overline{\mathring{A}}} = \mathscr{A}_{\mathring{A}} \vee \mathscr{A}_{\partial A}$, on en déduit $(\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{A}})$ et donc $(\mathrm{M}_{\mathrm{A}})$.

Nous donnons maintenant une proposition qui nous aidera à résoudre la question naturelle suivante : existe-t-il une sous-classe « minimale » $\mathscr{O}'$ de l'ensemble des ouverts de T telle que si tout ouvert $\mathrm{U} \in \mathscr{O}'$ vérifie, relativement à μ, la propriété $(\mathrm{M}_{\mathrm{U}})$, μ définisse alors un champ markovien au sens strict?

PROPOSITION 2.3. — *Soit* $\mathrm{U} = \sum_{i \in \mathrm{I}} u_i$ *l'union disjointe d'ouverts* $(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *de T, tels que, pour tout* $i \in \mathrm{I}$, u_i *possède la propriété de Markov* (M_{u_i}).

Alors, U *possède la propriété de Markov* $(\mathrm{M}_{\mathrm{U}})$, *et les tribus* $(\mathscr{A}_{u_i}, i \in \mathrm{I})$ *sont* μ-*conditionnellement indépendantes par rapport à* $\mathscr{A}_{\complement \mathrm{U}}$, *et* $\mathscr{A}_{\partial \mathrm{U}}$.

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que, pour tout $i \in \mathrm{I}$, et $j \in \mathrm{I}$, $j \neq i$, on a $u_i \subset \complement u_j$, d'où $\bar{u}_i \subset \complement u_j$ et $\partial u_i \subset \complement u_j$.

En faisant varier j dans I, on a donc :

$$\partial u_i \subset \bigcap_j \complement u_j = \complement \mathrm{U}.$$

Comme d'autre part, $\partial u_i \subset \overline{\mathrm{U}}$, on a $\partial u_i \subset \partial \mathrm{U}$.

Pour montrer que U possède la propriété de Markov $(\mathrm{M}_{\mathrm{U}})$, il suffit que, pour tout sous-ensemble fini $(i_1, \ldots, i_k)$ d'indices de I et toute fonction $f_m \in b\,(\mathscr{A}_{u_{i_m}})$ $(1 \leqq m \leqq k)$, on ait :

$$(\alpha) \qquad \mathrm{E}_\mu\left[\prod_{m=1}^{k} f_m \,\middle|\, \mathscr{A}_{\complement \mathrm{U}}\right] = \mathrm{E}_\mu\left[\prod_{m=1}^{k} f_m \,\middle|\, \mathscr{A}_{\partial \mathrm{U}}\right].$$

Or, d'après la propriété de Markov $(\mathrm{M}_{u_{i_k}})$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_\mu\left[\prod_{m=1}^{k} f_m \,\middle|\, \mathscr{A}_{\complement \mathrm{U}}\right] &= \mathrm{E}_\mu\left[\prod_{m=1}^{k-1} f_m \,\mathrm{E}_\mu(f_k \mid \mathscr{A}_{\complement u_{i_k}}) \mid \mathscr{A}_{\complement \mathrm{U}}\right] \\
&= \mathrm{E}_\mu\left[\prod_{m=1}^{k-1} f_m \,\mathrm{E}_\mu(f_k \mid \mathscr{A}_{\partial u_{i_k}}) \mid \mathscr{A}_{\complement \mathrm{U}}\right] \\
&= \mathrm{E}_\mu\,[f_k \mid \mathscr{A}_{\partial u_{i_k}}]\,\mathrm{E}_\mu\left[\prod_{m=1}^{k-1} f_m \,\middle|\, \mathscr{A}_{\complement \mathrm{U}}\right].
\end{aligned}$$

Par itération, on obtient :

$$(\beta)\qquad E_\mu\left[\prod_{m=1}^{k} f_m \,\middle|\, \mathscr{A}_{\complement U}\right] = \prod_{m=1}^{k} E_\mu(f_m \mid \mathscr{A}_{\partial u_{i_m}}).$$

Le membre de droite de (β) étant $\mathscr{A}_{\partial U}$ mesurable, on en déduit (α), et donc (M_U). D'autre part, d'après (β), appliquée lorsque $f_n = 1$, pour $n \neq m$, on a

$$E_\mu[f_m \mid \mathscr{A}_{\complement U}] = E_\mu[f_m \mid \mathscr{A}_{\partial u_{i_m}}] = E_\mu[f_m \mid \mathscr{A}_{\partial U}].$$

En revenant à (β), on peut donc écrire :

$$(\beta')\qquad E_\mu\left[\prod_{m=1}^{k} f_m \,\middle|\, \mathscr{A}_{\complement U}\right] = \prod_{m=1}^{k} E_\mu[f_m \mid \mathscr{A}_{\complement U}]$$

et même :

$$E_\mu\left[\prod_{m=1}^{k} f_m \,\middle|\, \mathscr{A}_{\complement U}\right] = \prod_{m=1}^{k} E_\mu[f_m \mid \mathscr{A}_{\partial U}].$$

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathscr{A}_{\partial U}$ des deux membres de cette dernière égalité, il vient :

$$(\beta'')\qquad E_\mu\left[\prod_{m=1}^{k} f_m \,\middle|\, \mathscr{A}_{\partial U}\right] = \prod_{m=1}^{k} E_\mu[f_m \mid \mathscr{A}_{\partial U}].$$

Les égalités (β') et (β'') expriment l'indépendance conditionnelle des tribus $(\mathscr{A}_{u_i}, i \in I)$ par rapport à $\mathscr{A}_{\complement U}$ d'une part, et $\mathscr{A}_{\partial U}$ d'autre part. ■

Répondons maintenant à la question qui précède la proposition 2.3.

COROLLAIRE 2.4. — *Supposons* T *localement connexe. Alors,* μ *définit un champ* ($\mathscr{V}$-*localement*) *markovien strict si, et seulement si, tout ouvert connexe* U (*resp. : tout ouvert connexe* $U \in \mathscr{V}$) *vérifie la propriété de Markov* (M_U).

Démonstration. — Tout ouvert est réunion disjointe de ses composantes connexes, qui sont ouvertes. ■

Dans le cas particulièrement intéressant où $T = \mathbf{R}$ (rappelons qu'alors, on prend pour $\mathscr{V}$ la classe des sous-ensembles bornés de **R**), on en déduit le :

THÉORÈME 2.5. — *Si* $T = \mathbf{R}$, μ *définit un champ* ($\mathscr{V}$-*localement*) *markovien strict si, et seulement si :*

μ *est une loi markovienne, i. e. :* $\forall t \in \mathbf{R}$, $(M_{]-\infty, t]})$ *est vérifiée* [*resp. :* $\forall a < b$, $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $(M_{[a, b]})$ *est vérifiée*].

Démonstration. — Pour le cas « $\mathscr{V}$-localement markovien strict », le résultat découle du corollaire 2.4, et de ce que les seuls ouverts connexes bornés de **R** sont les intervalles $]a, b[$, $a < b$, $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

De plus, les propriétés $(M_{]a, b[})$ et $(M_{[a, b]})$ sont équivalentes.

De même, d'après le corollaire 2.4, μ définit un champ markovien strict si, et seulement si, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $a < b$, les propriétés $(M_{]-\infty, a]})$, $(M_{[b, +\infty[})$ et $(M_{[a, b]})$ sont vérifiées. Or, $(M_{[b, \infty[})$ équivaut à $(M_{]-\infty, b]})$; $(M_{[a, b]})$ équivaut à $(M_{\complement[a, b]})$, et comme $\complement\,[a, b] =]-\infty, a[\cup]b, \infty[$, la propriété $(M_{[a, b]})$ est vérifiée dès que $M_{]-\infty, a]}$ et $(M_{[b, \infty[})$ et sont, d'après la proposition 2.3. Finalement, μ définit un champ markovien strict si, et seulement si, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $(M_{]-\infty, t]})$ est vérifiée, c'est-à-dire que le processus $(X_t, t \in \mathbf{R})$ est markovien, pour la loi μ.

2.2. Champ (localement) markovien au sens large. — Pour tout $A \in \mathscr{P}(T)$, on note $\mathscr{A}_A^+ = \bigcap_{\substack{U \text{ ouvert} \\ U \supset A}} \mathscr{A}_U$.

La proposition suivante est à la base des résultats de ce sous-paragraphe. Soulignons que cette proposition est une variation (minime) sur le théorème 1.2 de l'article [17] de V. Mandrekar.

Proposition 2.6. — *Soit* $A \in \mathscr{P}(T)$. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathscr{A}_A \coprod_{\mathscr{A}_{\partial A}^+} \mathscr{A}_{\complement A}$ (μ);

(ii) *pour tout ouvert* $0 \supset \partial A$, $\mathscr{A}_A \coprod_{\mathscr{A}_0} \mathscr{A}_{\complement A}$ (μ);

(iii) (M_A^+) : $\mathscr{A}_{\bar{A}}^+ \coprod_{\mathscr{A}_{\partial\mathscr{A}}^+} \mathscr{A}_{\overline{\complement A}}^+$ (μ).

De plus, la propriété (M_A) *entraîne* (M_A^+).

Démonstration. — L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) est immédiate. (i) $\Rightarrow$ (ii) est une application du lemme 1.2' : en effet, si 0 est un ouvert contenant ∂A, on a :

— $\mathscr{A}_{\partial A}^+ \subset \mathscr{A}_0$;

— $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}_{0 \cap A} \vee \mathscr{A}_{0 \cap \complement A}$.

On applique alors le lemme 1.2', avec $\mathscr{B}_1 = \mathscr{A}_{0 \cap A} \subset \mathscr{A}_A$, et $\mathscr{C}_1 = \mathscr{A}_{0 \cap \complement A} \subset \mathscr{A}_{\complement A}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Si 0 est un ouvert contenant ∂A, on déduit de (ii) :

$$\mathscr{A}_A \coprod_{\mathscr{A}_0} \mathscr{A}_{\complement A} \vee \mathscr{A}_0 \quad (\mu).$$

Or, $\mathscr{A}_{\complement A} \vee \mathscr{A}_0 = \mathscr{A}_{(\complement A) \cup 0}$, et $(\complement A) \cup 0 = \widehat{\complement \overset{\circ}{A}} \cup 0$ est un ouvert contenant $\overline{\complement A}$. Donc : $\mathscr{A}_{\overline{\complement A}}^+ \subseteq \mathscr{A}_{\complement A} \vee \mathscr{A}_0$, et on a

$$\mathscr{A}_A \coprod_{\mathscr{A}_0} \mathscr{A}_{\overline{\complement A}}^+ \quad (\mu).$$

Par symétrie, on a également :

$$\mathscr{A}_{\bar{A}}^+ \coprod_{\mathscr{A}_0} \mathscr{A}_{\overline{\complement A}}^+ \quad (\mu).$$

En appliquant le théorème de convergence des martingales filtrantes décroissantes à $E[f/\mathscr{A}_0]$, $0 \supset \partial A$, 0 ouvert, et $f \in b(\mathscr{A})$, on en déduit finalement :

$$\mathscr{A}_{\bar{A}}^+ \coprod_{\mathscr{A}_{\partial A}^+} \mathscr{A}_{\overline{\complement A}}^+ \quad (\mu),$$

c'est-à-dire (iii).

Supposons maintenant la propriété (M_A) vérifiée. Soit 0 un ouvert contenant ∂A. On a :

– $\mathscr{A}_{\partial A} \subset \mathscr{A}_0$;

– $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}_{0 \cap A} \vee \mathscr{A}_{0 \cap \complement A}$.

En appliquant à nouveau le lemme 1.2', on déduit de (M_A) :

$$\mathscr{A}_A \coprod_{\mathscr{A}_0} \mathscr{A}_{\complement A} \quad (\mu),$$

c'est-à-dire (ii), qui, d'après la première partie de la proposition équivaut à (iii), c'est-à-dire à (M_A^+).

De la propriété (M_A^+), découle la décomposition suivante de la tribu $(\mathscr{A}_{\bar{A}}^+)^\mu$:

PROPOSITION 2.7. – *Si la propriété* (M_A^+) *est vérifiée, on a la décomposition*

$$\text{(D)} \qquad (\mathscr{A}_{\bar{A}}^+)^\mu = \mathscr{A}_{\mathring{A}}^\mu \vee (\mathscr{A}_{\partial A}^+)^\mu.$$

Démonstration. – Puisque $\mathscr{A}_A \vee \mathscr{A}_{\partial A} \subseteq \mathscr{A}_{\bar{A}}^+$, il suffit de montrer que

$$\forall f \in b(\mathscr{A}_T), \quad E[f \mid \mathscr{A}_{\bar{A}}^+] \in \mathscr{A}_{\mathring{A}} \vee \mathscr{A}_{\partial A}^+ \vee \mathscr{N}^\mu,$$

où $\mathscr{N}^\mu$ désigne la classe des ensembles $(\mathscr{A}, \mu)$ négligeables. Par un argument de classe monotone, on peut supposer

$$f = gh, \qquad g \in b(\mathscr{A}_{\mathring{A}}), \quad h \in b(\mathscr{A}_{\overline{\complement A}}).$$

Alors :

$$E[gh \mid \mathscr{A}_{\bar{A}}^+] = g\, E[h \mid \mathscr{A}_{\partial A}^+], \qquad \mu\text{-p. s.}$$

d'après (M_A^+), d'où le résultat. ■

Remarque. – Soulignons que la décomposition (D) de la tribu $(\mathscr{A}_{\bar{A}}^+)^\mu$ est loin d'être vraie en général (c'est-à-dire : pour une probabilité μ telle que (M_A^+) ne soit pas vérifiée). Dans l'article [18] (§ 2), figure d'ailleurs un exemple où cette décomposition n'est pas vérifiée, avec $T = \mathbf{R}_+$, et $A = [0, 1]$.

On pourra consulter l'article [18] pour diverses questions liées à de telles décompositions de tribus lorsque $T = \mathbf{R}_+$.

On peut maintenant poser la :

DÉFINITION 2.8. – μ *définit un champ markovien au sens large* (*sous-entendu : relativement à* X) *si tout ouvert* U *vérifie la propriété de Markov :*

$$\mathscr{A}_U \coprod_{\mathscr{A}_{\partial U}^+} \mathscr{A}_{\complement U} \quad (\mu).$$

Remarquons immédiatement que :

– cette propriété de Markov équivaut, d'après la proposition 2.6, à (M_U^+); c'est ce résultat qui fait l'objet du théorème 1.2 de [17];

— la notion de champ $\mathscr{V}$-localement markovien au sens large peut évidemment être définie de façon analogue; nous ne le faisons pas pour ne pas alourdir l'exposé, et nous laissons au lecteur la vérification de la version « $\mathscr{V}$-locale » des résultats qui suivent;

— Si T est localement connexe, μ définit un champ markovien au sens large si, et seulement si, tout ouvert connexe U vérifie la propriété (M_U^+) : ceci découle de la proposition 2.3, qui reste vraie lorsque l'on remplace la tribu $\mathscr{A}_{\complement U}$ (resp. : $\mathscr{A}_{\partial U}$) par $\mathscr{A}^+_{\complement U}$ (resp. : $\mathscr{A}^+_{\partial U}$).

En particulier, si $T = \mathbf{R}$, μ définit un champ markovien au sens large si, et seulement si $\forall\, t \in \mathbf{R}$, $(M^+_{]-\infty, t]})$ est vérifiée.

Examinons maintenant la propriété (M_A^+), pour $A \in \mathscr{P}(T)$, lorsque μ définit un champ markovien au sens large :

PROPOSITION 2.9. — *Si* μ *définit un champ markovien au sens large, pour tout* $A \in \mathscr{P}(T)$, *les propriétés* (M_A^+) *et* (D) : $(\mathscr{A}^+_{\bar{A}})^\mu = \mathscr{A}^\mu_{\mathring{A}} \vee (\mathscr{A}^+_{\partial A})^\mu$ *sont vérifiées.*

Démonstration. — D'après la proposition 2.6, et la définition 2.8, on a, pour tout U ouvert :

$$\mathscr{A}_U \coprod_{\mathscr{A}^+_{\partial U}} \mathscr{A}^+_{\complement U} \quad (\mu).$$

En particulier, pour $U = \mathring{A}$, on a

$$\mathscr{A}_{\mathring{A}} \coprod_{\mathscr{A}^+_{\partial(\mathring{A})}} \mathscr{A}^+_{\complement \mathring{A}} \quad (\mu).$$

Or, $\partial\mathring{A} \subseteq \partial A \subseteq \overline{\complement A}$, et on a les mêmes inclusions entre les tribus $\mathscr{A}^+$ correspondant à ces ensembles. D'après le lemme (1.2), (*a*), on a donc :

$$\mathscr{A}_{\mathring{A}} \coprod_{\mathscr{A}^+_{\partial A}} \mathscr{A}^+_{\complement \mathring{A}} \quad (\mu).$$

(on peut d'ailleurs remplacer ici $\mathscr{A}_{\mathring{A}}$ par $\mathscr{A}_{\bar{A}}$). On en déduit *a fortiori :*

$$\mathscr{A}_{\mathring{A}} \coprod_{\mathscr{A}^+_{\partial A}} \mathscr{A}_{\complement A} \quad (\mu),$$

ce qui, d'après la proposition 2.6, équivaut à (M_A^+). Enfin, d'après la proposition 2.7, (D) est une conséquence de (M_A^+).

2.3. CHAMPS MARKOVIENS STRICT ET AU SENS LARGE. — Il est naturel de comparer les deux notions de champ markovien que l'on vient de définir, ce qui découle immédiatement de la seconde partie de la proposition 2.6.

PROPOSITION 2.10. — *Tout champ markovien strict est un champ markovien au sens large.*

Rappelons que, inversement, il est connu qu'un champ markovien au sens large sur $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{R}_+$) ne provient pas nécessairement d'une probabilité markovienne. Un exemple de cette situation est donné en [3], dans la remarque de la page 208. En [15] F. Knight donne également pour exemple général celui d'un processus ($X(t)$, $t \in \mathbf{R}_+$) non markovien, mais dont le processus des dérivées d'ordre $j \leqq k$ (en moyenne quadratique), noté vectoriellement ($X(t)$, $X^{(1)}(t)$, ..., $X^{(k)}(t)$) est markovien au sens ordinaire.

Pour terminer ce sous-paragraphe, nous examinons dans quelle mesure nous pouvons répondre à certaines questions posées par Ph. Courrège et P. Renouard en [3].

(*a*) En [3], les auteurs considèrent certaines lois de diffusion [sur $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, ou plus exactement sur $C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$] et posent la question (p. 68) de savoir si ces lois définissent un champ markovien au sens large.

Le théorème 2.5 et la proposition 2.10 nous permettent de répondre par l'affirmative.

(*b*) En [3], les auteurs ont établi que la loi de diffusion μ qu'ils construisent vérifie la propriété

$$\mathscr{A}^+_{]-\infty, a]} = \mathscr{A}_{]-\infty, a]},$$

pour tout a réel, et posent la question de savoir si $\mathscr{A}^+_F = \mathscr{A}_F$ pour tout fermé F de **R** (*voir* [3], p. 66).

Nous traitons tout d'abord ce problème pour T espace topologique général, puis nous donnerons une condition suffisante pour obtenir une réponse affirmative pour une large classe de lois markoviennes sur **R**, classe qui englobe les lois considérées en [3].

Nous commençons par le :

LEMME 2.11. — *Soit* F *un fermé de* T, *et* $\mathscr{B}$ *une sous-tribu de* $\mathscr{A}$, *contenant* $\mathscr{A}_F$ (*resp. :* $\mathscr{A}^+_F$) :

Si

$$\mathscr{B} \coprod_{\mathscr{A}_{\partial F}} \mathscr{A}_{\complement F} \quad (\mu) \qquad \left[resp.: \quad \mathscr{B} \coprod_{\mathscr{A}^+_{\partial F}} \mathscr{A}_{\complement F} \quad (\mu)\right],$$

alors :

$$\mathscr{B} = \mathscr{A}_F \qquad \left[resp.: \quad \mathscr{B} = \mathscr{A}^+_F = \mathscr{A}_{\mathring{F}} \vee \mathscr{A}^+_{\partial F}\right].$$

Démonstration. — Comme pour la proposition 2.7, il suffit de montrer que $E[f/\mathscr{B}] \in \mathscr{A}_F$ (resp. : $\mathscr{A}^+_F$) pour $f = gh$, $g \in b(\mathscr{A}_F)$, $h \in b(\mathscr{A}_{\complement F})$.

Or,

$$E[gh/\mathscr{B}] = g\,E[h/\mathscr{A}_{\partial F}] \quad \text{dans le premier cas,}$$
$$= g\,E[h/\mathscr{A}^+_{\partial F}] \quad \text{dans le second cas,}$$

d'où le résultat. ■

On en déduit la :

PROPOSITION 2.12. — *Soit* T *un espace localement connexe, et* μ *une probabilité qui définit un champ markovien strict.*

Pour que tout fermé F *de* T *vérifie :* $\mathscr{A}^+_F = \mathscr{A}_F$, *il suffit (et il est évidemment nécessaire) que* $\mathscr{A}^+_f = \mathscr{A}_f$ *pour tout fermé* $f = \complement u$, *où* u *est un ouvert connexe de* T.

Démonstration. — Supposons la condition vérifiée. Soit U un ouvert de T, qui est la réunion disjointe de ses composantes connexes $(u_i)_{i \in I}$.

Par hypothèse, on a

$$\forall\, i \in \mathrm{I}, \quad \mathscr{A}_{u_i} \coprod_{\mathscr{A}^+_{\partial u_i}} \mathscr{A}^+_{\complement u_i} \quad (\mu).$$

Or, la proposition 2.3 reste valable si l'on remplace les tribus $\mathscr{A}_{\complement \mathrm{U}}$ et $\mathscr{A}_{\complement u_i}$, par $\mathscr{A}^+_{\complement \mathrm{U}}$ et $\mathscr{A}^+_{\complement u_i}$.

On a donc :

$$\mathscr{A}_{\mathrm{U}} \coprod_{\mathscr{A}_{\partial \mathrm{U}}} \mathscr{A}^+_{\complement \mathrm{U}} \quad (\mu).$$

D'après le lemme 2.11, appliqué à $\mathscr{B} = \mathscr{A}^+_{\complement \mathrm{U}}$, on a donc :

$$\mathscr{A}^+_{\complement \mathrm{U}} = \mathscr{A}_{\complement \mathrm{U}}. \quad \blacksquare$$

Nous répondons maintenant précisément à la seconde question posée par Courrège et Renouard : soit $(\mathrm{X}_t,\ t \in \mathbf{R})$ un processus à valeurs dans $(\mathrm{E}, \mathscr{E})$, défini sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, et qui soit markovien pour la loi μ.

Supposons qu'il existe une mesure σ-finie positive ν sur $(\mathrm{E}, \mathscr{E})$, et p un semi-groupe de densités par rapport à ν [*cf.* 1 (n.4)] tels que $\mathrm{P}_{s,\,t}(x, dy) = p_{s,\,t}(x, y)\, \nu(dy)$ soit un semi-groupe de transition pour μ, c'est-à-dire :

$$\forall\, s < t, \quad \forall\, f \in b(\mathscr{E}), \qquad \mathrm{E}_\mu\left[f(\mathrm{X}_t) \,\middle|\, \mathscr{A}_{]-\infty,\, s]}\right] = \int p_{s,t}(\mathrm{X}_s, y) f(y)\, \nu(dy).$$

En particulier, on a, pour tous $s < t$, et $f \in b_+(\mathscr{E})$:

$$\mu_{\{t\}}(f) = \int \mu_{\{s\}}(dx)\, p_{s,t}(x, y) f(y)\, \nu(dy).$$

D'après les hypothèses de mesurabilité faites sur p [en (n.4)], l'application $t \to \mu_{\{t\}}(f)$ est donc borélienne. Il existe alors — d'après un lemme classique de Doob — une application $\mathscr{B}(\mathbf{R}) \otimes \mathscr{E}$ mesurable $\rho : (t, y) \to \rho_t(y)$ telle que, pour tout t, ρ_t soit une densité de $\mu_{\{t\}}$ par rapport à ν.

On suppose, pour le théorème suivant, que E est un espace l. c. d., muni de sa tribu borélienne $\mathscr{E}$, que $\Omega = \mathrm{C}(\mathbf{R}, \mathrm{E})$ est l'espace des fonctions continues $\omega : \mathbf{R} \to \mathrm{E}$, X le processus des projections défini par : $\mathrm{X}_t(\omega) = \omega(t)$, et $\mathscr{A} = \mathscr{A}_{\mathbf{R}}$.

THÉORÈME 2.13. — *Soient :*

— ν *une mesure de Radon positive sur* E;

— μ *une probabilité markovienne sur* $\Omega = \mathrm{C}(\mathbf{R}, \mathrm{E})$, *admettant un semi-groupe* p *de densités par rapport à* ν.

Sous les hypothèses suivantes :

(j) *l'application* $p : \Delta \times E \times E \to \mathbf{R}_+^*$ *est continue*

$$((s, t), x, y) \to p_{s,t}(x, y);$$

(jj) *il existe une version de* ρ : $(t, y) \to \rho_t(y)$ *qui est continue et strictement positive, on a, pour tout fermé* F *de* $\mathbf{R}$, *l'égalité*

$$(\mathscr{A}_F^+)^\mu = \mathscr{A}_F^\mu.$$

Démonstration. — D'après la proposition 2.12, il s'agit de montrer que $\mathscr{A}_F^+ = \mathscr{A}_F$, pour les trois types suivants de fermés :

(α) $$F =]-\infty, a];$$

(β) $$F = [b, \infty[;$$

(γ) $$F =]-\infty, a] \cup [b, \infty[$$

(où $a < b$).

D'après le lemme 2.11, il suffit donc de montrer que, pour un tel fermé F, on a

$$\mathscr{A}_F^+ \coprod_{\mathscr{A}_{\partial F}} \mathscr{A}_{\complement F} \quad (\mu)$$

ou encore, que, pour une famille Φ, stable par produit, de fonctions φ bornées, $\mathscr{A}_{\complement F}$ mesurables, on a

$$E_\mu[\varphi \mid \mathscr{A}_F^+] = E_\mu[\varphi \mid \mathscr{A}_{\partial F}].$$

Traitons chacun des cas :

(α) $F =]-\infty, a]$.

Soient $a < t_1 < t_2 < \ldots < t_p < \infty$, (a_n) une suite de réels, inférieurs à t_1, et décroissant vers a, et $f_i \in b(\mathscr{E})$ $(1 \leqq i \leqq p)$. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{(n \to \infty)} E_\mu\left[\prod_{i=1}^p f_i(X_{t_i}) \,\middle|\, \mathscr{A}_{]-\infty, a_n]}\right] \in \mathscr{A}_{\{a\}}.$$

Or,

$$E_\mu\left[\prod_{i=1}^p f_i(X_{t_i}) \,\middle|\, \mathscr{A}_{]-\infty, a_n]}\right] = \int d\nu(y_1)\, p_{a_n, t_1}(X_{a_n}(\omega), y_1)\, f_1(y_1)\, \psi(y_1; f_2, \ldots, f_p),$$

où ψ est une fonction bornée, $\mathscr{E}$ mesurable en y_1.

On déduit le résultat cherché de l'hypothèse (j).

(β) $F = [b, +\infty[$.

Soient $-\infty < t_1 < t_2 < \ldots < t_p < b$, (b_n) une suite de réels, supérieurs à t_p, croissant vers b, et $f_i \in b(\mathscr{E})$ $(1 \leqq i \leqq p)$. On suppose que chaque fonction f_i est nulle hors d'un compact. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}_\mu\left[\prod_{i=1}^{p} f_i(\mathrm{X}_{t_i}) \,\middle|\, \mathscr{A}_{[b_n, +\infty[}\right] \in \mathscr{A}_{\{b\}}.$$

Or,

$$\mathrm{E}_\mu\left[\prod_{i=1}^{p} f_i(\mathrm{X}_{t_i}) \,\middle|\, \mathscr{A}_{[b_n, \infty[}\right] = \mathrm{E}_\mu\left[\prod_{i=1}^{p} f_i(\mathrm{X}_{t_i}) \,\middle|\, \mathscr{A}_{\{b_n\}}\right]$$
$$= \int \bigotimes_{i=1}^{p} d\nu(y_i) \prod_{i=1}^{p} f_i(y_i) \frac{\rho_{t_1}(y_1)\, p_{t_1,t_2}(y_1, y_2) \ldots p_{t_p, b_n}(y_p, \mathrm{X}_{b_n})}{\rho_{b_n}(\mathrm{X}_{b_n})}.$$

On déduit le résultat cherché des hypothèses (j) et (jj).

(γ) $\mathrm{F} =]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$.

Soient $a < t_1 < t_2 < \ldots < t_p < b$, (a_n) une suite de réels, inférieurs à t_1, et décroissant vers a, (b_n) une suite de réels supérieurs à t_p, et croissant vers b, et $f_i \in b(\mathscr{E})$ $(1 \leqq i \leqq p)$, fonctions qui sont toutes nulles hors d'un compact.

Il s'agit de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}_\mu\left[\prod_{i=1}^{p} f_i(\mathrm{X}_{t_i}) \,\middle|\, \mathscr{A}_{]-\infty, a_n]\cup[b_n, +\infty[}\right] \in \mathscr{A}_{\{a, b\}}.$$

Or,

$$\mathrm{E}_\mu\left[\prod_{i=1}^{p} f_i(\mathrm{X}_{t_i}) \,\middle|\, \mathscr{A}_{]-\infty, a_n]\cup[b_n, +\infty[}\right]$$
$$= \int \bigotimes_{i=1}^{p} d\nu(y_i) \prod_{i=1}^{p} f_i(y_i) \frac{p_{a_n, t_1}(\mathrm{X}_{a_n}, y_1)\, p_{t_1,t_2}(y_1, y_2) \ldots p_{t_p, b_n}(y_p, \mathrm{X}_{b_n})}{p_{a_n, b_n}(\mathrm{X}_{a_n}, \mathrm{X}_{b_n})}.$$

L'hypothèse (j) entraîne alors le résultat cherché. ■

3. Spécifications locales et mesures de Gibbs associées

Dans ce paragraphe, et dans les suivants, on prend toujours $\mathrm{T} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{Z}$. Pour simplifier l'exposé, l'espace mesurable $(\Omega, \mathscr{A})$ est ici $\mathscr{X}_\mathrm{T} = (\mathrm{E}, \mathscr{E})^\mathrm{T}$ et on reprend les notations de l'introduction.

Nous adoptons la définition — légèrement modifiée — des spécifications locales due à R. Dobrushin [5], et reprise également par H. Föllmer [8].

Le résultat essentiel de ce paragraphe est que, sous notre hypothèse (★) (*voir* ci-dessous), deux mesures de Gibbs associées aux mêmes spécifications sont « localement équivalentes », ce qui permet d'utiliser les théorèmes de représentation intégrale de Dynkin-Föllmer (*cf.* [7], [8]) dans notre cadre.

Dans tout le paragraphe 3, l'espace mesurable $\mathscr{X}_\mathrm{T}$ n'est pas supposé — *a priori* — muni d'une probabilité μ, et les tribus $\mathscr{A}_\Lambda$ ne sont donc pas complétées.

3.1. Spécifications locales.

Définition 3.1. — *On appelle spécifications locales* [1] *sur* $\mathscr{X}_T$ *un ensemble*

$$\Pi = (\Pi_{[a,b]}(\omega, d\omega'))_{a<b}$$

de noyaux tels que :

(k) *pour tous* $a < b$, $\Pi_{[a,b]}(\omega, d\omega')$ *est un noyau markovien de* $(\mathscr{X}_T, \mathscr{A}_{[a,b]})$ *dans* $(\mathscr{X}_T, \mathscr{A}_{\{a,b\}})$;

(kk) *pour tout* $\omega \in \mathscr{X}_T$, *la restriction à* $\mathscr{A}_{\{a,b\}}$ *de la mesure* $\Pi_{[a,b]}(\omega, d\omega')$ *est la mesure de Dirac* ε_ω;

(kkk) *pour tous* $a' < a < b < b'$, *on a l'égalité*

$$\Pi_{[a',b']} \circ \Pi_{[a,b]} = \Pi_{[a',b']} \quad \textit{sur } \mathscr{A}_{[a,b]},$$

c'est-à-dire

$$\forall \omega \in \mathscr{X}_T, \quad \forall A \in \mathscr{A}_{[a,b]},$$

$$\Pi_{[a',b']}(\omega, A) = \int \Pi_{[a',b']}(\omega; d\omega')\, \Pi_{[a,b]}(\omega', A).$$

Le choix de l'espace $(\Omega, \mathscr{A})$ que nous avons fait ici (i. e. : $\mathscr{X}_T$) nous permet de présenter les spécifications locales sous la forme équivalente suivante :

Lemme 3.2. — *Si* Π *est une spécification locale, il existe un unique ensemble* $\Pi' = (\Pi'_{[a,b]}(x, y; d\omega))_{a<b;\,(x,y)\in E^2}$ *de noyaux tels que :*

(k′) *pour tous* $a < b$, $\Pi'_{[a,b]}(x, y; d\omega)$ *est un noyau markovien de* $(\mathscr{X}_T, \mathscr{A}_{[a,b]})$ *dans* $(E, \mathscr{E})^2$;

(kk′) *pour tout* $(x, y) \in E^2$, *la restriction de la mesure* $\Pi'_{[a,b]}(x, y; d\omega)$ *à la tribu* $\mathscr{A}_{\{a,b\}}$ *est portée par* $(X_a = x, X_b = y)$;

(l) pour tout $\omega \in \mathscr{X}_T$,

$$\Pi'_{[a,b]}(X_a(\omega), X_b(\omega); d\omega') = \Pi_{[a,b]}(\omega, d\omega').$$

Démonstration. — A tout $(x, y) \in E^2$, on associe la fonction ${}^{(x,y)}\tau \in \mathscr{X}_T$ définie par

$${}^{(x,y)}\tau(t) = \begin{cases} x & \text{si } t < b, \\ y & \text{si } t \geqq b. \end{cases}$$

Posons

$$\Pi'_{[a,b]}(x, y; d\omega) = \Pi_{[a,b]}({}^{x,y}\tau; d\omega).$$

L'application $(x, y) \to {}^{(x,y)}\tau$ étant $\mathscr{E}^2/\mathscr{E}^{\otimes T}$ mesurable, la propriété (k′) est vérifiée.

[1] Dans la suite, on dit aussi que Π est une spécification locale.

Toute variable réelle Z, $\mathscr{A}_{\{a, b\}}$ mesurable, étant de la forme $Z(\omega) = F(X_a(\omega); X_b(\omega))$ (d'après un lemme de Doob), vérifie la propriété suivante :

si $\omega, \omega' \in \mathscr{X}_T$, sont tels que : $\omega(a) = \omega'(a)$ et $\omega(b) = \omega'(b)$, alors :

$$Z(\omega) = Z(\omega').$$

Comme

$$[{}^{(X_a(\omega), X_b(\omega))}\tau](c) = X_c(\omega) \qquad \text{pour} \quad c = a \text{ ou } b,$$

on a

$$\Pi'_{[a, b]}(X_a(\omega), X_b(\omega); d\omega') = \Pi_{[a, b]}(\omega; d\omega'),$$

d'où (l). Enfin (kk') découle de (kk). ■

Dorénavant, on considère uniquement Π', que l'on note encore Π.

Nous nous intéressons beaucoup, par la suite, *à l'exemple fondamental* suivant de spécification locale :

E est ici un espace l. c. d., ou polonais, muni de sa tribu borélienne $\mathscr{E}$. Soit ν une mesure σ-finie sur $(E, \mathscr{E})$, et $p = (p_{s, t})_{(s, t) \in \Delta}$ un semi-groupe de densités par rapport à ν. [*cf.* (n.4)]. On suppose de plus que, pour tout $(x, y) \in E^2$, et $(s, t) \in \Delta$, $p_{s, t}(x, y)$ est strictement positif. D'après un théorème de Kolmogorov, pour tout $a < b$, et $(x, y) \in E^2$, il existe une unique mesure de probabilité $\tilde{\Pi}_{[a, b]}(x, y; d\omega)$ sur $(E, \mathscr{E})^{\otimes [a, b]}$ admettant pour marginales de rang fini :

$$\begin{aligned} & r_{\{a, t_1, \ldots, t_k, b\}}(\tilde{\Pi}_{[a, b]}(x, y))(dx_0, dx_1, \ldots, dx_k, dx_{k+1}) \\ & = \frac{1}{p_{a, b}(x, y)}(p_{a, t_1}(x, x_1) \times \ldots \times p_{t_k, b}(x_k, y) \bigotimes_{i=1}^{k} d\nu(x_i) \otimes \varepsilon_{(x, y)}(dx_0, dx_{k+1}) \end{aligned}$$

pour $a < t_1 < \ldots < t_k < b$.

D'autre part, la tribu $\mathscr{A}_{[a, b]}$ [sur $(E, \mathscr{E})^T$] est égale à $r_{[a, b]}^{-1}(\mathscr{E}^{\otimes [a, b]})$, et il existe une unique mesure de probabilité sur $(\mathscr{X}_T, \mathscr{A}_{[a, b]})$ notée $\Pi_{[a, b]}(x, y; d\omega)$, dont l'image par $r_{[a, b]}$ soit $\tilde{\Pi}_{[a, b]}(x, y; d\omega)$.

On vérifie aisément que $\Pi = (\Pi_{[a, b]})$ est une spécification locale : on dit que c'est la spécification associée au semi-groupe de densités $(p_{s, t})$.

On considère, à nouveau, une spécification locale générale Π. Dans toute la suite, on suppose que Π satisfait l'hypothèse :

(★) *Il existe une mesure positive*, σ-*finie*, ν *sur* $(E, \mathscr{E})$ *telle que, pour tous* $a < t < b$, *et* $(x, y) \in E^2$, *la probabilité* $r_t(\Pi_{[a, b]}(x, y))$ *soit équivalente à* ν.

De l'hypothèse (★), découle une propriété d'absolue continuité plus générale :

LEMME 3.3. — *Pour tous* $a < b$, $(x, y) \in E^2$, *et* Λ *sous-ensemble fini de* $]a, b[$, *la probabilité* $r_\Lambda(\Pi_{[a,b]}(x, y))$ *sur* $(E, \mathscr{E})^\Lambda$ *est équivalente à* $\nu^{\otimes \Lambda}$.

Démonstration. — Posons $\Lambda = \{t_1, \ldots, t_n\}$, avec $a < t_1 < \ldots < t_n < b$. On démontre la propriété par récurrence sur n.

Si $n = 1$, c'est l'hypothèse (★).

Supposons-la vraie pour $n-1$, et montrons-la pour n : d'après les propriétés (kk) et (kkk) (définition 3.1), on a, en utilisant la notation (abusive) $\Pi_{[a,b]}(x, y; dx_\Lambda)$ pour $r_\Lambda(\Pi_{[a,b]}(x, y))$:

$$\Pi_{[a,b]}(x, y)(dx_{t_1}, \ldots, dx_{t_n}) = \Pi_{[a,b]}(x, y)(dx_{t_1})\,\Pi_{[t_1,b]}(x_{t_1}, y)(dx_{t_2}, \ldots, dx_{t_n})$$

et d'après l'hypothèse de récurrence

$$\Pi_{[t_1,b]}(x_{t_1}, y)(dx_{t_2}, \ldots, dx_{t_n}) \sim \nu(dx_{t_2}) \times \ldots \times \nu(dx_{t_n}),$$

$$\Pi_{[a,b]}(x, y)(dx_{t_1}) \sim \nu(dx_{t_1}),$$

par suite

$$\Pi_{[a,b]}(x, y)(dx_{t_1}, \ldots, dx_{t_n}) \sim \nu(dx_{t_1}) \times \ldots \times \nu(dx_{t_n}).$$

3.2. Mesures de Gibbs associées a une spécification locale. — Soit Π une spécification locale sur $\mathscr{X}_{\mathrm{T}}$.

Définition 3.4. — *On appelle* mesure de Gibbs *associée à* Π *toute probabilité* μ *sur* $\mathscr{X}_{\mathrm{T}}$, *telle que, pour tous* $a < b$, *et* $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_{[a,b]}$, *on ait*

$$\mathrm{E}_\mu[1_{\mathrm{A}} \mid \mathscr{A}_{\complement[a,b]}] = \Pi_{[a,b]}(\cdot, \mathrm{A}), \qquad \mu\text{-p. s.}$$

Remarquons que, d'après la propriété (k) (définition 3.1), toute mesure de Gibbs associée à Π définit un champ localement markovien strict, que l'on dit spécifié par Π.

On note $\mathscr{G}(\Pi)$ — ou simplement $\mathscr{G}$ — l'ensemble convexe (vide ou non) des mesures de Gibbs associées à Π.

L'hypothèse ($\bigstar$) entraîne les conséquences suivantes sur $\mathscr{G}(\Pi)$:

Proposition 3.5. — *Soient :*

— ν *une mesure positive* σ-*finie sur* $(\mathrm{E}, \mathscr{E})$;

— Π *une spécification locale sur* $\mathscr{X}_{\mathrm{T}}$, *qui satisfait l'hypothèse* ($\bigstar$);

— P, Q *deux probabilités de* $\mathscr{G}(\Pi)$.

(*a*) *Si* Λ *est un sous-ensemble fini de* T, *on a*

$$r_\Lambda(\mathrm{P}) \sim r_\Lambda(\mathrm{Q}) \sim \nu^{\otimes \Lambda}.$$

(*b*) *Si l'on note* $\mathrm{P}_{[a,b]}$ et $\mathrm{Q}_{[a,b]}$ *les restrictions de* P *et* Q *à* $\mathscr{A}_{[a,b]}$, *et* $f_{a,b}$ *la densité de Radon-Nikodym :*

$$f_{a,b}(x, y) = \frac{dr_{\{a,b\}}(\mathrm{Q})}{dr_{\{a,b\}}(\mathrm{P})}(x, y),$$

on a

$$\mathrm{Q}_{[a,b]} = f_{a,b}(\mathrm{X}_a, \mathrm{X}_b)\,\mathrm{P}_{[a,b]},$$

et donc :

$$\mathrm{Q}_{[a,b]} \sim \mathrm{P}_{[a,b]}.$$

Démonstration. — (*a*) Supposons $\Lambda = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset]a, b[$. On a alors, pour tout $f \in b(\mathscr{E}^{\otimes \Lambda})$:

$$\int dP(\omega) f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = \int dP(\omega) \Pi_{[a,b]}(X_a(\omega), X_b(\omega))[f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})].$$

L'assertion (*a*) découle alors du lemme 3.3.

(*b*) Si P, $Q \in \mathscr{G}(\Pi)$, d'après (*a*), on a $r_{\{a,b\}}(P) \sim r_{\{a,b\}}(Q) \sim \nu^{\otimes 2}$. Montrons alors, en utilisant les notations de l'énoncé, que : $Q_{[a,b]} = f_{a,b}(X_a, X_b) P_{[a,b]}$. Par un argument de classe monotone, il suffit de montrer

$$Q_{[a,b]}(\varphi) = \int \varphi f_{a,b}(X_a, X_b) \, dP_{[a,b]},$$

pour toute

$$\varphi = f(X_a, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}, X_b),$$

où

$$f \in b(\mathscr{E}^{\otimes\{a, t_1, \ldots, t_n, b\}}) \qquad \text{et} \qquad a < t_1 < \ldots < t_n < b.$$

Or,

$$\begin{aligned} Q_{[a,b]}(\varphi) &= \int dr_{\{a,b\}}(Q)(x, y) \Pi_{[a,b]}(x, y; f(x, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}, y)) \\ &= \int dr_{\{a,b\}}(P)(x, y) f_{a,b}(x, y) \Pi_{[a,b]}(x, y; f(x, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}, y)) \\ &= \int dP(\omega) f_{a,b}(X_a(\omega), X_b(\omega)) \Pi_{[a,b]}(X_a(\omega), X_b(\omega); \varphi) \end{aligned}$$

d'après (kk) (définition 3.1). De la même propriété, on déduit finalement :

$$Q_{[a,b]}(\varphi) = \int \varphi f_{a,b}(X_a, X_b) \, dP_{[a,b]}. \quad \blacksquare$$

4. Caractérisation des mesures de Gibbs possédant la propriété de Markov

Nous savons de façon générale, d'après [4], que si $\mathscr{G}(\Pi)$ contient une probabilité markovienne P_0, les mesures de Gibbs extrémales [dans $\mathscr{G}(\Pi)$] possèdent la propriété de Markov. Ce résultat a également été obtenu dans les cas particuliers étudiés en [26] et [28]. Le théorème suivant caractérise les probabilités de Gibbs qui vérifient la propriété de Markov :

THÉORÈME 4.1. — *Soient* Π *une spécification locale satisfaisant l'hypothèse* ($\bigstar$), *et* $P \in \mathscr{G}(\Pi)$ *une mesure de Gibbs qui soit markovienne.*

Si Q *est une seconde mesure de Gibbs, et* $a < b$, *on note :*

$$\frac{dr_{\{a,b\}}(Q)}{dr_{\{a,b\}}(P)} = f_{a,b}(x, y) \quad ({}^2).$$

Pour que Q *possède la propriété de Markov, il faut et il suffit que pour tous* $a < b$, *il existe deux fonctions positives mesurables* φ_a *et* ψ_b *sur* $(E, \mathscr{E})$ *telles que*

$$(1) \qquad f_{a,b}(x, y) = \varphi_a(x)\psi_b(y), \qquad dv(x)\,dv(y)\text{-p. s.}$$

Pour tout couple (a, b) *fixé, avec* $a < b$, *la fonction* φ_a *(resp. :* ψ_b*) est définie de façon essentiellement unique, à un ensemble de mesure* v *nulle près, et à une constante multiplicative près. De plus, on peut choisir les fonctions* $\varphi : \mathbf{R}\times E \to \mathbf{R}_+$, *et* $\psi : \mathbf{R}\times E \to \mathbf{R}_+$ *telles que*

$$(1') \qquad \begin{cases} \forall a' < a, & E_P[\varphi_{a'}(X_{a'}) \mid X_a] = \varphi_a(X_a), \qquad \text{P-p. s.} \\ \forall b' > b, & E_P[\psi_{b'}(X_{b'}) \mid X_b] = \psi_b(X_b), \qquad \text{P-p. s.} \end{cases}$$

Démonstration. — Pour simplifier l'écriture, on utilise la notation (abusive) $P_\Lambda\,(dx_\Lambda)$ pour $r_\Lambda\,(P)\,(dx_\Lambda)$.

(*a*) Soient $a < c < b$; on a, d'après la proposition 3.5,

$$(2) \qquad Q_{\{a,c,b\}}(dx, dz, dy) = f_{a,b}(x, y)\,P_{\{a,c,b\}}(dx, dz, dy) \qquad \text{sur} \quad E_a \times E_c \times E_b.$$

Désintégrons $P_{\{a,c,b\}}$ sur E_c muni de la mesure $P_{\{c\}}$:

$$(3) \qquad P_{\{a,c,b\}}(dx, dz, dy) = P^z(dx, dy)\,P_{\{c\}}(dz).$$

Faisons de même pour $Q_{\{a,c,b\}}$:

$$(4) \qquad \begin{cases} Q_{\{a,c,b\}}(dx, dy, dz) = Q^z(dx, dy)\,Q_{\{c\}}(dz), \\ Q_{\{a,c,b\}}(dx, dz, dy) = Q^z(dx, dy)\,f_c(z)\,P_{\{c\}}(dz), \end{cases}$$

avec

$$f_c(z) = \frac{dQ_{\{c\}}}{dP_{\{c\}}}(z) > 0, \qquad dv(z)\text{-p. s.}$$

D'autre part, en comparant (2) et (3), on obtient :

$$(5) \qquad Q_{\{a,c,b\}}(dx, dz, dy) = f_{a,b}(x, y)\,P^z(dx, dy)\,P_{\{c\}}(dz).$$

Comme P possède la propriété de Markov, on a $\mathscr{A}_a \coprod_{\mathscr{A}_c} \mathscr{A}_b$ (P) ce qui équivaut à ce que pour $P_{\{c\}}$ presque tout $z \in E$, $P^z\,(dx, dy)$ se décompose sous la forme

$$P^z(dx, dy) = P^z_{\{a\}}(dx) \otimes P^z_{\{b\}}(dy),$$

(²) D'après la proposition 3.5, $r_{\{a,b\}}(Q) \sim r_{\{a,b\}}(P)$.

donc (5) s'écrit aussi :

$$\text{(6)} \qquad Q_{\{a,c,b\}}(dx, dz, dy) = f_{a,b}(x, y) P^z_{\{a\}}(dx) \otimes P^z_{\{b\}}(dy) P_{\{c\}}(dz).$$

Comparons (4) et (6). On en déduit que

(7) Il existe $N \subset E$, $\nu(N) = 0$ et si $z \in E \setminus N$, on a

$$f_c(z) > 0$$

et

$$f_c(z) Q^z(dx, dy) = f_{a,b}(x, y) P^z_{\{a\}}(dx) \otimes P^z_{\{b\}}(dy).$$

(*b*) Supposons que Q possède la propriété de Markov, on a $\mathscr{A}_a \coprod_{\mathscr{A}_c} \mathscr{A}_b$ (P). Par suite, pour ν-presque tout $z \in E$,

$$Q^z(dx, dy) = Q^z_a(dx) \otimes Q^z_b(dy).$$

Comme $Q_{\{a,c,b\}} \sim P_{\{a,c,b\}} \sim \nu^{\otimes 3}$, les relations (7) impliquent qu'il existe $N' \subset E$, $\nu(N') = 0$ tel que si $z \in E \setminus N'$, on a

$$\text{(8)} \qquad \left\{ \begin{array}{c} f_c(z)\, Q^z_a(dx) \otimes Q^z_b(dy) = f_{a,b}(x, y)\, P^z_a(dx) \otimes P^z_b(dy), \\ P^z_a(dx) \sim Q^z_a(dx) \sim \nu(dx); \qquad P^z_b(dy) \sim Q^z_b(dy) \sim \nu(dy), \\ f_c(z) > 0. \end{array} \right.$$

Si l'on pose

$$p^z_a(x) = \frac{dP^z_{\{a\}}}{d\nu}(x),$$

et de même pour les autres densités, on a

$$f_{a,b}(x, y) = f_c(z) \frac{q^z_a(x)}{p^z_a(x)} \times \frac{q^z_b(y)}{p^z_b(y)}, \qquad d\nu^{\otimes 3}(x, y, z)\text{-p. s.}$$

En particulier, il existe $z_0 \in E$ tel que l'égalité précédente soit vraie en $z = z_0$, $d\nu^{\otimes 2}(x, y)$-p. s., et il existe donc deux fonctions positives φ_a et ψ_b telles que

$$f_{a,b}(x, y) = \varphi_a(x) \psi_b(y), \qquad d\nu^{\otimes 2}(x, y)\text{-p. s.}$$

La relation (1) est donc démontrée.

(*c*) Réciproquement, supposons (1) vérifiée; la relation (7) implique alors que $Q^z(dx, dy)$ se décompose en $Q^z_{\{a\}}(dx) \otimes Q^z_{\{b\}}(dy)$ pour $Q_{\{c\}}$ presque tout $z \in E$ et ceci équivaut à $\mathscr{A}_a \coprod_{\mathscr{A}_c} \mathscr{A}_b$ (Q). Autrement dit, si $g \geqq 0$ est $\mathscr{A}_b$-mesurable, on a

$$E_Q[g \mid \mathscr{A}_{\{a,c\}}] = E_Q[g \mid \mathscr{A}_c].$$

Or, d'après la propriété de Markov locale de Q :

$$E_Q[g \mid \mathscr{A}_{\{a,c\}}] = E_Q[g \mid \mathscr{A}_{[a,c]}].$$

Donc

$$E_Q[g \mid \mathscr{A}_{[a,c]}] = E_Q[g \mid \mathscr{A}_c].$$

Faisons tendre a vers $-\infty$; le théorème des martingales entraîne

$$E_Q[g \mid \mathscr{A}_{[-\infty,c]}] = E_Q[g \mid \mathscr{A}_c].$$

Ceci est vrai pour tout $c \in T$ et toute $g \geqq 0$, $\mathscr{A}_b$-mesurable avec $c < b$. Donc Q possède la propriété de Markov.

(*d*) L'unicité — telle qu'elle est énoncée dans le théorème — de φ_a (resp. : ψ_b) vérifiant (1) est immédiate.

(*e*) Montrons enfin que l'on peut choisir des fonctions φ et ψ comme indiqué en fin d'énoncé.

On commence par définir φ_{-n}, et ψ_n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ de la façon suivante : soient φ_{-1} et ψ_1 deux fonctions positives sur E, telles que $f_{-1,1}(x, y) = \varphi_{-1}(x)\psi_1(y)$, $\nu \otimes \nu$-p. s.

Soient, de même, φ'_{-2} et ψ'_2 deux fonctions positives telles que

$$f_{-2,2}(x, y) = \varphi'_{-2}(x)\psi'_2(y), \qquad \nu \otimes \nu\text{-p. s.}$$

En définissant φ'_{-1} et ψ'_1 (à un ensemble de ν mesure nulle près) par

$$\varphi'_{-1}(X_{-1}) = E_P[\varphi'_{-2}(X_{-2}) \mid X_{-1}],$$
$$\psi'_1(X_1) = E_P[\psi'_2(X_2) \mid X_1],$$

on a

$$f_{-1,1}(x, y) = \varphi'_{-1}(x)\psi'_1(y), \qquad \nu \otimes \nu\text{-p. s.}$$

Donc, d'après (*d*), il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que

$$\varphi'_{-1} = \lambda\,\varphi_{-1}, \quad \nu\text{-p. s.}; \qquad \psi'_1 = 1/_\lambda\,\psi_1, \quad \nu\text{-p. s.}$$

En prenant $\varphi_{-2} = 1/_\lambda\,\varphi'_{-2}$, et $\psi_2 = \lambda\psi'_2$, on en déduit :

$$E_P[\varphi_{-2}(X_{-2}) \mid X_{-1}] = \varphi_{-1}(X_{-1}) \qquad \text{et} \qquad E_P[\psi_2(X_2) \mid X_1] = \psi_1(X_1).$$

En itérant ce procédé, on construit deux suites de fonctions positives φ_{-n} et ψ_n ($n \in \mathbf{N}^*$) telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad f_{-n,n} = \varphi_{-n} \otimes \psi_n, \qquad \nu \otimes \nu\text{-p. s.}$$

et $\forall (n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2$,

$$E_P[\varphi_{-n-p}(X_{-n-p}) \mid X_{-n}] = \varphi_{-n}(X_{-n}),$$
$$E_P[\psi_{n+p}(X_{n+p}) \mid X_n] = \psi_n(X_n).$$

Enfin, pour tout $a \in \mathbf{R}$, on peut définir φ_a par

$$\varphi_a(X_a) = E_P[\varphi_{-n}(X_{-n}) \mid X_a],$$

dès que $-n < a$, $n \in \mathbf{N}^*$. On procède de même pour ψ_b, avec $n \in \mathbf{N}^*$, $n > b$, et on obtient aisément (1′). ■

Supposons que $\Pi = (\Pi_{[a,b]})$ soit la spécification associée à un semi-groupe homogène $(P_t(x, dy) = p_t(x, y)\,\nu(dy),\ t > 0)$ sur $(E, \mathscr{E})$, avec E espace *l. c. d.*, ou polonais, $\mathscr{E}$ sa tribu borélienne, et ν mesure positive σ-finie sur $(E, \mathscr{E})$, invariante par (P_t) : pour reprendre notre terminologie antérieure, Π est la spécification associée au semi-groupe $p_{t-s}(x, y)$ $(s < t;\ (s, t) \in \mathbf{R}^2)$ de densités (strictement positives) par rapport à ν. Nous utilisons par la suite, en plus de (P_t), les opérateurs duaux $\hat{P}_t : b_+(\mathscr{E}) \to b_+(\mathscr{E})$ définis par

$$\forall t > 0, \quad \hat{P}_t f(x) = \int p_t(y, x) f(y)\,\nu(dy).$$

$(\hat{P}_t)$ vérifie l'égalité de dualité

$$\forall f, g \in b_+(\mathscr{E}), \quad \langle P_t f, g \rangle_\nu = \langle f, \hat{P}_t g \rangle_\nu.$$

En conséquence, $(\hat{P}_t)$ laisse la mesure ν invariante. De plus, $(\hat{P}_t)$ est un « presque semi-groupe markovien », en ce sens qu'il vérifie :

– $\forall t > 0$, $\hat{P}_t 1 = 1$, ν-p. s.;

– $\forall f \in b_+(\mathscr{E})$, $\forall t, s > 0$, $\hat{P}_{t+s} f = \hat{P}_t \hat{P}_s f$, ν-p. s.

On ne peut – sans autre hypothèse – affirmer *a priori* que $(\hat{P}_t)$ est un semi-groupe markovien (³), mais cette propriété ne nous est pas nécessaire pour la suite.

On définit, dans le lemme suivant, une mesure positive σ-finie $\underline{\mu}$ sur $\mathscr{X}_T$, qui servira de mesure de référence :

LEMME 4.2. – *Il existe une unique mesure positive* $\underline{\mu}$ *sur* $(E, \mathscr{E})^T$ *telle que :*

– $\underline{\mu}_0 = \nu$;

– $\forall A \in \mathscr{E}$, *tel que* $\nu(A) < \infty$, $\underline{\mu}\{A \times E^{T \setminus \{0\}}\} < \infty$;

– $\underline{\mu}$ *est markovienne, de semi-groupes de transition direct* (P_t) *et rétrograde* $(\hat{P}_t)$, *c'est-à-dire :*

$$\left.\begin{array}{ll} \forall s < t, & E_{\underline{\mu}}[f(X_t) \mid X_s] = P_{t-s} f(X_s) \\ \forall f \in b_+(\mathscr{E}), & E_{\underline{\mu}}[f(X_s) \mid X_t] = \hat{P}_{t-s} f(X_t) \end{array}\right\} \quad \underline{\mu}\text{-p. s.}$$

De plus, $\underline{\mu}$ *est invariante par translation.*

Démonstration. – Soit μ une mesure positive qui vérifie les propriétés demandées, et $A \in \mathscr{E}$, tel que $\nu(A) < \infty$. Notons μ_A la restriction de μ à $A \times E^{T-\{0\}}$. μ_A est donc une mesure positive finie, dont les marginales de rang fini sont déterminées de façon unique.

(³) Toutefois, pour l'existence d'un semi-groupe dual de densités, *voir* [30].

Explicitons par exemple $\lambda = r_{\{s_1, s_2, 0, t_1, t_2\}}(\mu_A)$, avec $s_1 < s_2 < 0 < t_1 < t_2$:

$$\lambda(dx_{s_1}, dx_{s_2}, dx_0, dx_{t_1}, dx_{t_2}) \tag{9}$$
$$= 1_A(x_0)\,d\nu(x_0)\,\hat{P}_{-s_2}(x_0, dx_{s_2})\,\hat{P}_{s_2-s_1}(x_{s_2}, dx_{s_1})\,P_{t_1}(x_0, dx_{t_1})\,P_{t_2-t_1}(x_{t_1}, dx_{t_2}).$$

D'après le théorème de classe monotone, μ_A, si elle existe, est unique, et il en est de même pour $\underline{\mu}$ (car la mesure ν est σ-finie).

Pour montrer l'existence de $\underline{\mu}$, on procède comme suit : (α) par application du théorème de Kolmogorov, pour tout $A \in \mathscr{E}$, tel que $\nu(A) < \infty$, il existe une unique mesure finie $\underline{\mu}_A$, dont les marginales de rang fini sont données par des formules du type de la formule (9).

(β) Soit (A_n) une partition dénombrable de $(E, \mathscr{E})$, telle que pour tout n, $\nu(A_n) < \infty$. La mesure $\underline{\mu} = \sum_n \underline{\mu}_{A_n}$ vérifie les propriétés demandées.

La proposition 4.3 précise, dans le cadre que l'on vient de définir, les résultats du théorème 4.1.

PROPOSITION 4.3. — *Avec les notations précédentes :*

(*a*) *Il y a bijection entre l'ensemble des mesures de Gibbs* $Q \in \mathscr{G}(\Pi)$ *et l'ensemble* $\mathscr{F}$ *des applications* $f : (s, t) \in \Delta \to f_{s,t}(.,.)$ *telles que :*

— *pour tous* $s < t$, $f_{s,t}$ *soit une densité de probabilité par rapport à* $r_{\{s,t\}}(\underline{\mu})$

— $\forall s' < s < t < t'$, $E_{\underline{\mu}}[f_{s',t'}(X_{s'}; X_{t'}) \mid \mathscr{A}_{\{s,t\}}] = f_{s,t}(X_s, X_t)$, $\quad \underline{\mu}$-p. s.

Cette bijection est donnée par la formule

$$\forall s < t, \quad dr_{\{s,t\}}(Q) = f_{s,t}(.,.)\,dr_{\{s,t\}}(\underline{\mu}); \tag{10}$$

(*b*) *la donnée d'une probabilité* $Q \in \mathscr{G}(\Pi)$ *qui possède la propriété de Markov, équivaut à celle d'un couple d'applications* (φ, ψ) *définies sur* **R**, *à valeurs dans* $L^0_+(\mathscr{E}, \nu)$ *telles que*

$$\left\{\begin{array}{lll} \forall t, \quad \varphi_t \psi_t > 0, \quad \nu\text{-p. s.} & \text{et} & \displaystyle\int \varphi_t \psi_t \, d\nu = 1, \\ \forall t < t', & \left\{\begin{array}{ll} \psi_t = P_{t'-t}\psi_{t'}, & \nu\text{-p. s.}, \\ \varphi_{t'} = \hat{P}_{t'-t}\varphi_t, & \nu\text{-p. s.} \end{array}\right. & \end{array}\right. \tag{11}$$

Plus précisément, Q *et un tel couple* (φ, ψ) *qui lui est associé sont liés par*

$$\forall t, \quad P_{\{t\}} = \varphi_t \psi_t \nu$$

et

$$\forall s < t, \quad f_{s,t} = \varphi_s \otimes \psi_t, \qquad \nu \otimes \nu\text{-p. s.};$$

(*c*) *la donnée d'une probabilité* $Q \in \mathscr{G}(\Pi)$ *qui possède la propriété de Markov, et qui est invariante par translation équivaut à celle d'un couple* (φ, ψ) *d'éléments de* $L^0_+(\mathscr{E}, \nu)$, *et d'un réel* λ *tels que*

$$(12)\qquad \begin{cases} \varphi\psi > 0, \nu\text{-p. s.} & \text{et} \quad \int \varphi\psi \, d\nu = 1, \\ \forall t > 0, \quad \hat{P}_t \varphi = e^{-\lambda t} \varphi & \text{et} \quad P_t \psi = e^{\lambda t} \psi, \qquad \nu\text{-p. s.} \end{cases}$$

De plus, Q *et un couple* (φ, ψ) *qu lui est associé sont liés par*

$$Q_{\{0\}} = \varphi \psi \, d\nu.$$

Remarque. — Il est naturel d'appeler la fonction ψ (resp. : φ) figurant en (11) fonction (P_t) harmonique (pour l'espace-temps) [resp. : fonction $(\hat{P}_t)$ harmonique, ou (P_t) coharmonique]. Lorsque E est dénombrable, J. Cox [29] a établi, de façon générale, une bijection entre les lois d'entrée $(m_s(dx), s \in \mathbf{R})$ associées à $(P_t)_{t \geq 0}$ et les fonctions (P_t) coharmoniques, positives, normalisées.

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que $\underline{\mu}$ est une mesure (σ-finie) markovienne qui vérifie la propriété de Gibbs (définition 3.4). En fait, tous les résultats de comparaison des mesures de Gibbs $Q \in \mathscr{G}(\Pi)$ par rapport à P (*cf.* th. 4.1) sont encore valables si l'on remplace P par $\underline{\mu}$. En particulier, à $Q \in \mathscr{G}(\Pi)$, on peut associer une « densité » $f \in \mathscr{F}$ par rapport à $\underline{\mu}$, définie par la formule (10). Inversement, si $f \in \mathscr{F}$, il existe, d'après le théorème de Kolmogorov, une unique probabilité Q sur $\mathscr{X}_T$ telle que $\forall s < t$, $Q_{[s,t]} = f_{s,t}(X_s, X_t)\, \underline{\mu}_{[s,t]}$. Il est alors immédiat que $Q \in \mathscr{G}(\Pi)$.

Si $Q \in \mathscr{G}(\Pi)$, et est markovienne, il existe, d'après le théorème 4.1 (étendu, en remplaçant P par $\underline{\mu}$), et les formules (1′) un couple (φ, ψ) vérifiant (11). Il suffit pour cela de remarquer, par exemple, que si $a' < a$:

$$E_{\underline{\mu}}(\varphi_{a'}(X_{a'}) \mid X_a) = \hat{P}_{a-a'} \varphi_{a'}(X_a) = \varphi_a(X_a), \qquad \underline{\mu}\text{-p. s.}$$

Inversement, si (φ, ψ) est un couple vérifiant les relations (11), pour tous $s < t$, $\varphi_s(X_s)\, \psi_t(X_t)\, \underline{\mu}_{[s,t]}$ est une probabilité Q_s^t sur $(\mathscr{X}_T, \mathscr{A}_{[s,t]})$. En employant à nouveau le théorème de Kolmogorov, il existe une unique probabilité Q sur $\mathscr{X}_T$ telle que

$$\forall s < t, \quad Q_{[s,t]} = Q_s^t.$$

De plus, Q est une mesure de Gibbs [d'après la partie (*a*) de cette proposition], qui est markovienne, car les fonctions $f_{s,t}(x, y) = \varphi_s(x)\, \psi_t(y)$ $(s < t)$ sont décomposées en produit (th. 4.1).

Soit $Q \in \mathscr{G}(\Pi)$, qui soit, de plus, markovienne et invariante par translation. On a donc, en particulier :

$$\forall s < t, \quad \forall h > 0, \qquad r_{\{s+h,\, t+h\}}(Q) = r_{\{s,t\}}(Q).$$

En notant f la « densité » de Q par rapport à $\underline{\mu}$ [*cf.* formule (10)], et compte tenu de ce que $\underline{\mu}$ est elle-même invariante par translation, on a $f_{s+h,\, t+h} = f_{s,t}$, $\nu \otimes \nu$-p. s., c'est-à-dire : $\varphi_{s+h} \otimes \psi_{t+h} = \varphi_s \otimes \psi_t\, \nu \otimes \nu$-p. s. [avec les notations de (*b*)]. D'après l'unicité de cette décomposition en produit tensoriel (th. 4.1), il existe une constante $c > 0$, telle que

$$\varphi_{s+h} = c\,\varphi_s, \quad \nu\text{-p. s.}, \qquad \text{et} \qquad \psi_{t+h} = \frac{1}{c}\psi_t, \qquad \nu\text{-p. s.}$$

En prenant $s = t = 0$, il existe une constante $c(h) > 0$ telle que

$$\forall\, h \in \mathbf{R}_+, \quad \hat{\mathrm{P}}_h(\varphi_0) = c(h)\,\varphi_0, \qquad \nu\text{-p. s.}$$

et

$$\mathrm{P}_h(\psi_0) = \frac{1}{c(h)}\psi_0, \qquad \nu\text{-p. s.}$$

Comme

$$\int \varphi_0\,\psi_0\,d\nu = 1,$$

on a

$$c(h) = \langle \hat{\mathrm{P}}_h\,\varphi_0, \psi_0 \rangle_\nu = \langle \varphi_0, \mathrm{P}_h\,\psi_0 \rangle_\nu.$$

Or, d'après notre définition d'un semi-groupe de densités [*cf.* (*n*.4)], le semi-groupe (P_t) est borélien, i. e. :

$\forall\, f \in b_+(\mathscr{E})$, l'application $(t, x) \to \mathrm{P}_t f(x)$ est borélienne.

Donc, la fonction c est $\mathscr{B}(\mathbf{R}_+)$-mesurable, et vérifie, à cause de la propriété de semi-groupe :

$$\forall\, h, k \geqq 0, \quad c(h+k) = c(h)\,c(k).$$

D'après l'appendice A.1, il existe donc $\lambda \in \mathbf{R}$, tel que $c(h) = e^{-\lambda h}$. On pose alors $\varphi = \varphi_0$, $\psi = \psi_0$.

Inversement, s'il existe un couple (φ, ψ) et un réel λ vérifiant (12), on définit, à l'aide des formules

$$\mathrm{Q}_{[-n, n]} = \varphi(\mathrm{X}_{-n})\,\psi(\mathrm{X}_n)\,\underline{\mu}_{[-n, n]},$$

une probabilité Q sur $\mathscr{X}_\mathrm{T}$, qui appartient à $\mathscr{G}(\Pi)$, qui est markovienne, et invariante par translation.

Remarque. — Si $\nu(\mathrm{E}) < \infty$, le réel λ qui figure en (12) est nul. En effet, dans le cas contraire, λ serait, par exemple, strictement positif, et on aurait :

$$(13) \qquad \forall\, t > 0, \quad \hat{\mathrm{P}}_t\,\varphi < \varphi, \qquad \nu\text{-p. s.},$$

car, comme $\varphi\,\psi > 0$ ν-p. s., et $\int \varphi\,\psi\,d\nu < \infty$, on a

$$0 < \varphi < \infty, \qquad \nu\text{-p. s.}$$

Donc, pour tout $t > 0$, et $n \in \mathbf{N}$, on a $\hat{P}_t(\varphi \wedge n) < \varphi \wedge n$, ν-p. s. Or, l'égalité $\nu[\hat{P}_t(\varphi \wedge n)] = \nu[\varphi \wedge n]$, et la propriété: ν bornée, entraînent : $\forall n, \hat{P}_t(\varphi \wedge n) = \varphi \wedge n$. ν-p. s., et donc, en faisant tenndre n vers $+\infty$:

$$\forall t > 0, \quad \hat{P}_t \varphi = \varphi, \qquad \nu\text{-p. s.,} \tag{13'}$$

ce qui contredit (13).

En faisant des hypothèses supplémentaires de conservativité et/ou d'ergodicité sur (P_t) et/ou $(\hat{P}_t)$, nous pouvons expliciter l'ensemble $\mathscr{G}_{M,T}(\Pi)$ constitué des probabilités $P \in \mathscr{G}(\Pi)$, qui sont, de plus, markoviennes et invariantes par translation.

Auparavant, nous faisons quelques rappels :

— un noyau positif $P(x, dy) = p(x, y)\nu(dy)$ sur $(E, \mathscr{E})$, tel que $\nu P = \nu$ est dit *conservatif* si

$$\forall f \in \mathscr{E}_+, \quad \sum_{n=0}^{\infty} P^n f(x) = \infty, \quad \nu\text{–p. s.} \qquad \text{sur} \quad (f > 0);$$

— le semi-groupe $P_t(x, dy) = p_t(x, y)\, d\nu(y)$ [resp. : le « presque semi-groupe » $(\hat{P}_t)$], laissant la mesure ν invariante, est dit ν-ergodique si les seules fonctions $f \in \mathscr{L}^\infty(E, \nu)$ vérifiant : $\forall t > 0$, $P_t f = f$ ν-p. s. (resp. : $\hat{P}_t f = f$, ν-p. s.) sont les fonctions constantes ν-p. s.

Nous renvoyons le lecteur à l'appendice A.2 pour diverses conséquences de ces propriétés. En particulier, dans la proposition 4.3 (*c*), si $\nu(E) = \infty$, on a encore $\lambda = 0$, à condition de supposer que pour tout $t > 0$, le noyau P_t est conservatif (ce qui entraîne que $\hat{P}_t$ l'est aussi; *cf.* l'appendice A.2). On procède encore en dégageant la contradiction entre (13) et (13'), mais, ici, avec l'aide du lemme A.2.

Nous pouvons maintenant énoncer le :

THÉORÈME 4.4. — *Soit* ν *une mesure positive* σ*-finie sur* $(E, \mathscr{E})$, *et*

$$P_t(x, dy) = p_t(x\ y)\, d\nu(y)$$

un semi-groupe markovien homogène de mesures équivalentes à ν, *tel que* (P_t) *et* $(\hat{P}_t)$ *soient* ν*-ergodiques :*

(*a*) *si* $\nu(E) < \infty$, *on a*

$$\mathscr{G}_{M,T}(\Pi) = \left\{ \frac{1}{\nu(E)} \underline{\mu} \right\};$$

(*b*) *si* $\nu(E) = \infty$, *et que, de plus, pour tout* $t > 0$, *le noyau* P_t *soit conservatif*, $\mathscr{G}_{M,T}(\Pi)$ *est vide.*

Démonstration. — D'après la proposition 4.3, et les remarques qui la suivent, si $Q \in \mathscr{G}_{M,T}(\Pi)$, il existe, dans chacun des cas (*a*) et (*b*), deux variables $\varphi, \psi \in L^0_+(E, \nu)$

telles que

$$\forall t > 0, \quad \hat{P}_t \varphi = \varphi, \quad \nu\text{-p. s.}, \qquad P_t \psi = \psi, \quad \nu\text{-p. s.}$$

D'après l'hypothèse d'ergodicité, φ et ψ sont ν-p. s. constantes, et donc, en (*a*), $\mathcal{G}_{M,T}(\Pi) = \{(1/\nu(E))\,\underline{\mu}\}$, et en (*b*), cet ensemble est vide.

Dans le cas particulier où $P_t(x, dy) = p_t(x, y)\, d\nu(y)$ $(t > 0)$ est un semi-groupe récurrent au sens de Harris, admettant ν pour unique mesure σ-finie invariante (à un facteur multiplicatif près), ce semi-groupe (P_t) est ν-ergodique, et pour tout $t > 0$, le noyau $P_t(x, dy)$ est conservatif. Ces propriétés sont également vérifiées par $(\hat{P}_t)$ (pour tout cela, *voir* l'appendice A.2). On peut donc énoncer le :

COROLLAIRE 4.5. — *Soit* $P_t(x, dy) = p_t(x, y)\, d\nu(y)$ *un semi-groupe markovien homogène de mesures équivalentes à* ν, *qui soit récurrent au sens de Harris, et admettant* ν *pour mesure* σ*-finie invariante.*

Alors,

(*a*) *si* (P_t) *est positivement récurrent* [*c'est-à-dire* : $\nu(E) < \infty$] :

$$\mathcal{G}_{M,T}(\Pi) = \left\{ \frac{1}{\nu(E)} \underline{\mu} \right\};$$

(*b*) *si* (P_t) *est nul récurrent* [*c'est-à-dire* : $\nu(E) = \infty$], $\mathcal{G}_{M,T}(\Pi)$ *est vide.*

Rappellons maintenant le cadre des études menées en [25] et [26], dont l'origine est la théorie des champs pour la dimension $d = 1$ [3] : $C(\mathbf{R})$ [resp. : $\mathcal{D}(\mathbf{R})$] désigne l'espace des fonctions continues (resp. : indéfiniment dérivables, à support compact) de $\mathbf{R}$ dans lui-même. Si P est un polynôme borné inférieurement sur $\mathbf{R}$, on définit le cocycle $a : (f, \omega) \to a_f(\omega)$ sur $\mathcal{D}(\mathbf{R}) \times C(\mathbf{R})$, qui est associé à P par la formule

$$a_f(\omega) = \exp\left[\int_{\mathbf{R}} dt \left\{ \left(\omega(t) + \frac{1}{2} f(t)\right) f''(t) - P(\omega(t) + f(t)) + P(\omega(t)) \right\}\right].$$

En combinant le résultat précédent, et l'étude de G. Royer [25], on obtient le :

COROLLAIRE 4.6. — *Il existe une seule probabilité* μ *sur* $C(\mathbf{R})$, *muni de la tribu* $\mathcal{C}$ *engendrée par le processus des coordonnées* $(X_t)_{t \in \mathbf{R}}$, *où* $X_t(\omega) = \omega(t)$, *et vérifiant :*

(*m*) μ *est quasi invariante sous les translations de* $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, *et admet a pour module de quasi-invariance, c'est-à-dire :*

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \quad \mu(f + d\omega) = a_f(\omega)\, \mu(d\omega).$$

(*mm*) *Le processus* $(X_t)_{t \in \mathbf{R}}$ *est markovien pour la loi* μ.

(*m*.3) μ *est invariante par les translations de* $\mathbf{R}$, *c'est-à-dire :*

$$\forall h \in \mathbf{R}, \quad \forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \forall \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n),$$
$$\mu[(X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_n+h}) \in \Gamma] = \mu[(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in \Gamma].$$

Démonstration. — En [25], G. Royer a montré que toute mesure de probabilité μ sur $(C(\mathbf{R}), \mathscr{C})$, vérifiant (m), appartient à $\mathscr{G}(\Pi)$, où Π est la spécification associée au semi-groupe homogène $P_t(x, dy) = p_t(x, y)\mu_0(dy)$, construit en [23], et admettant μ_0 pour unique probabilité invariante.

$\underline{\mu}$ est l'unique mesure de probabilité markovienne sur $(C(\mathbf{R}), \mathscr{C})$, de loi d'entrée μ_0, et de semi-groupe (P_t).

Le semi-groupe (P_t) est symétrique [car : $p_t(x, y) = p_t(y, x)$, *voir* [23], th. 3], il admet μ_0 pour probabilité invariante (même référence), et il est μ_0-ergodique (*voir* [3]).

Les hypothèses du théorème 4.4 (a) sont donc vérifiées, et la seule mesure de probabilité μ sur $(C(\mathbf{R}), \mathscr{C})$ est $\underline{\mu}$.

Ce corollaire améliore donc le résultat d'unicité obtenu par Courrège et Renouard d;une part [3] et Royer d'autre part [25] car on a supprimé, dans l'énoncé du corollaire, la condition d'invariance par symétrie de μ, exigée par ces auteurs.

5. Mesures de Gibbs associées à un semi-groupe récurrent au sens de Harris

5.1. CAS OÙ E EST COMPACT : EXTENSION D'UN RÉSULTAT DE DOBRUSHIN. — Nous allons montrer, sous certaines hypothèses supplémentaires, l'unicité des mesures de Gibbs, dans le cas où l'espace d'états E est compact, ce qui est une extension d'un résultat analogue de Dobrushin dans le cas où $T = \mathbf{Z}$, et E est fini (*cf.* [5], et également [28]).

Dans tout le paragraphe 5.1, nous faisons les hypothèses suivantes : soit $P_t(x, dy) = p_t(x, y)\,d\nu(y)$ un semi-groupe markovien, avec des densités strictement positives, et vérifiant de plus :

(q) ν est l'unique probabilité invariante du semi-groupe (P_t). Elle charge tout ouvert de E.

(qq) L'application $(t, x, y) \to p_t(x, y)$, définie sur $\mathbf{R}_+^* \times E \times E$, et à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, est continue.

Ces propriétés, et la compacité de E, entraînent aisément que

$$\hat{P}_t(x, dy) = p_t(y, x)\,d\nu(y)$$

est un semi-groupe markovien (qui admet également ν pour mesure invariante). De plus, pour les mêmes raisons, les fonctions p et $\hat{p}$: $(t, x, y) \to \hat{p}_t(x, y) = p_t(y, x)$ vérifient identiquement les équations de Chapman-Kolmogorov, et sont donc, avec la terminologie de $(n.4)$, des semi-groupes de densité par rapport à ν.

Pour parvenir au théorème 5.2, nous utilisons le lemme suivant, qui est un résultat classique dans le cadre que nous venons de présenter. Nous l'avons dégagé de [12] (cor. 2, p. 249).

LEMME 5.1. — *Si, outre les hypothèses précédentes, le semi-groupe*

$$P_t(x, dy) = p_t(x, y)\,\nu(dy)$$

est récurrent au sens de Harris, on a

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \sup_{y \in \mathrm{E}} | p_t(x, y) - 1 | \xrightarrow[(t \to \infty)]{} 0.$$

Démonstration. — D'après les préliminaires faits dans ce paragraphe, on a l'identité

$$p_{t+1}(x, y) - 1 = \int_{\mathrm{E}} (p_t(x, z) - 1)\, p_1(z, y)\, d\nu(z).$$

D'où

$$| p_{t+1}(x, y) - 1 | \leqq (\sup_{z \in \mathrm{E}} p_1(z, y)) \int_{\mathrm{E}} | p_t(x, u) - 1 |\, d\nu(u)$$

et

$$\sup_{y \in \mathrm{E}} | p_{t+1}(x, y) - 1 | \leqq (\sup_{(y, z) \in \mathrm{E}^2} p_1(z, y)) \int_{\mathrm{E}} | p_t(x, u) - 1 |\, d\nu(u).$$

E étant compact, et $p_1 : (z, y) \to p_1(z, y)$ une fonction continue sur E^2, on a $\sup_{(z,y) \in \mathrm{E}^2} p_1(z, y) < \infty$. D'autre part, d'après l'article de Duflo-Revuz [6], on sait que

$$\int_{\mathrm{E}} | p_t(x, u) - 1 |\, d\nu(u) \xrightarrow[(t \to \infty)]{} 0.$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \sup_{(y \in \mathrm{E})} | p_{t+1}(x, y) - 1 | \xrightarrow[(t \to \infty)]{} 0.$$

THÉORÈME 5.2. — *On suppose, en plus des hypothèses* (*q*) *et* (*qq*) *faites dans ce paragraphe, que le semi-groupe* (P_t) *est récurrent au sens de Harris* [*ce qui entraîne que* $(\hat{\mathrm{P}}_t)$ *l'est aussi*]. *Soit* $\underline{\mu}$ *la probabilité markovienne sur* $\mathcal{X}_{\mathbf{R}} = (\mathrm{E}, \mathscr{E})^{\mathbf{R}}$, *admettant* ν *pour loi d'entrée, et* (P_t) *pour semi-groupe de transition. Alors,* $\mathscr{G}(\Pi)$ *est constitué de la seule probabilité* $\underline{\mu}$

Remarque. — L'implication : (P_t) s. g. de Harris $\Rightarrow$ $(\hat{\mathrm{P}}_t)$ s. g. de Harris découle, par exemple, de la proposition 1 de l'appendice 2, en y remplaçant les noyaux (P) et $(\hat{\mathrm{P}})$ par les semi-groupes (P_t) et $(\hat{\mathrm{P}}_t)$, et les sommes sur $\mathbf{N}$ par les intégrales correspondantes sur $\mathbf{R}_+$.

Démonstration. — Soient $\mu \in \mathscr{G}(\Pi)$, $(t, t') \in \mathbf{R}^2$, avec $t < t'$, K et K' deux compacts de E. On considère, en outre, trois nombres réels a, b, t'', tels que : $a < t < t' < t'' < b$.

La première partie de la démonstration consiste à faire tendre b vers $+\infty$, et à en étudier les conséquences pour $\mu_{\{t, t'\}}$ (là encore, on utilise de telles notations abusives).

Dans toute la démonstration, C désigne une constante qui varie de ligne en ligne (ainsi, $\mathrm{C} = 2\,\mathrm{C}$, etc., mais cela n'a aucune importance).

Posons $\lambda = (\mu_{\{a\}}\, \mathrm{P}_{t'-a})$ et $\lambda' = 1_{\mathrm{K}'} . \lambda$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème d'Egorov ([21], II.4.4, p. 47) appliqué relativement à la mesure bornée $\lambda' + \mu_{\{a\}}$, et le lemme 5.1, il existe un compact $K_1 \subset E$ tel que

$$(14) \qquad \mu_{\{a\}}(E \setminus K_1) < \varepsilon, \qquad \text{et} \qquad \sup_{x \in K_1} \sup_{(y \in E)} |p_{b-a}(x, y) - 1| \xrightarrow[(b \to \infty)]{} 0,$$

$$(14') \qquad \lambda(K' \setminus K_1) < \varepsilon, \qquad \text{et} \qquad \sup_{x \in K_1} \sup_{(y \in E)} |p_{b-t'}(x, y) - 1| \xrightarrow[(b \to \infty)]{} 0.$$

Montrons maintenant :

(14″) il existe une constante C (ne dépendant que de la fonction de densités p) telle que

$$\mu_{\{a, t'\}}(E \times K' \setminus K_1^2) < C\varepsilon.$$

En effet,

$$\mu_{\{a, t'\}}(E \times K' \setminus K_1^2) \leqq \mu_{\{a\}}(E \setminus K_1) + \mu_{\{t'\}}(K' \setminus K_1).$$

Grâce à (14), il suffit de considérer

$$\mu_{\{t'\}}(K' \setminus K_1) = \mu_{\{a, t', t''\}}(E \times K' \setminus K_1 \times E)$$
$$= \int \mu_{\{a, t''\}}(dx, dz) \frac{1}{p_{t''-a}(x, z)} \int d\nu(y)\, p_{t'-a}(x, y)\, 1_{K' \setminus K_1}(y)\, p_{t''-t'}(y, z).$$

Or, la fonction $p_{t''-a}$ (de deux variables) est uniformément minorée par $\alpha > 0$, et $p_{t''-}$ uniformément majorée par N.

On en déduit donc :

$$\mu_{\{t'\}}(K' \setminus K_1) \leqq \frac{N}{\alpha} \lambda(K' \setminus K_1),$$

d'où on déduit finalement (14″), grâce à (14′).

D'autre part, on a

$$|\mu_{\{t, t'\}}(K \times K') - \mu_{\{a, t, t'\}}(K_1 \times K \times (K' \cap K_1))|$$
$$\leqq \mu_{\{a, t'\}}(E \times K' \setminus K_1^2) \leqq C\varepsilon, \quad \text{d'après (14″)}.$$

En explicitant $\mu_{\{a, t, t'\}}(K_1 \times K \times (K' \cap K_1))$, on a donc obtenu :

$$(15) \qquad \mu_{\{t, t'\}}(K \times K')$$
$$= \iint_{K_1 \times E} \mu_{\{a, b\}}(dx, dy) \frac{1}{p_{b-a}(x, y)} \int_K p_{t-a}(x, x_t)\, d\nu(x_t) \times -$$
$$- \times \int_{K' \cap K_1} p_{t'-t}(x_t, x_{t'})\, p_{b-t'}(x_{t'}, y)\, d\nu(x_{t'}) + C\theta\varepsilon, \qquad \text{avec } |\theta| \leqq 1.$$

Par ailleurs, on a également la majoration suivante :

$$\left| \int \mu_{\{a\}}(dx) \int_K p_{t-a}(x, x_t)\, d\nu(x_t) \int_{K'} p_{t'-t}(x_t; x_{t'})\, d\nu(x_{t'}) \right.$$
$$\left. - \int_{K_1 \times E} \mu_{\{a,b\}}(dx, dy) \int_K p_{t-a}(x, x_t)\, d\nu(x_t) \int_{K' \cap K_1} p_{t'-t}(x_t; x_{t'})\, d\nu(x_{t'}) \right|$$
$$\leqq \mu_{\{a\}}(E \setminus K_1) + \lambda(K' \setminus K_1) \leqq 2\varepsilon, \quad \text{d'après (14) et (14')}.$$

En rapprochant cette majoration de (15), on obtient :

$$\left| \mu_{\{t,t'\}}(K \times K') - \int_E \mu_{\{a\}}(dx) \int_K p_{t-a}(x, x_t)\, d\nu(x_t) \times \int_{K'} p_{t'-t}(x_t; x_{t'})\, d\nu(x_{t'}) \right|$$
$$\leqq C\varepsilon + \int_{K_1 \times E} \mu_{\{a,b\}}(dx, dy) \int_K p_{t-a}(x, x_t)\, d\nu(x_t) \times$$
$$- \times \int_{K' \cap K_1} p_{t'-t}(x_t; x_{t'}) \left| \frac{p_{b-t'}(x_{t'}; y)}{p_{b-a}(x, y)} - 1 \right| d\nu(x_{t'}).$$

Or, lorsque $b \to \infty$, on a

$$\sup_{(x \in K_1)} \sup_{(x_{t'} \in K' \cap K_1)} \sup_{(y \in E)} \left| \frac{p_{b-t'}(x_{t'}; y)}{p_{b-a}(x, y)} - 1 \right| \to 0.$$

La dernière intégrale écrite converge donc vers zéro, lorsque $(b \to \infty)$, et, par suite, on a

$$\mu_{\{t,t'\}}(K \times K') = \int_E \mu_{\{a\}}(dx) \int_K p_{t-a}(x, x_t)\, d\nu(x_t) \int_{K'} p_{t'-t}(x_t, x_{t'})\, d\nu(x_{t'}).$$

Par la même méthode, en utilisant le semi-groupe $(\hat{P}_t)$, et la fonction des densités $\hat{p}$, et en faisant tendre a vers $-\infty$, on obtient :

$$\underline{\mu}_{\{t,t'\}}(K \times K') = \int_K d\nu(x_t) \int_{K'} d\nu(x_{t'})\, p_{t'-t}(x_t, x_{t'}).$$

On a donc :

$$\forall t < t', \quad \underline{\mu}_{\{t,t'\}} = \mu_{\{t,t'\}}.$$

Or, $\underline{\mu}$ et μ appartiennent à $\mathscr{G}(\Pi)$. Il résulte alors de la proposition 4.3 (*a*), que $\mu = \underline{\mu}$ et $\mathscr{G}(\Pi) = \{ \underline{\mu} \}$.

5.2. Unicité de mesures de Gibbs invariantes par translation : extension d'un résultat de Kesten. — En s'inspirant de la méthode employée par H. Kesten en [14] dans le cas où : $T = \mathbf{Z}$ et E est dénombrable, et en faisant des hypothèses convenables sur la fonction de densités p, nous obtenons le résultat d'unicité suivant :

Théorème 5.3. — *Soit* E *un espace l. c. d., muni de sa tribu borélienne* $\mathscr{E}$, *et* ν *une probabilité sur* $(E, \mathscr{E})$.

On suppose donnée une application $p : (t, x, y) \to p_t(x, y)$ *continue de* $\mathbf{R}_+^* \times E^2$, *à valeurs dans* $\mathbf{R}_+^*$, *qui définisse un semi-groupe homogène de densités par rapport à* ν.

On suppose de plus que p *vérifie la condition :*

(H) *pour tout compact* K *de* E, $\sup_{x, y \in K} |p_t(x, y) - 1| \xrightarrow[(t \to \infty)]{} 0.$

Si l'on désigne par $\mathcal{G}_T(\Pi)$ *l'ensemble des mesures de Gibbs associées à* Π, *et invariantes par les translations de* $\mathbf{R}$, *on a :*

(*a*) *si* ν *n'est pas invariante par le semi-groupe* $P_t(x, dy) = p_t(x, y)\,\nu(dy)$, $\mathcal{G}_T(\Pi)$ *est vide;*

(*b*) *si* ν *est invariante par* (P_t), $\mathcal{G}_T(\Pi)$ *est constitué de l'unique probabilité markovienne* $\underline{\mu}$ *sur* $\mathcal{X}_{\mathbf{R}}$, *admettant* ν *pour loi d'entrée*, et (P_t) *pour semi-groupe de transition.*

Remarques. — (*a*) Soulignons que, dans l'énoncé de ce théorème, nous n'avons pas supposé, *a priori*, ν invariante par le semi-groupe (P_t).

(*b*) La partie (*b*) de l'énoncé de ce théorème est à comparer avec la partie (*a*) de celle du théorème 4.4, qui se trouve ici renforcée, grâce à l'hypothèse (H).

Démonstration. — Supposons que μ appartienne à $\mathcal{G}_T(\Pi)$. Nous allons montrer alors que, pour tous $t < t'$, et K_1 et K_2 deux compacts de E, on a

$$\mu_{\{t, t'\}}(K_1 \times K_2) = \int_{K_1} d\nu(x_1) \int_{K_2} d\nu(x_2)\, p_{t'-t}(x_1, x_2). \tag{16}$$

Admettons provisoirement ce résultat.

On en déduit en particulier que $\mu_{\{t\}} = \nu$, et $\mu_{\{t'\}} = \nu P_{t'-t}$. Or, par hypothèse, $\mu_{\{t\}} = \mu_{\{t'\}}$.

Pour que $\mathcal{G}_T(\Pi)$ ne soit pas vide, il est donc nécessaire que ν soit invariante par (P_t), d'où (*a*).

Supposons cette propriété vérifiée. D'après (16), on a alors :

$$\forall t < t', \quad \mu_{\{t, t'\}} = \underline{\mu}_{\{t, t'\}}$$

et, d'après la proposition 4.3 (*a*), $\mu = \underline{\mu}$, d'où (*b*).

Montrons maintenant l'égalité (16). Notons μ_0 la loi $\mu_{\{t\}}$, qui ne dépend pas de t, d'après l'hypothèse.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un compact K tel que $\mu_0(E \setminus K) < \varepsilon$. Si $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\mu_{\{-n, n\}}(E^2 \setminus K^2) \leqq 2\,\mu_0(E \setminus K) < 2\,\varepsilon,$$

d'après l'invariance de μ par translation.

On en déduit, pour $n \in \mathbf{N}$, tel que $n \geqq \max(|t|, |t'|)$:

$$(16') \qquad |\mu_{\{t,t'\}}(K_1 \times K_2) - \mu_{\{-n,t,t',n\}}(K \times K_1 \times K_2 \times K)| \leqq 2\varepsilon.$$

Notons $\chi(dx_1, dx_2)$ la mesure de probabilité $\nu(dx_1)\nu(dx_2)p_{t'-t}(x_1, x_2)$ sur $(E^2, \mathscr{E}^{\otimes 2})$ (on sait que $\chi = \mu_{\{t,t'\}}$). On a également :

$$(16'') \qquad \left|\chi(K_1 \times K_2) - \int \mu_{\{-n,n\}}(dx, dy) 1_{K \times K}(x, y)\chi(K_1 \times K_2)\right| \leqq 2\varepsilon.$$

De (16') et (16''), on déduit, en utilisant l'expression de $\mu_{\{-n,t,t',n\}}$, qui découle de l'appartenance de μ à $\mathscr{G}(\Pi)$:

$$\begin{aligned} &|\mu_{\{t,t'\}}(K_1 \times K_2) - \chi(K_1 \times K_2)| \\ &\leqq 4\varepsilon + \int_{K \times K} \mu_{\{-n,n\}}(dx, dy) \int_{K_1} \nu(dx_1) \times \\ &\quad \times - \int_{K_2} \nu(dx_2) p_{t'-t}(x_1, x_2) \times \left| \frac{p_{t+n}(x, x_1) p_{n-t}(x_2, y)}{p_{2n}(x, y)} - 1 \right|. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H), on a

$$\sup_{\substack{x, y \in K \\ x_1 \in K_1, y \in K_2}} \left| \frac{p_{t+n}(x, x_1) p_{n-t}(x_2, y)}{p_{2n}(x, y)} - 1 \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

La dernière intégrale écrite tend donc vers zéro, lorsque $n \to \infty$, ce qui entraîne (16).

Exemple : Le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck. — Il est défini sur $E = \mathbf{R}$, à l'aide de β et D deux constantes > 0, avec

$$d\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta D}} e^{-(x^2/2\beta D)} dx,$$

où dx est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$, et

$$p_t(x, y) = [1 - e^{-2\beta t}]^{-1/2} \exp\left[-\frac{(y - e^{-\beta t} x)^2}{2\beta D(1 - e^{-2\beta t})} + \frac{y^2}{2\beta D} \right]$$

(*cf.* [20], p. 56).

L'hypothèse (H) est clairement vérifiée, on a donc le :

COROLLAIRE 5.4. — *Il n'existe qu'une seule mesure de Gibbs invariante par les translations pour le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck.*

Remarques. — (*a*) La condition (H) peut-elle être affaiblie par la condition : « (P_t) admet ν pour probabilité invariante et est positivement récurrent »?

On sait, sous cette hypothèse, d'après [6], que

$$\forall x \in E, \quad \int_E |p_t(x, y) - 1| \, d\nu(y) \xrightarrow[(t \to \infty)]{} 0.$$

Dans le cas où E est *dénombrable* (c'est le cadre dans lequel travaille Kesten), et muni de la topologie discrète, cette condition entraîne (H) (*voir* la démonstration du lemme 5.1).

(*b*) L'unique mesure invariante μ associée au processus d'Ornstein-Uhlenbeck est la *mesure du champ libre* de masse β, on retrouve ainsi le résultat de G. Royer (*cf.* [25]) pour ce cas particulier.

Par ailleurs il est démontré dans [25] et [26] qu'il existe une infinité de mesures de Gibbs (non invariantes par les translations) différentes de $\underline{\mu}$ associées à ce semi-groupe.

6. Spécifications associées aux semi-groupes de convolution : absence (en général) de mesures de Gibbs

Soit G un groupe localement compact, séparable, abélien dont la tribu borélienne est notée $\mathscr{H}$, et admettant ν pour mesure de Haar.

On considère le semi-groupe (P_t) sur $(\mathrm{G}, \mathscr{H})$ défini par

$$\begin{aligned} &\forall \varphi \in b(\mathscr{H}), \quad \mathrm{P}_t(\varphi)(x) = \int \varphi(x+y) f_t(y)\, d\nu(y) \\ &\forall t > 0, \qquad\qquad\qquad\quad = \int \varphi(y) f_t(y-x)\, d\nu(y), \end{aligned}$$

où $(f_t)_{t>0}$ est une famille de densités strictement positives, vérifiant l'équation de convolution : $\forall\, t,\, t' > 0,\, f_t \bigstar f_{t'} = f_{t+t'}$. La mesure de Haar ν étant invariante par (P_t), on peut appliquer les différents résultats obtenus précédemment. Le résultat de ce paragraphe est le :

THÉORÈME 6.1. — *Soit* Π *la spécification associée au semi-groupe de convolution* $\mathrm{P}_t(x, dy) = f_t(y-x)\, d\nu(y)$, *de densité* f_t *strictement positive* ν-p. s.

Alors, $\mathscr{G}(\Pi)$ *est non vide si, et seulement si,* G *est compact.*

Démonstration. — (*a*) On sait que la propriété : G compact équivaut à ν finie. Si cette propriété est réalisée, $\mathscr{G}(\Pi)$ contient au moins (avec nos notations précédentes) la probabilité $(1/\nu(\mathrm{G}))\, \underline{\mu}$, qui appartient d'ailleurs à $\mathscr{G}_{\mathrm{M,T}}(\Pi)$.

(*b*) Supposons maintenant $\nu(\mathrm{G}) = \infty$. Toute probabilité de $\mathscr{G}(\Pi)$ étant intégrale de probabilités extrémales dans $\mathscr{G}(\Pi)$, il suffit, pour montrer que $\mathscr{G}(\Pi)$ est vide, de prouver qu'il n'y a pas de probabilités extrémales dans $\mathscr{G}(\Pi)$. Or, d'après [4], une telle probabilité extrémale Q, si elle existe, est markovienne, et est liée à $\underline{\mu}$ par la formule (10) (prop. 4.3), avec la fonction de densité

$$f_{s,t}(x, y) = \varphi_s(x)\, \psi_t(y), \qquad \nu \otimes \nu\text{-p. s.}; \quad (s, t) \in \Delta.$$

De plus, les fonctions φ et ψ vérifient, d'après la même proposition

$$(11) \qquad \begin{cases} \forall\, t, \quad \varphi_t \psi_t > 0, \quad \nu\text{-p. s.} \quad \text{et} \quad \displaystyle\int \varphi_t \psi_t\, d\nu = 1, \\ \forall\, t < t', \qquad \psi_t = \mathrm{P}_{t-t'} \psi_{t'}, \qquad \nu\text{-p. s.}, \\ \qquad\qquad\quad\;\; \varphi_{t'} = \hat{\mathrm{P}}_{t'-t}\, \varphi_t, \qquad \nu\text{-p. s.} \end{cases}$$

Définissons les probabilités $\xi\,(dn, dx)$ et $\hat{\xi}\,(dn, dx)$ sur $\mathbf{Z}\times G$, par $\xi = \delta_1 \otimes f_1(x)\,\nu(dx)$, et $\hat{\xi} = \delta_{-1} \otimes f_1(-x)\,\nu(dx)$. Remarquons alors que si les fonctions Φ et Ψ sur $\mathbf{Z}\times G$ sont respectivement les restrictions de φ et ψ à $\mathbf{Z}\times G$, on a, d'après (11) :

$$\Phi \bigstar \hat{\xi} = \Phi, \qquad \text{et} \qquad \Psi \bigstar \xi = \Psi$$

presque sûrement pour la mesure de Haar produit sur $\mathbf{Z}\times G$. D'après le théorème 3 de Choquet-Deny [1], il existe donc deux mesures positives bornées m et m' sur l'ensemble $\mathscr{X}$ des caractères multiplicatifs réels de $\mathbf{Z}\times G$, telles que

$$\forall\, n\in\mathbf{Z}, \quad \Phi(n, x) = \int_{\mathscr{X}} \chi(n, x)\, m(d\chi), \qquad \nu(dx)\text{-p. s.},$$

$$\Psi(n, x) = \int_{\mathscr{X}} \chi(n, x)\, m'(d\chi), \qquad \nu(dx)\text{-p. s.}$$

Remarquons que si $\chi\in\mathscr{X}$, on a $\chi(n, x) = \chi_1(n)\,\chi_2(x)$, où $\chi_1(n) = \chi(n, 0)$, $\chi_2(x) = \chi(0, x)$ sont respectivement des caractères multiplicatifs réels sur $\mathbf{Z}$ et G.

Calculons maintenant $I = \int \varphi_n(x)\,\psi_n(x)\,d\nu(x)$, en se souvenant, par ailleurs, que, d'après (11), $I = 1$.

On a, d'après le théorème de Fubini :

$$I = \int_G d\nu(x) \iint_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}} dm(\chi)\, dm'(\chi')(\chi_1\chi'_1)(n)(\chi_2\chi'_2)(x)$$

$$= \iint_{\mathscr{X}\times\mathscr{X}} dm(\chi)\, dm'(\chi')(\chi_1\chi'_1)(n) \int_G (\chi_2\chi'_2)(x)\, d\nu(x).$$

Or, si $\chi, \chi'\in\mathscr{X}$, $\lambda = \chi_2\chi'_2$ est un caractère multiplicatif réel sur G, et un tel caractère n'est intégrable par rapport à ν que si ν est finie. En effet, G étant abélien, on a l'égalité

$$\int_G \lambda(x)\, d\nu(x) = \int_G \lambda(-x)\, d\nu(x) = \int_G \frac{1}{\lambda(x)}\, d\nu(x).$$

Si $\int \lambda(x)\, d\nu(x) < \infty$, on a donc : $\nu(\lambda \geqq 1) < \infty$, et $\nu(\lambda < 1) = \nu(1/_\lambda > 1) < \infty$, d'où $\nu(G) < \infty$.

Les mesures m et m' n'étant pas nulles, on a donc $I = \infty$, ce qui contredit $I = 1$.

COROLLAIRE 6.2. — *Si* Π *est la spécification associée au semi-groupe du mouvement brownien à valeurs dans* $\mathbf{R}^d$, $\mathscr{G}(\Pi)$ *est vide.*

En effet, dans ce cas, ν est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$, et

$$f_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-(|x|^2/2t)} \quad (t > 0).$$

Dans ce cas, on pourrait montrer directement que $\mathcal{G}(\Pi)$ est vide en utilisant que, pour tous compacts K, K′, K″ de $\mathbf{R}^d$, on a

$$\sup_{(x, y, z) \in K \times K' \times K''} \left| \frac{p_t(x, y)\, p_t(y, z)}{p_{2t}(x, z)} - 1 \right| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0.$$

Lorsque $T = \mathbf{Z}$, la version discrète du théorème 6.1 est la :

PROPOSITION 6.3. — *Soit* $\mu(dx) = f(x)\, d\nu(x)$ *une probabilité sur* G, *équivalente à la mesure de Haar* ν, *et* Π *la spécification associée au semi-groupe* (*discret*) $p_n(x, y)$ *de densités par rapport à* ν, *défini par*

$$p_n(x, y) = f^{*n}(y-x) \qquad (n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}).$$

Alors, $\mathcal{G}(\Pi)$ *est non vide si, et seulement si,* G *est compact.*

Lorsque G est dénombrable, on retrouve ainsi le résultat de F. Spitzer (*cf.* [28]).

APPENDICE A.1

On rappelle le résultat classique suivant : *les seules solutions mesurables* $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *de l'équation fonctionnelle*

$$\forall s, t \in \mathbf{R}, \quad F(t+s) = F(t) + F(s)$$

sont les fonctions $F(t) = at$ ($a \in \mathbf{R}$).

On en déduit le :

LEMME. — *Les solutions mesurables* $\lambda : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ *de l'équation fonctionnelle* $\forall s, t \in \mathbf{R}_+$, $\lambda(t+s) = \lambda(t)\lambda(s)$ *sont :*

(α) $\lambda(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}_+,$

(β) $\lambda(t) = 0, \quad \forall t > 0 \quad \text{et} \quad \lambda(0) = 1,$

(γ) $\lambda(t) = e^{ct}, \quad \forall t \in \mathbf{R}_+ \quad \text{où } c \in \mathbf{R}.$

Démonstration. — (α) Si $\lambda(0) = 0$, on a, pour tout $t \geqq 0$,

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \lambda(t+0) = \lambda(t)\lambda(0).\\ &= 0.\end{aligned}$$

(β) Si $\lambda(0) \neq 0$, comme $(\lambda(0))^2 = \lambda(0)$, on a $\lambda(0) = 1$.

S'il existe $t_0 > 0$ tel que $\lambda(t_0) = 0$, on a alors, pour tout $t > 0$, $\lambda(t) = 0$. En effet, il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $t_0/n < t$, ce qui entraîne

$$\lambda(t) = \lambda\left(t - \frac{t_0}{n}\right)\lambda\left(\frac{t_0}{n}\right) = \lambda\left(t - \frac{t_0}{n}\right)(\lambda(t_0))^{1/n} = 0!$$

(γ) On peut donc supposer que pour tout $t \geqq 0$, $\lambda(t)$ n'est pas nul. On a alors $\lambda(t) = (\lambda(t/_2))^2 > 0$, et donc $\lambda(t) = \exp\{\operatorname{Log}\lambda(t)\}$. D'après le rappel, il existe $c \in \mathbf{R}$, tel que $\operatorname{Log}\lambda(t) = ct$, d'où $\lambda(t) = e^{ct}$.

APPENDICE A.2

COMPLÉMENTS SUR LA CONSERVATIVITÉ, ET L'ERGODICITÉ

Pour étudier les propriétés de conservativité et d'ergodicité relatives à un semi-groupe markovien $(P_t(x, dy))_{t \geqq 0}$, il suffit en général de considérer individuellement les noyaux markoviens $P_t(x, dy)$ (pour $t > 0$, fixé).

Aussi, notre donnée de base est ici un noyau markovien $P(x, dy) = p(x, y)\,\nu(dy)$ sur l'espace l. c. d. E, muni de sa tribu borélienne $\mathscr{E}$. *A priori*, $P(x, dy)$ est seulement absolument continu par rapport à la mesure σ-finie positive ν. On suppose que ν est invariante pour P. D'autre part, toutes les propriétés étudiées ci-dessous s'expriment relativement à ν.

On peut toujours choisir p bimesurable, et positive. On note alors

$$\hat{P}(x, dy) = p(y, x)\,\nu(dy),$$

qui est le noyau dual de P pour ν.

Rappellons que P est dit conservatif si [4] :

$$\forall f \in \mathscr{E}_+, \quad \sum_{n=0}^{\infty} P^n f(x) = \infty, \qquad \nu\text{-p. s. sur } (f > 0).$$

condition qui équivaut clairement à

$$\forall A \in \mathscr{E}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} P^n 1_A(x) = \infty, \qquad \nu\text{-p. s. sur A.}$$

Les lemmes suivants font l'intérêt de cette notion :

LEMME 1. — *Supposons* P *conservatif. Si* $f \in \mathscr{E}_+$ *est telle que* $Pf \leqq f$ ν-p. s., *elle vérifie en fait :* $Pf = f$, ν-p. s.

Démonstration. — Soit $g(x) = f(x) - Pf(x)$, si $Pf(x) \leqq f(x)$
$= 0$, sinon.

On a alors :

$$\sum_{n=0}^{p} P^n g = f - P^{p+1} f \leqq f, \qquad \nu\text{-p. s.}$$

[4] Toutes les fonctions considérées sont supposées finies ν — p. s.

D'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n g < \infty, \qquad \nu\text{-p. s.}$$

ce qui entraîne $g = 0$, ν-p. s., et donc $Pf = f$, ν-p. s.

Remarque. — Si ν est finie, il n'est pas nécessaire de faire l'hypothèse de conservativité sur P, pour obtenir le résultat du lemme 1. En effet,

$$Pf \leqq f \Rightarrow \forall n \in \mathbf{N}, \quad P(f \wedge n) \leqq f \wedge n, \qquad \nu\text{-p. s.}$$

Or, ν étant P-invariante, $\nu[P(f \wedge n)] = \nu[f \wedge n]$, d'où

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad P(f \wedge n) = f \wedge n, \qquad \nu\text{-p. s.},$$

et finalement,

$$Pf = f, \qquad \nu\text{-p. s.}$$

LEMME 2. — P *est conservatif si, et seulement si,* $\hat{P}$ *l'est.*

Démonstration. — Montrons, par exemple, que si P est conservatif, $\hat{P}$ l'est. Il s'agit donc de montrer que, pour tout $A \in \mathscr{E}$, tel que $\nu(A) > 0$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{P}^n(x, A) = \infty, \qquad \nu\text{-p. s. sur A},$$

ce qui équivaut à

$$\forall B \subset A, \qquad \text{tel que} \quad \nu(B) > 0, \quad \left\langle 1_B, \sum_{n=0}^{\infty} \hat{P}^n(.\,; A) \right\rangle_\nu = \infty.$$

Or, l'expression écrite précédemment est égale à $\left\langle \sum_{n=0}^{\infty} P^n(., B), 1_A \right\rangle_\nu$, quantité qui est infinie, d'après la conservativité de P. ■

Énonçons maintenant la propriété *d'ergodicité :* P est dit *ergodique* si les relations $Pf = f$ ν-p. s., et $f \in L^\infty(\nu)$ impliquent que f est constante hors d'un ensemble de ν-mesure nulle.

LEMME 3. — *Si* P *est conservatif et ergodique, les seules fonctions* $f \in \mathscr{E}_+$ *telles que* $Pf = f$ ν*-p. s. sont les fonctions constantes* ν*-p. s.*

Démonstration. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $P(f \wedge n) \leqq f \wedge n$, ν-p. s. et donc, d'après le lemme 1, $P(f \wedge n) = f \wedge n$, ν-p. s. P étant ergodique, $f \wedge n$ est ν-p. s. égale à une constante, et finalement, f est ν-p. s. constante. ■

On suppose maintenant que P est un noyau de Harris (sous-entendu : pour ν), c'est-à-dire que la chaîne $(\Omega, \mathscr{F}_\infty, \mathscr{F}_n, (X_n)_{n\in\mathbf{N}}, (P_x)_{x\in E})$ associée à P vérifie la condition de Harris, à savoir :

pour tout $A\in\mathscr{E}$, tel que $\nu(A)>0$, et pour tout $x\in E$,

$$P_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} 1_A(X_n)=\infty\right]=1.$$

Énumérons quelques résultats classiques (*cf.* [11], [13] et [24]) : ν est l'unique mesure σ-finie invariante par P (à un facteur multiplicatif près).

Cette propriété entraîne immédiatement que la seule fonction $f\in\mathscr{E}_+$ telle que $\hat{P}f=f$, ν-p. s. est ν-p. s. constante ($f.\nu$ est une mesure invariante pour P).

La chaîne $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est apériodique [car $P(x, dy) << \nu$] ce qui équivaut encore à : pour toute loi μ sur $(E, \mathscr{E})$, la tribu de queue $\mathscr{C}=\bigcap_n \sigma\{X_m, m\geqq n\}$ est P_μ triviale.

LEMME 4. — *Si* P *est un noyau de Harris, il est conservatif et ergodique.*

Démonstration. — (*a*) La conservativité de P découle de l'égalité

$$\forall A\in\mathscr{E},\quad \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, A)=E_x\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_A(X_n)\right).$$

(*b*) Soit $f\in L^\infty(\nu)$ telle que $Pf=f$ ν-p. s. $M_n=f(X_n)$ est alors une $(P_\nu, \mathscr{F}_n)$ martingale bornée, qui converge P_ν-p. s. vers une variable M_∞, $\mathscr{C}$ mesurable, donc constante ν-p. s. Ceci entraîne que $f(X_0)=E_\nu(M_\infty/\mathscr{F}_0)$ est P_ν-p. s. constante, c'est-à-dire que f est ν-p. s. constante. ■

Examinons maintenant la stabilité par dualité de la propriété de Harris. Rappellons tout d'abord que si P est un noyau de Harris pour ν, il existe une ν-modification de $\hat{P}$ qui est aussi un noyau de Harris ([24], th. 2.16, p. 80). Ceci entraîne, comme corollaire, que si P est de Harris, $\hat{P}$ est conservatif et ergodique.

Nous allons montrer directement que, sous des hypothèses assez fortes, $\hat{P}$ est lui-même de Harris.

PROPOSITION 1. — *Si* P *est un noyau de Harris pour* ν, *et que, de plus :*

— ν *est une probabilité qui charge tout ouvert de* E;

— $\hat{P}$ *est fortement fellerien* [i. e. : $\hat{P}(b(\mathscr{E}))\subset C_b(E)$]; *alors*, $\hat{P}$ *est un noyau de Harris pour* ν.

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que $\hat{P}\,1=1$ ν-p. s. entraîne à cause des hypothèses, $\hat{P}\,1\equiv 1$. $\hat{P}(x, dy)$ est donc un noyau markovien.

De plus, pour tout $A\in\mathscr{E}$, tel que $\nu(A)>0$, on a

$$1=P_\nu\Big(\sum_n 1_A(X_n)=\infty\Big)=\hat{P}_\nu\Big(\sum_n 1_A(X_n)=\infty\Big).$$

Posons $u(x) = \hat{P}_x[\sum_n 1_A(X_n) = \infty]$. u est une fonction $\hat{P}$ harmonique [i. e. : $\forall x \in E$, $\hat{P} u(x) = u(x)$], qui est égale à 1, ν-p. s. Or, $\hat{P} u$ est une fonction continue, et finalement, $1 \equiv \hat{P} u \equiv u$.

On a donc :

$$\forall x \in E, \quad \hat{P}_x[\sum_n 1_A(X_n) = \infty] = 1,$$

ce qui signifie que $\hat{P}$ est un noyau de Harris. ■

Nous relions maintenant les notions de semi-groupe et de noyau de Harris : si $P_t(x, dy) = p_t(x, y)\, \nu(dy)$ est un semi-groupe de Hunt, de mesure invariante ν, il est dit de Harris (relativement à ν), si

$$\forall A \in \mathscr{E}, \quad \text{tel que } \nu(A) > 0,$$

on a

$$\forall x, \quad \hat{P}_x\left[\int_0^\infty 1_A(X_s)\, ds = \infty\right] = 1$$

(avec des notations évidentes).

En [6], il est démontré que si $(P_t)_{t \geq 0}$ est de Harris, alors, pour tout $t > 0$, le noyau $P_t(x, dy)$ est de Harris pour ν, et donc, d'après ce qui précède, conservatif et ergodique, ainsi que $\hat{P}_t$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. CHOQUET et J. DENY, *Sur l'équation de convolution*, $\mu = \mu \bigstar \sigma$ (*C. R. Acad. Sc.*, t. 250, série A, 1960, p. 799-801).

[2] K. L. CHUNG, *Some Universal Field Equations* [*Séminaire de Probabilités VI*, p. 90-97 (*Lecture Notes in Math.*, Springer)].

[3] Ph. COURRÈGE et P. RENOUARD, *Oscillateur anharmonique, mesures quasi invariantes sur* $\mathscr{C}$ (**R**, **R**) (*Astérisque*, *Soc. Math.* Fr., n° 22-23, 1975).

[4] N. DANG NGOC and G. ROYER, *Markov Property of Extremal Local Fields* [*Proc. A.M.S.*, 1977 (à paraître)].

[5] R. L. DOBRUSHIN, *Description of a Random Field by Means of Conditionnal Probabilities and the Conditions Governing its Regularity* (*Theor. Probability Appl.*, vol. 13, 1968, p. 197-224).

[6] M. DUFLO et D. REVUZ, *Propriétés asymptotiques des probabilités de transition des processus de Markov récurrents* (*Ann. Inst. Henri-Poincaré*, vol. 5, 1969, p. 233-244).

[7] E. B. DYNKIN, *The Initial and Final Behavior of Trajectories of Markov Processes* [*Russ. Math. Surveys* (Uspekhi), vol. 26, 1971, p. 165-182].

[8] H. FÖLLMER, *Phase Transition and Martin Boundary* [*Séminaire de Probabilités IX* (*Lecture Notes in Math.*, 1975, Springer)].

[9] H. FÖLLMER, *On the Potential Theory of Stochastic Fields* (*Proceedings of International Statistical Institute*, 40th Session, Warsaw, septembre 1975).

[10] F. GUERRA, L. ROSEN and B. SIMON, *The* $P(\varphi)_2$ *Euclidean Quantum Fields as Classical Statistical Mechanics* (*Ann. of Math.*, vol. 101, 1976, p. 111-259).

[11] T. E. HARRIS, *The Existence of Stationary Measures for Certain Markov Processes* (*Proc. Third. Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. II*, 1956, p. 113-124).

[12] K. ICHIHARA and H. KUNITA, *A Classification of the Second Order Degenerate Elliptic Operators and its Probabilistic Applications* (*Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw.*, Geb. 30, 1974, p. 235-254).

[13] B. JAMISON and S. OREY, *Markov Chains Recurrent in the Sense of Harris* (*Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw.*, Geb. 8, 1967, p. 41-48).

[14] H. KESTEN, *Existence and Uniqueness of Countable One-Dimensional Markov Random Fields* (*Ann. of Prob.*, vol. 4, 1976, p. 556-569).

[15] F. KNIGHT, *A Remark on Markovian Germ Fields* (*Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, vol. 15, 1970, p. 291-296).

[16] O. LANFORD and D. RUELLE, *Observables at Infinity and States with short Range Correlations in Statistical Mechanics* (*Comm. Math. Phys.*, vol. 13, 1969, p. 194-215).

[17] V. MANDREKAR, *Germ-field Markov Property for Multiparameter Processes* [*Séminaire de Probabilités X*, p. 78-85 (*Lecture Notes in Math.*, 1976, Springer)].

[18] P. A. MEYER et M. YOR, *Sur la théorie de la prédiction et le problème de décomposition des tribus* $\mathscr{F}^{0}_{t+}$ [*Séminaire de Probabilités X*, p. 104-117 (*Lecture Notes in Math.*, 1976, Springer)].

[19] E. NELSON, *Construction of Quantum Fields from Markov Fields* (*J. Funct. Anal.*, vol. 12, 1973, p. 97-112).

[20] E. NELSON, *Dynamical Theories of Brownian Motion* (*Mathematical Notes*, Princeton University Press).

[21] J. NEVEU, *Base mathématique du calcul des probabilités*, Masson, Paris, 1970.

[22] C. J. PRESTON, *Gibbs States on Countable Sets*, Cambridge University Press, London-New York, 1974.

[23] P. PRIOURET et M. YOR, *Processus de diffusion et mesures quasi invariantes sur* C (**R**, **R**) (*Astérisque*, *Soc. Math. Fr.*, n° 22-23, 1975).

[24] D. REVUZ, *Markov Chains*, North Holland Mathematical Library, 1975.

[25] G. ROYER, *Unicité de certaines mesures quasi invariantes sur* C (**R**) (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 8, 1975, p. 319-338).

[26] G. ROYER et M. YOR, *Représentation intégrale de certaines mesures quasi invariantes sur* C (**R**)*; mesures extrémales et propriété de Markov* (*Ann. Inst. Fourier*, vol. 26, 1976, p. 7-24).

[27] D. RUELLE, *Statistical Mechanics*, Benjamin, New York, 1969.

[28] F. SPITZER, *Phase Transition in One-Dimensional Nearest Neighbor Systems* (*J. Funct. Anal.*, vol. 20, 1975, p. 240-254).

[29] J. T. COX, *Entrance Laws for Markov Chains* (*Annals of Prob.*, vol. 5, 1977, p. 533-549).

[30] E. B. DYNKIN and J. E. KUZNECOV, *Determining Functions of Markov Processes* (*Dokl. Akad. Nauk.*, vol. 214, 1974, English *Transl.*, vol. 15, 1974, p. 20-23).

(Manuscrit reçu le 23 juin 1977.)