

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN-PAUL DUFOUR

Sur la stabilité des diagrammes d'applications différentiables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 10, n° 2 (1977), p. 153-174

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1977_4_10_2_153_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA STABILITÉ DES DIAGRAMMES D'APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

PAR JEAN-PAUL DUFOUR

0. Introduction

Les travaux de J. Mather [4] sur la stabilité des applications différentiables suscitent de multiples généralisations ou spécialisations : l'étude de la stabilité équivariante [5], de la (r, s) stabilité [9], de la stabilité des cascades ([1], [2]). Si la généralisation des résultats des cascades aux diagrammes sans cycles et où toute variété est la source d'au plus une application (diagrammes « convergents ») se fait sans problèmes, il n'en est pas de même pour les diagrammes plus généraux. De façon précise un phénomène nouveau apparaît avec les diagrammes



(diagrammes « divergents ») : alors que le cas des diagrammes convergents [ou ceux de la stabilité équivariante et de la (r, s) stabilité] se règle par des extensions convenables du théorème de préparation, il semble que l'étude des diagrammes divergents nécessite des résultats plus fins. Pour ces résultats, la situation peut varier suivant que l'on étudie les cas formel, analytique ou différentiable contrairement à ce qui se passe pour les théorèmes de préparation classiques.

Dans ce travail, nous inaugurons l'étude de ces problèmes et donnons les premiers résultats. Notre premier paragraphe définit les notions de stabilité et de stabilité infinitésimale pour des diagrammes quelconques. Nous introduisons-là une notion de stabilité locale, la « stabilité homotopique locale » qui rend évidente l'implication : localement stable entraîne localement infinitésimalement stable. Les quatre paragraphes suivants étudient la réciproque. Dans le deuxième paragraphe nous donnons les outils algébriques qui, généralisant ceux utilisés dans les cas connus, devraient permettre de résoudre le problème. Les premières difficultés apparaissent là : le théorème 1 donne le résultat que l'on attendait concernant les diagrammes convergents mais le lemme 2.1 met en évidence

l'impossibilité d'une généralisation; le théorème 2 prouve cependant que l'on a « formellement » les outils espérés. Le troisième paragraphe montre comment les techniques développées au deuxième paragraphe s'appliquent à notre problème; le théorème 3 prouve l'équivalence entre la stabilité et la stabilité infinitésimale pour les diagrammes convergents, le théorème 4 prouve que la stabilité infinitésimale entraîne la stabilité « formelle » pour des diagrammes quelconques. Notre quatrième paragraphe prouve que les diagrammes avec des cycles orientés ne peuvent être stables. Dans ces conditions les diagrammes dont l'étude reste à faire sont ceux qui contiennent des sous-diagrammes divergents. S'attaquant à ces diagrammes divergents, le cinquième paragraphe ramène notre problème à la vérification d'une propriété algébrique (prop. 5.1). Enfin nous donnons dans notre dernier paragraphe les premiers exemples de diagrammes divergents stables.

1. Diagrammes et stabilité

On considère un diagramme D dont les flèches sont des applications différentiables (C^∞) et où sources et buts sont les variétés V_1, \dots, V_n . Ce diagramme détermine un graphe orienté \mathcal{G} dont les sommets sont V_1, \dots, V_n ; on note \mathcal{F} l'ensemble des arêtes de \mathcal{G} et pour tout $k \in \mathcal{F}$ on désigne par $o(k)$ l'indice de l'origine de k et $e(k)$ l'indice de l'extrémité de k . La flèche de D correspondant à k est notée f_k ($f_k: V_{o(k)} \rightarrow V_{e(k)}$). Soit D' un autre diagramme qui détermine le même graphe \mathcal{G} : on conserve les mêmes sommets, seules les flèches changent et deviennent f'_k pour tout $k \in \mathcal{F}$.

DÉFINITION 1.1. — On dit que D' est équivalent à D si il existe un n -uple (h_1, \dots, h_n) , où h_i est un difféomorphisme de V_i , $i = 1, \dots, n$, tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} V_{o(k)} & \xrightarrow{f_k} & V_{e(k)} \\ h_{o(k)} \downarrow & & \downarrow h_{e(k)} \\ V_{o(k)} & \xrightarrow{f'_k} & V_{e(k)} \end{array}$$

commutent pour tout $k \in \mathcal{F}$.

Si V et W sont deux variétés, on munit $C^\infty(V, W)$, l'espace des applications de classe C^∞ de V dans W , de la topologie de Whitney.

DÉFINITION 1.2. — On dit que le diagramme D est stable si il existe un voisinage V de $(f_k)_{k \in \mathcal{F}}$ dans $\prod_{k \in \mathcal{F}} C^\infty(V_{o(k)}, V_{e(k)})$ tel que, pour tout $(f'_k)_{k \in \mathcal{F}} \in V$, le diagramme D' que détermine ces applications est équivalent à D .

Exemples. — 1° Dans le cas où D se réduit à la seule flèche

$$V \xrightarrow{f} W,$$

on retrouve la notion de stabilité des applications différentiables [4]: c'est la stabilité sous l'action de $\text{Diff } V \times \text{Diff } W$ ($\text{Diff } M$ désigne le groupe des difféomorphismes de la variété M).

2° Prenons pour D le diagramme

$$\mathbf{R}^k \times \mathbf{V} \xrightarrow{\tilde{F}} \mathbf{R}^k \times \mathbf{W} \xrightarrow{p} \mathbf{R}^k,$$

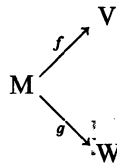
où $\tilde{F}(u, x) = (u, F(u, x)) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{W}$, pour tout $(u, x) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{V}$ et p est la projection canonique. Dans ce cas la stabilité de D est équivalente à la stabilité de F considéré comme déploiement à k paramètres de $x \rightarrow F(O, x)$ [2].

3° Prenons pour D le diagramme

$$\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s \times \mathbf{V} \xrightarrow{\tilde{F}} \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s \times \mathbf{R} \xrightarrow{p} \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s \xrightarrow{q} \mathbf{R}^s,$$

où $\tilde{F}(u, v, x) = (u, v, F(u, v, x))$, pour tout $(u, v, x) \in \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s \times \mathbf{V}$ et p et q sont les projections canoniques. Dans ce cas la stabilité de D équivaut à la (r, s) stabilité [9] du déploiement F (déploiement de $x \mapsto F(O, x)$).

4° Prenons pour D le diagramme



alors la stabilité de D équivaut à la stabilité de l'application $F : M \rightarrow V \times W$, de composantes f et g , sous l'action non plus de $\text{Diff } M \times \text{Diff } (V \times W)$ mais sous celle de $\text{Diff } M \times \text{Diff } V \times \text{Diff } W$: on fait agir au but des difféomorphismes produit de difféomorphismes; c'est dire que l'on respecte la structure produit du but.

5° Prenons pour D le diagramme

$$\mathbf{V} \xhookrightarrow{i} \mathbf{W} \xrightarrow{f} \mathbf{N},$$

où i est l'inclusion de V sous-variété de W . Alors la stabilité de D équivaut à la stabilité de f sous l'action des difféomorphismes de la source et du but mais en se restreignant aux difféomorphismes de la source qui laissent V invariant.

Dans la majeure part de ce travail nous nous contenterons d'une étude à la fois plus locale et plus précise de la stabilité. Nous pointons chaque variété en choisissant un point $x_i \in V_i$, pour tout $i = 1, \dots, n$ et supposons que pour tout $k \in \mathcal{F}$ on a $f_k(x_{o(k)}) = x_{e(k)}$. Une déformation de D sera une famille $(F_k)_{k \in \mathcal{F}}$ d'applications différentiables telles que, pour tout $k \in \mathcal{F}$, $F_k : \mathbf{R} \times V_{o(k)} \rightarrow V_{e(k)}$, avec $F_k(0, x) = f_k(x)$, pour tout $x \in V_{o(k)}$.

DÉFINITION 1.3. — Nous dirons que D est localement homotopiquement stable [en (x_1, \dots, x_n)] si pour toute déformation $(F_k)_{k \in \mathcal{F}}$ il existe des applications différen-

tiables $h_i : \mathbb{R} \times V_i \rightarrow V_i$, $i = 1, \dots, n$, vérifiant $h_i(0, x) = x$, pour tout $x \in V_i$ et telles que l'on puisse écrire les équations

$$(1.1) \quad h_{e(k)}(t, F_k(t, x)) = f_k(h_{o(k)}(t, x)),$$

pour tout $k \in \mathcal{F}$, tout t assez voisin de 0 et tout $x \in V_{o(k)}$ assez voisin de $x_{o(k)}$.

On visualise cette définition en remarquant qu'elle veut dire que l'on peut écrire, pour tout t assez voisin de 0 et tout k , des carrés commutatifs

$$(1.2) \quad \begin{array}{ccc} V_{o(k)} & \xrightarrow{F_{kt}} & V_{e(k)} \\ h_{o(k)t} \downarrow & & \downarrow h_{e(k)t} \\ V_{o(k)} & \xrightarrow{f_k} & V_{e(k)} \end{array}$$

en notant F_{kt} l'application $x \mapsto F_k(t, x)$, h_{it} est l'application $x \mapsto h_i(t, x)$. Comme h_{io} est l'identité, h_{it} est un difféomorphisme local pour t voisin de 0 et l'on peut traduire la définition précédente en disant que le diagramme D_t , obtenu en considérant la famille $(F_{kt})_k$, est localement équivalent à D pour t assez proche de 0.

En généralisant un peu cette définition on peut définir la notion de « versalité »; la stabilité locale est la versalité de dimension 0 [voir à ce sujet [2]]. Les techniques d'étude de la versalité sont très proches de celle de la stabilité locale.

Une des idées générales dans ce genre d'étude consiste à montrer que la stabilité équivaut à une condition de nature algébrique, la stabilité infinitésimale. Des considérations heuristiques comme dans [4] ou très rigoureuses comme dans [6] amènent aux définitions qui suivent.

Reprenant les notations de [4], on désigne par θV l'ensemble des champs de vecteurs sur la variété V ; c'est un module de type fini sur $C^\infty(V)$, l'anneau des fonctions différentiables sur V . Si $f : V \rightarrow W$ est une application différentiable, on désigne par θf l'ensemble des champs « au-dessus » de f ; c'est un $C^\infty(V)$ module de type fini. On désigne par $tf : \theta V \rightarrow \theta f$ le $C^\infty(V)$ -homomorphisme défini par $tf(\xi) = df \times \xi$. On désigne par $\omega f : \theta W \rightarrow \theta f$ l'application définie par $\omega f(\eta) = \eta \circ f$; notons $f^* : C^\infty(W) \rightarrow C^\infty(V)$ l'homomorphisme induit par f alors il est clair que ωf est un homomorphisme « au-dessus de f^* » [i. e. $\omega f(\lambda \cdot x) = f^*(\lambda) \times \omega f(x)$, pour $x \in \theta W$ et $\lambda \in C^\infty(W)$].

Revenant à notre diagramme, nous posons $\theta D = \prod_{k \in \mathcal{F}} \theta f_k$; nous posons $\Lambda D = \prod_{i=1}^n \theta V_i$ et nous définissons $\alpha D : \Lambda D \rightarrow \theta D$ par

$$\alpha D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (-tf_k(\xi_{o(k)}) + \omega f_k(\xi_{e(k)}))_{k \in \mathcal{F}}.$$

DÉFINITION 1.4. — Nous dirons que le diagramme D est *infinitésimalement stable* si αD est surjectif.

Nous allons définir la notion locale correspondante dans le cas où les variétés V_i sont pointées comme ci-dessus. On désigne par θV_{ix} l'ensemble des germes de champs sur V_i au point x_i ; c'est un module sur $C_{x_i}^\infty(V_i)$, l'anneau des germes de fonctions sur V_i en x_i ; θf_{kx} désigne l'ensemble des germes en $x_{o(k)}$ de champs au-dessus de f_k ; tf_{kx} et ωf_{kx} désignent

les applications obtenues à partir de tf_k et ωf_k en passant aux germes. Enfin, on pose $\Lambda D_x = \prod_i \theta V_{ix}$ et $\theta D_x = \prod_k \theta f_{kx}$ et $\alpha D_x : \Lambda D_x \rightarrow \theta D_x$ désigne l'application obtenue à partir de αD en passant aux germes.

DÉFINITION 1.5. — Nous dirons que le diagramme D est localement *infinitésimalement stable* [en $x = (x_i)_{i=1, \dots, n}$], si αD_x est surjective.

Remarquons que la notion de stabilité locale introduite dans la définition 1.3 est plus forte que la notion habituelle [9]. Avec cette définition il est facile de prouver que la stabilité locale implique la stabilité infinitésimale locale. C'est essentiellement à la réciproque que sont consacrés les paragraphes qui suivent.

2. La machinerie algébrique

Tous les anneaux intervenant ici sont commutatifs et unitaires. Nous considérons un diagramme Δ dont les flèches sont des homomorphismes d'anneaux et où sources et buts sont des anneaux A_1, A_2, \dots, A_n . Le diagramme détermine un graphe orienté \mathcal{G}^* dont les sommets sont A_1, \dots, A_n : nous nous plaçons dans le cas où \mathcal{G}^* est le graphe obtenu à partir de \mathcal{G} (premier paragraphe) en remplaçant V_i par A_i , pour $i = 1, \dots, n$, et en remplaçant chaque flèche $f_k : V_{o(k)} \rightarrow V_{e(k)}$ par un homomorphisme $\varphi_k : A_{e(k)} \rightarrow A_{o(k)}$, pour tout $k \in \mathcal{F}$. Remarquons que l'on renverse le sens des flèches. On considère une famille $I = (I_i)_{i=1, \dots, n}$, où I_i est, pour tout i , un idéal dans le radical de A_i de façon que l'on ait $\varphi_k(I_{e(k)}) \subset I_{o(k)}$, pour tout $k \in \mathcal{F}$.

DÉFINITION 2.1. — Un Δ -homomorphisme (α, N, M) consiste en la donnée de trois familles $(N_i)_{i=1, \dots, n}$, $(M_k)_{k \in \mathcal{F}}$, $(\alpha_i^k)_{i=1, \dots, n}$, où N_i est, pour tout i , un A_i -module de type fini, M_k est, pour tout k , un $A_{o(k)}$ -module de type fini et où $\alpha_i^k : N_i \rightarrow M_k$ est un $A_{o(k)}$ -homomorphisme si $i = o(k)$, un φ_k -homomorphisme si $i = e(k)$ et est nul dans les autres cas. Alors nous notons α l'application de $N = \prod_{i=1}^n N_i$ dans $M = \prod_{k \in \mathcal{F}} M_k$ qui admet (α_i^k) pour « matrice » :

$$\alpha(\xi_1, \dots, \xi_n) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^k(\xi_i) \right)_{k \in \mathcal{F}} = (\alpha_{o(k)}^k(\xi_{o(k)}) + \alpha_{e(k)}^k(\xi_{e(k)}))_{k \in \mathcal{F}}.$$

On note $I.M$ le produit $\prod_{k \in \mathcal{F}} I_{o(k)}.M_k$ et $I.N$ le produit $\prod_{i=1}^n I_i.M_i$.

Rappelons les notations de la référence [5]. Soient A et B deux anneaux, I et J des idéaux respectifs de A et B , $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme tel que $\varphi(I) \subset J$.

DÉFINITION 2.2. — Nous dirons que φ admet une contraction adéquate relativement à I et J si pour tous B -modules M et N , M de type fini, tout A -module P de type fini, tout B -homomorphisme $\beta : N \rightarrow M$, tout φ -homomorphisme $\alpha : P \rightarrow M$, l'hypothèse

$$(2.1) \quad \alpha(P) + \beta(N) + J.M = M$$

entraîne les deux égalités

$$(2.2) \quad \alpha(P) + \beta(N) = M,$$

$$(2.3) \quad \alpha(I.P) + \beta(J.N) = J.M.$$

Généralisant cette définition nous sommes conduits à écrire la définition qui suit.

DÉFINITION 2.3. — Nous dirons que le diagramme Δ est *adéquat* relativement à I si, pour tout Δ -homomorphisme (α, N, M) , l'hypothèse

$$(2.4) \quad \alpha(N) + I.M = M$$

entraîne les deux égalités

$$(2.5) \quad \alpha(N) = M,$$

$$(2.6) \quad \alpha(I.N) = I.M.$$

Par la suite nous verrons que l'on sait prouver que la stabilité infinitésimale implique la stabilité si certains diagrammes sont adéquats au sens de cette définition. Auparavant, nous énoncerons quelques résultats d'adéquation.

DÉFINITION 2.4. — Un *graphe convergent* est un graphe orienté qui n'a pas de cycle et où tout sommet est l'origine d'au plus une arête (une « antiarborescence »).

THÉORÈME 1. — *On suppose que \mathcal{G} est un graphe convergent. Alors si φ_k admet une contraction adéquate relativement à $I_{e(k)}$ et $I_{o(k)}$, pour tout $k \in \mathcal{F}$, le diagramme Δ est adéquat relativement à I .*

Démonstration. — Pour le cas particulier des cascades $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n$ ce théorème est un corollaire de la proposition 2.1. de la référence [2]. On ramène le cas qui nous préoccupe au cas des cascades de la manière suivante. On remarque d'abord qu'il suffit de raisonner dans le cas où \mathcal{G}^* est une arborescence de racine A_1 (quitte à changer les indices) : i. e. tout A_i , $i > 1$, est le but d'exactly une flèche, A_1 n'est le but d'aucune flèche. Pour $i > 1$, on dit que i est de niveau p si le chemin

$$A_1 \rightarrow A_{i_1} \rightarrow \dots \rightarrow A_i,$$

nécessairement unique, qui joint A_1 à A_i dans Δ comporte $p-1$ flèches. On associe alors à Δ la cascade Δ' :

$$B_1 \xrightarrow{\psi_1} B_2 \xrightarrow{\psi_2} \dots \xrightarrow{\psi_{m-1}} B_m,$$

où $B_1 = A_1$ et B_p , pour $p > 1$ est le produit des A_i pour i de niveau p . Pour chaque indice i de niveau $p+1$ il existe k , unique, dans \mathcal{F} tel que $i = o(k)$; on note k_i cet indice. Alors $\Psi_p : B_p \rightarrow B_{p+1}$ est déterminé par

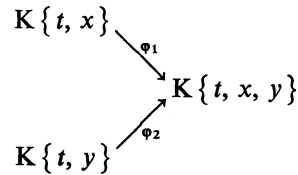
$$\Psi_p((a_j)_{j \text{ de niveau } p}) = (\varphi_{k_i}(a_{e(k_i)}))_{i \text{ de niveau } p+1}.$$

On pose $J_p = \prod_{i \text{ de niveau } p} I_i$; $J_1 = I_1$. Alors Ψ_p admet une contraction adéquate relativement à J_p et J_{p+1} . Enfin, on remarque qu'un Δ -homomorphisme peut être considéré comme un Δ' -homomorphisme en écrivant $N = \prod_{i=1}^n N_i$ sous la forme $\prod_{p=1}^m N'_p$, avec $N'_p = \prod_{i \text{ de niveau } p} I_i$ et en procédant de manière analogue pour M . Ceci achèvera la démonstration du théorème.

Remarquons que pour qu'un diagramme soit adéquat, il est nécessaire que chaque flèche admette une contraction adéquate. Cette condition n'est plus suffisante pour des diagrammes plus généraux que ceux intervenant dans le théorème 1. Le lemme qui suit fournit un exemple de ce type.

Dans la suite de ce paragraphe, K désigne \mathbf{R} ou \mathbf{C} ; $K \{ x_1, \dots, x_p \}$ désigne l'anneau des séries entières à rayon de convergence non nul, de variables x_1, \dots, x_p , $K [[x_1, \dots, x_p]]$ désigne l'anneau des séries formelles de variables x_1, \dots, x_p à coefficients dans K .

LEMME 2.1. — On considère le diagramme Δ :



où φ_1 et φ_2 sont les inclusions évidentes. Dans chacun des trois anneaux de Δ on considère l'idéal engendré par t . Alors φ_1 et φ_2 admettent des contractions adéquates mais Δ n'est pas adéquat relativement à ces idéaux.

Démonstration. — Le fait que φ_1 et φ_2 admettent des contractions adéquates est une conséquence classique du théorème de division. Pour montrer que Δ n'est pas adéquat, on construit un Δ -homomorphisme (α, N, M) tel que $\alpha(N) + (t).M = N$ et $\alpha(N) \neq M$. Dans ce but on pose $\delta = -x + 2y$ et on note J l'idéal de $K \{ t, x, y \}$ engendré par $(x-y)^2 + t$. On définit (α, N, M) en écrivant $N_{e(1)} = K \{ t, x \}$, $N_{e(2)} = K \{ t, y \}$, $N = N_{o(1)} = N_{o(2)} = \{ (\xi, \eta) \in (K \{ t, x, y \})^2 / \xi + \delta\eta \in J \}$, $M_1 = M_2 = K \{ t, x, y \}$; $\alpha_{e(1)}^1$ et $\alpha_{e(1)}^2$ sont les inclusions (φ_1 et φ_2), $\alpha_{o(1)}^1$ et $\alpha_{o(2)}^2$ sont les composantes de l'inclusion $N \hookrightarrow M_1 \times M_2$. L'équation $\alpha(N) + (t).M = M$ se traduit par

$$(2.7) \quad \overline{M} = K \{ t, x \}.a + K \{ t, y \}.b + t.\overline{M},$$

en notant $\overline{M} = K \{ x, y, t \} / J$, a est l'unité dans \overline{M} et $b = \delta.a$. De même, l'équation $\alpha(N) = M$ se traduit par

$$(2.8) \quad \overline{M} = K \{ t, x \}.a + K \{ t, y \}.b.$$

Un calcul minutieux mais sans difficulté majeure (on en trouvera les grandes lignes dans [3]) prouve que (2.7) est vraie alors que (2.8) ne l'est pas. Ceci achève la démonstration.

Les résultats précédents pourraient laisser penser que l'adéquation de Δ est déterminée de manière essentielle par la structure du graphe sous-jacent. Le théorème qui suit donne une situation où Δ est adéquat indépendamment de cette structure.

THÉORÈME 2. — *On suppose que le diagramme Δ est tel que $A_i = K[[t, x_1, \dots, x_{n_i}]]$ pour tout i , que $\varphi_k : A_{e(k)} \rightarrow A_{o(k)}$ est un homomorphisme de K -algèbre unitaire tel que $\varphi_k(t) = t$ et $\varphi_k(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ (\mathcal{M} = idéal maximal) pour tout $k \in \mathcal{F}$. On prend pour I_i l'idéal (t) engendré par t . Alors Δ est adéquat relativement à I indépendamment de la structure du graphe que détermine Δ .*

Démonstration. — On remarque d'abord que l'on a

$$\varphi_k(\sigma) = \sigma(t, \varphi_k(x_1), \dots, \varphi_k(x_{n_{e(k)}})),$$

pour tout $k \in \mathcal{F}$ et toute série $\sigma \in K[[t, x_1, \dots, x_{n_{e(k)}}]]$.

Soit alors un Δ -homomorphisme (α, N, M) tel que $\alpha(N) + I.M = M$. Pour chaque M_k on choisit un système de générateurs $m_1^k, \dots, m_{g(k)}^k$ et M_k est isomorphe à $(A_{o(k)})^{g(k)}/R_k$, où R_k est le module des relations. Comme $A_{o(k)}$ est noethérien R_k est de type fini engendré par $r_1^k, \dots, r_{j(k)}^k$. Pour chaque i nous choisissons un système de générateurs $n_1^i, \dots, n_{p(i)}^i$ de N_i . Pour tout k et tout i on a

$$\begin{aligned} \alpha_{o(k)}^k(n_i^{o(k)}) &= \sum_{j=1}^{g(k)} \alpha_i^{kj} m_j^k, \\ \alpha_{e(k)}^k(n_i^{e(k)}) &= \sum_j \beta_i^{kj} m_j^k, \end{aligned}$$

où α_i^{kj} et β_i^{kj} sont des séries formelles dans $A_{o(k)}$. Pour prouver $\alpha(N) = M$ il faut prouver que pour tout $m = (\sum_j \lambda_j^i m_j^i)_{k \in \mathcal{F}}$ dans M il existe une famille $(\xi_j^i)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, p(i)}}$ où ξ_j^i est pour tout i une série formelle dans A_i , telle que l'on puisse écrire les équations

$$(2.9) \quad \sum_{j=1}^{g(k)} \left(\sum_{i=1}^{p(o(k))} \xi_{o(k)}^i \alpha_i^{kj} + \sum_{i=1}^{p(e(k))} \varphi_k(\xi_{e(k)}^i) \beta_i^{kj} \right) m_j^k = \sum_{j=1}^{g(k)} \lambda_j^k m_j^k,$$

pour tout $k \in \mathcal{F}$. En notant $r_i^k = (r_i^{k1}, \dots, r_i^{kg(k)})$ (2.9) devient

$$(2.10) \quad \sum_{i=1}^{p(o(k))} \xi_{o(k)}^i \alpha_i^{kj} + \sum_{i=1}^{p(e(k))} \varphi_k(\xi_{e(k)}^i) \beta_i^{kj} + \sum_{i=1}^{s(k)} r_i^{kj} \eta_i^{kj} = \lambda_k^j,$$

où les inconnues sont les ξ et les η ; k et j prennent toutes les valeurs possibles.

Nous ordonnons toute série entière σ dans $K[[t, x_1, \dots, x_p]]$ suivant les puissances de t , i. e. nous écrivons

$$\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} [\sigma]_i t^i,$$

où $[\sigma]_i$ est indépendant de t . Pour résoudre (2.10) nous construisons les solutions ξ et η par une méthode de récurrence : on construit successivement $[\xi]_0$ et $[\eta]_0$, $[\xi]_1$ et $[\eta]_1$, ...

L'hypothèse $\alpha(N) + I.M = M$ prouve que l'on sait résoudre (2.10) modulo les termes en t ; en particulier cela prouve que l'on sait résoudre le système d'équations

$$(2.11) \quad \sum_{i=1}^{p(o(k))} \mu_{o(k)}^i [\alpha_i^{kj}]_0 + \sum_{i=1}^{p(e(k))} \mu_{e(k)}^i ([\varphi_k(x_1)]_0, \dots, [\varphi_k(x_{n(e(k))})]_0) + \sum_{i=1}^{s(k)} v_i^{kj} [r_i^{kj}]_0 = \theta_k^j,$$

où les inconnues sont les séries *indépendantes de t*, μ et v et les seconds membres θ_k^j sont des séries données indépendantes de t . Égalant les termes indépendants de t des deux membres de (2.10), on arrive à une équation du type (2.11) avec

$$\mu_h^i = [\xi_h^i]_0, \quad v_i^{kj} = [\eta_i^{kj}]_0 \quad \text{et} \quad \theta_k^j = [\lambda_k^j]_0;$$

on sait donc la résoudre et on construit ainsi $[\xi]_0$ et $[\eta]_0$. Nous supposons alors construits $[\xi]_0, \dots, [\xi]_{p-1}, [\eta]_0, \dots, [\eta]_{p-1}$ et nous voulons construire $[\xi]_p$ et $[\eta]_p$. Égalant les coefficients de t^p dans les deux membres de (2.10), nous arrivons à une équation du type (2.11) avec

$$\mu_h^i = [\xi_h^i]_p, \quad v_i^{kj} = [\eta_i^{kj}]_p \quad \text{et} \quad \theta_k^j = [\lambda_k^j]_p + H_p,$$

où H_p est une fonction des $[\xi]_0, \dots, [\xi]_{p-1}, [\eta]_0, \dots, [\eta]_{p-1}$. On sait donc résoudre cette équation et on construit ainsi pas à pas la solution de (2.10). Cela prouve $\alpha(N) = M$; comme $\alpha(I.N) = I.M$ s'en déduit (en multipliant les deux membres par t), on achève la démonstration du théorème 2.

3. Utilisation de la machinerie algébrique

Par la suite, travaillant localement, nous supposons $(V_i, x_i) = (\mathbb{R}^n, O)$, pour tout i .

Notre but est de prouver que la stabilité infinitésimale locale implique la stabilité homotopique locale.

Pour ce faire on considère une déformation quelconque $F = (F_k)_k$ de D et on essaye de construire les applications h_i de la définition 1.3 en intégrant des champs de vecteurs X_i dépendant du « temps » t définis sur chaque V_i ($X_i(t, h_i(t, x)) = (\partial h_i / \partial t)(t, x)$). En fait, comme nous travaillons localement, il suffit de déterminer les germes en O des X_i . On peut traduire (1.1) par

$$(3.1) \quad h_{e(k)t} \circ F_{kt} \circ h_{o(k)t}^{-1}(x) = f_k(x)$$

(x et t proches de l'origine). Compte tenu du fait que h_{i_0} est l'identité, (3.1) se traduit encore par

$$\frac{\partial}{\partial t} [h_{e(k)t} \circ F_{kt} \circ h_{o(k)t}^{-1}(x)] = 0,$$

pour (t, x) proche de l'origine. Cette dernière identité équivaut à

$$(3.2) \quad \frac{\partial F_k(t, x)}{\partial t} = d_x F_{kt} \times X_{o(k)}(t, x) - X_{e(k)} \circ \tilde{F}_k(t, x),$$

où l'on note \tilde{F}_k l'application $(t, x) \rightarrow (t, F_k(t, x))$. Ces identités sont valables pour tout k et (t, x) assez voisin de l'origine, Nous sommes alors amenés à résoudre le système d'équations (3.2), les inconnues sont les X_i .

Remarquons que V_i s'identifie à \mathbf{R}^{n_i} et qu'on peut remplacer les équations (3.2) par

$$(3.3) \quad \frac{\partial F_k^j}{\partial t}(t, x) = \sum_{h=1}^{n_o(k)} \frac{\partial F_k^j}{\partial x_h}(t, x) X_{o(k)}^h(t, x) - X_{e(k)}^j \circ \tilde{F}_k(t, x),$$

où F_k^j désigne la j -ième composante de F_k ($j = 1, \dots, n_{e(k)}$) et X_i^l est la l -ième composante de X_i ($l = 1, \dots, n_i$).

DÉFINITION 3.1. — Étant donnée une déformation $F = (F_k)_{k \in \mathcal{F}}$ de D nous appellerons *diagramme* Δ_F le diagramme Δ , du type de ceux envisagés dans le paragraphe 2, construit de la manière suivante. On prend $A_i = C_{(0,0)}^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n_i})$, l'anneau des germes à l'origine de fonctions $(t, x) \rightarrow \eta(t, x)$ de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n_i}$ dans \mathbf{R} , pour tout i . Pour tout $k \in \mathcal{F}$ on prend pour φ_k l'homomorphisme induit par $\tilde{F}_k : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n_o(k)} \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n_e(k)}$. Pour tout i , on désigne par I_i l'idéal de A_i formé des germes de fonctions nulles pour $t = 0$ (idéal engendré par t).

TRADUCTION ALGÈBRE DU PROBLÈME. — On définit maintenant un Δ_F -homomorphisme (α, N, M) de la manière suivante. Pour tout i on pose $N_i = A_i^{n_i}$. Pour tout $k \in \mathcal{F}$ on pose $M_k = A_{o(k)}^{n_o(k)}$. On définit $\alpha_{o(k)}^k$ en prenant pour $\alpha_{o(k)}^k(X_{o(k)}^1, \dots, X_{o(k)}^{n_o(k)})$ le $n_{e(k)}$ -uplet de germes dont la j -ième composante est donnée par

$$\sum_{h=1}^{n_o(k)} \frac{\partial F_k^j}{\partial x_h}(t, x) X_{o(k)}^h(t, x).$$

On définit $\alpha_{e(k)}^k$ en prenant pour $\alpha_{e(k)}^k(X_{e(k)}^1, \dots, X_{e(k)}^{n_e(k)})$ le $n_{e(k)}$ -uplet de germes dont la j -ième composante est donnée par $-X_{e(k)}^j \circ \tilde{F}_k(t, x)$.

Notons \bar{F}_k le germe à l'origine de $\partial F_k / \partial t$, c'est un élément de M_k . Avec les notations que nous venons d'introduire les équations (3.2) se traduisent par

$$(3.4) \quad (\bar{F})_{k \in \mathcal{F}} \in \text{Im } \alpha.$$

Pour résoudre (3.2) il suffit alors de prouver que α est une surjection, i. e. $\alpha(N) = M$.

Nous traduisons maintenant l'hypothèse de stabilité infinitésimale (locale). Considérons un élément quelconque $(\bar{Z}_k)_{k \in \mathcal{F}}$ de M , où \bar{Z}_k désigne le germe de $Z_k : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n_o(k)} \rightarrow \mathbf{R}^{n_e(k)}$. Les fonctions $x \rightarrow Z_k(0, x)$, $x \in \mathbf{R}^{n_o(k)}$, peuvent être assimilées à des champs « au-dessus de f_k ». Alors, D étant localement infinitésimalement stable, on peut écrire des équations

$$Z_k(0, x) = df_{kx} \times Y_{o(k)}(x) - Y_{e(k)} \circ f_k(x),$$

pour x assez proche de 0 .

En passant aux composantes, on peut réécrire ceci :

$$(3.5) \quad Z_k^j(0, x) = \sum_{h=1}^{n_{\alpha(k)}} \frac{\partial F_k^j}{\partial x_h}(0, x) \cdot Y_{\alpha(k)}^h(x) - Y_{e(k)}^j(F_k(0, x)).$$

Notons \overline{Y}_i le germe de Y_i à l'origine, \overline{Y}_i peut être considéré comme un élément de N_i . On note $(\overline{T}_k)_{k \in \mathcal{F}}$ l'image par α de $(\overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_n)$, ou \overline{T}_k est le germe de T_k ; (3.5) mène à $T_k(O, x) = Z_k(O, x)$, pour $x \in \mathbb{R}^{n_{\alpha(k)}}$. On écrit :

$$(3.6) \quad (\overline{Z}_k)_{k \in \mathcal{F}} = \alpha(\overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_n) + (\overline{Z}_k - \overline{T}_k)_{k \in \mathcal{F}}.$$

Comme $Z_k - T_k$ s'annule dès que $t = O$, on a $(Z_k - T_k)(t, x) = t \times \Lambda(t, x)$ et $\overline{Z}_k - \overline{T}_k$ est dans $I_{\alpha(k)} \cdot M_k$. Alors (3.6) mène à

$$\alpha(N) + I \cdot M = M.$$

Résumant les considérations précédentes, on arrive au lemme suivant.

LEMME 3.1. — Si D est localement infinitésimalement stable et si Δ_F est adéquat pour toute déformation F de D , alors D est localement homotopiquement stable.

Remarque. — On peut généraliser ces raisonnements pour ramener le passage de la stabilité infinitésimale (globale) à la stabilité à l'étude de l'adéquation de certains diagrammes Δ : on étend au cas des diagrammes la démarche classiquement suivie pour traiter le cas des applications (voir par exemple [5]). Dans cet article, où nous étudions les limites de cette extension, nous nous restreignons au cas local car c'est déjà dans ce cas qu'apparaissent les difficultés.

THÉORÈME 3. — Soit D un diagramme d'applications différentiables dont le graphe sous-jacent est un graphe convergent (sans cycle et où tout sommet est l'origine d'au plus un flèche). Alors D est localement homotopiquement stable si et seulement si il est localement infinitésimalement stable.

Démonstration. — La partie « seulement si » est générale, il nous suffit de prouver la partie « si ». Compte tenu du lemme 3.1, c'est une conséquence de l'adéquation des diagrammes Δ_F . On prouve à l'aide du théorème de division que les homomorphismes ϕ_k de Δ_F admettent des contractions adéquates relativement aux idéaux engendrés par t . Alors, appliquant le théorème 1, on achève la démonstration.

Remarque. — Ce théorème se généralise au cas global. La partie infinitésimalement stable implique stable, nécessite deux vérifications d'adéquation de diagramme Δ (les deux étant des conséquences du théorème 1). La réciproque nécessite un résultat légèrement plus fin que le théorème 1 : la proposition 2.2 de [2] (voir aussi [1]) que l'on étend facilement au cas des diagrammes convergents.

Pour des diagrammes D qui ne sont pas convergents, les diagrammes associés Δ_F ne vérifient plus les hypothèses du théorème 1 et il faut appliquer une méthode plus fine. En fait, notre but est la résolution de (3.3) sachant que l'on a $\alpha(N) + I \cdot M = M$. On

peut décomposer cette résolution en deux étapes : (a) la résolution « formelle » où l'on remplace les fonctions données par leurs séries de Taylor (formelles) et l'on cherche des solutions X_i^j dans $\mathbf{R}[[t, x_1, \dots, x_{n_i}]]$; (b) la résolution « plate » où l'on cherche à prouver que (3.3) admet des solutions X_i^j plates en O (toutes les dérivées nulles) si l'on remplace les premiers membres de cette équation par n'importe quelles fonctions plates en O.

DÉFINITION 3.2. — Nous dirons que le diagramme D est *localement formellement stable* (en O) si l'on sait résoudre formellement (3.3), c'est-à-dire s'il existe des séries formelles X_i^j , dans $\mathbf{R}[[t, x_1, \dots, x_{n_i}]]$ ($j = 1, \dots, n_i; i = 1, \dots, n$) telles que l'on ait

$$T\left(\frac{\partial F_k^j}{\partial t}\right) = \sum_{h=1}^{n_{o(k)}} T\left(\frac{\partial F_k^j}{\partial x_h}\right) \cdot X_{o(k)}^h - X_{e(k)}^j \circ T(\tilde{F}_k(t, x)),$$

pour tout $j = 1, \dots, n_{e(k)}$, tout $k \in \mathcal{F}$ et où $T(\lambda)$ désigne, pour toute application différentiable $\lambda : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^q$ le q -uplet des séries de Taylor des q -composantes de λ .

THÉORÈME 4. — *Tout diagramme localement infinitésimalement stable est localement formellement stable.*

Démonstration. — On associe à D les diagrammes Δ'_F obtenus à partir de Δ_F en remplaçant $C_{(0,0)}^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^m)$, par $\mathbf{R}[[t, x_1, \dots, x_{n_i}]]$, pour tout i et en prenant pour φ_k les homomorphismes induits par $T(\tilde{F}_k)$. On construit un Δ'_F -homomorphisme (α', N', M') de la même façon que l'on avait construit (α, N, M) mais en remplaçant partout les fonctions par leurs développements de Taylor. L'hypothèse se traduit par $\alpha(N) + I \cdot M = M$; elle implique $\alpha'(N') + t \cdot M' = M'$. Comme Δ'_F vérifie les hypothèses du théorème 2, on en déduit $\alpha'(N') = M'$; la stabilité locale formelle en est une conséquence immédiate. Ceci achève la démonstration.

4. Cycles orientés

Un « cycle orienté » est un diagramme connexe dans lequel tout sommet est l'extrémité d'une (unique) arête et l'origine d'une (unique) arête. Un cycle peut se réduire à un « lacet » : une seule arête dont origine et extrémité sont confondues.

THÉORÈME 5. — *Tout diagramme possédant un cycle orienté n'est pas localement infinitésimalement stable.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que si un diagramme est stable tous ses sous-diagrammes le sont, donc il suffit de raisonner dans le cas où ce diagramme se réduit à un cycle orienté. Nous étudions d'abord le cas d'un lacet

$$\mathbf{R}^n \ni f \quad (f(0) = 0).$$

Raisonnant par l'absurde, nous supposons que ce diagramme est infinitésimalement stable. Cela s'écrit : pour tout n -uplet $Y = (Y^1, \dots, Y^n)$ de fonctions de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R} , il existe un autre n -uplet $X = (X^1, \dots, X^n)$ tel que l'on puisse écrire :

$$(4.1) \quad Y^i = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial f^i}{\partial x_j} - X^i \circ f,$$

en notant f^i la i -ième composante de f . Nous allons comparer les développements de Taylor à l'ordre 1 des deux membres de (4.1), pour cela nous convenons de noter

$$g_0 + \sum_{j=1}^n g_j x_j + \sum_{h,k=1}^n g_{hk} x_h x_k,$$

le développement de Taylor à l'ordre 2 de toute fonction $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ (développement à l'origine). Écrivant que les termes de degré 0 des deux membres de (4.1) sont égaux, nous arrivons à

$$(4.2) \quad Y_0^i = \sum_j X_0^j f_j^i - X_0^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ce système aura des solutions pour tout Y si et seulement si il est de Cramer et dans ce cas la donnée des $Y_0^i, i = 1, \dots, n$, détermine $X_0^j, j = 1, \dots, n$. Écrivant que les coefficients de x_k des deux membres de (4.1) sont égaux, nous arrivons à

$$(4.3) \quad Y_k^i = \sum_{j \neq k} f_{kj}^i X_0^j + 2 f_{kk}^i X_0^k + \sum_{j=1}^n X_k^j f_j^i - \sum_{j=1}^n X_j^i f_k^j.$$

On réécrit ceci :

$$(4.4) \quad Z_k^i = \sum_{j=1}^n X_k^j f_j^i - \sum_{j=1}^n f_k^j X_j^i,$$

en faisant passer les termes en X_0 [déterminés par (4.2)] au premier membre. Notons respectivement Z, F et X' les matrices $n \times n$ dont les coefficients sont Z_k^i, f_k^i et X_k^i , alors (4.4) se traduit par l'équation matricielle

$$Z = X' \cdot F - F \cdot X'.$$

Si notre diagramme était infinitésimalement stable, cette équation devrait admettre des solutions X' , pour tout Z : autrement dit l'application linéaire $\Phi : X' \rightarrow X' \cdot F - F \cdot X'$ de l'espace des matrices $n \times n$ sur lui-même, devrait être surjective. Cela est impossible car alors Φ serait injective donc son noyau serait réduit à la matrice nulle. Or, il contient F ($F = 0$ interdit à Φ d'être surjective).

Raisonnons maintenant dans le cas général où le diagramme est un cycle

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R}^{d_1} & \xrightarrow{f^1} & \mathbf{R}^{d_2} & \xrightarrow{f^2} & \mathbf{R}^{d_3} \\ & & & & \downarrow f^3 \\ & & & & \mathbf{R}^{d_n} \\ & & & & \leftarrow \dots \leftarrow \\ & & & & \uparrow f^n \end{array}$$

où $f^i(0) = 0$, pour $i = 1, \dots, n$. Raisonnant par l'absurde, nous supposons que ce diagramme est infinitésimalement stable; cela mène, comme ci-dessus, à dire que l'on sait résoudre le système d'équations

$$(4.5) \quad \begin{cases} Z_0^{ij} = \sum_{k=1}^{d_i} f_k^{ij} X_0^{ik} - X_0^{i+1j} & (i = 1, 2, \dots, n-1; j = 1, \dots, d_{i+1}), \\ Z_0^{nj} = \sum_{k=1}^{d_n} f_k^{nj} X_0^{nk} - X_0^{1j} & (j = 1, \dots, d_1); \end{cases}$$

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_h^{ij} = \sum_{k \neq h} f_{kh}^{ij} X_0^i + 2 f_{hh}^{ij} X_0^{ih} + \sum_{k=1}^{d_i} f_k^{ij} X_h^{ik} - \sum_{k=1}^{d_i+1} X_k^{i+1j} f_h^{ik} \\ (i = 1, 2, \dots, n-1; j = 1, \dots, d_{i+1}; h = 1, \dots, d_i), \\ Z_h^{nj} = \sum_{k \neq h} f_{kh}^{nj} X_0^{nk} + 2 f_{hh}^{nj} X_0^{nh} + \sum_{k=1}^{d_n} f_k^{nj} X_h^{nk} - \sum_{k=1}^{d_i} X_k^{1j} f_n^{nk} \\ (j = 1, \dots, d_1; h = 1, \dots, d_n); \end{array} \right.$$

quels que soient les premiers membres (les inconnues sont les lettres X). Le système (4.5) a autant d'équations que d'inconnues; donc ce doit être un système de Cramer et les « X_0 » sont déterminés par (4.5). On peut alors modifier les équations (4.6) en envoyant tout ce qui concerne les X_0 dans les premiers membres et, employant des notations matricielles, ce système devient un système

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z^1 = F^1 X^1 - X^2 F^1, \\ Z^2 = F^2 X^2 - X^3 F^2, \\ \vdots \\ Z^{n-1} = F^{n-1} X^{n-1} - X^n F^{n-1}, \\ Z^n = F^n X^n - X^1 F^n, \end{array} \right.$$

où X^i est la matrice $d_i \times d_i$ de coefficients X_k^{ij} , F^i la matrice $d_i \times d_{i+1}$ de coefficients f_k^{ij} , pour $i < n$, F^n la matrice $d_n \times d_1$ de coefficients f_k^{jn} , .. Soit A une matrice $n \times p$; on remarque que l'équation matricielle

$$(4.8) \quad Z = AX - YA,$$

où les inconnues sont les matrices carrées X et Y admet des solutions pour tout Z seulement si A est de rang maximal. Dans ces conditions, si notre diagramme était infinitésimalement stable, on saurait résoudre (4.7) avec n'importe quels premiers membres et les F^i ($i = 1, \dots, n$) seraient toutes de rang maximal. Supposons, pour simplifier, que d_1 est le plus petit des nombres d_1, \dots, d_n . Le système (4.7) mène à

$$(4.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} F^n F^{n-1} \dots F^2 Z^1 = F^n F^{n-1} \dots F^1 X^1 - F^n F^{n-1} \dots F^2 X^2 F^1, \\ F^n F^{n-1} \dots F^3 Z^2 F^1 = F^n F^{n-1} \dots F^2 X^2 F^1 - F^n \dots F^3 X^3 F^2 F^1, \\ F^n \dots F^4 Z^3 F^2 F^1 = F^n \dots F^3 X^3 F^2 F^1 - F^n \dots F^4 X^4 F^3 F^2 F^1, \\ \vdots \\ Z^n F^{n-1} \dots F^1 = F^n X^n F^{n-1} \dots F^1 - X^1 F^n F^{n-1} \dots F^1, \end{array} \right.$$

qui par sommation membre à membre donne

$$(4.10) \quad F^n \dots F^2 Z^1 + \dots + Z^n F^{n-1} \dots F^1 = (F^n \dots F^1) X^1 - X^1 (F^n \dots F^1).$$

Compte tenu du fait que les matrices F^i sont de rang maximal et que $d_1 = \inf (d_i)_{i=1, \dots, n}$, $F^n \dots F^2$ est de rang maximal d_1 . Dans ces conditions $F^n \dots F^2 Z^1$ peut être n'importe quelle matrice $d_1 \times d_1$; (4.10) est donc une équation de la forme (4.8)

où le premier membre peut prendre n'importe quelle valeur. Nous retrouvons la même contradiction que lors de l'étude de (4.8). Ceci achève la démonstration du théorème.

Ainsi, tout diagramme possédant un cycle orienté ne peut être localement homotopiquement stable.

Nous considérons un cycle orienté D pour lequel nous notons f la composée des flèches du cycle ($f = f^n \circ f^{n-1} \circ \dots \circ f^1$). Alors, le théorème précédent se « globalise » en remarquant que D ne peut être (globalement) infinitésimalement stable si l'une des itérées de f admet un point fixe.

5. Diagrammes divergents

Les diagrammes dont l'étude reste à faire sont ceux qui ne sont pas convergents et qui ne contiennent pas de cycles orientés : ces diagrammes ont tous des sous-diagrammes du type suivant :

$$(5.1) \quad D : \begin{array}{ccc} & & V_1 \\ & \nearrow^{f_1} & \\ V_3 & & \\ & \searrow_{f_2} & \\ & & V_2 \end{array}$$

Dans ce paragraphe nous abordons l'étude de ces diagrammes que nous appelons *diagrammes divergents*.

PROPOSITION 5.1. — *Tout diagramme divergent localement infinitésimalement stable est localement homotopiquement stable si la propriété suivante est vérifiée : (★) pour tout module M de type fini sur $C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$, tout P sous- $C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p)$ -module de M de type fini, tout Q sous- $C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^q)$ -module de M de type fini, l'équation*

$$(5.2) \quad P + Q + (t) \cdot M = M$$

implique l'équation

$$(5.3) \quad P + Q = M$$

[(t) désigne l'idéal des germes de fonctions nulles pour $t = 0$].

Démonstration. — Compte tenu du lemme 3.1., il suffit que la propriété envisagée implique l'adéquation des diagrammes Δ_F . Simplifiant un peu les notations, nous posons $n_1 = p, n_2 = q, n_3 = n$. Considérons une déformation F de D et un Δ_F -homomorphisme (α, N, M) tel que $\alpha(N) + (t) \cdot M = M$; on peut écrire cette équation sous la forme

$$(5.4) \quad A + B + C + (t) \cdot M = M,$$

avec $A = (\alpha_3^1 \times \alpha_3^2)(N_3)$, $B = \alpha_1^1(N_1) \times O$, $C = O \times \alpha_2^2(N_2)$ et $M = M_1 \times M_2$.

On remarque que A est un sous A_3 -module de M, que B est un sous A_1 -module de M via \tilde{F}_1^* et C un sous A_2 -module via \tilde{F}_2^* (notations du paragraphe 3). On note $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ l'application définie par $G(t, x) = (t, F_1(t, x), F_2(t, x))$; elle

induit $G^* : C_0^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q) \rightarrow C_0^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n)$. Alors A et M peuvent être considérés comme des $C_0^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q)$ -modules *via* G^* , dans ces conditions B sera considéré comme un sous- $C_0^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p)$ -module de M et C comme un sous- $C_0^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^q)$ -module. Par ailleurs (5.4) implique

$$A + B \otimes C_0^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q) + C \otimes C_0^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q) + (t).M = M,$$

avec des notations évidentes; le lemme de Nakayama amène à

$$A + B \otimes C_0^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q) + C \otimes C_0^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q) = M$$

et l'on en déduit que M/A est un $C_0(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q)$ -module de type fini. Alors, « quotientant » par A , (5.4) devient une équation de la forme

$$B' + C' + (t). \frac{M}{A} = \frac{M}{A},$$

c'est une équation du type (5.2) pour laquelle les hypothèses de la proposition 5.1 sont vérifiées. On en déduit

$$B' + C' = \frac{M}{A},$$

qui mène à

$$A + B + C = M,$$

donc à $\alpha(N) = M$. Ceci achève la démonstration.

Le problème de prouver ou d'infirmar la propriété (★) [passage de (5.2) à (5.3)] est ouvert. Par des méthodes proches de celles de la démonstration du théorème 2, on peut prouver que le passage de (5.2) à (5.3) est formellement possible : pour tout module M de type fini sur $K[[t, x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q]]$, tout P sous- $K[[t, x_1, \dots, x_p]]$ -module de M de type fini, tout Q sous- $K[[t, y_1, \dots, y_q]]$ -module de M de type fini, l'équation $P + Q + (t).M = M$ implique $P + Q = M$. Le problème correspondant analytique, où l'on remplace $K[[\]]$ par $K\{\ \}$, admet des contre-exemples : on en construit un dans la démonstration du lemme 2.1 (voir [3]).

6. Les premiers exemples de diagrammes divergents stables

Dans ce paragraphe nous étudierons la stabilité des germes de diagrammes

$$D : \mathbf{R}^n, 0 \begin{array}{l} \nearrow f \mathbf{R}, 0 \\ \searrow g \mathbf{R}, 0 \end{array}$$

Un tel diagramme détermine un germe $\mathbf{R}^n, \mathbf{O} \xrightarrow{(f, g)} \mathbf{R}^2, \mathbf{O}$ (l'application de composantes f et g) et réciproquement. Il est clair que si D est stable, alors (f, g) est stable ainsi que f et g . Pour simplifier l'écriture nous dirons que (f, g) est *bi-stable* (bi-infinitésimalement stable) au lieu de dire que D est stable (infinitésimalement stable).

Dans le cas $n = 1$, les seuls germes bi-stables (à équivalence de diagramme près) sont $x \mapsto (x, x^2)$ et $x \mapsto (x, x)$. Rappelons la classification de Y. H. Wan [8], à difféomorphisme de la source près, pour les germes stables $(f, g) : \mathbf{R}^n, \mathbf{O} \rightarrow \mathbf{R}^2, \mathbf{O}$ ($n \geq 2$) :

(a) (f, g) de rang maximum en \mathbf{O} . Dans ce cas on trouve le modèle

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \mapsto (x, y).$$

(b) (f, g) est du type pli en \mathbf{O} . On a les modèles

$$(x, x_2, x_3, \dots, x_n) \mapsto \left(x, \lambda(x) + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2 \right),$$

où λ est une fonction différentiable de x .

(c) (f, g) est du type fronce en \mathbf{O} . On a les modèles

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \mapsto \left(U(x), \frac{y^3}{3} + xy + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2 + \lambda(x) \right),$$

où U est un difféomorphisme et λ une fonction différentiable. On remarque que si le modèle pli est bi-stable, alors $(x, x_2, \dots, x_n) \mapsto \lambda(x) + \sum \pm x_i^2$ est stable. Cela n'est possible que si λ est régulière ou présente un point critique non dégénéré en \mathbf{O} . Dans ce cas, les modèles pli qui nous intéressent sont les deux types suivants :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left(U(x), x + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2 \right),$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left(U(x), \pm x^2 + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2 \right),$$

où U est un difféomorphisme.

Par ailleurs, travaillant à une équivalence de diagramme près, nous pouvons faire opérer des difféomorphismes sur les deux composantes du but. Alors la liste des modèles à étudier peut se restreindre à la suivante :

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \mapsto (x, y) \quad (a),$$

$$(x, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left(x, x + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2 \right) \quad (b_1),$$

$$(x, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left(x, x^2 + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2 \right) \quad (b_2),$$

$$(x, y, x_3, \dots, x_n) \mapsto \left(x, \frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x) + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2 \right) \quad (c).$$

LE CAS RÉGULIER. — On vérifie aisément que le cas (a) est bi-infinitésimalement stable et bi-stable.

ÉTUDE DU CAS (b_1). — La bi-stabilité infinitésimale s'écrit : pour tout couple de germes (θ, η) de fonctions de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R} il existe des germes X, X_2, \dots, X_n, U, V , tels que l'on puisse écrire :

$$(6.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(x, x_2, \dots, x_n) = X(x, x_2, \dots, x_n) - U(x) \\ \eta(x, x_2, \dots, x_n) = \left(X + \sum_{i=2}^n \pm 2x_i X_i \right) (x, x_2, \dots, x_n) - V \left(x + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2 \right). \end{array} \right.$$

En fait, on sait résoudre le système plus simple

$$(6.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = X - U, \\ \eta = X + \sum_{i=2}^n \pm 2x_i X_i. \end{array} \right.$$

En effet, pour tout germe $g : \mathbf{R}^n, \mathbf{O} \rightarrow \mathbf{R}, \mathbf{O}$ on a

$$(6.3) \quad g(x, x_2, \dots, x_n) = g(x, 0, \dots, 0) + \sum_{i=2}^n x_i G_i(x, x_2, \dots, x_n),$$

en utilisant une bonne formule de Taylor. Alors, étant donnés θ et η , on peut écrire :

$$\eta - \theta = U(x) + \sum_{i=2}^n \pm 2x_i X_i(x, x_2, \dots, x_n).$$

Posons $X = \theta + U$; on en déduit les équations (6.2). Dans ces conditions on a prouvé que le modèle (b_1) est bi-infinitésimalement stable. Pour voir qu'il est bi-stable il faut prouver que l'on sait résoudre le système (3.3) correspondant. Ce système est ici de la forme :

$$(6.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(x, x_2, \dots, x_n, t) = \left(1 + t \frac{\partial f}{\partial x} \right) X(x, \dots, t) + t \sum_{i=2}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i(x, \dots, t) - U(x + tf, t) \\ \eta(x, \dots, x_n, t) = \left(1 + t \frac{\partial g}{\partial x} \right) X(x, \dots, t) \\ \quad + \sum_{i=2}^n \left(\pm 2x_i + t \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) X_i(x, \dots, t) - V \left(x + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2 + tg, t \right). \end{array} \right.$$

En fait, on sait résoudre le système plus simple

$$(6.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = \left(1 + t \frac{\partial f}{\partial x} \right) X + t \sum_{i=2}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i - U(x + tf, t), \\ \eta = \left(1 + t \frac{\partial g}{\partial x} \right) X + \sum_{i=2}^n \left(\pm 2x_i + t \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) X_i. \end{array} \right.$$

Pour prouver cela on peut, de manière évidente, « algébriser » le problème : (6.5) se traduit par une équation de la forme $\alpha(N) = M$ tandis que (6.2) mène à $\alpha(N) + t.M = M$. Le fait que $V\left(x + \sum_2^n \pm x_i^2 + tg, t\right)$ n'intervienne plus permet de répondre : on utilise simplement le fait que l'homomorphisme de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ induit par $(x, x_2, \dots, t) \rightarrow (x + tf(x, \dots, x_n), t)$ admet une contraction adéquate relativement aux idéaux de germes de fonctions nulles pour $t = 0$.

ÉTUDE DU CAS (b_2) . — Comme plus haut, la bi-stabilité infinitésimale mène à la résolution du système

$$(6.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(x, x_2, \dots, x_n) = X(x, \dots, x_n) - U(x), \\ \eta(x, x_2, \dots, x_n) = \left(2xX + \sum_{i=2}^n \pm 2x_i X_i\right)(x, \dots, x_n) - V\left(x + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2\right). \end{array} \right.$$

En fait, on sait résoudre le système plus simple

$$(6.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = X - U, \\ \eta = 2xX + \sum_{i=2}^n \pm 2x_i X_i - V, \end{array} \right.$$

avec $V \in \mathbb{R}$. En effet, soient θ et η donnés. On peut écrire :

$$\eta - 2x\theta = 2xU(x) + \sum_{i=2}^n \pm 2x_i X_i(x, \dots, x_n) - V,$$

en utilisant à nouveau (6.3). Posant $X = \theta + U$, nous avons notre résultat et le modèle (b_2) est bi-infinitésimalement stable. Nous allons encore montrer la bi-stabilité. En effet, on saura résoudre le système (3.3) correspondant si l'on sait résoudre le système (simplifié)

$$(6.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(x, \dots, x_n, t) = \left(1 + t \frac{\partial f}{\partial x}\right) X(x, \dots, t) + \sum_2^n \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i(x, \dots, t) - U(x + tf, t) \\ \eta(x, \dots, t) = \left(2x + t \frac{\partial g}{\partial x}\right) X + \sum_2^n \left(\pm 2x_i + t \frac{\partial g}{\partial x_i}\right) X_i - V(t). \end{array} \right.$$

« Algébrisant » le problème comme plus haut, on passera de la situation de (6.7) à la résolution de (6.8) grâce au théorème 1 et en utilisant la cascade

$$\Delta : C_0^\infty(\mathbb{R}) \xrightarrow{i} C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \xrightarrow{\varphi} C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}),$$

où i est l'injection induite par $(y, t) \mapsto t$ et φ l'homomorphisme induit par $(x, \dots, x_n, t) \mapsto (x + tf(x, \dots, x_n), t)$.

ÉTUDE DES CAS (c). — La bi-stabilité infinitésimale mène au système

$$(6.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(x, \dots, x_n) = X(x, \dots, x_n) - U(x), \\ \eta(x, \dots, x_n) = (y + \lambda'(x))X(x, \dots, x_n) + (y^2 + x)Y(x, \dots, x_n) \\ \quad + \sum_{i=3}^n \pm 2x_i X_i(x, \dots, x_n) - V\left(\frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x) + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2\right). \end{array} \right.$$

En fait, la résolution de ce système équivaut à la résolution de l'équation

$$(6.10) \quad \eta = (y + \lambda'(x))U(x) + (y^2 + x)Y(x, \dots, x_n) \\ + \sum_{i=3}^n \pm 2x_i X_i(x, \dots, x_n) - V\left(\frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x) + \sum \pm x_i^2\right)$$

[on passe de (6.10) à (6.9) en remplaçant le η de (6.10) par $\eta - (y + \lambda'(x))\theta$ et en posant $X = \theta + U$]. A l'aide d'une formule du type (6.3) on peut se ramener au cas où les seules variables sont x et y : (6.10) devient

$$(6.11) \quad \eta(x, y) = (y + \lambda'(x))U(x) + (y^2 + x)Y(x, y) - V\left(\frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x)\right).$$

Cette équation est équivalente à l'équation suivante :

$$(6.12) \quad \mu(y) = (y + \lambda'(-y^2))\alpha(y^2) + \beta\left(-\frac{2}{3}y^3 + \lambda(-y^2)\right).$$

En effet, on passe de (6.11) à (6.12) en faisant $x = -y^2$ dans (6.11). Réciproquement, étant donné $\eta(x, y)$, on peut écrire en utilisant (6.12) :

$$(6.13) \quad \eta(-y^2, y) = (y + \lambda'(-y^2))U(-y^2) - V\left(\frac{y^3}{3} - y^3 + \lambda(-y^2)\right);$$

dans ces conditions l'expression

$$(6.14) \quad \gamma(x, y) = \eta(x, y) - (y + \lambda'(x))U(x) + V\left(\frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x)\right)$$

est nulle pour $x = -y^2$. Or, par le théorème de division, on a

$$(6.15) \quad \gamma(x, y) = (x + y^2)Y(x, y) + Z(y)$$

et $\gamma(-y^2, y) = Z(y) = 0$; on en déduit $\gamma(x, y) = (x+y^2)Y(x, y)$ qui, combinée avec (6.14), mène à (6.11). On a donc prouvé le lemme suivant :

LEMME 6.1. — *La fronce*

$$c_\lambda : (x, y, x_3, \dots, x_n) \rightarrow \left(x, \frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x) + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2 \right)$$

est bi-infinitésimalement stable si et seulement si pour toute fonction (réelle de variable réelle) μ il existe deux fonctions α et β telles que l'on puisse écrire :

$$(6.16) \quad \mu(x) = (x + \lambda'(-x^2))\alpha(x^2) + \beta\left(-\frac{2}{3}x^3 + \lambda(-x^2)\right),$$

sur un voisinage de 0.

On voit tout de suite que si l'ordre de λ est supérieur ou égal à 2, l'équation (6.16) est impossible avec $\mu(x) = x^2$. Résumant les calculs précédents, nous pouvons énoncer le théorème qui suit :

THÉORÈME 6. — *Si D est un diagramme divergent stable déterminé par une application différentiable de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^2 , alors il est localement équivalent à l'un des modèles locaux suivants :*

$$\begin{aligned} (x, y, x_3, \dots, x_n) &\rightarrow (x, y) && \text{(modèle régulier),} \\ (x, x_2, \dots, x_n) &\mapsto \left(x, x + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2 \right) && [\text{pli } (b_1)], \\ (x, x_2, \dots, x_n) &\rightarrow \left(x, x^2 + \sum_{i=2}^n \pm x_i^2 \right) && [\text{pli } (b_2)], \\ (x, y, x_3, \dots, x_n) &\rightarrow \left(x, \frac{y^3}{3} + xy + \lambda(x) + \sum_{i=3}^n \pm x_i^2 \right) && [\text{fronce } (c_\lambda)]. \end{aligned}$$

De plus, le modèle régulier et les plis (b_1) et (b_2) déterminent des diagrammes stables, les seules fronces qui peuvent être stables sont les fronces (c_λ) pour lesquelles λ est régulière.

Remarque. — Nous laissons ouvert le problème de la stabilité de (c_λ) (pour λ régulière). Pour le moment, nous croyons pouvoir résoudre (6.16) et donc (c_λ) est bi-infinitésimalement stable; il reste à prouver (ou à infirmer) la bi-stabilité directement car ici nous n'avons pas le secours des techniques algébriques du deuxième paragraphe.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. A. BAAS, *Structural Stability of Composed Mappings*, Parts I-III, Preprint, The Institute for Advanced Study, Princeton, 1974.
- [2] J. P. DUFOUR, *Déploiements de cascades d'application différentiables* (Thèse 3^e cycle, octobre 1975, Montpellier).
- [3] J. P. DUFOUR, *Une limite aux extensions du théorème de préparation* (C.R. Acad. Sc. Paris, t. 282, série A, 1976, p. 199-202).

- [4] J. N. MATHER, *Stability of C^∞ Mapping I, II, III, IV, V and VI*.
- [5] V. POENARU, *Singularités C^∞ en présence de symétrie (Lecture notes in math., Springer Verlag, n° 510)*.
- [6] F. SERGERAERT, *Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4° série, t. 5, 1972, p. 599-660)*.
- [7] J. C. TOUGERON, *Stabilité des applications différentiables (Séminaire Bourbaki, n° 336, 1967, p. 1)*.
- [8] Y. H. WAN, *Morse Theory for Two Functions (Topology, vol. 14, n° 3, p. 218-228)*.
- [9] G. WASSERMAN, *Stability of Unfoldings in Space and Time (Acta Math., vol. 135, 1975, p. 57-128)*.

(Manuscrit reçu le 3 juin 1976.)

Jean-Paul DUFOUR,
Université des Sciences et Techniques du Languedoc,
Insitut de Mathématiques,
Place Eugène-Bataillon,
34060 Montpellier Cedex.