

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

FRANÇOIS LATOUR

Variétés géométriques et résolutions I. Classes caractéristiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 10, n° 1 (1977), p. 1-72

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1977_4_10_1_1_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VARIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES ET RÉSOLUTIONS

I. CLASSES CARACTÉRISTIQUES

PAR FRANÇOIS LATOUR

INTRODUCTION

Résolution et variété géométrique sont deux notions associées, chaque classe de variétés géométriques déterminant sa classe de résolutions et réciproquement. Par résolution d'un certain type nous entendons une application PL $f : X \rightarrow Y$ entre deux polyèdres finis telle que pour tout y dans Y , $f^{-1}(y)$ ressemble au point d'une certaine façon; on a les exemples suivants en partant du type le plus fort,

- (1) $f^{-1}(y)$ isomorphe à un point (f est alors un isomorphisme PL),
- (2) $f^{-1}(y)$ est effondrable,
- (3) $f^{-1}(y)$ est contractible non vide,
- (4) $f^{-1}(y)$ est acyclique non vide,
- (5) $f^{-1}(y)$ a l'homologie rationnelle du point,
- (6) $f^{-1}(y)$ a la même caractéristique d'Euler-Poincaré que le point et est connexe,
- (7) $f^{-1}(y)$ est connexe non vide.

Il y a deux méthodes pour définir la notion de variété géométrique associée à un type de résolution. Pour la première, une variété géométrique de dimension n est un polyèdre qui vérifie les conditions locales vérifiées par toute image par résolution d'une variété PL de dimension n . Par exemple par cette méthode un polyèdre de dimension n , X est une variété géométrique de dimension n associé au 7^e exemple de résolution si pour tout simplexe σ de dimension $n-1$ d'une triangulation K de X , $lk(\sigma, K)$ est ou vide, ou formé de deux points.

La seconde méthode, plus restrictive, considère un polyèdre de dimension n , X comme une variété géométrique de dimension n si, pour tout simplexe σ de dimension k d'une triangulation K de X , $lk(\sigma, K)$ ressemble à S^{n-k-1} de la même façon que, pour les résolutions du type considéré, $f^{-1}(y)$ ressemble au point; pour cette méthode un polyèdre X de dimension n est une variété géométrique associée au 7^e exemple de résolution si $lk(\sigma^k, K)$ a le même nombre de composantes connexes que S^{n-k-1} . Lorsque l'on considère les résolutions rationnelles (5^e exemple), les deux méthodes donnent la même

notion de variété : celle de variété d'homologie rationnelle (ou encore variété rationnelle). Comme nous nous intéressons surtout aux variétés rationnelles et que nous considérons les notions plus faibles de résolutions comme des exemples où les techniques pour la catégorie rationnelle doivent se simplifier, il est naturel de définir la notion de variété géométrique par la deuxième méthode quoique la plupart des théorèmes soient encore valables pour les variétés géométriques suivant la 1^{re} méthode.

Etant donné une variété géométrique X^n on se pose le problème de savoir s'il existe une résolution de la catégorie $f : M^n \rightarrow X^n$ avec M variété PL. Soit Σ le sous-polyèdre singularité de X_n (ensemble des points au voisinage desquels X n'est pas une variété PL); dans [19] Sullivan développe une théorie d'obstructions pour savoir s'il existe une résolution $f : X' \rightarrow X$ où X' est une variété géométrique de même type avec $\dim \Sigma' < \dim \Sigma$, d'où par itération une théorie d'obstruction pour savoir si X est résoluble par une variété PL; pour les variétés d'homologie (entière) cette théorie est satisfaisante car c'est une théorie à une seule obstruction; pour les variétés rationnelles les méthodes de [2] déterminent presque complètement les groupes d'obstruction mais on n'a plus une théorie à une seule obstruction. Nous nous proposons de donner des conditions *a priori* pour savoir si une variété géométrique admet une résolution par une variété PL (les résultats ont été énoncés dans [9]). Dans cette première partie nous construisons les classes caractéristiques qui servent à exprimer la condition de résolubilité.

Soit ϕ un plongement PL d'une variété géométrique X dans l'intérieur d'une variété PL Y ; on utilise la méthode de Thom-Sullivan pour construire à partir de certains morphismes définis sur des groupes de bordisme de la paire $(Y, \partial Y)$, des classes caractéristiques du plongement ϕ dans diverses théories cohomologiques de la paire $(Y, \partial Y)$. Lorsque ϕ est le plongement de X dans un de ses voisinages réguliers euclidiens de grande dimension, vu le manque de dualité de Poincaré à coefficients \mathbf{Z} , on obtient des classes caractéristiques absolues de X dans diverses théories homologiques de X .

Dans la catégorie eulérienne (6^e exemple de résolution) ces classes sont construites à partir de la caractéristique d'Euler-Poincaré mod. 2; dans la catégorie rationnelle on se sert de l'invariant d'intersection I à valeurs dans $W(\mathbf{Q})$, anneau de Witt des formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur \mathbf{Q} ; $I(W^{4k})$ est obtenu en classifiant la forme d'intersection $H_{2k}(W; \mathbf{Q}) \otimes H_{2k}(W; \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{Q}$ de la variété rationnelle W^{4k} . Une différence entre ces deux catégories est que dans le cas eulérien, toutes les classes caractéristiques s'expriment à l'aide des classes de Stiefel-Whitney homologiques de X qui se calculent directement sur une triangulation tandis que dans le cas rationnel elles s'expriment à l'aide des classes absolues de X dont on ne connaît pas d'expression combinatoire directe.

RÉSUMÉ PAR CHAPITRE :

CHAPITRE 1. — *Cycles géométriques.*

On étudie la catégorie la plus faible : résolutions géométriques (7^e exemple de la liste ci-dessus) et cycles géométriques. Les sorites développés pour cette catégories sont utilisés pour les catégories plus riches.

CHAPITRE 2. — *Variétés eulériennes.*

Il traite des résolutions eulériennes (6^e exemple) ainsi que de l'analogue modulo 2. On montre les propriétés des classes de Stiefel-Whitney homologiques $[W(X) = W_0(X) + \dots + W_i(X) + \dots]$ avec $W_i(X) \in H_{n-i}(X; \mathbb{Z}/2)$ lorsque X est une variété eulérienne mod. 2 de dimension n] en particulier la formule de produit. Ce chapitre s'achève par la détermination explicite de certains groupes de cobordisme eulérien, on en déduit une première interprétation des classes de S. W. homologiques : les $f_* W_i(X) \in H_{n-i}(A, \mathbb{Z}/2)$ déterminent la classe $[X, f] \in \mathcal{N}_n^{\mathbb{Z}/2}(A)$, groupe de bordisme non orienté formé à partir des variétés eulérienne mod. 2 (une seconde interprétation découle du chapitre 3).

CHAPITRE 3. — *Classes caractéristiques eulériennes.*

On construit les classes caractéristiques d'un plongement d'une variété eulérienne (ou eulérienne mod. 2) X dans l'intérieur d'une variété PL Y : ces classes déterminent la caractéristique modulo 2 des intersections transverses avec X des variétés PL singulières de la paire $(Y, \partial Y)$. Ces classes se calculent à l'aide de $W(X)$. Les ingrédients géométriques essentiels sont les théorèmes de transversalité de [13] et la formule $W(X \times X') = W(X) \times W(X')$. Pour montrer la réduction aux classes de S. W. homologiques, on est amené à montrer une nouvelle caractérisation des classes S. W. (cohomologiques) d'un fibré vectoriel; il en résulte, en particulier, une démonstration très simple de la formule de dualité de Whitney $D_X w_i(X) = W_i(X)$ où $w_i(X) = w_i(\tau_X) \in H^i(X; \mathbb{Z}/2)$ sont les classes de S. W. cohomologiques de la variété différentiable X .

CHAPITRE 4. — *Variétés rationnelles.*

On adapte les sorites des deux premiers chapitres au cas des variétés rationnelles.

CHAPITRE 5. — *Invariant d'intersection.*

On montre les propriétés de l'invariant d'intersection dans $W(\mathbb{Q})$, invariance par cobordisme, formule du produit; formule d'addition. Un point essentiel pour les constructions des derniers chapitres est l'étude de l'invariant d'intersection des \mathbb{Z}/p -variétés rationnelles, surtout la formule du produit démontrée par un calcul homologique. Cette formule n'était montrée que pour les \mathbb{Z}/p -variétés PL par une méthode géométrique détournée [12]; l'avantage d'une démonstration algébrique est qu'elle n'utilise que la dualité de Poincaré à coefficients \mathbb{Q} et qu'elle s'étend automatiquement au cas des \mathbb{Z}/p -complexes de Poincaré à coefficients \mathbb{Q} .

CHAPITRE 6. — *Classes caractéristiques rationnelles.*

On exploite le théorème de transversalité et les propriétés de l'invariant d'intersection selon les méthodes de Sullivan ([12], [18]); pour les éléments de 2-torsion, on a besoin d'étudier la construction de [12] sans hypothèses de finitude.

CHAPITRE 7. — *Type d'homotopie de l'espace des $\mathbb{Z}_{(2)}$ -données de chirurgie.*

On étudie les $\mathbb{Z}_{(2)}$ -données de chirurgie sur un complexe de Poincaré pour l'anneau $\mathbb{Z}_{(2)}$ ou sur un \mathbb{Z}/p -complexe de Poincaré pour $\mathbb{Z}_{(2)}$. A la différence des \mathbb{Z} -données de chirurgie

sur une \mathbf{Z}/p -variété PL, les obstructions en dimension $4k$ se calculent homomologiquement, il en résulte une démonstration (presque complètement homologique) de la formule du produit en dimension $4k$. On détermine le type d'homotopie (en grandes dimensions) du $\mathbf{Z}_{(2)}$ -localisé de $L_m(\mathbf{Z}_{(2)})$, espace des $\mathbf{Z}_{(2)}$ -données de chirurgie et l'on compare $L_m(\mathbf{Z}_{(2)})$ avec $L_m(\mathbf{Z})$.

CHAPITRE 8. — *Type d'homotopie des variétés de $\mathbf{Z}_{(2)}$ -homologie.*

Comme application des constructions précédentes, on donne un calcul *a priori*, des obstructions de la théorie de Levitt [10] pour savoir si une variété de $\mathbf{Z}_{(2)}$ -homologie, 4 connexe a le type d'homotopie d'une variété PL.

CHAPITRE I

Cycles géométriques

Dans toute la suite, polyèdre voudra dire polyèdre fini.

DÉFINITION 1.1. — *On appelle résolution géométrique toute application PL $f: X \rightarrow Y$ entre deux polyèdres telle que pour tout y de Y , $f^{-1}(y)$ est connexe non vide.*

LEMME 1.2. — *Soit $f: X \rightarrow Y$ une résolution géométrique entre deux polyèdres de dimension n . On suppose que X vérifie la condition :*

(C) *pour toute triangulation K et tout simplexe σ de dimension $n-1$ de K , $lk(\sigma, K)$ est ou vide ou bien formé de deux points.*

Alors Y vérifie la même condition.

Démonstration. — Il suffit de vérifier la condition C pour une seule triangulation. Soient K et L des triangulations de X et Y respectivement telles que $f: K \rightarrow L$ soit simpliciale. Soit σ un simplexe de dimension $n-1$ de L , $f^{-1}(\sigma)$ est la réunion de (l'intérieur de) simplexes de K de dimension $n-1$ et n ; s'il n'y a pas dans cette réunion de simplexes de dimension n , comme $f^{-1}(\sigma)$ est connexe non vide, $f^{-1}(\sigma)$ est réduit à un simplexe a de dimension $n-1$ de K et $lk(\sigma, L) \simeq lk(a, K)$. Si b est un simplexe de dimension n de K avec $f(b) = \sigma$, b possède exactement deux faces, notées a et a' , telles que $f(a) = f(a') = \sigma$; comme $f^{-1}(\sigma)$ est connexe et vu la condition C, on peut ordonner les n -simplexes de $f^{-1}(\sigma)$ en une suite b_1, \dots, b_p avec $a'_i = a_{i+1}$ ($1 \leq i < p$). Soient b_0 le n -simplexe de K , différent de b_1 tel que $a_1 < b_0$ et b_{p+1} le n -simplexe de K différent de b_p tel que $a'_p < b_{p+1}$. Si $a_1 = a'_p$ (et donc $b_0 = b_p$, $b_{p+1} = b_1$), $lk(\sigma, L) = \emptyset$ puisque f est surjective; si $a_1 \neq a'_p$, $b_0 \notin f^{-1}(\sigma)$ donc $f(b_0)$ est de dimension n de plus $f(b_0) \neq f(b_{p+1})$ sinon $b_0 = b_{p+1}$ (f est une résolution) et $f(b_0)$ ne saurait être alors de dimension n ; il est clair que $St(\sigma, L)$ est engendré par $f(b_0)$ et $f(b_{p+1})$ d'où le résultat. \square

Remarque 1.3. — Si X , polyèdre de dimension n est l'image par une résolution géométrique d'une variété PL fermée de dimension n , X vérifie la condition C; on pourrait définir un cycle géométrique comme un polyèdre vérifiant la condition C, mais pour les

raisons indiquées dans l'introduction on va imposer des conditions supplémentaires d'homogénéité.

DÉFINITION 1.4. — On appelle cycle géométrique de dimension n , un polyèdre X de dimension n , tel que pour une triangulation K de X on ait :

- (i) $lk(\sigma, K) = S^0$ si σ est de dimension $n-1$;
- (ii) $lk(\sigma, K)$ connexe non vide si σ est de dimension inférieure à $n-1$.

Remarques. — (1) Si X est un cycle géométrique de dimension n , pour toute triangulation les conditions précédentes sont vérifiées.

(2) Comme $lk(\sigma, K)$ est non vide pour $|\sigma| < n$, X est réunion des n -simplexes fermés de K .

LEMME 1.5. — Soit K une triangulation d'un cycle géométrique de dimension n ; pour tout simplexe σ de K de dimension k , $lk(\sigma, K)$ est un cycle géométrique de dimension $n-k-1$.

Cela résulte de l'isomorphisme $lk(\tau, lk(\sigma, K)) \simeq lk(\sigma \star \tau, K)$ pour tout simplexe τ de $lk(\sigma, K)$.

PROPOSITION 1.6. — Soit X un polyèdre de dimension n , connexe. Pour que X soit un cycle géométrique de dimension n , il faut et il suffit qu'il existe une triangulation K de X telle que :

- (i) X est une réunion des n -simplexes fermés de K ;
- (ii) pour tout $(n-1)$ -simplexe σ de K , $lk(\sigma, K) = S^0$;
- (iii) pour tous n -simplexes σ et σ' de K d'intersection τ , il existe une suite $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2, \dots, \sigma_p = \sigma'$ de n -simplexes de K telle que $\tau < \sigma_i$ pour tout i et $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ est de dimension $n-1$ ($1 \leq i < p$).

Démonstration. — Les conditions sont suffisantes : la première assure que $lk(\sigma, K)$ est non vide si $|\sigma| < n$ et la dernière assure que $lk(\tau, K)$ est connexe si $|\tau| < n-1$. Montrons que ces conditions sont nécessaires; il suffit de vérifier la condition (iii) lorsque X est un cycle géométrique connexe. Soit σ un n -simplexe de K triangulation de X , on dit que le n -simplexe σ' est équivalent à σ s'il existe une suite vérifiant (iii) sauf la condition $\sigma \cap \sigma' < \sigma_i$; soit K_0 le sous-complexe engendré par les n -simplexes équivalents à σ , et K_1 le sous-complexe engendré par les n -simplexes non équivalents à σ , $K = K_0 \cup K_1$ et $K_0 \cap K_1$ est de dimension $< n-1$ par définition. Si $K_0 \cap K_1$ était non vide, soit α un simplexe de dimension maximale de $K_0 \cap K_1$, on aurait :

$$(lk(\alpha, K) \cap K_0) \cap (lk(\alpha, K) \cap K_1) = lk(\alpha, K_0) \cap lk(\alpha, K_1) = lk(\alpha, K_0 \cap K_1) = \emptyset$$

contrairement à la connexité de $lk(\alpha, K)$; comme K est connexe $K = K_0$ ce qui montre une moitié de la condition (iii). L'autre moitié s'obtient par inspection directe si $|\tau| = n-1$ et en appliquant le raisonnement précédent au cycle géométrique connexe $lk(\tau, K)$ si $|\tau| < n-1$. \square

Remarque 1.7. — Soient X un polyèdre de dimension n et C une structure de complexe cellulaire sur X . Si X est réunion des cellules fermées de dimension n de C , si toute cellule de dimension $n-1$ est dans le bord d'exactly deux cellules de dimension n et si pour toutes cellules c et c' de dimension n , d'intersection d , il existe une suite de n -cellules (c_i) avec $c_1 = c$, $c_p = c'$, $d < c_i$ et $c_i \cap c_{i+1}$ de dimension $n-1$, alors X est un cycle géométrique connexe de dimension n (on voit que si K est une subdivision simpliciale de C sans sommets supplémentaires alors K vérifie les conditions de 1.6).

1.8. Nous allons donner une dernière caractérisation des cycles géométriques. Soit X un polyèdre et $x \in X$; on définit $d_X(x)$ par

$$d_X(x) = \text{Sup} \{ k \in \mathbb{N} / \exists K \text{ triangulation de } X \text{ et } \sigma \text{ } k\text{-simplexe de } K \text{ avec } x \in \overset{\circ}{\sigma} \}.$$

Soit X un polyèdre de dimension n , on pose $\Sigma = \{ x \in X / d_X(x) < n \}$, Σ est appelé la singularité de X , c'est un sous-polyèdre de X , plus précisément pour toute triangulation K de X il existe un sous-complexe de K qui triangule X .

LEMME 1.9. — Soit X un cycle géométrique de dimension n , le sous-complexe singularité Σ est de dimension $\leq n-3$.

Démonstration. — Si σ est un $(n-1)$ -simplexe d'une triangulation K de X , $lk(\sigma, K) = S^0$ donc $\overset{\circ}{\sigma}$ est formé de points réguliers (i. e. $d_X(x) = n$). Si σ est de dimension $n-2$, $lk(\sigma, K)$ est un cycle géométrique connexe de dimension 1, ce ne peut être que S^1 , donc dans ce cas là aussi $\overset{\circ}{\sigma}$ est formé de points réguliers. \square

PROPOSITION 1.10. — Soit X , un polyèdre de dimension n qui est réunion des n -simplexes fermés d'une de ses triangulations. Une condition nécessaire et suffisante pour que X soit un cycle géométrique de dimension n est que :

- (i) il n'existe pas de point x de X avec $d_X(x) = n-1$ ou $n-2$;
- (ii) $\forall x \in X$ tel que $d_X(x) \leq n-3$, $H_j(X, X-x) = 0$ pour $j \leq d_X(x)+1$.

Démonstration. — Si X est un cycle géométrique, sa singularité est de codimension ≥ 3 ce qui montre (i). Soit σ un k -simplexe d'une triangulation K de X et soit $x \in \overset{\circ}{\sigma}$; comme $lk(\sigma, K)$ est connexe non vide ($d_X(x) \leq n-3$) et que $\dot{St}(\sigma, K) \simeq \overset{\circ}{\sigma} \star lk(\sigma, K)$ on a

$$\tilde{H}_k(\dot{St}(\sigma, K)) = 0$$

or

$$\tilde{H}_k(\dot{St}(\sigma, K)) \simeq H_{k+1}(\dot{St}(\sigma, K), \dot{St}(\sigma, K)) \simeq H_{k+1}(X, X - \dot{St}(\sigma, K)) \simeq H_{k+1}(X, X-x).$$

La réciproque se montre de la même manière. \square

ORIENTABILITÉ ET PREMIÈRE CLASSE DE STIEFEL-WHITNEY.

LEMME 1.11. — Soit X un cycle géométrique connexe de dimension n , on a

$$H_n(X; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2.$$

Démonstration. — La somme c de tous les n -simplexes est clairement un cycle modulo 2. Si c_0 est un autre cycle modulo 2, écrivons $c = c_0 + c_1$ et en répétant l'argument de 1.6 avec $K_0 = \text{Support}(c_0)$ et $K_1 = \text{Support}(c_1)$ on voit que $c_0 = 0$ ou $c_0 = c$. \square

DÉFINITION 1.12. — On dit qu'un cycle géométrique de dimension n , connexe X est orientable si $H_n(X; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$. Orienter un tel cycle géométrique c'est choisir un générateur de $H_n(X, \mathbf{Z})$ (que l'on note $[X]$).

Remarque. — Si X est un cycle géométrique connexe de dimension n , $H_n(X; \mathbf{Z})$ est un \mathbf{Z} module libre de dimension finie et 1.11 montre qu'on a l'alternative $H_n(X; \mathbf{Z}) = 0$ (et X est non orientable) ou $H_n(X; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$.

PROPOSITION 1.13. — Soit $f: X \rightarrow Y$ une résolution géométrique entre deux géométries de dimension n , connexes et orientés; alors f est de degré ± 1 (i. e. $f_*[X] = \pm[Y]$).

Démonstration. — Soient K et L des triangulations de X et Y telles que $f: K \rightarrow L$ soit simpliciale; soit σ un n -simplexe de L , comme f est une résolution, $f^{-1}(\sigma)$ est un n -simplexe τ de K et $f|_{\tau}: \tau \rightarrow \sigma$ est un isomorphisme. Si k est le degré de l'application f (i. e. $f_*[X] = k[Y]$), il vient que $f|_{\tau}: H_n(\tau, \mathbf{Z}) \rightarrow H_n(\sigma, \mathbf{Z})$ est la multiplication par k (lorsqu'on a identifié ces groupes d'homologie à \mathbf{Z} par la restriction des orientations de X et Y) d'où le résultat. \square

Remarque. — Dans la suite, lorsque nous parlerons de résolutions entre cycles géométriques orientés, nous ne considérons que les résolutions qui conservent l'orientation.

1.14 Soient K une triangulation d'un cycle géométrique X de dimension n et K' une triangulation dérivée. Considérons les chaînes ordonnées de K' suivantes :

$$C_0(K) = (-1)^{n(n+1)/2} \sum_{a_0 < a_1 < \dots < a_n < K} \langle \hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n \rangle$$

et

$$C_1(K) = \sum_{a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < K} (-1)^{|a_0| + \dots + |a_{n-1}|} \langle \hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{n-1} \rangle.$$

Comme pour tout $(n-1)$ -simplexe σ de K , $lk(\sigma, K)$ est de caractéristique d'Euler-Poincaré 2, on a la formule (voir 2.11 et [7]) $\partial C_0(K) = 2 C_1(K)$.

La chaîne $C_0(K)$ est donc un cycle modulo 2 dont la classe d'homologie $W_0(X) \in H_n(X; \mathbf{Z}/2)$ est indépendante de la triangulation K et est égale (dans chaque composante de X) au générateur de $H_n(\cdot, \mathbf{Z}/2)$; la chaîne $C_1(K)$ est un cycle, soit $W_1(X) \in H_{n-1}(X, \mathbf{Z})$ sa classe d'homologie. On a

$$W_1(X) = \beta W_0(X) \quad \text{où } \beta: H_n(X; \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_{n-1}(X; \mathbf{Z})$$

est le bokstein de la suite de coefficients $0 \rightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/2 \rightarrow 0$.

PROPOSITION 1.14. — Suit X un cycle géométrique de dimension n ; une condition nécessaire et suffisante pour que X soit orientable est que $W_1(X) = 0$ dans $H_{n-1}(X; \mathbf{Z}/2)$.

Démonstration. — Si X est orientable, $W_1(X)$ est nul dans $H_{n-1}(X; \mathbf{Z})$ a fortiori dans $H_{n-1}(X, \mathbf{Z}/2)$. Si $W_1(X) = 0$ dans $H_{n-1}(X; \mathbf{Z}/2)$, on peut écrire $C_1(K) = 2b + \partial a$ donc $\partial(C_0(K) - 2a) = 4b$. Écrivons $C_0(K) - 2a = \sum u_\sigma \sigma$ où σ sont les n -simplexes (naturellement ordonnées) de K' , u_σ est un nombre impair. Soit $C = \sum \varepsilon_\sigma \sigma$ où $\varepsilon_\sigma = 1$ si $u_\sigma \equiv 1 (4)$ et $\varepsilon_\sigma = -1$ si $u_\sigma \equiv -1 (4)$; par construction il existe une chaîne a' telle que $C_0(K) - 2a = C + 4a'$ et donc

$$\partial C = 4(b - \partial a').$$

Or le coefficient d'un $(n-1)$ -simplexe de K' dans la chaîne ∂C ne peut être que $-2, 0$ ou 2 , on a donc $\partial C = 0$ et X est orientable. \square

PROPOSITION 1.15. — Soient X et Y deux cycles géométriques de dimensions respectives n et m . Le produit $X \times Y$ est un cycle géométrique de dimension $n+m$.

Démonstration. — On peut supposer X et Y connexes; soient K et L des triangulations de X et de Y et C la structure de complexe cellulaire de $X \times Y$ déterminée par les cellules $\sigma \times \tau$ (où $\sigma < K$ et $\tau < L$). Il est clair que C vérifie les deux premières conditions de 1.7 : quant à la dernière, soient $\sigma \times \tau$ et $\sigma' \times \tau'$ deux $(n+m)$ -cellules de C d'intersection $(\sigma \cap \sigma') \times (\tau \cap \tau')$; soient (σ_i) (avec $\sigma_1 = \sigma$ et $\sigma_p = \sigma'$) et (τ_j) ($\tau_1 = \tau$ et $\tau_p = \tau'$) les suites données par 1.6, la suite de $(n+m)$ -cellules de C , (c_i) avec $c_i = \sigma_i \times \tau$ pour $1 \leq i \leq p$ et $c_i = \sigma' \times \tau_{i-p}$ pour $p < i \leq p+q$, vérifie la condition demandée. \square

DÉFINITION 1.16. — On appelle cycle géométrique à bord de dimension n , un polyèdre X de dimension n tel que pour une triangulation K de X on ait :

- (1) $lk(\sigma, K)$ est connexe non vide si $|\sigma| < n-1$;
- (2) $lk(\sigma, K)$ est formé de 1 ou 2 points si $|\sigma| = n-1$;
- (3) La réunion des $(n-1)$ -simplexes fermés σ tels que $lk(\sigma, K)$ soit réduit à 1 point, est un cycle géométrique de dimension $n-1$.

Remarque. — On vérifie aisément que tout autre triangulation de X les propriétés sont vérifiées et que le sous-polyèdre introduit en (3) ne dépend pas de la triangulation considérée; on le note ∂X et l'appelle le bord de X .

DÉFINITION 1.17. — On dit qu'un cycle géométrique à bord de dimension n , connexe, X est orientable si $H_n(X, \partial X; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$.

Remarques :

- (1) on vérifie comme dans le cas sans bord que si X est connexe

$$H_n(X, \partial X; \mathbf{Z}/2) \simeq \mathbf{Z}/2;$$

- (2) si X est orientable, ∂X est orientable; une orientation $[X] \in H_n(X, \partial X; \mathbf{Z})$ induit par $\partial : H_n(X, \partial X; \mathbf{Z}) \rightarrow H_{n-1}(\partial X; \mathbf{Z})$ une orientation de chaque composante connexe du bord.

LEMME 1.18. — Si X_0 et X_1 sont deux cycles géométriques de dimension n de bord commun Y , $X = X_0 \cup_Y X_1$ est un cycle géométrique sans bord de dimension n . Si de plus

X_0 et X_1 sont orientés de sorte que les orientations induites sur chaque composante de Y soient opposées, X est orientable.

Démonstration. — La première partie résulte du fait que la réunion de deux connexes non vides dont l'intersection est non vide, est un connexe non vide. La deuxième partie résulte de l'argument classique utilisant la suite de Mayer-Vietoris. \square

Exemple. — On montre (comme en 1.15) que si X et Y sont des cycles géométriques de dimension n et m de bord ∂X et ∂Y , $X \times Y$ est un cycle géométrique de dimension $n+m$ de bord

$$X \times \partial Y \cup_{\partial X \times \partial Y} \partial X \times Y.$$

PROPOSITION 1.19. — Soit X un polyèdre de dimension n tel que pour tout simplexe σ d'une triangulation K de X , $lk(\sigma, K)$ est connexe non vide si $|\sigma| < n-1$ et est formé de 1 ou 2 points si $|\sigma| = n-1$; soit Y le sous polyèdre réunion des $(n-1)$ -simplexes fermés σ tels que $lk(\sigma, K)$ soit réduit à 1 point. On suppose que Y admet un collier dans X , alors Y est un cycle géométrique de dimension $n-1$ (et X est un cycle géométrique à bord de bord Y).

Démonstration. — Raisonnons par récurrence sur n . Soit K la triangulation de X et L la triangulation induite de Y . Soit $\sigma < L$ de dimension $\leq n-2$, la paire $(lk(\sigma, K), lk(\sigma, L))$ vérifie les mêmes hypothèses que la paire (X, Y) , (cf. 1.5) $lk(\sigma, K)$ est de dimension $\leq n-1$, donc $lk(\sigma, K)$ est un cycle géométrique à bord de bord $lk(\sigma, L)$. Or d'après l'hypothèse du collier, la paire $(lk(\sigma, K), lk(\sigma, L))$ est PL-isomorphe à la paire [cône $(lk(\sigma, L))$, $lk(\sigma, L)$], cela entraîne que $lk(\sigma, L)$ qui est le link du sommet dans le cône est connexe non vide si $|\sigma| < n-2$ et est S^0 si $|\sigma| = n-1$; Y est donc un cycle géométrique de dimension $n-1$.

COROLLAIRE 1.20. — Soit X un cycle géométrique de dimension n et Y un sous polyèdre de dimension $n-1$ qui admet un bicollier; alors Y est un cycle géométrique de dimension $n-1$.

1.21. Le résultat précédent permet de développer la théorie des voisinages réguliers d'un sous-polyèdre d'un cycle géométrique de dimension n comme dans [15]. On a le résultat :

COROLLAIRE 1.21. — Soit X un cycle géométrique de dimension n et P un sous-polyèdre de X . Tout voisinage régulier de P dans X est un cycle géométrique à bord de dimension n ; son complément également.

1.22. Relions les structures de cycle géométrique sur un polyèdre X et sur l'espace total d'un tube PL en disques sur X (alias block bundles).

PROPOSITION 1.22. Soit E l'espace total d'un tube PL en disques D^k sur X , polyèdre de dimension n , soit ∂E l'espace total du tube en sphères S^{k-1} associé; il y a équivalence entre :

- (i) E est un cycle géométrique de dimension $n+k$ de bord ∂E ;
- (ii) X est un cycle géométrique de dimension n .

Démonstration. — ∂E admet un collier dans E car il en est ainsi localement. Si X est un cycle géométrique de dimension n , il est clair que E est réunion des $(n+k)$ -simplexes fermés d'une de ses triangulations et, en raisonnant localement, que la paire $(E, \partial E)$ vérifie les hypothèses de 1.19 (cf. 1.10). Pour la réciproque nous utilisons le :

LEMME 1.23. — Soit (Y^p, Z^{p-1}) une paire de polyèdres, Z ayant un collier dans Y . Si $Y \times D^1$ est un cycle géométrique de dimension $p+1$ de bord $Y \times S^0 \cup Z \times D^1$, Y est un cycle géométrique de dimension p de bord Z .

Cela résulte directement de 1.20 appliqué à $Y \times S^0 \cup Z \times D^1$ et au sous-polyèdre Z . Par récurrence on en tire

COROLLAIRE 1.24. — Soit X un polyèdre de dimension n ; si $X \times D^q$ est un cycle géométrique de dimension $n+q$, de bord $X \times S^{q-1}$, X est un cycle géométrique de dimension n .

Fin de la démonstration de 1.22. — Soit q un tube sur X inverse (pour la somme de Whitney) du tube considéré, soit F l'espace total de l'image réciproque de η sur E ; si E est un cycle géométrique de bord ∂E , en généralisant l'argument de la première partie, on voit que F est un cycle géométrique de bord ∂F où ∂F est la réunion de l'espace total du tube en sphères sur E et des blocs sur ∂E . Or F est l'espace total d'un tube trivial sur X , la paire $(F, \partial F)$ est donc PL-isomorphe à $(X \times D^q, X \times S^{q-1})$ d'où le résultat par 1.24. \square

CYLINDRE D'UNE RÉOLUTION.

1.25. Nous allons utiliser les techniques de Cohen [5]. Rappelons d'abord quelques définitions. Si K est une triangulation d'un polyèdre X on appelle triangulation dérivée K' de K toute triangulation dont les p -simplexes sont $\langle \hat{a}_0, \dots, \hat{a}_p \rangle$ où $a_0 < a_1 < \dots < a_p < K$ et \hat{a}_i est un point intérieur à a_i (pas forcément le barycentre). Si $f: K \rightarrow L$ est une application simpliciale on appelle cylindre (simplicial) de f le sous-complexe simplicial du joint $K' L$ engendré par les simplexes de L et les simplexes de la forme $\langle \hat{a}_0, \dots, \hat{a}_p \rangle \star b$ où $a_0 < a_1 < \dots < a_p < K$ et $b < f(a_0) < L$. Si $f: K \rightarrow L$ est simpliciale, K' et L' des dérivées telles que $f: K' \rightarrow L'$ soit aussi simpliciale, on définit, pour $\sigma < L$, deux sous-complexes de L' et K' respectivement : (la notation $\{\dots\}$ veut dire le sous-complexe engendré par \dots) :

$$D(\sigma, L) = \{ \langle \hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_q \rangle / \sigma < b_0 < \dots < b_1 < L \},$$

$$D(\sigma, f) = \{ \langle \hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p \rangle / a_0 < a_1 < \dots < a_p < K \text{ et } \sigma < f(a_0) \}.$$

On a

$$D(\sigma, f) = f^{-1} D(\sigma, L) \quad \text{et} \quad D(\sigma, f) \setminus f^{-1}(\hat{\sigma}).$$

PROPOSITION 1.26. — Soit $f: X \rightarrow Y$ une application PL entre deux polyèdres; soient K et L des triangulations de X et de Y , K' et L' des triangulations dérivées telles que $f: K \rightarrow L$ et $f: K' \rightarrow L'$ soient simpliciales. Il y a équivalence entre :

- (i) f est une résolution géométrique;
(ii) $D(\sigma, f)$ est connexe non vide pour tout simplexe σ de L .

Démonstration. — Il est clair que si $f : X \rightarrow Y$ est une résolution géométrique et P un sous-polyèdre de Y , $f^{-1}(P)$ et P ont le même nombre de composantes connexes; $D(\sigma, f) = f^{-1}D(\sigma, L)$ est donc connexe non vide puisque $D(\sigma, L)$ est contractile. La réciproque découle de ce que $D(\sigma, f) \searrow f^{-1}(\hat{\sigma})$ et que $\hat{\sigma}$ est un point intérieur quelconque de σ . \square

1.27. Soient A et B deux complexes simpliciaux, on dit que N , sous-complexe du joint $A \cup B$ est un joint réduit de A vers B si A et B sont des sous-complexes de N et si tout simplexe principal de N rencontre B .

LEMME 1.27. — Si N est un joint réduit de A vers B et si pour tout simplexe σ de A , $lk(\sigma, N) \cap B$ est connexe, N et B ont le même nombre de composantes connexes.

Démonstration. — Il suffit de voir que si deux sommets x et y de B sont dans la même composante de N , on peut les joindre par un arc dans B . Soit un chemin formé d'arêtes de N reliant x à y ; par récurrence, en utilisant la connexité de $lk(\sigma, N) \cap B$ pour des arêtes et des sommets de A , on homotope ce chemin en un chemin n'ayant plus de sommets dans A . \square

PROPOSITION 1.28. — Soit $f : X \rightarrow Y$ une application PL entre deux cycles géométriques de dimension n ; soient K et L deux triangulations telles que $f : K \rightarrow L$ soit simpliciale. Il y a équivalence entre :

- (i) f est une résolution géométrique;
(ii) C le cylindre simplicial de f est un cycle géométrique de bord $X \cup Y$.

Démonstration. — Soient K' et L' des triangulations dérivées telles que $f : K' \rightarrow L'$ soit simpliciale. Si $\sigma < L$ on sait [5] que $lk(\sigma, C) \cap K' = D(\sigma, f)$ et que $lk(\sigma, C)$ est un joint réduit de $lk(\sigma, L)$ vers $D(\sigma, f)$.

Si donc f est une résolution géométrique et $\sigma < L$, $D(\sigma, f)$ est connexe non vide, donc $lk(\sigma, C)$ est aussi connexe non vide ce qui suffit pour vérifier que C est un cycle géométrique de dimension $n+1$ de bord $X \cup Y$.

Réciproquement si C est un cycle géométrique de bord $X \cup Y$ et si $\sigma < L$ est de dimension n , $lk(\sigma, L) = \emptyset$ donc $lk(\sigma, C) = D(\sigma, f)$ qui est donc réduit à 1 point. Supposons que pour tous les simplexes τ de L de dimension $> k$, $D(\tau, f)$ soit connexe non vide et soit $\sigma < L$ de dimension k . Nous appliquons le lemme 1.27 avec $N = lk(\sigma, C)$, $A = lk(\sigma, L)$ et $B = D(\sigma, f)$, en effet si $\sigma' < A$,

$$lk(\sigma', N) = lk(\sigma', lk(\sigma, C)) = lk(\sigma \star \sigma', C)$$

et

$$lk(\sigma', N) \cap B = lk(\sigma \star \sigma', C) \cap K' = D(\sigma \star \sigma', f)$$

est connexe par hypothèse de récurrence. Les $D(\sigma, f)$ sont donc tous connexes non vides et f est une résolution géométrique d'après 1.26. \square

CHAPITRE II

Variétés eulériennes

DÉFINITION 2.1. — On appelle résolution eulérienne toute application PL $f: X \rightarrow Y$ entre deux polyèdres telle que pour tout y de Y

- (i) $f^{-1}(y)$ est connexe non vide;
- (ii) $\chi(f^{-1}(y)) = 1$ (où χ est la caractéristique d'Euler-Poincaré).

Remarque. — On peut paraphraser la définition en disant que les fibres $f^{-1}(y)$ ressemblent au point pour les deux foncteurs $H_0(\cdot, \mathbf{Z})$ et $\chi(\cdot)$.

LEMME 2.2. — Soit $f: X \rightarrow Y$ une résolution eulérienne entre deux polyèdres, alors

$$\chi(X) = \chi(Y).$$

Démonstration. — Nous raisonnons par récurrence sur la dimension de Y . Si Y est de dimension 0 cela résulte directement de la définition. Supposons Y de dimension p , soient K et L des triangulations telles que $f: K \rightarrow L$ soit simpliciale, soient $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ les p -simplexes de L , $\hat{\sigma}_i$ leurs barycentres et D_i un disque centré en $\hat{\sigma}_i$, intérieur à σ_i ; $Y - \bigcup_1^q \dot{D}_i$ se rétracte par déformation sur Y' le $(p-1)$ -squelette, $f^{-1}(D_i)$ est PL-isomorphe à $f^{-1}(\hat{\sigma}_i) \times D_i$ et $X - \bigcup_1^q f^{-1}(\dot{D}_i)$ se rétracte par déformation sur $f^{-1}(Y')$. Par hypothèse de récurrence on a donc

$$\chi\left(X - \bigcup_1^q f^{-1}(\dot{D}_i)\right) = \chi\left(Y - \bigcup_1^q \dot{D}_i\right)$$

or

$$\begin{aligned} \chi\left(X, X - \bigcup_1^q f^{-1}(\dot{D}_i)\right) &= \sum \chi(f^{-1}(D_i), f^{-1}(\partial D_i)) \\ &= \sum \chi(f^{-1}(\hat{\sigma}_i)) \chi(D_i, \partial D_i) = \chi\left(Y, Y - \bigcup_1^q \dot{D}_i\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat. \square

2.3. Nous définissons la notion associée de variété eulérienne, en imposant, comme expliqué dans l'introduction, des conditions d'homogénéité qui ne sont pas indispensables.

DÉFINITION 2.3. — On appelle variété eulérienne de dimension n , un polyèdre X de dimension n , tel que pour tout simplexe σ de dimension k d'une triangulation K de X , on ait :

- (1) $lk(\sigma, K)$ a le même nombre de composantes connexes que S^{n-k-1} ;
- (2) $\chi(lk(\sigma, K)) = \chi(S^{n-k-1})$.

Remarque 2.4. — Il est équivalent de définir une variété eulérienne de dimension n comme étant un cycle géométrique de dimension n , X tel que pour tout x de X on ait :

$$\chi(X, X - x) = (-1)^n.$$

En effet comme $1-\chi$ est multiplicatif sur les joints, si $\sigma < K$ est de dimension k on a $\dot{\text{St}}(\sigma, K) = \dot{\sigma} \star lk(\sigma, K)$ et

$$\chi(X, X-\hat{\sigma}) = \chi(\text{St}(\sigma, K)) = 1 - \chi(\dot{\text{St}}(\sigma, K)) = (-)^k (1 - \chi(lk(\sigma, K))).$$

Remarque 2.5. — Si X est une variété eulérienne de dimension n et si σ est un simplexe de dimension k d'une triangulation K de X , $lk(\sigma, K)$ est une variété eulérienne de dimension $n-k-1$.

DÉFINITION 2.6. — On appelle variété eulérienne à bord de dimension n une paire de polyèdres $(X, \partial X)$ telle que X est un cycle géométrique de dimension n de bord ∂X et telle que :

$$(1) \quad \forall x \in X - \partial X, \quad \chi(X, X-x) = (-)^n,$$

$$(2) \quad \forall x \in \partial X, \quad \chi(X, X-x) = 0 \quad \text{et} \quad \chi(\partial X, \partial X-x) = (-)^{n-1}.$$

Dans la définition on impose donc que ∂X soit une variété eulérienne de dimension $n-1$; en fait si on suppose que ∂X a un collier dans X cela est inutile comme le montre le :

LEMME 2.7. — Soit X un cycle géométrique de dimension n de bord ∂X ; on suppose que ∂X admet un collier dans X et que pour tout $x \in X - \partial X$, $\chi(X, X-x) = (-)^n$. Alors X est une variété eulérienne de bord ∂X .

Démonstration. — Soit $x \in \partial X$, par hypothèse de collier il existe $a \in X - \partial X$ tel que $lk(x, X)$ soit PL-isomorphe au cône $a \star lk(x, \partial X)$; $lk(x, X)$ est donc contractile et $\chi(X, X-x) = 1 - \chi(lk(x, X)) = 0$. Soit (K, L) une triangulation de $(X, \partial X)$ admettant x et a comme sommets; on a

$$lk(a, lk(x, K)) = lk(\langle a, x \rangle, K)$$

et si b est un point intérieur à l'arête $\langle a, x \rangle$, b est dans $X - \partial X$ donc

$$\chi(lk(\langle a, x \rangle, K)) = 1 - \chi(X, X-b) = 1 + (-)^{n-1}$$

or par hypothèse de collier

$$lk(a, lk(x, K)) = lk(x, L)$$

donc

$$\chi(\partial X, \partial X-x) = (-)^{n-1}. \quad \square$$

PROPOSITION 2.8. — Soit X une variété eulérienne de dimension n , soit (A, B) une paire de sous-polyèdres de X , alors :

$$\chi(A, B) = (-)^n \chi(X-B, X-A).$$

Démonstration. — Il suffit de vérifier la formule lorsque $B = \emptyset$, le cas général s'en déduisant. Soit (K, L) une triangulation de (X, A) , raisonnons par récurrence sur le nombre de simplexes de L (la formule est vraie par hypothèse si A est réduit à un point).

Soit σ un simplexe principal de L , écrivons $A = A' \cup \sigma$ avec $A' \cap \sigma = A''$; d'après Mayer-Vietoris on a

$$\begin{aligned}\chi(A) &= \chi(A') + 1 - \chi(A''), \\ \chi(X, X-A) &= \chi(X, X-A') + \chi(X, X-\sigma) - \chi(X, X-A'').\end{aligned}$$

Or $\chi(X, X-\sigma) = \chi(X, X-\hat{\sigma}) = (-)^n$ et comme A' et A'' ont moins de simplexes que A il vient $\chi(A) = (-)^n \chi(X, X-A)$. \square

Remarque. Le même raisonnement s'applique si X est une variété eulérienne de bord ∂X et si $A \cap \partial X = \emptyset$.

COROLLAIRE 2.9. — Soit $f: X \rightarrow Y$ une résolution eulérienne entre deux cycles géométriques de dimension n . Si X est une variété eulérienne Y aussi.

Démonstration. — Soit $y \in Y$, $\chi(f^{-1}(y)) = 1$ donc comme X est eulérienne $\chi(X, X-f^{-1}(y)) = (-)^n$ et comme f est une résolution eulérienne, il vient par 2.2 :

$$\chi(Y, Y-y) = \chi(X, X-f^{-1}(y)) = (-)^n. \quad \square$$

2.10. Tous les résultats démontrés au chapitre 1 pour les cycles géométriques s'étendent aux variétés eulériennes.

CLASSES DE STIEFEL-WHITNEY. — Soient X une variété eulérienne de dimension n , K une triangulation de X et K' une triangulation dérivée. On introduit les chaînes (simpliciales-ordonnées de K') :

$$C_{n-p}(K) = \sum_{a_0 < a_1 < \dots < a_p < K} (-)^{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_p|} \langle \hat{a}_0 \dots \hat{a}_p \rangle.$$

LEMME 2.11. — $\partial C_q(K) = \chi(S^q) C_{q+1}(K)$ pour $q < n$.

Pour une démonstration voir [7].

Si q est impair (et $q < n$) $C_q(K)$ est donc un cycle, on note $W_q(X)$ sa classe d'homologie dans $H_{n-q}(X, \mathbb{Z})$; si q est pair (et $q < n$) $C_q(K)$ est un cycle modulo 2, on note $W_q(X)$ sa classe dans $H_{n-q}(X, \mathbb{Z}/2)$; on note enfin $W_n(X) \in H_0(X, \mathbb{Z})$ la classe de $C_n(K)$, il est clair que si $\varepsilon: H_0(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ est l'augmentation, $\varepsilon(W_n(X)) = \chi(X)$. Ces classes d'homologie ne dépendent pas de la triangulation utilisée pour les définir; les classes W_0 et W_1 ont été introduites pour un cycle géométrique en 1.14.

COROLLAIRE 2.12. — Soit X une variété eulérienne de dimension n . Pour $2k+1 < n$ on a

$$W_{2k+1}(X) = \beta W_{2k}(X),$$

où β est le bokstein $H_{n-2k}(X, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{n-2k-1}(X, \mathbb{Z})$ associé à la suite $\mathbb{Z} \xrightarrow{x^2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2$.

COROLLAIRE 2.13. — Soit X une variété eulérienne de dimension n impair, alors :

$$\chi(X) = 0.$$

Démonstration. — Comme n est impair on a $\partial C_{n-1}(K) = 2 C_n(K)$, comme $H_0(X, Z)$ est sans torsion, on a donc $W_n(X) = 0$. Le résultat découle aussi de la formule de dualité 2.8 mais la démonstration indiquée semble la plus directe. \square

2.14. CAS DES VARIÉTÉS A BORD. — Soit X une variété eulérienne à bord de dimension n de bord ∂X ; soit (K, L) une triangulation de la paire $(X, \partial X)$, K' et L' des triangulations dérivées; on considère la chaîne simpliciale de K' :

$$C_{n-p}(K) = \sum_{a_0 < \dots < a_p < K \text{ et } a_p \star L} (-1)^{|a_0| + \dots + |a_p|} \langle \hat{a}_0, \dots, \hat{a}_p \rangle.$$

Le calcul de [7] se généralise et donne

LEMME 2.14. — $\partial C_q(K) = \chi(S^q) C_{q+1}(K) + (-1)^q C_q(L)$ pour $q < n$.

Pour q impair (et $q < n$) $C_q(K)$ définit donc un élément de $H_{n-q}(X, \partial X; Z)$ noté $W_q(X)$, pour q pair (et $q < n$) $C_q(K)$ définit un élément de $H_{n-q}(X, \partial X; Z/2)$ noté $W_q(X)$; pour $q = n$ on regarde $C_n(K)$ dans $H_0(X; Z)$, son augmentation est $\chi(X, \partial X)$. Le corollaire 2.12 est encore valable pour une variété eulérienne à bord.

COROLLAIRE 2.15. — Soit X une variété eulérienne de dimension n de bord ∂X , pour $q < n-1$ on a

$$W_q(\partial X) = (-1)^q \partial W_q(X),$$

où ∂ est le connectant $H_{n-q}(X, \partial X; G) \rightarrow H_{n-q-1}(\partial X; G)$ (avec $G = Z$ ou $Z/2$ suivant la parité de q).

COROLLAIRE 2.16. — Soit X une variété eulérienne de dimension n impair et de bord ∂X . On a

$$\chi(\partial X) = 2 \chi(X).$$

Démonstration. — Comme n est impair, on a $C_{n-1}(L) + 2 C_n(K) = \partial C_{n-1}(K)$ donc dans $H_0(X; Z)$ il vient (en prenant l'augmentation) $\chi(\partial X) + 2 \chi(X, \partial X) = 0$ or $\chi(X) = \chi(X, \partial X) + \chi(\partial X)$, d'où le résultat (qu'on aurait pu aussi déduire des formules de dualité 2.8).

PROPOSITION 2.17. — Soit $f: X \rightarrow Y$ une résolution eulérienne entre deux variétés eulériennes de dimension n , on a

$$f_* W_p(X) = W_p(Y) \quad [\text{dans } H_{n-p}(Y; Z/2) \text{ ou } H_{n-p}(Y, Z)].$$

Démonstration. — Pour $p = n$ c'est le lemme 2.2. Soient K et L des triangulations de X et Y telles que $f: K \rightarrow L$ soit simpliciale et C le cylindre simplicial de f ; par 1.28 et 2.10 C est une variété eulérienne de dimension $n+1$ de bord $X \cup Y$; soit $r: C \rightarrow Y$ la rétraction canonique avec $r|_X = f$; comme $p < n$, $W_p(X)$ et $W_p(Y)$ sont des classes d'ordre 2 et

$$f_* W_p(X) + W_p(Y) = r_* W_p(\partial C) = r_* \partial W_p(C) = \partial r_* W_p(C) = 0,$$

puisque $r_* W_p(C) \in H_{n-p}(Y, Y; G)$. \square

2.18. On note Ω_n^E le groupe de cobordisme orienté des variétés eulériennes orientées de dimension n . Nous allons déterminer Ω_n^E ainsi que d'autres groupes de cobordismes qui nous seront utiles par la suite.

LEMME 2.18. — *La caractéristique d'Euler-Poincaré réduite modulo 2, définit un homomorphisme*

$$\bar{\chi} : \Omega_n^E \rightarrow \mathbf{Z}/2.$$

Preuve. — Il suffit de voir que sur les bords χ est paire; cela résulte de 2.13 et 2.16.

2.19. ÉTUDE DES BASSES DIMENSIONS. — Une variété eulérienne de dimension 1 est clairement une réunion de cercles, il en résulte qu'une variété eulérienne de dimension 2 est une variété différentiable et comme la seule surface de caractéristique 2 est S^2 , qu'une variété eulérienne de dimension 3 est différentiable; plus généralement on a le

LEMME 2.19. — *Le sous-complexe singularité d'une variété eulérienne est de codimension ≥ 4 .*

Il résulte de ce qu'on vient de dire que $\Omega_0^E = \mathbf{Z}$, $\Omega_1^E = 0$, $\Omega_2^E = 0$ et $\Omega_3^E = 0$.

LEMME 2.20. — *En toute dimension paire ≥ 4 , il existe une variété (différentiable) orientée connexe qui est un bord (orienté) et dont la caractéristique est un nombre pair imposé.*

Démonstration. — Soit

$$M_{p,q}^{2k} = (\#_p (S^2 \times S^{2k-2})) \#_q (\# (S^1)^{2k});$$

$M_{p,q}^{2k}$ est un bord (orienté) et est connexe dès que $k \geq 2$ de plus $\chi(M_{p,q}) = 2(p-q+1)$.

LEMME 2.21. — *Soit X une variété eulérienne de dimension n , connexe. Si $\chi(X) = \chi(S^n)$ alors $Y = \text{Cône}(X)$ est une variété eulérienne de dimension $n+1$ de bord X. Si X est orientée, Y l'est également.*

La démonstration est immédiate puisque le link du sommet de Y (le seul point peut être singulier) est isomorphe à X.

PROPOSITION 2.22. — *Pour $n > 0$ l'homomorphisme $\chi : \Omega_n^E \rightarrow \mathbf{Z}/2$ est injectif. Si n est pair ≥ 4 c'est un isomorphisme; pour n impair et $n = 2$, $\Omega_n^E = 0$.*

Démonstration. — De 2.13 et 2.21 résulte que $\Omega_n^E = 0$ si n est impair. Remarquons qu'on a une notion de somme connexe de variétés eulériennes (bien définie à isomorphisme près puisque la singularité est de codimension ≥ 4). Si X et X' sont de dimension paire on a $\chi(X \# X') = \chi(X) + \chi(X') - 2$. Soit X un représentant d'un élément de Ω_n^E avec $n = 2k \geq 4$, on peut (en faisant des sommes connexes) supposer X connexe. Si $\chi(X)$ est pair, on forme la variété $X' = X \# M$ où M est une variété différentiable connexe qui est un bord orienté, X' est donc connexe et cobordante à X; si on a choisi $\chi(M) = 4 - \chi(X)$, X' est un bord d'après 2.21.

Reste à construire un exemple pour voir que $\Omega_{2k}^E \neq 0$ si $k \geq 2$. Le plus simple est de prendre $X = S^1 \times D^{2k-1} \cup \text{Cône}(S^1 \times S^{2k-2})$ qui est une variété eulérienne orientable de dimension $2k$ et de caractéristique 1. \square

Remarque 2.23. — Les démonstrations précédentes s'appliquent aussi aux groupes de cobordisme non orientés \mathcal{N}_p^E . Il vient $\mathcal{N}_{2k+1}^E = 0$ et $\mathcal{N}_{2k}^E = \mathbf{Z}/2$ ($k \geq 0$).

2.24. On considère les classes de cobordisme PL orienté (fixe sur le bord) des variétés PL orientées de dimension n dont le bord est connexe et de même caractéristique que S^{n-1} . La somme connexe sur le bord fait de cet ensemble un monoïde, on appelle P_n^E le quotient de ce monoïde par le sous-monoïde des éléments connexes et de caractéristique 1. Il est clair que si M et M' sont cobordantes (rel ∂), $\chi(M) \equiv \chi(M') \pmod{2}$, $1 - \chi(M)$ définit donc un homomorphisme $\alpha : P_n^E \rightarrow \mathbf{Z}/2$.

PROPOSITION 2.24. — *Si n est impair ou si $n = 2$, $P_n^E = 0$. Si $k \geq 2$, α est un isomorphisme $P_{2k}^E \rightarrow \mathbf{Z}/2$.*

Démonstration. — Si n est impair et si

$$\chi(\partial M) = \chi(S^{n-1}) = 2 \quad \text{alors} \quad \chi(M) = \frac{1}{2} \chi(\partial M) = 1,$$

ce qui montre que $P_n^E = 0$ si n est impair (par somme connexe on peut supposer M connexe), P_2^E se calcule par inspection. Si $n = 2k \geq 4$ et si M^n de bord connexe a une caractéristique impaire, on commence par connecter M en M' , puis on fait la somme connexe de M' avec une variété connexe qui est un bord orienté et de caractéristique convenable; on a ainsi cobordé (rel ∂) M à l'élément trivial de P_n^E . De plus pour $k \geq 2$, P_n^E n'est pas nul car il comprend $S^1 \times D^{2k-1}$ qui est de caractéristique 0. \square

VARIÉTÉS EULÉRIENNES MODULO 2.

DÉFINITION 2.25. — *On appelle résolution eulérienne mod 2 toute application PL $f : X \rightarrow Y$ entre deux polyèdres telle que pour tout y de Y :*

- (1) $f^{-1}(y)$ est connexe non vide;
- (2) $\chi(f^{-1}(y))$ est impair.

On appelle variété eulérienne mod 2 de dimension n tout cycle géométrique X de dimension n tel que pour tout x de X on ait $\chi(X, X-x) \equiv 1 \pmod{2}$.

On a de même une notion de variété eulérienne mod 2 à bord. Ce qui a été dit sur les variétés eulériennes se transpose en considérant partout les caractéristiques dans $\mathbf{Z}/2$. Plutôt que de répéter mot pour mot nous allons noter les points de différence.

22.6. CLASSES DE STIEFEL-WHITNEY MOD 2. — Si K est une triangulation de X , variété eulérienne mod 2 de dimension n et K' une triangulation dérivée, on considère les chaînes mod 2 :

$$C_{n-p}(K) = \sum_{a_0 < \dots < a_p < K} \langle \hat{a}_0, \dots, \hat{a}_p \rangle.$$

$C_{n-p}(K)$ est donc la somme (mod 2) de tous les p -simplexes de K' . Ce sont en fait des cycles mod 2 [7] qui définissent $W_q(X) \in H_{n-q}(X; \mathbf{Z}/2)$ et $\varepsilon(W_n(X))$ est congru à $\chi(X)$ modulo 2.

Si X est une variété eulérienne mod 2 de dimension n de bord ∂X , (K, L) une triangulation de $(X, \partial X)$ et (K', L') une triangulation dérivée, on définit de même

$$C_{n-p}(K) = \sum_{a_0 < \dots < a_p < K, a_p \notin L} \langle \hat{a}_0, \dots, \hat{a}_p \rangle$$

et modulo 2 on a la formule

$$\partial C_q(K) = C_q(L),$$

d'où des classes $W_q(X)$ dans $H_{n-q}(X, \partial X; \mathbf{Z}/2)$.

On a pour tout q dans $H_{n-1-q}(\partial X; \mathbf{Z}/2)$: $W_q(\partial X) = \partial W_q(X)$.

COROLLAIRE 2.26. — Soit X une variété eulérienne mod 2; s'il existe une variété eulérienne mod 2, Y de bord de X , alors

$$\chi(X) \equiv 0 \quad (2).$$

Démonstration. — Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_0(X; \mathbf{Z}/2) & \xrightarrow{i_*} & H_0(Y; \mathbf{Z}/2) \\ & \searrow \varepsilon & \swarrow \varepsilon \\ & \mathbf{Z}/2 & \end{array}$$

est commutatif; si $n = \dim X$ on a

$$\chi(X) \equiv \varepsilon(W_n(X)) \text{ mod } 2, \text{ or } \varepsilon(W_n(X)) = \varepsilon i_* W_n(X) = 0$$

puisque $W_n(X) = \partial W_n(Y)$ et $i_* \partial = 0$. \square

2.27. On introduit le groupe $\Omega_n^{E,2}$ de cobordisme orienté des variétés eulérienne, mod 2, de dimension n orientées; la caractéristique mod 2 définit un morphisme $\chi : \Omega_n^{E,2} \rightarrow \mathbf{Z}/2$.

PROPOSITION 2.27. — Dès que $n \geq 3$, $\bar{\chi} : \Omega_n^{E,2} \rightarrow \mathbf{Z}/2$ est un isomorphisme; de plus

$$\Omega_0^{E,2} \simeq \mathbf{Z}, \quad \Omega_1^{E,2} = \Omega_2^{E,2} = 0.$$

La démonstration est largement analogue à celle du cas eulérien, sauf que si $n = 2k+1 \geq 3$, il existe des variétés eulériennes mod 2 orientables de dimension n et de caractéristique impaire comme le montre l'exemple $S^1 \times D^{2k} \cup \text{Cône}(S^1 \times S^{2k-1})$ qui est de caractéristique 1 et qui est une variété eulérienne mod 2 (orientable) puisque $S^1 \times S^{2k-1}$ est connexe et de caractéristique nulle (donc paire).

Remarque 2.28. — Les groupes de cobordismes non orienté des variétés eulériennes mod 2 de dimension n , $\mathcal{N}_n^{E,2}$, se calcule de la même manière : pour $n \neq 1$; $\bar{\chi} : \mathcal{N}_n^{E,2} \rightarrow \mathbf{Z}/2$ est un isomorphisme et $\mathcal{N}_1^{E,2} = 0$.

2.29. Par analogie avec 2.24, on introduit le groupe $P_n^{E,2}$ en partant de variétés PL, M^n où l'on impose que ∂M soit connexe et de caractéristique paire. On a de même :

PROPOSITION 2.29. — Si $n \geq 3$ le morphisme

$$\alpha : P_n^{E,2} \rightarrow \mathbf{Z}/2$$

est un isomorphisme; de plus $P_1^{E,2} = P_2^{E,2} = 0$.

PROPRIÉTÉS DES CLASSES DE STIEFEL-WHITNEY MOD 2. — Si X est une variété eulérienne de dimension n , les classes de S. W. [que nous avons définies en 2.11 dans $H_{n-p}(X; \mathbf{Z})$ ou $H_{n-p}(X; \mathbf{Z}/2)$] se calculent toutes à l'aide des réductions mod 2 des $W_q(X)$ [sauf la classe $W_n(X) \in H_0(X, \mathbf{Z})$ qui, reliée qu'elle est à $\chi(X)$, a les mêmes propriétés que la caractéristique d'Euler-Poincaré]. Il nous suffira donc (même dans le cas des variétés eulériennes) d'étudier les propriétés des classes de S. W., mod 2.

Dans la suite de ce paragraphe tous les groupes d'homologie sont à coefficients $\mathbf{Z}/2$.

2.30. RESTRICTION. — Soit X une variété eulérienne mod 2 de dimension n (supposée sans bord pour simplifier) : soit $Z \subset X$, un sous-polyèdre qui est une variété eulérienne mod 2 de dimension n de bord $\partial Z = \dot{Z}$ (frontière de Z dans X). Soit α la composition

$$H_*(X) \rightarrow H_*(X, X - \dot{Z}) \simeq H_*(Z, \partial Z).$$

LEMME 2.30. — Dans $H_{n-q}(Z, \partial Z)$ on a $W_q(Z) = \alpha W_q(X)$.

Cela résulte directement des définitions de $W_q(X)$, $W_q(Z)$ et de la démonstration du théorème d'excision.

2.31. PRODUIT. — Soient X et Y deux variétés eulériennes mod 2 de dimension n et p (sans bord pour simplifier). On sait que $X \times Y$ est une variété eulérienne mod 2 de dimension $n+p$; on veut calculer $W(X \times Y)$ (classe de S.W. mod 2 totale) à l'aide de $W(X)$ et de $W(Y)$. Se présente une difficulté, car $W(X)$ est définie à l'aide d'une triangulation de X et que les triangulations de $X \times Y$ ne se décrivent pas simplement à l'aide des triangulations de X et Y . Nous allons donc faire un détour.

On dit qu'une paire (X, A) de polyèdres est une variété eulérienne mod 2 de dimension n , relative si pour tout k -simplexe σ d'une triangulation (K, L) de (X, A) avec $\sigma \not\subset L$, $lk(\sigma, K)$ a le même nombre de composantes connexes que S^{n-k-1} et si $\chi(lk(\sigma, K)) \equiv 0 \pmod{2}$. On peut, par le même procédé combinatoire que ci-dessus, définir des classes $W_p(X, A) \in H_{n-p}(X, A; \mathbf{Z}/2)$.

Soit N un voisinage régulier de A dans X de frontière \dot{N} ; d'après 1.21, 2.10 et 2.25 le complément $C = X - \dot{N}$ est une variété eulérienne mod 2 de dimension n et de bord $\partial C = \dot{N}$; soit α la composée

$$H_{n-p}(X, A) \rightarrow H_{n-p}(X, \dot{N}) \simeq H_{n-p}(C, \partial C),$$

α est un isomorphisme et en raisonnant comme en 2.30 il vient :

$$\alpha W_p(X, A) = W_p(C).$$

Soient X et Y deux variétés eulériennes mod 2 de dimension n et p sans bord, et Z le joint $X \star Y$, on considère X et Y comme plongés dans Z , $(Z, X \cup Y)$ est alors une variété eulérienne mod 2 relative de dimension $n+p+1$ dont les triangulations sont clairement reliées à celles de X et de Y .

Soit C le complément d'un voisinage régulier de $X \cup Y$ dans Z , $(C, \partial C)$ est une variété eulérienne mod 2 de dimension $n+p+1$, isomorphe à $(X \times Y \times I, X \times Y \times \partial I)$. Soit Φ l'isomorphisme composé :

$$\bigoplus_{i+j=k-1} H_i(X) \otimes H_j(Y) \rightarrow H_k(X \times Y \times (I, \partial I)) \rightarrow H_k(Z, X \cup Y),$$

où le premier isomorphisme est donné par la formule de Kunneth et le second est le composé de l'isomorphisme $PL : X \times Y \times (I, \partial I) \rightarrow (C, \partial C)$ et de l'isomorphisme $\alpha^{-1} : H_k(C, \partial C) \rightarrow H_k(Z, X \cup Y)$.

LEMME 2.31. *On a la formule*

$$\Phi \left(\sum_{i+j=k} W_i(X) \otimes W_j(Y) \right) = W_k(Z, X \cup Y).$$

Démonstration. — Soient K une triangulation de X , L de Y et $K.L$ la triangulation associée de Z ; soient N_X le voisinage simplicial de K' dans $(K.L)'$ et N_Y celui de L' dans $(K.L)'$ et u l'isomorphisme naturel $H_k(Z, X \cup Y) \xrightarrow{\sim} H_k(Z, \dot{N}_X \cup \dot{N}_Y)$. En utilisant les chaînes simpliciales (mod 2) des triangulations K' , L' et $K'.L'$ l'isomorphisme Φ se traduit au niveau des chaînes par la formule

$$\left(\sum_{\sigma < K'} \lambda_\sigma \sigma, \sum_{\tau < L'} \mu_\tau \tau \right) \rightarrow \sum \lambda_\sigma \mu_\tau \sigma \star \tau.$$

La classe $W_k(Z, X \cup Y)$ est représentée par la chaîne $\Sigma \gamma$ où γ parcourt les simplexes de dimension $n+p+1-k$ de $(K.L)'$ qui ne sont ni dans K' ni dans L' . Soit c un simplexe de $K.L$ qui n'est ni dans K ni dans L , c s'écrit $c = a \star b$ avec $a < K$, $b < L$ et ni a ni b n'est vide; si nous confondons c (resp a, b) avec leurs réalisations géométriques dans Z (resp. X, Y), nous voyons que la chaîne $z_0 = \sum \gamma$ [où γ parcourt les simplexes de dimension $n+p+1-k$ de $(K.L)'$ inclus dans c et non inclus dans K' ni dans L'] et la chaîne

$$z_1 = \sum_{i+j=k} (\Sigma \alpha_i) \star (\Sigma \beta_j)$$

(où α_i parcourt les simplexes de dimension $n-i$ de K' inclus dans a et β_j les simplexes de dimension $p-j$ de L' inclus dans b) sont homologues dans $(c, c \cap (\dot{N}_X \cup \dot{N}_Y))$. Il en résulte que :

$$u \cdot \Phi \left(\sum_{i+j=k} W_i(X) \otimes W_j(Y) \right) = u W_k(Z, X \cup Y),$$

d'où le résultat puisque u est un isomorphisme. \square

COROLLAIRE 2.32. — Dans $H_{n+p+1-k}(X \times Y \times (I, \partial I))$ on a la formule [où ι est le générateur de $H_1(I, \partial I)$] :

$$W_k(X \times Y \times I) = \left(\sum_{i+j=k} W_i(X) \times W_j(Y) \right) \times \iota.$$

Cela résulte directement des résultats précédents.

THÉORÈME 2.33. — Soient X et Y deux variétés eulériennes mod 2 ; dans $H_*(X \times Y)$ on a

$$W(X \times Y) = W(X) \times W(Y).$$

Démonstration. — Cela résulte de deux applications successives du corollaire 2.32.

Remarque. — La même formule se démontre si X et Y sont des variétés eulériennes mod 2 à bord, par la même méthode, il n'y a que des complications de notations.

GROUPES DE BORDISME EULÉRIEN.

2.34. A l'aide des variétés eulériennes mod 2 de dimension q , on forme le groupe de bordisme eulérien mod 2 (non orienté) $\mathcal{N}_q^{E,2}(A)$ d'un espace A ; les arguments classiques montrent que les $\mathcal{N}_*^{E,2}(\)$ forment une théorie homologique. Soit

$$\mathcal{H}_q^{E,2}(A) = \bigoplus_{i \neq 1} H_{q-i}(A; \mathbf{Z}/2),$$

$\mathcal{H}_*^{E,2}(\)$ est une théorie homologique et on a une transformation naturelle $\omega : \mathcal{N}_*^{E,2}(\) \rightarrow \mathcal{H}_*^{E,2}(\)$ définie par

$$\omega_{A,B}([X, f]) = \sum_{i \neq 1} f_* W_i(X),$$

si $(X, \partial X) \xrightarrow{f} (A, B)$ est une variété eulérienne mod 2, singulière de la paire (A, B) [cela résulte de $W(\partial X) = \partial W(X)$, 2.26].

PROPOSITION 2.34. — La transformation naturelle $\omega : \mathcal{N}_*^{E,2}(\) \rightarrow \mathcal{H}_*^{E,2}(\)$ est un isomorphisme.

Démonstration. — Il suffit de vérifier que $\omega_{\text{point}} : \mathcal{N}_*^{E,2} \rightarrow \mathcal{H}_*^{E,2}(p^f)$ est un isomorphisme. Cela résulte de 2.28 puisque si X est une variété eulérienne mod 2 sans bord de dimension q , $\varepsilon W_q(X) = \chi(X)$ où $\varepsilon : H_0(X, \mathbf{Z}/2) \rightarrow \mathbf{Z}/2$ est l'augmentation. Remarquons que l'omission de $H_{q-1}(\ , \mathbf{Z}/2)$ dans $\mathcal{H}_*^{E,2}(\)$ s'explique par le fait que $W_1(X) = \beta W_0(X)$ (ou bien l'explique!). \square

COROLLAIRE 2.35. — L'homomorphisme de Hurewicz :

$$h : \mathcal{N}_q^{E,2}(A, B) \rightarrow H_q(A, B; \mathbf{Z}/2)$$

est surjectif, son noyau est engendré par les variétés décomposées $[X_0 \times X_1, f_1 \circ pr_1]$, où X_0 est sans bord.

Démonstration. — La surjectivité de h résulte directement de la proposition et de 1.14; la suite spectrale de la théorie homologique $\mathcal{N}_*^{E,2}(\)$ est dénégrée, on en déduit le résultat sur le noyau de h comme dans [6]. \square

2.36. ON A DES RÉSULTATS ANALOGUES POUR LES AUTRES GROUPES DE BORDISME EULÉRIEN.

(¹) Soient $\mathcal{N}_q^E(A)$ le q -ième groupe de bordisme eulérien non orienté de l'espace A et

$$\mathcal{H}_q^E(A) = H_0(A, \mathbf{Z}/2) \oplus \bigoplus_{0 \leq 2i < q} H_{q-2i}(A, \mathbf{Z}/2) \quad \text{et} \quad \omega : \mathcal{N}_*^E(\) \rightarrow \mathcal{H}_*^E(\)$$

la transformation naturelle définie par

$$\omega_{A,B}[X, f] = f_* W_q(X) + \sum_{2i < q} f_* W_{2i}(X)$$

lorsque $(X, \partial X) \xrightarrow{f} (A, B)$ est une variété eulérienne singulière de dimension q de la paire (A, B) .

(2) Soient $\Omega_*^E(A)$ le bordisme eulérien orienté de l'espace A et

$$S\mathcal{H}_q^E(A) = H_q(A; \mathbf{Z}) \oplus H_0(A, \mathbf{Z}/2) \oplus \bigoplus_{4 \leq 2i < q} H_{q-2i}(A, \mathbf{Z}/2)$$

et ω la transformation naturelle définie par

$$\omega_{A,B}[X, f] = f_* [X] + f_* W_q(X) + \sum_{4 \leq 2i < q} f_* W_{2i}(X).$$

(3) Soient $\Omega_*^{E,2}(A)$ le bordisme eulérien mod 2 orienté de l'espace A et

$$S\mathcal{H}_q^{E,2}(A) = H_q(A, \mathbf{Z}) \oplus \bigoplus_{k \geq 3} H_{q-k}(A; \mathbf{Z}/2)$$

et ω la transformation naturelle définie par

$$\omega_{A,B}[X, f] = f_* [X] + \sum_{k \leq 3} f_* W_k(X).$$

PROPOSITION 2.36. — *Ces trois transformations naturelles sont des équivalences de théories homologiques.*

En particulier toute classe de $H_m(A; \mathbf{Z})$ est représentable par une variété eulérienne orientée.

CHAPITRE III

Classes caractéristiques eulériennes

3.1. Nous allons utiliser des théorèmes de transversalité pour construire des classes caractéristiques dans les deux situations suivantes :

1° Si φ est un plongement d'une variété eulérienne mod 2, X^n dans l'intérieur d'une variété PL Y^{n+q} , on construit une classe $\alpha(\varphi) \in H^{q+*}(Y, \partial Y; \mathbf{Z}/2)$ qui, *grosso modo*,

calcule les caractéristiques (modulo 2) des intersections transverses avec X des variétés PL de Y .

2° Si ξ est un tube PL d'âme le polyèdre B et d'espace total E , on construit une classe $\bar{w}(\xi) \in H^*(B; \mathbb{Z}/2)$ qui permet de calculer la caractéristique modulo 2 de $f^{-1}(B)$ lorsque $f: (V; \partial V) \rightarrow (E, \partial E)$ est une application d'une variété eulérienne mod 2 dans E transverse à B .

De la conjonction de ces deux constructions, résulte que $\bar{w}(\xi)$ est l'inverse de la classe de Stiefel-Whitney habituelle de ξ et que la classe $\alpha(\varphi)$ est essentiellement déterminée par la classe de Stiefel-Whitney homologique $W(X)$.

3.2. RAPPELONS QUELQUES NOTIONS ET RÉSULTATS DE [13]. — Soient L et K deux sous-polyèdres d'un polyèdre M , on dit que K est transverse à L s'il existe un voisinage régulier N de K dans M qui est un tube d'âme K (de fibre $(D^k; 0)$) et tel que, pour une décomposition en blocs de N , $L \cap N$ soit une réunion de blocs et que cela définisse une structure de tube normal de $L \cap K$ dans L .

PROPOSITION 3.2. — Soient ξ un tube PL d'âme le polyèdre K , d'espace total E , L un sous-polyèdre de E et K_0 un sous-polyèdre de K ; on suppose que K est transverse à L au voisinage de K_0 ; il existe une isotopie h_t parmi les automorphismes de E qui sont l'identité sur $K_0 \cap \partial E$, telle que $h_0 = 1_E$ et $h_1(K)$ est transverse à L .

Cela résulte directement des lemmes 1 et 2 du chapitre 3 de [13].

3.3. Soient $(Y, \partial Y)$ une variété PL, X un sous-polyèdre de $\text{Int} Y$, $(V, \partial V)$ une variété PL et $f: (V; \partial V) \rightarrow (Y, \partial Y)$ un plongement; on dit que f est transverse à X si $f^{-1}(\partial Y) = \partial V$ et $f(V)$ est transverse à X au sens précédent; dans ce cas $W = f(V) \cap X$ est un sous-polyèdre de X qui admet un tube PL normal dans X . Si $f: (V, \partial V) \rightarrow (Y, \partial Y)$ est une application, on dit que f est transverse à X s'il existe une variété PL Z sans bord de dimension m , un plongement $h: V \rightarrow Z$ tels que le plongement

$$g = f \times h: (V, \partial V) \rightarrow (Y, \partial Y) \times Z$$

soit transverse à $X \times Z$; dans ce cas $W = g(V) \cap X \times Z$ est un sous-polyèdre de $X \times Z$ admettant un tube PL normal dans $X \times Z$ de fibre D^{m+c} (où $c = \dim Y - \dim V$).

On a le théorème de transversalité de [13] conséquence de 3.2.

PROPOSITION 3.3. — Soit $f: (V, \partial V) \rightarrow (Y, \partial Y)$ une application transverse à X au voisinage d'un sous-polyèdre A de V , il existe $f_0: (V, \partial V) \rightarrow (Y, \partial Y)$, proche de f , égale à f sur A , et transverse à X .

3.4. Soit ξ un tube PL d'âme le polyèdre B , d'espace total E de bord ∂E ; soient V un polyèdre, ∂V un sous-polyèdre et $f: (V, \partial V) \rightarrow (E, \partial E)$ un plongement. On dit que f est transverse à ξ si B est transverse au sous-polyèdre $f(V)$ dans le polyèdre E ; $U = f^{-1}(f(V) \cap B)$ est alors un sous-polyèdre de V , admettant un tube PL normal dans V isomorphe à $(f|_U)^* \xi$.

Si $f : (V, \partial V) \rightarrow (E, \partial E)$ est une application on dit que f est transverse à ξ si le plongement $f \times \text{Id}$ de $(V, \partial V)$ dans $(E, \partial E) \times V$ (considéré comme l'espace total du tube $\xi \times 1$ sur $B \times V$) est transverse à $\xi \times 1$; dans ce cas

$$U = (f \times \text{Id})^{-1}((f \times \text{Id})(V) \cap (B \times V)) = f^{-1}(B)$$

est un sous-polyèdre de V admettant dans V un tube PL normal isomorphe à $(f|_U)^* \xi$. De 3.2, on tire :

PROPOSITION 3.4. — Soit $f : (V, \partial V) \rightarrow (E, \partial E)$ une application transverse à ξ au voisinage d'un sous-polyèdre A de V , il existe $f_0 : (V, \partial V) \rightarrow (E, \partial E)$, proche de f , égale à f sur A et transverse à ξ ,

3.5. Dorénavant X désigne une variété eulérienne mod 2 de dimension n (sans bord) et $\varphi : X \rightarrow Y$ un plongement (PL) de X dans l'intérieur d'une variété PL Y de dimension $n+q$.

On note $\mathcal{N}_*^{\text{PL}}(\)$ les groupes de bordisme non orienté formé à partir de variétés PL. Dans tout ce chapitre les groupes d'homologie et de cohomologie sont à coefficients $\mathbb{Z}/2$.

LEMME 3.5. — Il existe un homomorphisme unique $\chi_X : \mathcal{N}_{q+i}^{\text{PL}}(Y, \partial Y) \rightarrow \mathbb{Z}/2$ tel que si $f : (V, \partial V)^{q+i} \rightarrow (Y, \partial Y)$ est une application transverse à X d'intersection transverse W on ait

$$\chi_X[V, f] \equiv \chi(W) \pmod{2}.$$

Démonstration. — Par 3.3 tout élément de $\mathcal{N}_{q+i}^{\text{PL}}(Y, \partial Y)$ peut se représenter par $f : (V, \partial V)^{q+i} \rightarrow (Y, \partial Y)$ transverse à X , l'intersection transverse W est alors une variété eulérienne mod 2 de dimension i , d'après 3.3, 2.10 et 2.25. Si $f' : (V', \partial V') \rightarrow (Y, \partial Y)$ est transverse à X d'intersection transverse W' et est cobordante à (V, f) , pour les mêmes raisons W et W' sont égales dans $\mathcal{N}_i^{\text{E}, 2}$ donc $\chi(W) \equiv \chi(W') \pmod{2}$. Cela montre l'existence et l'unicité de χ_X , il est clair que c'est un homomorphisme. \square

LEMME 3.6. — L'homomorphisme χ_X vérifie

$$\chi_X[V_0 \times V_1, f_1 \cdot p_1] \equiv \chi(V_0) \chi_X[V_1, f_1]$$

si V_0 est une variété PL fermée et p_1 la projection $V_0 \times V_1 \rightarrow V_1$.

Preuve. — On peut supposer que $f_1 : (V_1, \partial V_1) \rightarrow (Y, \partial Y)$ est transverse à X d'intersection transverse W_1 , alors $f_1 \cdot p_1 : V_0 \times (V_1, \partial V_1) \rightarrow (Y, \partial Y)$ est transverse à X d'intersection transverse $V_0 \times W_1$ d'où le résultat.

3.7. Soit Z un genre sur les variétés PL, c'est-à-dire la donnée pour toute variété PL V d'une classe $Z(V) = 1 + Z_1(V) + Z_2(V) + \dots \in H^*(V)$ telle que

$$Z(V_0 \times V_1) = Z(V_0) \times Z(V_1) \quad \text{et} \quad Z(\partial V) = Z(V)|_{\partial V}$$

et telle que pour toute variété V sans bord, $\langle Z(V), [V] \rangle \equiv \chi(V) \pmod{2}$.

Soit (A, B) une paire de polyèdres, on a le théorème suivant reliant $H^*(A, B)$ et certains morphismes de $\mathcal{N}_*^{\text{PL}}(A, B)$ dans $\mathbb{Z}/2$ ([12], [16]) :

THÉORÈME 3.7. — *La donnée d'un genre Z sur les variétés PL établit une bijection entre les morphismes $u : \mathcal{N}_*^{\text{PL}}(A, B) \rightarrow \mathbb{Z}/2$ vérifiant la condition :*

$$u[V_0 \times V_1, f_1 \circ p_1] = \chi(V_0) u[V_1, f_1]$$

si V_0 est sans bord et les classes $\alpha \in H^*(A, B)$; la correspondance est donnée par la formule

$$u[V, f] = \langle f^* \alpha \cup Z(V), [V] \rangle.$$

Il est clair que si u est nul sur $\mathcal{N}_i^{\text{PL}}(A, B)$ pour tout $i < k$, les composantes de α de degré $< k$ sont aussi nulles. Nous appliquons ce théorème au morphisme χ_x de 3.4 et aux genres $w(V)$ (classe de Stiefel-Whitney cohomologique totale) et $v^2(V)$ (carré de la classe de Wu totale) ce qui justifie la définition suivante :

DÉFINITION 3.8. — *Soit $\varphi : X \hookrightarrow Y$ un plongement d'une variété eulérienne mod 2, X , de dimension n dans l'intérieur d'une variété PL de dimension $n+q$, Y de bord ∂Y . On note $\alpha(\varphi) = \alpha_0(\varphi) + \alpha_1(\varphi) \dots$ [avec $\alpha_i(\varphi) \in H^{q+i}(Y, \partial Y)$] l'unique classe de cohomologie telle pour tout $f : (V, \partial V) \rightarrow (Y, \partial Y)$ on ait :*

$$\chi_x[V, f] = \langle f^* \alpha(\varphi) \cup w(V), [V] \rangle.$$

De même on définit $\beta(\varphi) = \beta_0(\varphi) + \beta_1(\varphi) + \dots$ [avec $\beta_i(\varphi) \in H^{q+i}(Y, \partial Y)$] par la formule

$$\chi_x[V, f] = \langle f^* \beta(\varphi) \cup v^2(V), [V] \rangle.$$

LEMME 3.8. — *Avec les notations précédentes on a la relation $\alpha(\varphi) = Sq \beta(\varphi)$ où $Sq = 1 + Sq^1 + \dots$ est le carré de Steenrod total.*

Démonstration. — On a les formules de Wu :

$$w(V) = Sq v(V) \quad \text{et} \quad \langle v(V) \cup x, [V] \rangle = \langle Sq x, [V] \rangle$$

pour tout $x \in H^*(V, \partial V)$; on a donc

$$\langle v^2(V) \cup f^* \beta(\varphi), [V] \rangle = \langle Sq v(V) \cup Sq f^* \beta(\varphi), [V] \rangle = \langle w(V) \cup f^* Sq \beta(\varphi), [V] \rangle$$

d'où par unicité $\alpha(\varphi) = Sq \beta(\varphi)$. \square

3.9. PROPRIÉTÉS DE COMPOSITION. — Il suffit d'analyser la situation suivante : soient ξ un tube sur Y de fibre D^k , Z son espace total, Z' l'espace total du tube en sphères S^{k-1} et Z'' le tube au-dessus de ∂Y , Z est une variété PL de dimension $n+q+k$ de bord $\partial Z = Z' \cup Z''$. Soient $U_\xi \in H^k(Z, Z')$ la classe de Thom et $\Phi_\xi : H^{q+i}(Y, \partial Y) \rightarrow H^{q+k+i}(Z, \partial Z)$ l'isomorphisme de Thom défini par

$$\Phi_\xi x = U_\xi \cup p^* x \in H^{q+k+i}(Z, Z' \cup Z'')$$

[où $p : (Z, Z'') \rightarrow (Y, \partial Y)$ est la projection du fibré homotopique associé à ξ]. Soit $w^{-1}(\xi) \in H^*(Y)$ la classe inverse de $w(\xi)$, notons $v^{-2}(\xi) = [Sq^{-1}(w^{-1}(\xi))]^2$ et $\varphi_\xi : X \rightarrow Z$ le plongement composé.

PROPOSITION 3.9. — Avec les notations précédentes on a les relations

$$\alpha(\varphi_\xi) = \Phi_\xi(\alpha(\varphi) \cup w^{-1}(\xi)), \quad \beta(\varphi_\xi) = \Phi_\xi(\beta(\varphi) \cup v^{-2}(\xi)).$$

Démonstration. — On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}_{q+i}(Y, \partial Y) & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & \mathcal{N}_{q+k+i}(Z, \partial Z) \\ & \searrow \chi_X & \swarrow \chi_X \\ & & \mathbf{Z}/2 \end{array}$$

où l'isomorphisme de Thom en bordisme $\bar{\Phi}$ peut être décrit de la façon suivante : si $f : (V, \partial V)^{q+i} \rightarrow (Y, \partial Y)$ représente $x \in \mathcal{N}_{q+i}(Y, \partial Y)$, $\bar{\Phi}(x)$ est représenté par $\bar{f} : (\bar{V}, \partial \bar{V}) \rightarrow (Z, \partial Z)$ où \bar{V} est l'espace total du tube $\xi' = f^* \xi$, $\partial \bar{V}$ son bord et \bar{f} l'extension manifeste de f . Soit $\bar{p} : \bar{V} \rightarrow V$ une projection homotopique du tube ξ' , comme fibrés homotopiques on a $\tau_v = \bar{p}^*(\tau_v \oplus \xi')$ et donc :

$$\begin{aligned} & \langle [f^* \Phi_\xi(\alpha(\varphi) \cup w^{-1}(\xi))] \cup w(\bar{V}), [\bar{V}] \rangle \\ &= \langle \bar{f}^*(U_\xi \cup p^* \alpha(\varphi) \cup p^* w^{-1}(\xi')) \cup w(\bar{V}), [\bar{V}] \rangle \\ &= \langle U_{\xi'} \cup \bar{p}^* f^* \alpha(\varphi) \cup \bar{p}^* w^{-1}(\xi') \cup w(\bar{V}), [\bar{V}] \rangle \\ &= \langle \bar{p}^* f^* \alpha(\varphi) \cup \bar{p}^* w(\mathbf{V}) \cup U_{\xi'}, [\bar{V}] \rangle \\ &= \langle f^* \alpha(\varphi) \cup w(\mathbf{V}), [\mathbf{V}] \rangle. \end{aligned}$$

D'où par unicité $\Phi_\xi(\alpha(\varphi) \cup w^{-1}(\xi)) = \alpha(\varphi_\xi)$; de même pour $\beta(\varphi_\xi)$.

3.10. CAS A BORD. — Soient X une variété eulérienne modulo 2 de dimension n de bord ∂X , Y une variété PL de dimension $n+q$ de bord ∂Y , Y' et Y'' deux sous-variétés de ∂Y avec $\partial Y = Y' \cup Y''$ et $Y' \cap Y'' = \partial Y' = \partial Y''$. Soit $\varphi : (X, \partial X) \rightarrow (Y, Y')$ un plongement (avec $\varphi(\partial X) \subset \text{Int } Y'$ et $\varphi^{-1}(Y') = \partial X$). Si $f : (V, \partial V)^{q+i} \rightarrow (Y, Y'')$ est une application transverse à X , l'intersection est une variété eulérienne mod 2 de dimension i , sans bord. On peut donc définir comme précédemment un morphisme $\chi_X : \mathcal{N}_{q+i}^{\text{PL}}(Y, Y'') \rightarrow \mathbf{Z}/2$ et des classes $\alpha(\varphi) \in H^{q+i}(Y, Y')$ et $\beta(\varphi) \in H^{q+i}(Y, Y'')$.

3.11. SOIT ξ UN TUBE PL DE DIMENSION k SUR LE POLYÈDRE B , E son espace total et ∂E l'espace total du tube en sphères S^{k-1} associé. Si $g : U \rightarrow B$ est une application d'une variété eulérienne mod 2 de dimension p dans B , soit $(V, \partial V)$ l'espace total du tube $g^* \xi$, V est une variété eulérienne mod 2 de dimension $p+k$ de bord ∂V et g a une extension naturelle $f : (V, \partial V) \rightarrow (E, \partial E)$. Cette construction définit un homomorphisme $\psi_\xi : \mathcal{N}_p^{E,2}(B) \rightarrow \mathcal{N}_{p+k}^{E,2}(E, \partial E)$.

LEMME 3.11. — L'homomorphisme ψ_ξ est un isomorphisme.

C'est une conséquence immédiate du théorème de transversalité 3.4 et de 2.10, ψ_ξ est l'isomorphisme de Thom en bordisme eulérien mod 2.

Remarque 3.12. — En notant Φ_ξ l'isomorphisme de Thom en homologie on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}_p^{E,2}(\mathbf{B}) & \xrightarrow{\Psi_\xi} & \mathcal{N}_{p+k}^{E,2}(E, \partial E) \\ \omega_B \downarrow & & \downarrow \omega_E \\ \mathcal{H}_p^{E,2}(\mathbf{B}) & \xrightarrow{\Phi_\xi} & \mathcal{H}_{p+k}^{E,2}(E, \partial E) \end{array}$$

où les 4 flèches sont des isomorphismes (voir 2.34); mais ce diagramme n'est PAS commutatif; nous étudierons à la fin de ce chapitre le défaut de commutativité.

PROPOSITION 3.13. — *Il existe une unique classe $\bar{\alpha}(\xi) \in H^{k+*}(E, \partial E)$ telle que pour application f d'une variété eulérienne mod 2 $(V, \partial V)$ dans $(E, \partial E)$, transverse à ξ , on ait*

$$\chi(f^{-1}\mathbf{B}) \equiv \langle \bar{\alpha}(\xi), f_* W(V) \rangle \pmod{2}.$$

Démonstration. — La méthode est analogue à celle de 3.7, le corollaire 2.35 remplace les propriétés de $\mathcal{N}_*^{\text{PL}}(\)$ et le théorème 2.33 les propriétés d'un genre sur les variétés PL. On définit $\bar{\alpha}(\xi) = \bar{\alpha}_0(\xi) + \dots + \bar{\alpha}_i(\xi) + \dots$ (avec $\bar{\alpha}_i(\xi) \in H^{k+i}(E, \partial E)$) par récurrence. Le morphisme $\chi \cdot \Psi_\xi^{-1} : \mathcal{N}_k^{E,2}(E, \partial E) \rightarrow \mathbf{Z}/2$ s'annule manifestement sur les variétés décomposées et définit donc (2.35) un morphisme $H_k(E, \partial E) \rightarrow \mathbf{Z}/2$ d'où la classe $\alpha_0(\xi) \in H^k(E, \partial E)$ telle que pour $f : (V, \partial V)^k \rightarrow (E, \partial E)$ transverse à ξ on ait

$$\chi \cdot \Psi_\xi^{-1}[V, f] = \chi(f^{-1}\mathbf{B}) = \langle \bar{\alpha}_0(\xi), f_*[V] \rangle = \langle \bar{\alpha}_0(\xi), f_* W(V) \rangle.$$

Supposons construit $\bar{\alpha}_j(\xi)$ pour $j < p$ vérifiant 3.13 pour les variétés eulériennes mod 2 de dimension $< p+k$. Considérons le morphisme $\lambda : \mathcal{N}_{p+k}^{E,2}(E, \partial E) \rightarrow \mathbf{Z}/2$ défini par

$$\lambda[V, f] = \chi \cdot \Psi_\xi^{-1}[V, f] + \sum_{j < p} \langle \bar{\alpha}_j(\xi), f_* W_{p-j}(V) \rangle.$$

Si (V, f) est une variété décomposée

$$V_0 \times (V_1, \partial V_1) \xrightarrow{f_1 \cdot p_1} (E, \partial E)$$

avec V_0 sans bord on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{j < p} \langle \bar{\alpha}_j(\xi), f_* W_{p-j}(V) \rangle \\ &= \sum_{j < p} \langle 1 \times f_1^* \alpha_j(\xi), W_{p-j}(V_0 \times V_1) \rangle. \\ &= \langle 1, W(V_0) \rangle \langle f_1^* \alpha(\xi), W(V_1) \rangle \text{ par 2.33} \\ &= \chi(V_0) (\chi \cdot \Psi_\xi^{-1}[V_1, f_1]) = \chi \cdot \Psi_\xi^{-1}[V, f]. \end{aligned}$$

donc λ s'annule sur les décomposables et définit donc un morphisme $H_{p+k}(E, \partial E) \rightarrow \mathbb{Z}/2$ d'où la construction de la classe $\bar{\alpha}_p(\xi)$. \square

Remarque 3.14. — L'unicité de $\bar{\alpha}(\xi)$ est montrée implicitement dans la démonstration précédente; en fait il suffit de savoir que la formule 3.13 a lieu pour une famille (V_i, f_i) telle que $\{f_{i*}[V_i]\}$ engendre $H_*(E, \partial E)$.

3.15. On appelle $\bar{w}(\xi)$ la classe de $H^*(B)$ telle que $\bar{\alpha}(\xi) = \Phi_\xi^*(\bar{w}(\xi))$ où Φ_ξ^* est l'isomorphisme de Thom : $H^*(B) \rightarrow H^{k+k}(E, \partial E)$.

PROPOSITION 3.15. — *La classe $\bar{w}(\xi)$ vérifie :*

- (1) si $g : B' \rightarrow B$ et $\xi' = g^* \xi$ on a $\bar{w}(\xi') = g^* \bar{w}(\xi)$;
- (2) si ξ et η sont deux tubes PL de base B et $\xi \oplus \eta$ leur somme de Whitney on a

$$\bar{w}(\xi \otimes \eta) = \bar{w}(\xi) \cup \bar{w}(\eta);$$

- (3) si ζ est le fibré linéaire canonique sur $\mathbb{R}P_n$ on a $\bar{w}(\zeta) = 1 + x + \dots + x^n$ où $x \in H^1(\mathbb{R}P_n)$ est le générateur.

Démonstration :

(1) Soient E' l'espace total du tube ξ' et $\bar{g} : (E', \partial E') \rightarrow (E, \partial E)$ l'extension de g . Si $f : (V, \partial V) \rightarrow (E', \partial E')$ est transverse à ξ' il est clair que $\bar{g} \circ f$ est transverse à ξ , il en résulte que les classes $\bar{g}^* \bar{\alpha}(\xi)$ et $\bar{\alpha}(\xi')$ vérifient toutes deux 3.13 pour le tube ξ' ; d'où par unicité $\bar{g}^* \bar{\alpha}(\xi) = \bar{\alpha}(\xi')$ et $\bar{w}(\xi') = g^* \bar{w}(\xi)$.

(2) Au vu de (1) il suffit de vérifier que si ξ est un tube d'âme B et ξ' un tube d'âme B' , alors pour le tube $\xi \times \xi'$ d'âme $B \times B'$ on a $\bar{w}(\xi \times \xi') = \bar{w}(\xi) \times \bar{w}(\xi')$. D'après 3.14 il suffit de vérifier que $\bar{\alpha}(\xi) \times \bar{\alpha}(\xi')$ satisfait à la formule 3.13 pour des variété $(V_i, f_i) \times (V'_j, f'_j)$ où $\{f_{i*}[V_i]\}$ engendre $H_*(B)$ et $\{f'_{j*}[V'_j]\}$ engendre $H_*(B')$, or cela est une conséquence immédiate de la formule $W(V_i \times V'_j) = W(V_i) \times W(V'_j)$.

(3) Nous remplaçons la considération de $(E(\zeta), \partial E(\zeta))$ par celle de l'espace de Thom $T\zeta$ qui s'identifie à $\mathbb{R}P_{n+1}$; l'inclusion $h : \mathbb{R}P_q \hookrightarrow \mathbb{R}P_{n+1}$ est homotope à Th' où h' est l'inclusion $\mathbb{R}P_{q-1} \hookrightarrow \mathbb{R}P_n$ et Th' est transverse à ζ . Comme $\{h_*[\mathbb{R}P_q]\}$ engendre $H_*(\mathbb{R}P_{n+1})$, 3.14 montre que l'égalité $\bar{w}(\zeta) = 1 + x + \dots + x^n$ résulte des égalités

$$\chi(\mathbb{R}P_{q-1}) = \langle x + \dots + x^{n+1}, h_* W(\mathbb{R}P_q) \rangle.$$

Or on montre, par récurrence en partant d'une triangulation équivariante de S^1 , que $\langle x^{q-p}, W_p(\mathbb{R}P_q) \rangle \equiv C_{q+1}^p \pmod{2}$, la formule précédente en découle.

COROLLAIRE 3.16. — *Soit ξ un fibré vectoriel de base B , dans $H^*(B)$ on a*

$$\bar{w}(\xi) = (w(\xi))^{-1},$$

où $w(\xi)$ est la classe de Stiefel-Whitney totale usuelle du fibré ξ .

Démonstration. — La proposition 3.15 nous dit exactement que $\bar{w}(\xi)$ vérifie tous les axiomes qui caractérisent pour un fibré vectoriel ξ la classe $(w(\xi))^{-1}$. Le même résultat pour un tube PL sera montré en 3.22. \square

COROLLAIRE 3.17. — Soit ξ un fibré vectoriel de dimension k de base B . Soient $f : (V, \partial V)^n \rightarrow (E(\xi), \partial E(\xi))$ une application transverse à ξ où V est une variété eulérienne mod 2 de bord ∂V , $U^{n-k} = f^{-1}(B)$, $g : U \rightarrow B$ la restriction de f et N un voisinage régulier de U dans V , espace total du tube $\eta = g^* \xi$. On a la formule

$$\chi(U) \equiv \langle \Phi_\eta^*(w(\eta)^{-1}), W(N) \rangle,$$

où Φ_η^* est l'isomorphisme de Thom $H^*(U) \rightarrow H^*(N, \partial N)$.

Démonstration. — On a $\chi(U) \equiv \langle f^* \bar{\alpha}(\xi), W(V) \rangle$, soit t l'application naturelle $(V, \partial V) \rightarrow (N/\partial N, \star)$. D'après 3.16 on a $\bar{\alpha}(\xi) = \Phi_\xi^*(w(\xi)^{-1})$ donc

$$f^* \alpha(\xi) = f^* \Phi_\xi^*(w(\xi)^{-1}) = t^* \Phi_\eta^*(g^* w(\xi)^{-1}) = t^* \Phi_\eta^*(w(\eta)^{-1}),$$

la formule en résulte car, par 2.30, $t_* W(V) = W(N)$. \square

3.18. Soit X^n une variété eulérienne mod 2, plongée dans un espace euclidien R^{n+q} , \bar{X} un voisinage régulier de bord $\partial \bar{X}$ et φ le plongement $X \subset \bar{X}$.

THÉORÈME 3.18. — Si φ est le plongement d'une variété eulérienne mod 2 X^n dans un de ses voisinages réguliers euclidiens $(\bar{X}, \partial \bar{X})^{n+q}$ on a la formule

$$\alpha(\varphi) = D_{\bar{X}}^{-1} \varphi_* W(X),$$

où $D_{\bar{X}}$ est l'isomorphisme de Poincaré $H^{q+*}(\bar{X}, \partial \bar{X}) \rightarrow H_*(\bar{X})$.

Démonstration. — Nous allons d'abord montrer l'égalité $\alpha_i(\varphi) = D_{\bar{X}}^{-1} \varphi_* W_i(X)$ pour $i < n/2$; il suffit de vérifier l'égalité $\chi_X[V, f] = \langle f^*(D_{\bar{X}}^{-1} \varphi_* W(X)) \cup w(V), [V] \rangle$ pour une famille de (V, f) telle que $\{f_* [V]\}$ engendre

$$\bigoplus_{j < n/2} H_{q+j}(\bar{X}, \partial \bar{X}).$$

Soient $x \in H_{q+i}(\bar{X}, \partial \bar{X}) \simeq H^{n-i}(X)$ avec $i < n/2$ et $k = n-i$; comme $n < 2k$ on peut trouver $f_0 : X \rightarrow MO_k$ représentant x et transverse sur le fibré universel γ_k , soit $U_i = f_0^{-1}(BO_k)$ (strictement parlant il faudrait remplacer BO_k par une grasmanienne triangulée) et soit η le tube normal de U dans X d'espace total $E(\eta)$ (fig. 1).

Soit $t_0 : X \rightarrow E(\eta)/\partial E(\eta)$ l'application de Thom; on peut construire une rétraction par déformation $r : \bar{X} \rightarrow X$ telle que la composée $t_0 \circ r : \bar{X} \rightarrow E(\eta)/\partial E(\eta)$ soit transverse à η au voisinage de U ; en appliquant 3.4 on obtient une variété PL $(V, \partial V)^{n+i}$ et un plongement $f : (V, \partial V) \rightarrow (\bar{X}, \partial \bar{X})$ qui est transverse à X , dont l'intersection transverse est U et tel que $f_* [V] = x$ dans $H_{q+i}(\bar{X}, \partial \bar{X})$. Soient ζ un tube normal au plongement f , d'espace total $E(\zeta)$, $\partial E(\zeta)$ l'espace total du tube en sphères associé, j l'inclusion $(E(\zeta), E(\zeta) \cap \partial \bar{X}) \subset (\bar{X}, \partial \bar{X})$, t l'application de Thom $\bar{X} \rightarrow E(\zeta)/\partial E(\zeta)$,

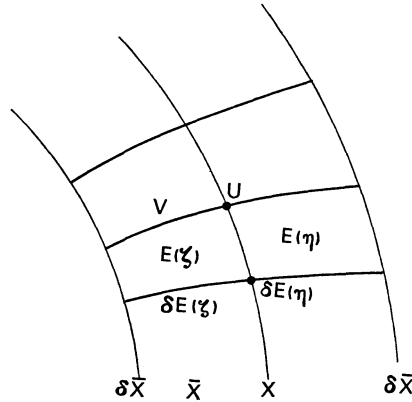


Fig. 1

ψ l'inclusion $(E(\eta), \partial E(\eta)) \hookrightarrow (E(\zeta), \partial E(\zeta))$. Comme \bar{X} est parallélisable on a $w(V) = w(\zeta)^{-1}$ et

$$\begin{aligned}
 & \langle f^*(D_{\bar{X}}^{-1} \varphi_* W(X)) \cup w(V), [V] \rangle \\
 &= \langle \Phi_{\zeta}^*(w(\zeta)^{-1}) \cup j^* D_{\bar{X}}^{-1} \varphi_* W(X), [E(\zeta)] \rangle \\
 &= \langle \Phi_{\zeta}^*(w(\zeta)^{-1}), t_* \varphi_* W(X) \rangle \\
 &= \langle \Phi_{\zeta}^*(w(\zeta)^{-1}), \psi_* t_{0*} W(X) \rangle \\
 &= \langle \psi^* \Phi_{\zeta}^*(w^{-1}(\zeta)), W(E(\eta)) \rangle \text{ par 2.30} \\
 &= \langle \Phi_{\eta}^*(w^{-1}(\eta)), W(E(\eta)) \rangle \\
 &\equiv \chi(U) = \chi_X[V, f] \text{ par 3.17.}
 \end{aligned}$$

On en déduit le résultat général (i quelconque) en remplaçant X par le produit $X^n \times S^m$ car $W(X \times S^m) = W(X) \times [S^m]$ (2.33). \square

3.19. Si $r : \bar{X} \rightarrow X$ est une rétraction par déformation, 3.18 s'écrit encore :

$$W(X) = r_* D_{\bar{X}} \alpha(\varphi).$$

COROLLAIRE 3.20. — Soit X une variété PL de dimension n et $w(X) \in H^*(X)$ sa classe de Stiefel-Whitney cohomologique tangente. On a $W(X) = D_X w(X)$.

Démonstration. — Soit $\Phi_v^* : H^*(X) \rightarrow H^{q+*}(\bar{X}, \partial \bar{X})$ l'isomorphisme de Thom, il est clair, par unicité que $\alpha(\varphi) = \Phi_v^*(w(X))$ et donc

$$w(X) = r_* D_{\bar{X}} \alpha(\varphi) = r_* D_{\bar{X}} \Phi_v^*(w(X)) = D_X(w(X)). \quad \square$$

Remarque 3.21. — Cela constitue une nouvelle démonstration d'un théorème de dualité qui remonte à Whitney [7]. Si X est une variété différentiable on peut simplifier la démon-

tration précédente (pour la rendre indépendante de l'étude du bordisme différentiable ou PL) de la façon suivante.

Si ξ est un fibré vectoriel différentiable de base une variété différentiable X , d'espace total E et i la section nulle $X \hookrightarrow E$, dans $H^*(X)$ la classe $D_X^{-1} W(X)$ commence par 1, il existe donc une unique classe $w'(\xi) \in H^*(X)$ telle que

$$i^* D_E^{-1} W(E) = w'(\xi) \cup D_X^{-1} W(X).$$

Les propriétés de restriction et de multiplicativité de W permettent de vérifier (d'une manière analogue à 3.15) que $w'(\xi)$ vérifie les axiomes des classes de S.W, donc $w'(\xi) = w(\xi)$ et la formule de dualité $W(X) = D_X w(X)$ en résulte en prenant pour ξ le fibré normal de X .

3.22. NOUS UTILISONS LA FORMULE DE DUALITÉ 3.20 pour démontrer 3.16 dans le cas d'un tube PL ξ de dimension k d'âme le polyèdre B .

Si V est une variété PL à de dimension $k+i$ et $f : (V; \partial V) \rightarrow (E(\xi), \partial E(\xi))$ est transverse à ξ , $U^i = f^{-1} B$ est une sous variété PL de V admettant un tube normal η isomorphe à $(f|_U)^* \xi$. Nous avons :

$$\begin{aligned} & \langle \Phi_\xi^*(w^{-1}(\xi)), f_* W(V) \rangle \\ &= \langle f^* \Phi_\xi^*(w^{-1}(\xi)) \cup w(V), [V] \rangle \text{ par 3.20} \\ &= \langle f|_U^* w^{-1}(\xi) \cup w(V)|_U, [U] \rangle \\ &= \langle w(U), [U] \rangle \equiv \chi(U). \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{N}_*^{\text{PL}}(E, \partial E) \rightarrow H_*(E, \partial E)$ est surjectif, la remarque 3.14 nous assure que

$$\bar{\alpha}(\xi) = \Phi_\xi^*(w^{-1}(\xi)).$$

COROLLAIRE 3.22. — Soit ξ un tube PL d'âme B ; dans $H^*(B)$ on a

$$\bar{w}(\xi) = w^{-1}(\xi).$$

3.23. REVENONS A LA SITUATION DE 3.5.

THÉORÈME 3.23. — Soit $\varphi : X^n \hookrightarrow Y^{n+q}$ un plongement d'une variété eulérienne mod 2 dans l'intérieur d'une variété PL Y ; dans $H^{q+*}(Y, \partial Y)$ on a la formule

$$\alpha(\varphi) = (D_Y^{-1} \varphi_* W(X)) \cup w^{-1}(Y).$$

Démonstration. — Soit $[V, f] \in \mathcal{N}_{q+i}^{\text{PL}}(Y, \partial Y)$, en multipliant la paire (Y, X) par une sphère de grande dimension, on peut toujours supposer que $f : (V, \partial V)^{q+i} \rightarrow (Y, \partial Y)$ est un plongement transverse à X d'intersection transverse U ; soient ξ un tube normal au plongement f et η sa restriction à U qui est un tube normal à U dans X . Le même calcul qu'en 3.18 donne

$$\begin{aligned} & \langle f^* [(D_Y^{-1} \varphi_* W(X)) \cup w^{-1}(Y)] \cup w(V), [V] \rangle \\ &= \langle \Phi_\eta^*(w^{-1}(\eta)), W(E(\eta)) \rangle \\ &\equiv \chi(U) \text{ par 3.22. } \square \end{aligned}$$

3.24. TOUS LES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS ONT ÉTÉ DÉMONTRÉS LORSQUE X est sans bord. En fait, avec des complications de notations, les démonstrations s'appliquent lorsque X a un bord non vide.

PROPOSITION 3.25. — Soient ξ un tube PL sur la variété eulérienne mod 2, X , $E(\xi)$ son espace total et $p : E(\xi) \rightarrow X$ une rétraction par déformation on a

$$W(X) = p_*(\Phi_\xi^*(w^{-1}(\xi)) \cap W(E(\xi))).$$

Démonstration. — Soit j l'inclusion $X \hookrightarrow E(\xi)$, soit $(Y, \partial Y)$ une variété PL de dimension $n+q+k$ avec $\partial Y = Y' \cup Y''$ (et $Y' \cap Y'' = \partial Y' = \partial Y''$) telle que (Y, Y') soit voisinage régulier euclidien de $(E(\xi), \partial E(\xi))$; on note ψ le plongement $(E(\xi), \partial E(\xi)) \hookrightarrow (Y, Y')$. On peut construire une rétraction par déformation $\rho : (Y, Y') \rightarrow (E(\xi), \partial E(\xi))$ transverse à ξ au voisinage de X , par transversalité on peut supposer que ρ est transverse à ξ ; soit $(Y_1, \partial Y_1)^{n+q} = \rho^{-1}(X)$ c'est une sous-variété PL de (Y, Y') , on note h l'inclusion $(Y_1, \partial Y_1) \hookrightarrow (Y, Y')$, φ le plongement $X \hookrightarrow Y_1$ et η le tube normal de h isomorphe à $\rho|_{X^*} \xi$.

Si $f : (V, \partial V)^{q+i} \rightarrow (Y_1, \partial Y_1)$ est transverse à X , $h \circ f : (V, \partial V) \rightarrow (Y, Y')$ est transverse à $(E(\xi), \partial E(\xi))$ avec même intersection transverse, par unicité il en résulte que, dans $H^{q+i}(Y_1, \partial Y_1)$:

$$h^* \alpha(\psi) = \alpha(\varphi).$$

Or $\psi \circ j = h \circ \varphi$ et le plongement $h \circ \varphi$ est ce qu'on a appelé en 3.9, φ_η on a donc

$$\begin{aligned} \alpha(\psi \circ j) &= \alpha(h \circ \varphi) = \alpha(\varphi_\eta) = \Phi_\eta^*(\alpha(\varphi) \cup w^{-1}(\eta)) = \Phi_\eta^*(h^* \alpha(\psi) \cup w^{-1}(\eta)) \\ &= \alpha(\psi) \cup \psi^* \Phi_\xi^* w^{-1}(\xi). \end{aligned}$$

Or comme Y est parallélisable

$$\alpha(\psi \circ j) = D_Y^{-1}(\psi \circ j)_* W(X),$$

soit

$$\alpha(\psi) = D_Y^{-1} \psi_* W(E(\xi)).$$

le résultat en découle.

3.26. Soit ξ^k un tube PL d'âme le polyèdre B , considérons le diagramme (3.12) :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}_*^{E,2}(B) & \xrightarrow{\psi_\xi} & \mathcal{N}_{k+*}^{E,2}(E(\xi), \partial E(\xi)) \\ \downarrow \omega_B & & \downarrow \omega_E \\ \mathcal{H}_*^{E,2}(B) & \xrightarrow{\Phi_\xi} & \mathcal{H}_{k+*}^{E,2}(E(\xi), \partial E(\xi)) \end{array}$$

THÉORÈME 3.26. — On a la formule, pour tout x de $\mathcal{N}_*^{E,2}(B)$:

$$\omega_E \psi_\xi x = w(\xi) \cap \Phi_\xi \omega_B x.$$

Cela résulte directement de la proposition 3.25.

3.27. NOTATIONS ET DÉFINITIONS. — Soient X^n une variété eulérienne mod 2, $\varphi : X^n \hookrightarrow \bar{X}$ le plongement de X dans un de ses voisinages réguliers euclidiens de grande dimension $n+q$, et $r : \bar{X} \rightarrow X$ une rétraction par déformation, nous venons de voir que $r_* D_{\bar{X}} \alpha_i(\varphi) = W_i(X)$ dans $H_{n-i}(X)$; on pose

$$\mu_i(X) = r_* D_{\bar{X}} \beta_i(\varphi) \in H_{n-i}(X).$$

Posons encore $\bar{W}_i(X) = r_* D_{\bar{X}} Sq^i \alpha_0(\varphi)$ [la notation $\bar{W}(X)$ s'explique par le fait que si X vérifie la dualité de Poincaré à coefficients $\mathbf{Z}/2$, $\bar{W}(X)$ est le dual de Poincaré de $\bar{w}(X)$ classe de S.W. normale cohomologique de X]. Si $f : X \rightarrow X'$ est une application entre deux variétés eulériennes mod 2 de dimension n telle que $f_* [X] = [X']$ dans $H_n(X')$ il est clair que $f_* \bar{W}(X) = \bar{W}(X')$.

PROPOSITION 3.27. — Soit $f : X \rightarrow X'$ une résolution eulérienne mod 2 entre deux variétés eulériennes mod 2 de dimension n on a

$$f_* W(X) = W(X'), \quad f_* \mu(X) = \mu(X') \quad \text{et} \quad f_* \bar{W}(X) = \bar{W}(X').$$

Démonstration. — Deux des trois formules ont été déjà vérifiées, la troisième ($f_* \mu(X) = \mu(X')$) résulte comme en 2.17, de l'existence de classes relatives ayant les propriétés que l'on pense. \square

PROPOSITION 3.28. — Soit X une variété eulérienne mod 2, on a :

- (1) $\mu_1(X) = 0$ [donc $W_1(X) = \bar{W}_1(X)$];
- (2) si X est orientable, $\mu_2(X) = 0$ et $W_2(X) = \bar{W}_2(X)$.

Démonstration. — Si $f : (V, \partial V)^{q+1} \rightarrow (\bar{X}, \partial \bar{X})^{n+q}$ est transverse à X , l'intersection transverse U est une variété de dimension 1 donc $\chi(U) \equiv 0$ et $\langle f^* \beta_1(\varphi), [V] \rangle = 0$ d'où $\beta_1(\varphi) = 0$ et $\mu_1(X) = 0$. Soit Σ la singularité de X , on sait (1.9) que Σ est de codimension 3; soit $(N, \partial N)$ un voisinage régulier de Σ dans X de complément N_0 ($N_0, \partial N$) est une variété PL de dimension n , et X est orientable si et seulement si N_0 est orientable.

Si X est orientable et si $f : (V, \partial V)^{q+2} \rightarrow (\bar{X}, \partial \bar{X})^{n+q}$ est transverse à X (et à Σ par raison de dimension) l'intersection transverse U est de dimension 2 et est une sous-variété PL de N_0 (ou de $N_0 \times S^m$) on a donc

$$\langle f^* \alpha_0(\varphi) \cup v_1^2(V), [V] \rangle = \langle v_1^2(U), [U] \rangle$$

puisque N_0 est orientable et $v_1(N_0) = 0$; on en déduit :

$$\begin{aligned} \langle f^* \beta_2(\varphi), [V] \rangle &\equiv \chi(U) + \langle f^* \alpha_0(\varphi) \cup v_1^2(V), [V] \rangle \\ &\equiv \chi(U) + \langle v_1^2(U), [U] \rangle = 0. \end{aligned}$$

donc $\beta_2(\varphi) = 0$ et $\mu_2(X) = 0$.

Les formules entre $W(X)$ et $\bar{W}(X)$ se déduisent alors de la relation $\alpha(\varphi) = Sq \beta(\varphi)$. \square

32.9. CAS DES VARIÉTÉS EULÉRIENNES. — Avec les notations précédentes, si X est une variété eulérienne on sait que le morphisme

$$\chi_X : \mathcal{N}_{q+i}^{\text{PL}}(\bar{X}, \partial\bar{X}) \rightarrow \mathbf{Z}/2$$

est nul si i est impair, en effet l'intersection transverse de $f : (V, \partial V)^{q+i} \rightarrow (\bar{X}, \partial\bar{X})^{n+q}$ est une variété eulérienne de dimension i et l'on applique 2.13.

PROPOSITION 3.29. — *Si X est une variété eulérienne, $\mu_i(X) = 0$ pour i impair.*

Preuve. — Soit $\tilde{\beta}(\varphi) = \beta_0(\varphi) + \beta_2(\varphi) + \dots + \beta_{2j}(\varphi) + \dots$, comme $v^2(V)$ n'a de composantes qu'en dimensions paires,

$$\begin{aligned} \langle f^* \tilde{\beta}(\varphi) \cup v^2(V), [V] \rangle &= 0 && \text{si } \dim V \not\equiv q \pmod{2}. \\ &= \langle f^* \beta(\varphi) \cup v^2(V), [V] \rangle && \text{si } \dim V \equiv q \pmod{2}. \end{aligned}$$

Comme χ_X est nul en dimensions congrues à $q+1$, modulo 2 on a

$$\chi_X[V, f] = \langle f^* \tilde{\beta}(\varphi) \cup v^2(V), [V] \rangle$$

d'où par unicité $\tilde{\beta}(\varphi) = \beta(\varphi)$.

3.30. ON APPELLE $\mathbf{Z}/2$ -VARIÉTÉ PL DE DIMENSION k , une variété V^k PL orientée telle que ∂V soit réunion de deux sous-variétés V_0 et V_1 et munie d'un isomorphisme PL $u : V_0 \rightarrow V_1$ conservant l'orientation (induite de V), le quotient $\tilde{V} = V/u$ est alors une variété PL de dimension k non orientable; on a une définition analogue de $\mathbf{Z}/2$ -variétés PL à bord. Si $f : (\tilde{V}, \partial\tilde{V}) \rightarrow (\bar{X}, \partial\bar{X})$ est transverse à X variété eulérienne, l'intersection transverse est une $\mathbf{Z}/2$ -variété (eulérienne). Notons $\Omega_{q+i}^{\text{SPL}}(\bar{X}, \partial\bar{X}; \mathbf{Z}/2)$ le groupe de bordisme formé à partir des $\mathbf{Z}/2$ -variétés PL singulières de dimension $q+i$ de la paire $(\bar{X}, \partial\bar{X})$. Nous avons encore un morphisme $\chi_X : \Omega_{q+i}^{\text{SPL}}(\bar{X}, \partial\bar{X}; \mathbf{Z}/2) \rightarrow \mathbf{Z}/2$. Énonçons un résultat qui sera utilisé plus loin :

LEMME 3.30. — *Soit X une variété eulérienne orientée telle que le morphisme $\chi_X : \Omega_{q+i}^{\text{SPL}}(\bar{X}, \partial\bar{X}; \mathbf{Z}/2) \rightarrow \mathbf{Z}/2$ soit nul dès que $i = 4k+2$. Alors $\mu_{4k+2}(X) = 0$ pour tout k .*

Démonstration. — Par analogie avec 3.7 on définit une classe

$$\bar{\beta}(\varphi) = \bar{\beta}_0(\varphi) + \dots + \bar{\beta}_j(\varphi) + \dots$$

avec $\bar{\beta}_j(\varphi) \in H^{q+j}(\bar{X}, \partial\bar{X})$ telle que pour tout $[\tilde{V}, f] \in \Omega_{q+i}^{\text{SPL}}(\bar{X}, \partial\bar{X}; \mathbf{Z}/2)$ on ait :

$$\chi_X[\tilde{V}; f] = \langle f^* \bar{\beta}(\varphi) \cup v^2(\tilde{V}), [\tilde{V}] \rangle.$$

On vérifie [16] que $\bar{\beta}(\varphi) = \beta(\varphi)$ et comme $v^2(\tilde{V})$ n'a pas de composantes qu'en dimensions divisibles par 4 [16], on vérifie, comme en 3.29, que si

$$\chi_X : \Omega_{q+i}^{\text{SPL}}(\bar{X}, \partial\bar{X}; \mathbf{Z}/2) \rightarrow \mathbf{Z}/2$$

est nul pour tout $i = 4j+2$, alors $\beta_{4k+2}(\varphi) = 0$.

CHAPITRE IV

Variétés rationnelles

DÉFINITION 4.1. — On appelle *résolution rationnelle* toute application PL $f : X \rightarrow Y$ entre deux polyèdres X et Y telle que pour tout $y \in Y$:

$$H_*(f^{-1}(y); \mathbf{Q}) \cong H_*(p'; \mathbf{Q}).$$

C'est-à-dire que les fibres $f^{-1}(y)$ ressemblent au point pour le foncteur $H_*(, \mathbf{Q})$. Il est clair qu'une résolution rationnelle est une résolution eulérienne, *a fortiori* une résolution géométrique.

4.2. Le comportement en homologie rationnelle d'une résolution rationnelle est explicité par le théorème de Vietoris-Begle.

PROPOSITION 4.2. — Soient $f : X \rightarrow Y$ une résolution rationnelle et A un sous-polyèdre de Y , l'application $f : (X, f^{-1}A) \rightarrow (Y, A)$ induit des isomorphismes

$$f_* : H_*(X, f^{-1}A; \mathbf{Q}) \rightarrow H_*(Y, A; \mathbf{Q}).$$

DÉFINITION 4.3. — On appelle *variété rationnelle de dimension n* tout polyèdre X de dimension n tel que pour tout x de X :

$$H_*(X, X-x; \mathbf{Q}) \cong H_*(D^n, S^{n-1}; \mathbf{Q}).$$

LEMME 4.4. — Soit X une variété rationnelle de dimension n , X est une variété eulérienne. Plus précisément pour tout k -simplexe σ d'une triangulation K de X , $lk(\sigma, K)$ est une variété rationnelle de dimension $n-k-1$ qui a la même homologie rationnelle que S^{n-k-1} .

Démonstration. — On a $\dot{S}t(\sigma, K) \cong \dot{\sigma} \star lk(\sigma, K)$; si $k < n$, $lk(\sigma, K)$ est non vide car

$$H_{n-1}(\dot{S}t(\sigma, K); \mathbf{Q}) \cong H_n(S\dot{t}(\sigma, K), \dot{S}t(\sigma, K); \mathbf{Q}) \cong H_n(X, X-\hat{\sigma}; \mathbf{Q}) \cong \mathbf{Q},$$

on a donc, pour $p \geq 0$,

$$H_{p+k}(\dot{S}t(\sigma, K); \mathbf{Q}) \cong \tilde{H}_p(lk(\sigma, K); \mathbf{Q})$$

soit encore

$$\tilde{H}_p(lk(\sigma, K); \mathbf{Q}) \cong H_{p+k+1}(X, X-\hat{\sigma}; \mathbf{Q})$$

ce qui montre que $lk(\sigma, K)$ a même homologie rationnelle que S^{n-k-1} ; le reste se démontre comme dans le cas eulérien. \square

4.5. Pour l'étude des variétés rationnelles la condition d'orientabilité joue un rôle plus grand que dans le cas eulérien. Aussi dorénavant toutes les variétés rationnelles seront orientables et orientées; on note $[X]$ la classe de $H_n(X, \mathbf{Z})$ associée à la variété rationnelle X de dimension n (orientée!).

Les démonstrations classiques de la dualité de Poincaré s'appliquent lorsqu'on utilise l'homologie et la cohomologie à coefficients \mathbf{Q} :

PROPOSITION 4.5. — Soient X une variété rationnelle de dimension n , (A, B) une paire de sous-polyèdres. Le cap-produit par $[X]$ induit des isomorphismes

$$D_X : H^p(A, B; \mathbf{Q}) \rightarrow H_{n-p}(X-B, X-A; \mathbf{Q}).$$

PROPOSITION 4.6. — Soit $f : X \rightarrow Y$ une résolution rationnelle entre deux polyèdres de dimension n , si X est une variété rationnelle de dimension n , Y aussi.

Démonstration. — Soit $y \in Y$, par 4.2 $H_p(Y, Y-y, \mathbf{Q}) \cong H_p(X, X-f^{-1}(y); \mathbf{Q})$ qui est isomorphe à $H^{n-p}(f^{-1}(y); \mathbf{Q})$, on a donc $H_*(Y, Y-y; \mathbf{Q}) \cong H_*(D^n, S^{n-1}; \mathbf{Q})$ de plus $f_* : H_n(X; \mathbf{Q}) \rightarrow H_n(Y, \mathbf{Q})$ est un isomorphisme donc comme Y est de dimension n , Y est orientable et on l'oriente par $[Y] = f_*[X]$. \square

Remarque. — Ce résultat et 4.3 montrent que les deux façons de définir une variété rationnelle (cf. introduction) sont identiques, les conditions d'homogénéité que nous avons imposées dans le cas géométrique ou eulérien sont automatiquement vérifiées dans le cas rationnel.

DÉFINITION 4.7. — On dit qu'un polyèdre X de dimension n est une variété rationnelle de dimension n de bord un sous-polyèdre ∂X de dimension $n-1$ si

$$(1) \quad \forall x \in X - \partial X, \quad H_*(X, X-x; \mathbf{Q}) \cong H_*(D^n, S^{n-1}; \mathbf{Q}),$$

$$(2) \quad \begin{cases} \forall x \in \partial X, \\ H_*(X, X-x; \mathbf{Q}) \cong H_*(D^n; \mathbf{Q}) \quad \text{et} \quad H_*(\partial X, \partial X-x; \mathbf{Q}) \cong H_*(D^{n-1}, S^{n-2}; \mathbf{Q}). \end{cases}$$

On a imposé dans la définition que ∂X soit une variété rationnelle de dimension $n-1$. On démontre comme en 2.7.

LEMME 4.8. — Soit $(X, \partial X)$ une paire de polyèdres où X est de dimension n et où ∂X admet un collier dans X . Si pour tout x de $X - \partial X$, $H_*(X, X-x; \mathbf{Q}) \cong H_*(D^n, S^{n-1}; \mathbf{Q})$, X est une variété rationnelle de dimension n de bord ∂X .

Remarque 4.9. — Comme en 4.5, toutes les variétés rationnelles à bord seront orientables et orientées; on note $[X] \in H_n(X, \partial X; \mathbf{Z})$ la classe d'orientation, le bord ∂X est alors orienté par $\partial[X] \in H_{n-1}(\partial X; \mathbf{Z})$ où ∂ est le connectant

$$H_n(X, \partial X; \mathbf{Z}) \rightarrow H_{n-1}(\partial X; \mathbf{Z}).$$

La dualité de Poincaré s'étend, comme il est classique, aux variétés rationnelles à bord.

Les résultats montrés au chapitre 1 pour les cycles géométriques s'étendent aux variétés rationnelles (et sont même plus simples à montrer puisqu'on n'a pas à considérer les conditions d'homogénéité) en particulier :

4.10. RECOLLEMENT. — Soient Y_0 et Y_1 deux variétés rationnelles de dimension n de bord ∂Y_0 et ∂Y_1 . Si $\varphi : \partial Y_0 \rightarrow \partial Y_1$ est un isomorphisme PL renversant l'orientation, $Z = Y_0 \bigcup_{\varphi} Y_1$ est une variété rationnelle de dimension n sans bord.

Plus généralement si X est une variété rationnelle de dimension $n-1$ de bord ∂X et si $\varphi_i : X \rightarrow \partial Y_i$ sont deux plongements dont l'un conserve l'orientation et l'autre la renverse, alors $Z = Y_0 \bigcup_X Y_1$ est une variété rationnelle de dimension n de bord ∂Z et ∂Z s'identifie au recollement de $\partial Y_0 - \varphi_0(X)$ et $\partial Y_1 - \varphi_1(X)$ le long de leur bord commun ∂X .

4.11. **PRODUIT.** — Soient Y_0 et Y_1 deux variétés rationnelles sans bord de dimension n_0 et n_1 , alors $Z = Y_0 \times Y_1$ est une variété rationnelle sans bord de dimension $n_0 + n_1$.

Si Y_0 et Y_1 ont des bords ∂Y_0 et ∂Y_1 , Z est une variété rationnelle de dimension $n_0 + n_1$ de bord $\partial Z = \partial Y_0 \times Y_1 \cup (-)^{n_0} Y_0 \times \partial Y_1$ [où $(-)^{n_0} Y_0 \times \partial Y_1$ signifie qu'on a changé l'orientation de $\partial Y_0 \times Y_1$ si n_0 est impair].

4.12. **SOIENT X UN POLYÈDRE DE DIMENSION n , Y l'espace total d'un tube PL orienté de dimension k sur X , ∂Y l'espace total du tube en sphères S^{k-1} associé. Si Y est une variété rationnelle de dimension $n+k$ de bord ∂Y , X est une variété rationnelle de dimension n et réciproquement.**

4.13. **CYLINDRE D'UNE RÉOLUTION.** — Soit $f : X \rightarrow Y$ une application PL entre deux variétés rationnelles de dimension n ; soient K et L des triangulations de X et Y telles que $f : K \rightarrow L$ soit simpliciale et C le cylindre simplicial de f ; il y a équivalence entre :

- (1) f est une résolution rationnelle (de degré 1);
- (2) C est une variété rationnelle de dimension $n+1$ de bord $Y \cup (-X)$.

4.14. **CARACTÉRISTIQUES D'EULER-POINCARÉ DES VARIÉTÉS RATIONNELLES.** — En plus des résultats valables dans la catégorie eulérienne on a :

LEMME 4.14. — Soit X une variété rationnelle de dimension $4k+2$, on a

$$\chi(X) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Démonstration. — On a $\chi(X) = \sum (-)^p \dim H^p(X; \mathbf{Q})$, par dualité de Poincaré il vient que $\chi(X) \equiv \dim H^{2k+1}(X; \mathbf{Q}) \pmod{2}$, de plus la forme bilinéaire b sur $H^{2k+1}(X; \mathbf{Q})$ définie par $b(x, y) = \langle x \cup y, [X] \rangle$ est non dégénérée et antisymétrique, $\dim H^{2k+1}(X; \mathbf{Q})$ est donc paire. Plus généralement on a le résultat suivant :

LEMME 4.15. — Soit \tilde{V} une $\mathbf{Z}/2$ -variété rationnelle de dimension $4k+2$, alors $\chi(\tilde{V}) \equiv 0 \pmod{2}$.

Démonstration. — Soit $\tilde{V} = V/u$ où $u : V_0 \rightarrow V_1$ est un isomorphisme conservant l'orientation entre les deux parties de ∂V . La forme b sur $H^{2k+1}(V, \partial V; \mathbf{Q})$ est antisymétrique, son rang est donc pair, or ce rang se calcule, modulo 2, par la formule connue $\chi(V, \partial V) + \chi^*(\partial V)$ où $\chi^*(\partial V)$ est la semi-caractéristique de ∂V . Comme ∂V est formé de deux parties isomorphes $\chi^*(\partial V) \equiv 0 \pmod{2}$ d'où le résultat car $\chi(V, \partial V) = \chi(\tilde{V})$. \square

On en déduit grâce à 3.30.

COROLLAIRE 4.16. — Soit X une variété rationnelle de dimension n et

$$\mu_i(X) \in H_{n-i}(X; \mathbf{Z}/2)$$

la classe définie en 3.27. Si $j \neq 0$ (4), $\mu_j(X) = 0$.

CHAPITRE V

Invariant d'intersection

PRÉLIMINAIRE ALGÈBRE.

DÉFINITION 5.1. — On dit qu'un \mathbf{Q} -espace vectoriel de dimension finie E , muni d'une forme bilinéaire $b : E \otimes E \rightarrow \mathbf{Q}$ est un ε - b -module, si E est somme orthogonale de deux sous-espaces E_1 et E_2 avec $b|_{E_1}$ symétrique et $b|_{E_2}$ antisymétrique.

Remarques :

- (1) on ne demande pas que b soit non dégénérée;
- (2) si E est un ε - b -module le radical à gauche et le radical à droite de b coïncident, on les note $\text{rad } b$ ou $\text{rad } E$.

LEMME 5.2. — Tout ε - b -module E peut s'écrire sous forme de somme orthogonale

$$E = \text{rad } E \oplus E_+ \oplus E_-,$$

avec E_+ symétrique non dégénéré et E_- antisymétrique non dégénéré. Une telle décomposition est unique à isomorphisme près.

Démonstration. — Il suffit de vérifier l'unicité à isomorphisme près de la décomposition. On peut factoriser par $\text{rad } E$ et se ramener au cas où E est non dégénéré; soit \bar{b} la symétrisée de b

$$\bar{b}(x, y) = \frac{1}{2}(b(x, y) + b(y, x))$$

il est clair que E_+ est isomorphe à $E/\text{rad } \bar{b}$ et donc est bien défini à isomorphisme près par la donnée de E , le lemme en résulte par application du théorème de Witt. \square

5.3. SOIT $W(\mathbf{Q})$ L'ANNEAU DE WITT DES FORMES BILINÉAIRES symétriques non dégénérées sur \mathbf{Q} . Si E est un ε - b -module écrit sous la forme $\text{rad } E \oplus E_+ \oplus E_-$, le lemme montre que la classe de E_+ dans $W(\mathbf{Q})$ ne dépend que de E ; on la note $[E] \in W(\mathbf{Q})$. Si $E = E_1 \oplus E_2$ comme dans la définition, $[E]$ est la classe de $E_1/\text{rad } E_1$ dans $W(\mathbf{Q})$.

PROPOSITION 5.3. — Soient E et E' deux ε - b -modules, leur somme orthogonale $E \oplus E'$ et leur produit tensoriel $E \otimes E'$ sont des ε - b -modules et on a dans $W(\mathbf{Q})$:

$$[E \oplus E'] = [E] + [E'], \quad [E \otimes E'] = [E] \cdot [E'].$$

Preuve. — Seule la dernière formule demande démonstration. Si $E = \text{rad } E \oplus E_+ \oplus E_-$ et $E' = \text{rad } E' \oplus E'_+ \oplus E'_-$, il suffit de voir que le module symétrique non dégénéré $E_- \otimes E'_-$ est neutre. Comme E_- et E'_- sont somme orthogonale de plans symplectiques, il suffit de remarquer que le produit tensoriel de deux plans symplectiques est isomorphe à $H \oplus H$ où H est le plan hyperbolique neutre.

5.4. FORME D'INTERSECTION D'UNE VARIÉTÉ. — Soit M une variété à bord orientée (différentiable, topologique, rationnelle, complexe de Poincaré...) la seule chose qu'on utilisera est que M vérifie la dualité de Poincaré à coefficients rationnels; pour fixer les idées on prendra M variété rationnelle. Dans la suite de ce chapitre tous les groupes d'homologie et de cohomologie seront à coefficients \mathbf{Q} .

Si M est de dimension $4k$ la forme d'intersection $b : H_{2k}(M) \otimes H_{2k}(M) \rightarrow \mathbf{Q}$ est symétrique (pas forcément non dégénérée lorsque $\partial M \neq \emptyset$).

DÉFINITION 5.4. — Si $\dim M = 4k$ on pose

$$I(M) = [H_{2k}(M)] \in W(\mathbf{Q}).$$

Si $\dim M \neq 4k$ on pose

$$I(M) = 0.$$

5.5. Soit $H(M)$ la somme directe des $H_p(M)$ pour $p \geq 0$; on a aussi la forme d'intersection

$$b_M : H(M) \otimes H(M) \rightarrow \mathbf{Q}.$$

LEMME 5.5. — Le \mathbf{Q} -espace vectoriel $H(M)$ muni de b_M est un ε - b -module.

Démonstration. — Si x est homogène de degré $|x|$ et y homogène de degré $|y|$ on a

$$b_M(x, y) = (-1)^{|x||y|} b_M(y, x)$$

(= 0 si $|x| + |y| \neq n$ la dimension de M). Si H_1 est la somme des $H_p(M)$ pour $p(n-p)$ pair et H_2 la somme des $H_p(M)$ pour $p(n-p)$ impair, H est la somme orthogonale de H_1 et de H_2 , H_1 est symétrique et H_2 antisymétrique.

LEMME 5.6. — Soit M une variété rationnelle on a dans $W(\mathbf{Q}) : I(M) = [H(M)]$.

Démonstration. — Soit $n = \dim M$, si $p < n/2$ et $p(n-p)$ pair, soit

$$E = H_p(M) \oplus H_{n-p}(M).$$

Le radical de E est formé des couples (x, y) avec $b(x, y') = x \cdot y' = 0$ pour tout $y' \in H_{n-p}(M)$ et $x' \cdot y = 0$ pour tout x' de $H_p(M)$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H^{n-p-1}(\partial M) & \xrightarrow{\delta} & H^{n-p}(M, \partial M) & \rightarrow & H^{n-p}(M) & \xrightarrow{i^{n-p}} & H^{n-p}(\partial M) \\ \downarrow D & & \downarrow D & & & & \\ H_p(\partial M) & \xrightarrow{i_p} & H_p(M) & & & & \end{array}$$

où les flèches verticales sont les isomorphismes de dualité de Poincaré (à coefficients \mathbf{Q}); il vient $\text{rad } E = \text{Im } i_p \oplus \text{Im } i_{n-p}$. Or par dualité de Poincaré $\text{Coker } i_p$ est isomorphe à $\ker i^{n-p}$, et $\ker i^{n-p}$ et $\text{Coker } i_{n-p}$ sont en dualité pour l'accouplement de Kronecker; on peut donc trouver des bases duales (x_1, \dots, x_q) de $\text{Coker } i_p$ et (y_1, \dots, y_q) de $\text{Coker } i_{n-p}$ telles que $x_i \cdot y_j = \delta_{ij}$. Il en résulte que $E/\text{rad } E \cong \text{Coker } i_p \oplus \text{Coker } i_{n-p}$ est neutre. Cela montre que $[H(M)] = 0$ si n est impair; si $n = 4k+2$, $H_{2k+1}(M)$ est antisymétrique et on a encore $[H(M)] = 0$, si $n = 4k$ le calcul précédent montre que

$$[H(M)] = [H_{2k}(M)] = I(M). \quad \square$$

PROPOSITION 5.7. — *Formule du produit. Soient M et M' deux variétés rationnelles (à bord); on a dans $W(\mathbf{Q})$:*

$$I(M \times M') = I(M) \cdot I(M').$$

Démonstration. — On peut se limiter au cas où $\dim(M \times M') = 4k$. Les formules de Kunneth montrent que l'espace vectoriel $H(M \times M')$ est isomorphe à $H(M) \otimes H(M')$ et que pour des éléments homogènes

$$b_{M \times M'}(x \otimes x', y \otimes y') = (-1)^{|x'| |y|} b_M(x, y) b_{M'}(x', y').$$

Soit b'_M la forme transposée $b'_M(x, y) = b_M(y, x)$ on a

$$b_{M \times M'}(x \otimes x', y \otimes y') = (-1)^{|y| (|x| + |x'|)} (b'_M \otimes b_{M'})(x \otimes x', y \otimes y').$$

Les deux formes $b_{M \times M'}$ et $b'_M \otimes b_{M'}$ coïncident donc sur les éléments de degré $2k$, la démonstration du lemme 5.6 nous assure que

$$\begin{aligned} I(M \times M') &= [H_{2k}(M \times M')] \\ &= [H(M) \otimes H(M'), b'_M \otimes b_{M'}] = [H(M), b'_M] \cdot [H(M'), b_{M'}] = I(M) I(M'), \end{aligned}$$

car il est clair que $I(M) = [H(M), b'_M]$ dans $W(\mathbf{Q})$. \square

FORMULE D'ADDITION.

5.8. Nous utilisons une formule de Wall [20]; rappelons une construction de cet article. Soit V un \mathbf{Q} -espace vectoriel de dimension fini muni d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée (notée par un point). Soient A, B, C trois lagrangiens de V (i. e. sous-espaces totalement isotropes de dimension moitié), soit $\Delta \subset V^3$ d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Sur $G = \Delta \cap (A \times B \times C)$ on considère la formule symétrique donnée par une des formules équivalentes :

$$\langle a, b, c | a', b', c' \rangle = a \cdot b' = -a \cdot c' = b \cdot c' = -b \cdot a' = c \cdot a' = -c \cdot b'.$$

La classe de G dans le groupe de Witt $W(\mathbf{Q})$, notée $\omega(A, B, C)$, est invariante (change de signe) lorsqu'on fait subir à (A, B, C) une permutation paire (impaire). Par projection le long du premier facteur on voit que $\omega(A, B, C)$ est aussi la classe de

$$\frac{A \cap (B+C)}{(A \cap B) + (A \cap C)}$$

muni de la forme induite qui est non dégénérée (i. e. le radical de $A \cap (B+C)$ est exactement $(A \cap B) + (A \cap C)$).

LEMME 5.9. — Soient A, B, C et D quatre lagrangiens de V , on a dans $W(\mathbf{Q})$:

$$\Omega(A, B, C, D) \equiv \omega(B, C, D) - \omega(A, C, D) + \omega(A, B, D) - \omega(A, B, C) = 0.$$

Démonstration. — Il est clair que $\Omega(A, B, C, D)$ est une fonction antisymétrique et alternée des variables A, B, C, D ; de plus si A, B, C, D et E sont cinq lagrangiens, on a

$$(\star) \quad \Omega(A, B, C, D) = \Omega(E, B, C, D) + \Omega(A, E, C, D) + \Omega(A, B, E, D) + \Omega(A, B, C, E).$$

(1) Supposons d'abord que A et B sont contigus (c'est-à-dire $\dim A \cap B = n-1$ avec $\dim V = 2n$). Soient C' et D' les images de $C \cap (A+B)$ et $D \cap (A+B)$ dans $V_0 = A+B/A \cap B$ qui est un module bilinéaire antisymétrique non dégéré de dimension 2. Comme la forme bilinéaire de V_0 est nulle sur C' et D' , $\dim C' \leq 1$ et $\dim D' \leq 1$; de plus si $C' = 0$ alors $C \cap (A+B) = C \cap A \cap B$ de dimension m et comme A, B et C sont des lagrangiens, on a $(A \cap B \cap C)^\perp = A+B+C$ donc

$$\begin{aligned} \dim(A+B+C) &= \dim(A+B) + \dim C - \dim(C \cap (A+B)) = 2n+1-m \\ &= \dim V - \dim(A \cap B \cap C) = 2n-m, \end{aligned}$$

donc C' et D' sont de dimension 1.

Dans le cas général où C' et D' sont distincts, on peut trouver $a \in A, b \in B, c \in C, d \in D, p, q, r, s \in \mathbf{Q}$ avec $\Delta = ps - qr \neq 0$ tels que a induit un vecteur de base de $A/A \cap B, b$ de $B/A \cap B, c$ de C' et d de D' avec $a \cdot b = 1$ et

$$\begin{aligned} c &= pa + qb, & \Delta a &= sc - qd, \\ d &= ra + sb, & \Delta b &= -rc + pd. \end{aligned}$$

En désignant par $\langle u \rangle$ la classe dans $W(\mathbf{Q})$ de la forme sur $\mathbf{Q}, x \cdot y = uxy$, on a

$$\omega(A, B, C) = \langle pq \rangle, \quad \omega(A, B, D) = \langle rs \rangle,$$

$$A \cap (C+D) = [A \cap B \cap (C+D)] \oplus \mathbf{Q}a, \quad B \cap (C+D) = [A \cap B \cap (C+D)] \oplus \mathbf{Q}b.$$

Pour la forme symétrique sur $A \cap (C+D)$ (resp. $B \cap (C+D)$) a (resp. b) est orthogonal à $A \cap B \cap (C+D)$, comme les deux formes coïncident sur $A \cap B \cap (C+D)$:

$$\omega(B, C, D) - \omega(A, C, D) = \langle \Delta qs \rangle - \langle \Delta pr \rangle.$$

Si $pqrs = 0$ l'égalité $\Omega(A, B, C, D) = 0$ est alors manifeste; si $pqrs \neq 0$ elle résulte de l'égalité $M' = \tilde{P} M P$ avec

$$M = \begin{pmatrix} pq & 0 \\ 0 & -rs \end{pmatrix}, \quad M' = \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{qs} & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta}{pr} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{q} & \frac{1}{p} \\ -\frac{1}{s} & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}.$$

Dans le cas particulier $C' = D'$ on a $\omega(A, B, C) = \omega(A, B, D)$ et on vérifie par inspection que $\omega(A, C, D) = \omega(B, C, D)$.

(2) Si A, B, C et D sont quatre lagrangiens, il existe une suite de lagrangiens $A_0 = A, A_1, \dots, A_j = B$ tels que A_{i-1} et A_i soient contigus pour $1 \leq i \leq j$. Grâce à \star et (1) il vient

$$\Omega(A, B, C, D) = \dots = \Omega(A_i, B, C, D) = \dots = \Omega(B, B, C, D) = 0.$$

5.10. Soit Y une variété rationnelle à bord de dimension $4k$, réunion de deux sous-variétés de codimension zéro Y_- et Y_+ ; soient $\partial Y_- = X_- \cup X_0$, $\partial Y_+ = X_0 \cup X_+$

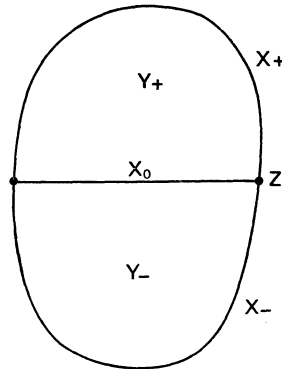


Fig. 2

(on suppose que $Y_- \cap Y_+ = X_0$) et $Z = \partial X_- = \partial X_0 = \partial X_+$; on oriente X_0, X_-, X_+ et Z de sorte que

$$\partial[Y_-] = [X_0] - [X_-], \quad \partial[Y_+] = [X_+] - [X_0] \quad \text{et} \quad [Z] = \partial[X_+] = \partial[X_0] = \partial[X_-].$$

Soit $V = H_{2k-1}(Z)$ muni de la forme d'intersection qui est antisymétrique et non dégénérée puisque Z est fermée; soient A, B , et C les trois lagrangiens de V déterminés par les inclusions de Z dans X_-, X_0 et X_+ respectivement

$$(i. e. A = \text{Ker}[H_{2k-1}(Z) \rightarrow H_{2k-1}(X_-)] \text{ etc.}).$$

PROPOSITION 5.10. [20]. — Dans $W(\mathbb{Q})$ on a la formule

$$I(Y) = I(Y_-) + I(Y_+) - \omega(A, B, C).$$

Remarque. — Dans [20] Wall s'intéresse à des variétés différentiables et énonce la formule pour les signatures, mais la démonstration est valable mot pour mot pour la situation présente.

5.11. La démonstration classique dans le cadre des variétés topologiques est aussi valable pour montrer :

PROPOSITION 5.11. — Soient M et M' deux variétés rationnelles sans bord et cobordantes dans $W(\mathbb{Q})$ on a

$$I(M) = I(M').$$

5.12. NOTATIONS. — Soit $W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ le groupe de Witt des formes d'enlacement sur les groupes abéliens finis, $W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ est isomorphe à la somme directe des $W(\mathbf{F}_p)$ pour p premier et on a [2] une suite exacte $0 \rightarrow W(\mathbf{Z}) \rightarrow W(\mathbf{Q}) \rightarrow W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \rightarrow 0$ scindée par la signature $\sigma : W(\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{Z} \cong W(\mathbf{Z})$ ce qui permet d'écrire

$$W(\mathbf{Q}) = W(\mathbf{Z}) \oplus W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z});$$

les deux composantes de $I(\mathbf{M})$ sont notées respectivement $\sigma(\mathbf{M})$ et $\sigma_0(\mathbf{M})$; $\sigma(\mathbf{M})$ est la signature de \mathbf{M} et $\sigma_0(\mathbf{M}) = 0$ si \mathbf{M} est sans bord et vérifie la dualité de Poincaré à coefficients \mathbf{Z} .

5.13. Nous avons besoin de généraliser dans la catégorie rationnelle la notion de \mathbf{Z}/p -variétés [12].

DÉFINITION 5.13. — Une \mathbf{Z}/p -variété rationnelle de dimension n est une variété rationnelle \mathbf{M} de dimension n de bord $\partial\mathbf{M}$ munie d'un isomorphisme (conservant l'orientation :

$$\varphi : \delta\mathbf{M} \times \{1, \dots, p\} \rightarrow \partial\mathbf{M},$$

où $\delta\mathbf{M}$ est une variété rationnelle fermée de dimension $n-1$ (appelé bockstein de \mathbf{M}) ; de plus on suppose que $\partial\mathbf{M}$ admet un collier dans \mathbf{M} .

On note $\delta_i \mathbf{M} = \varphi(\delta\mathbf{M} \times \{i\}) \subset \partial\mathbf{M}$, φ induit des isomorphismes conservant l'orientation : $\delta_i \mathbf{M} \rightarrow \delta_j \mathbf{M}$; on appelle $\tilde{\mathbf{M}}$ le quotient de \mathbf{M} obtenu en identifiant entre eux les $\delta_i \mathbf{M}$ par ces isomorphismes.

Une \mathbf{Z}/p -variété rationnelle à bord de dimension n est une variété rationnelle \mathbf{M} de dimension n de bord $\partial\mathbf{M}$ (admettant un collier dans \mathbf{M}) munie d'un plongement conservant l'orientation $\varphi : \delta\mathbf{M} \times \{1, p\} \rightarrow \partial\mathbf{M}$, où $\delta\mathbf{M}$ est une variété rationnelle de dimension $n-1$ de bord $\partial\delta\mathbf{M}$ [on suppose que $\partial\delta\mathbf{M}$ a un collier dans $\delta\mathbf{M}$ et que $\varphi(\partial\delta\mathbf{M} \times \{1, p\})$ a un bicollier dans $\partial\mathbf{M}$]. Le complément de $\varphi(\delta\mathbf{M} \times \{1, p\})$ dans $\partial\mathbf{M}$ est alors une \mathbf{Z}/p -variété rationnelle (sans bord) de dimension $n-1$, notée $b\mathbf{M}$, appelée bord de la \mathbf{Z}/p -variété rationnelle \mathbf{M} , et l'on a $\delta b\mathbf{M} = \partial\delta\mathbf{M}$.

On note $(\tilde{\mathbf{M}}, b\tilde{\mathbf{M}})$ la paire obtenue à partir de $(\mathbf{M}, b\mathbf{M})$ en identifiant les p copies de $\delta\mathbf{M}$.

On dit que deux \mathbf{Z}/p -variétés rationnelles \mathbf{M} et \mathbf{M}' de dimension n , sans bord, sont cobordantes s'il existe une \mathbf{Z}/p -variété rationnelle \mathbf{N} de dimension $n+1$ telle que $b\mathbf{N} = (-\mathbf{M}) \cup \mathbf{M}'$.

5.14. Si \mathbf{M} est une \mathbf{Z}/p -variété rationnelle, on considérera $I(\mathbf{M})$ dans $W(\mathbf{Q})$ ou dans $\mathbf{Z}/p \otimes W(\mathbf{Q})$ suivant les cas.

PROPOSITION 5.14. — Soient \mathbf{M} et \mathbf{M}' deux \mathbf{Z}/p -variétés rationnelles sans bord et cobordantes; dans $\mathbf{Z}/p \otimes W(\mathbf{Q})$ on a

$$I(\mathbf{M}) = I(\mathbf{M}').$$

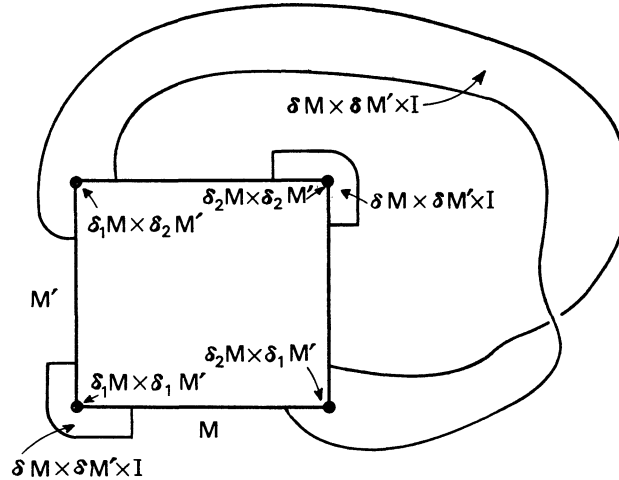


Fig. 3

Démonstration. — On peut supposer $\dim M = \dim M' = 4k$; soit N^{4k+1} un cobordisme entre M et M' on a

$$\partial N = (-M) \bigcup_{\partial M} \delta N \times \{1, \dots, p\} \bigcup_{\partial M'} M'.$$

Or par 5.11 I $(\partial N) = 0$ dans $W(\mathbb{Q})$ et grâce au cas particulier $Z = \emptyset$ de la formule d'addition 5.10, il vient :

$$I(\partial N) = -I(M) + pI(\delta N) + I(M').$$

PRODUIT DE \mathbb{Z}/p -VARIÉTÉS RATIONNELLES.

5.15. Le produit cartésien de deux \mathbb{Z}/p -variétés rationnelles (sans bord) n'est pas une \mathbb{Z}/p -variété. Il existe cependant une notion de produit pour les \mathbb{Z}/p -variétés; il y a plusieurs façons de définir ce produit, elles sont toutes équivalentes à cobordisme près [12]. Comme nous avons besoin d'une description explicite, nous utilisons celle de Milgram avec une légère modification (adjonction d'un anse triviale pour augmenter la symétrie de la construction).

Soient M et M' deux \mathbb{Z}/p -variétés rationnelles (sans bord) avec $\partial M = \delta_1 M \cup \dots \cup \delta_p M$ et $\partial M' = \delta_1 M' \cup \dots \cup \delta_p M'$; par hypothèse $\partial M \times \partial M'$ admet un collier dans $M \times \partial M'$ et dans $(\partial M) \times M'$, on peut donc construire des bicolliers $\delta_i M \times \delta_j M' \times D^1 \subset \partial(M \times M')$ avec $\delta_i M \times \delta_j M' \times (-1) \subset M \times \partial M'$ et $\delta_i M \times \delta_j M' \times 1 \subset \partial M \times M'$.

On forme (voir fig. 3), la variété rationnelle

$$M \times M' = (M \times M') \bigcup_{i \leq j} (\delta M \times \delta M' \times D^1 \times D^1)_{ij}$$

obtenue en recollant à $M \times M'$ $p(p+1)/2$ exemplaires de $\delta M \times \delta M' \times D^1 \times D^1$ de la façon suivante :

– pour $i = j$ $\delta M \times \delta M' \times D^1 \times D^1$ est collé le long de $\delta M \times \delta M' \times D^1 \times (-1)$ sur le bicollier de $\delta_i M \times \delta_i M'$;

– pour $i < j$ $\delta M \times \delta M' \times D^1 \times (-1)$ est identifié avec le bicollier de $\delta_i M \times \delta_j M'$ et $\delta M \times \delta M' \times D^1 \times 1$ avec le bicollier de $\delta_j M \times \delta_i M'$ mais après une symétrie de D^1 par rapport à l'origine. $M \times M'$ est alors une \mathbb{Z}/p -variété rationnelle dont le bockstein $\delta(M \times M')$ est obtenu à partir de la réunion disjointe

$$\delta M \times M' \coprod M \times \delta M'$$

en identifiant $\delta M \times \delta_i M'$ avec $\delta_i M \times \delta M'$.

5.16. POUR CALCULER L'INVARIANT D'INTERSECTION $I(M \times N)$ DU PRODUIT DE DEUX \mathbb{Z}/p -variétés rationnelles M et N (avec $\dim M + \dim N = 4k$) on utilise la formule d'addition 5.10 avec

$$Y = M \times N, \quad Y_- = M \times N \quad \text{et} \quad Y_+ = \coprod_{i \leq j} (\delta M \times \delta N \times D^1 \times D^1)_{ij}.$$

On a alors des isomorphismes

$$\begin{aligned} X_- &\cong M \times \partial N \coprod \partial M \times N, & X_0 &\cong \partial M \times \partial N \times D^1, \\ X_+ &\cong \partial M \times \partial N \times D^1, & Z &\cong \partial M \times \partial N \times S^0, \end{aligned}$$

d'après 5.7 on a

$$I(Y_-) = I(M) \cdot I(N) \text{ et } I(Y_+) = 0$$

et donc

$$I(M \times N) = I(M) \cdot I(N) - \omega(A, B, C).$$

Notations. – Soit $W = H_{2k-1}(\partial M \times \partial N)$, W est décomposé en p^2 facteurs orthogonaux tous isomorphes à $H_{2k-1}(\delta M \times \delta N)$ grâce aux décompositions

$$\partial M = \delta M \times \{1, \dots, p\} \quad \text{et} \quad \partial N = \delta N \times \{1, \dots, p\}.$$

Soit α l'involution de $\partial M \times \partial N$ qui consiste à la permutation des composantes donnée par la formule $\alpha(\delta_i M \times \delta_j N) = \delta_j M \times \delta_i N$ pour tous i et j , cela induit une involution isométrique notée encore α de W .

Nous avons les identifications suivantes pour les notations de 5.10 :

$$V = H_{2k-1}(\partial M \times \partial N) \times S^0 = (-W) \oplus W$$

(où $-W$ est W muni de la forme opposée),

$$A = \text{Ker}[H_{2k-1}(Z) \rightarrow H_{2k-1}(X_-)] = L \oplus L',$$

où L est le lagrangien de W donné par l'inclusion $\partial M \times \partial N \hookrightarrow M \times \partial N$ et L' le lagrangien de W donné par l'inclusion $\partial M \times \partial N \hookrightarrow \partial M \times N$.

$B = \Gamma_1 =$ graphe de l'identité de W ,

$C = \Gamma_\alpha =$ graphe de l'involution α .

On vérifie (puisque $\alpha^2 = Id$) que $(A \times B \times C) \cap \Delta$ se projette sous le sous-espace de A noté G égal à $\{(x, x') \in L \oplus L' / x + \alpha x = x' + \alpha x'\}$ et au-dessus de $a = (x, x') \in G$ se trouve le point $(a, b, c) \in (A \times B \times C) \cap \Delta$ avec

$$b = \left(-\frac{x+x'}{2}, -\frac{x+x'}{2} \right) \quad \text{et} \quad c = \left(\frac{x'-x}{2}, \frac{x-x'}{2} \right).$$

Il en résulte que la forme symétrique sur G est donné par

$$\langle x, x' | y, y' \rangle = (x, x') \left(-\frac{y+y'}{2}, -\frac{y+y'}{2} \right) = \frac{1}{2}(x \cdot y' + y \cdot x')$$

puisque L et L' sont totalement isotropes, (le \cdot a désigné à la fois la forme d'intersection dans V et dans W). La classe de G dans $W(\mathbb{Q})$ est $\omega(A, B, C)$.

PROPOSITION 5.17. — Soient M et N deux \mathbb{Z}/p -variétés rationnelles de dimensions paires; si $\dim M + \dim N \equiv 0 \pmod{4}$, on a dans $W(\mathbb{Q})$:

$$I(M \times N) = I(M) \cdot I(N).$$

Démonstration. — Par les formules de Kunneth on a si $\dim M = 2m$ et $\dim N = 2n$:

$$\begin{aligned} H_{m+n-1}(\partial M \times \partial N) &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_{m-i}(\partial M) \otimes H_{n+i-1}(\partial N) \\ &= \bigoplus_{i > 0} (H_{m-i}(\partial M) \otimes H_{n+i-1}(\partial N) \oplus H_{m+i-1}(\partial M) \otimes H_{n-i}(\partial N)) \end{aligned}$$

dans cette décomposition on a

$$L = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} K_{m-i}(\partial M) \otimes H_{n+i-1}(\partial N),$$

où $K_j(\partial M)$ est le noyau de $H_j(\partial M) \rightarrow H_j(M)$;

$$L' = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_{m-i}(\partial M) \otimes K_{n+i-1}(\partial N),$$

où $K_j(\partial N)$ est le noyau de $H_j(\partial N) \rightarrow H_j(N)$.

Comme la décomposition de $H_{n+m-1}(\partial M \times \partial N)$ est stable par α on a

$$G = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} G_i$$

où

$$G_i = \{(x_i, x'_i) \in K_{m-i}(\partial M) \otimes H_{n+i-1}(\partial N) \oplus H_{m-i}(\partial M) \otimes H_{n+i-1}(\partial N) / x_i + \alpha x_i = x'_i + \alpha x'_i\}$$

et G est la somme orthogonale $G = \bigoplus_{i > 0} (G_i \oplus G_{-i+1})$.

Or dans $W(\mathbf{Q})$ on a $[G_i \oplus G_{-i+1}] = 0$ en effet, en prenant une base de G_i et une base de G_{-i+1} pour former une base de $G_i \oplus G_{-i+1}$, dans cette base, la matrice de la forme symétrique de G se décompose en blocs (pas tous carrés) :

$$\begin{pmatrix} 0 & \text{diagonal} \\ \text{diagonal} & 0 \end{pmatrix}$$

PROPOSITION 5.18. — Soient M et N deux \mathbf{Z}/p -variétés rationnelles de dimensions impaires; si $\dim M + \dim N \equiv 0 \pmod{4}$ on a dans $\mathbf{Z}/p \otimes W(\mathbf{Q})$:

$$I(M \times N) = 0.$$

Démonstration. — Supposons que $\dim M \equiv -1 \pmod{4}$ alors $\dim N \equiv 1 \pmod{4}$ et posons $\dim M = 4m-1$ $\dim N = 4n+1$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} H_{2m+2n-1}(\partial M \times \partial N) &= \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} H_{2m-i-1}(\partial M) \otimes H_{2n+i}(\partial N) \\ &= H_{2m-1}(\partial M) \otimes H_{2n}(\partial N) \oplus \bigoplus_{i>0} (H_{2m-i-1}(\partial M) \\ &\quad \otimes H_{2n+i}(\partial N) \oplus H_{2m+i-1}(\partial M) \otimes H_{2n-i}(\partial N)). \end{aligned}$$

Il vient comme précédemment que $[G_i \oplus G_{-i}] = 0$ dans $W(\mathbf{Q})$ et que le seul terme qui compte est $H_{2m-1}(\partial M) \otimes H_{2n}(\partial N)$ et donc $I(M \times N) = \omega(L \oplus L', \Gamma_1, \Gamma_\alpha)$ où maintenant

$$V = (- (H_{2m-1}(\partial M) \otimes H_{2n}(\partial N))) \oplus (H_{2m-1}(\partial M) \otimes H_{2n}(\partial N)).$$

L est le lagrangien $K_{2m-1}(\partial M) \otimes H_{2n}(\partial N)$ de $H_{2m-1}(\partial M) \otimes H_{2n}(\partial N)$.

L' est le lagrangien $H_{2m-1}(\partial M) \otimes K_{2n}(\partial N)$ de $H_{2m-1}(\partial M) \otimes H_{2n}(\partial N)$.

Or $H_{2m-1}(\partial M)$ est antisymétrique non dégénéré; choisissons un lagrangien \bar{L}_0 de $H_{2m-1}(\delta M)$ et soit $L_0 = p \langle 1 \rangle \otimes \bar{L}_0 \otimes H_{2n}(\partial N)$ le lagrangien correspondant

$$H_{2m-1}(\partial M) \otimes H_{2n-1}(\partial N)$$

(où $\langle 1 \rangle$ désigne \mathbf{Q} avec la forme $x.y = xy$ et où l'isomorphisme

$$H_{2m-1}(\partial M) = p \langle 1 \rangle \otimes H_{2m-1}(\delta M)$$

est donné par la décomposition de $\partial M = \delta M \times \{1, \dots, p\}$, de même pour $H_{2n}(\partial N) = p \langle 1 \rangle \otimes H_{2n}(\delta N)$.

Nous appliquons 5.9 aux quatre lagrangiens $L \oplus L'$, Γ_1 , Γ_α et $L_0 \oplus L'$, on a

$$\begin{aligned} I(M \times N) &= -\omega(L \oplus L', \Gamma_1, \Gamma_\alpha) \\ &= -\omega(L \oplus L', \Gamma_1, L_0 \oplus L') + \omega(L \oplus L', \Gamma_\alpha, L_0 \oplus L') - \omega(\Gamma_1, \Gamma_\alpha, L_0 \oplus L'). \end{aligned}$$

(1) *Calcul de* $\omega(L \oplus L', \Gamma_1, L_0 \oplus L')$. — On a

$$\omega(L \oplus L', \Gamma_1, L_0 \oplus L') = -\omega(L, L_0, L'),$$

en effet

$$(L \oplus L') + (L_0 \oplus L') = (L + L_0) \oplus L'$$

donc $[(L \oplus L') + (L_0 \oplus L')] \cap \Gamma_1$ s'identifie par la première coordonnée à $(L + L_0) \cap L'$ et dans cette identification les deux formes sont opposées. Or le radical de $(L + L_0) \cap L'$ est $(L \cap L') + (L_0 \cap L')$ (5.8). Comme

$$L = K_{2m-1}(\partial M) \otimes H_{2n}(\partial N),$$

$$L_0 = p \langle 1 \rangle \otimes \bar{L}_0 \otimes H_{2n}(\partial N) \quad \text{et} \quad L' = H_{2m-1}(\partial M) \otimes K_{2n}(\partial N)$$

on a

$$L \cap L' = K_{2m-1}(\partial M) \otimes K_{2n}(\partial N), \quad L_0 \cap L' = p \langle 1 \rangle \otimes \bar{L}_0 \otimes K_{2n}(\partial N),$$

$$(L + L_0) \cap L' = (K_{2m-1}(\partial M) + p \langle 1 \rangle \otimes \bar{L}_0) \otimes K_{2n}(\partial N) = (L \cap L') + (L_0 \cap L'),$$

donc dans $W(\mathbf{Q})$:

$$\omega(L, L_0, L') = 0 = \omega(L \oplus L', \Gamma_1, L_0 \oplus L').$$

(2) *Calcul de* $\omega(\Gamma_1, \Gamma_\alpha, L_0 \oplus L') = \omega(L_0 \oplus L', \Gamma_1, \Gamma_\alpha)$. — Cela ressemble à $\omega(L \oplus L', \Gamma_1, \Gamma_\alpha)$ dont on est parti mais maintenant L_0 est décomposé (c'est-à-dire $L_0 = p \langle 1 \rangle \otimes \bar{L}_0 \otimes H_{2n}(\partial N)$); on a vu que $\omega(L_0 \oplus L', \Gamma_1, \Gamma_\alpha)$ est la classe dans $W(\mathbf{Q})$ de $G = \{(x, x') \in L_0 \oplus L' / x + \alpha x'\}$ muni de la forme

$$\langle x, x' | y, y' \rangle = \frac{1}{2}(x \cdot y' + y \cdot x').$$

Soit \bar{L}_1 un lagrangien tel que $H_{2m-1}(\partial M)$ soit comme directe de \bar{L}_0 et \bar{L}_1 , on a alors la décomposition $L' = L'_0 \oplus L'_1$ avec $L'_i = p \langle 1 \rangle \otimes \bar{L}_i \otimes K_{2n}(\partial N)$, dans cette décomposition écrivons $x' = x'_0 + x'_1$, nous avons

$$G = G_0 \oplus G_1 \quad \text{où} \quad G_0 = \{(x, x'_0) \in L_0 \oplus L'_0 / x + \alpha x'_0 = x'_0 + \alpha x'_0\}$$

et

$$G_1 = \{x'_1 \in L'_1 / x'_1 + \alpha x'_1 = 0\}.$$

Comme $\langle x, x'_0 + x'_1 | y, y'_0 + y'_1 \rangle = 1/2 (x \cdot y'_1 + y \cdot x'_1)$ la matrice de la forme G dans la décomposition $G = G_0 \oplus G_1$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & \text{diagonale} \\ \text{diagonale} & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$[G] = [G_0 \oplus G_1] = 0 = \omega(L_0 \oplus L', \Gamma_1, \Gamma_\alpha) \quad \text{dans } W(\mathbf{Q}).$$

(3) *Calcul de $\omega(L \oplus L', \Gamma_\alpha, L_0 \oplus L')$.* — Considérons l'isométrie involutive de V qui est α sur le premier facteur et l'identité sur le second, elle transforme $L \oplus L'$ en $\alpha L \oplus L'$, Γ_α en Γ_1 et $L_0 \oplus L'$ en $\alpha L_0 \oplus L' = L_0 \oplus L'$ puisque

$$L_0 = p \langle 1 \rangle \otimes \bar{L}_0 \otimes p \langle 1 \rangle \otimes H_{2n}(\delta N).$$

On a donc comme en (1)

$$\omega(L \oplus L', \Gamma_\alpha, L_0 \oplus L') = \omega(\alpha L \oplus L', \Gamma_1, L_0 \oplus L') = -\omega(\alpha L, L_0, L').$$

Comme $L = K_{2m-1}(\delta M) \otimes p \langle 1 \rangle \otimes H_{2n}(\delta N)$ il existe un lagrangien \tilde{L} de

$$H_{2m-1}(\delta M) \otimes p \langle 1 \rangle \otimes H_{2n}(\delta N)$$

tel que $\alpha L = p \langle 1 \rangle \otimes \tilde{L}$, de plus on a clairement

$$L_0 = p \langle 1 \rangle \otimes \tilde{L}_0 \quad \text{et} \quad L' = p \langle 1 \rangle \otimes \tilde{L}'$$

pour deux lagrangiens de $H_{2n-1}(\delta M) \otimes p \langle 1 \rangle \otimes H_{2n}(\delta N)$ donc

$$\omega(\alpha L, L_0, L') = \omega(p \langle 1 \rangle \otimes \tilde{L}, p \langle 1 \rangle \otimes \tilde{L}_0, p \langle 1 \rangle \otimes \tilde{L}') = p \omega(\tilde{L}, \tilde{L}_0, \tilde{L}'),$$

d'où $\omega(\alpha L, L_0, L') = 0$ dans $\mathbf{Z}/p \otimes \mathbf{W}(\mathbf{Q})$. \square

THÉORÈME 5.19. — *Soient M et N deux \mathbf{Z}/p -variétés rationnelles, dans $\mathbf{Z}/p \otimes \mathbf{W}(\mathbf{Q})$; on a*

$$I(M \times N) = I(M) \cdot I(N).$$

Démonstration. — Si $\dim M + \dim N \neq 0$ (4) la vérification est immédiate car les deux membres sont nuls; dans l'autre cas cela résulte des deux propositions précédentes.

5.20. Transcrivons le théorème précédent dans la décomposition de 5.12 : $\mathbf{W}(\mathbf{Q}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{W}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$. La structure d'anneau de $\mathbf{W}(\mathbf{Q})$ est déterminée dans cette décomposition par les formules

$$\forall x, y \in \mathbf{W}(\mathbf{Q}), \quad \sigma(x, y) = \sigma(x) \cdot \sigma(y)$$

$$\sigma_0(x \cdot y) = \sigma(x) \sigma_0(y) + \sigma(y) \sigma_0(x) + \sigma_0(x) \star \sigma_0(y),$$

où \star est une application bilinéaire de $\mathbf{W}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \times \mathbf{W}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ dans $\mathbf{W}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$.

COROLLAIRE 5.20. — *Soit p un nombre impair ou une puissance de deux; soient M une \mathbf{Z}/p -variété rationnelle, N une \mathbf{Z}/p -variété PL (ou rationnelle et vérifiant la dualité de Poincaré à coefficients \mathbf{Z}) on a*

$$\sigma(M \times N) = \sigma(M) \cdot \sigma(N) \quad \text{dans } \mathbf{Z}/p,$$

$$\sigma_0(M \times N) = \sigma(N) \sigma_0(M) \quad \text{dans } \mathbf{Z}/p \otimes \mathbf{W}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}).$$

Démonstration. — La première formule est une conséquence immédiate de 5.19; pour démontrer la seconde on peut supposer que $p = 2^x$ [puisque $\mathbf{W}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ est annulé par 4].

Comme N vérifie la dualité de Poincaré à coefficients \mathbf{Z} on sait ([8], chap. 6) que $\sigma_0(N) = -e(\partial N) = -pe(\delta N)$ où $e(\)$ est l'invariant d'enlacement. On a donc

$$\sigma_0(M \times N) \equiv \sigma(N)\sigma_0(M) - p(\sigma(M) \cdot e(\delta N) + \sigma_0(M) \star e(\delta N)). \quad \square$$

Remarque 5.21. — Si X est une variété de Λ -homologie (où Λ est un anneau de fractions de \mathbf{Z}) l'invariant d'intersection de X (considérée comme variété rationnelle) est dans l'image de $W(\Lambda)$ dans $W(\mathbf{Q})$; comme $W(\Lambda) \rightarrow W(\mathbf{Q})$ est injective (et même injection sur un facteur direct) [2] toutes les propriétés précédentes sont valables pour les variétés de Λ -homologie (resp. les \mathbf{Z}/p -variétés de Λ -homologie) lorsqu'on considère l'invariant d'intersection dans $W(\Lambda)$ [resp. dans $\mathbf{Z}/p \otimes W(\Lambda)$].

CHAPITRE VI

Classes caractéristiques rationnelles

Dans ce chapitre toutes les variétés sont orientées.

6.1. Soit X^n une variété rationnelle, soient Y^{n+q} une variété PL orientée de bord ∂Y et $\varphi : X \rightarrow Y$ un plongement PL de X dans l'intérieur de Y .

Si $f : (V, \partial V)^{q+i} \rightarrow (Y, \partial Y)^{n+q}$ est une application PL d'une variété différentiable C^1 -triangulée de V dans Y , transverse à X d'intersection transverse W , 4.12 montre que W est une variété rationnelle de dimension i .

Soient V une \mathbf{Z}/p -variété PL (ou différentiable C^1 -triangulée) de dimension $q+i$, de bord ∂V ($\partial V = bV \cup \delta V \times \{1, \dots, p\}$) et \tilde{V} le quotient de V obtenu en identifiant les p exemplaires $\delta_i V$ entre eux; soit $f : (V, bV) \rightarrow (Y, \partial Y)$ une application de \mathbf{Z}/p -variété (i.e. les restrictions de f aux $\delta_i V$ se correspondent par des identifications des $\delta_i V$), f induit une application notée encore $f : (\tilde{V}, b\tilde{V}) \rightarrow (Y, \partial Y)$. Si f est transverse à X (i.e. f et $f|_{\delta V}$ sont transverses) l'intersection transverse est une \mathbf{Z}/p -variété rationnelle W sans bord de dimension i .

Soit $\Omega_*^{\text{so}}(A, B; \mathbf{Z}/p)$ la théorie de bordisme fabriquée à partir des \mathbf{Z}/p -variétés différentiables s'envoyant dans la paire (A, B) , cela représente la théorie de bordisme habituelle à coefficients \mathbf{Z}/p .

PROPOSITION 6.2. — *Il existe un unique homomorphisme $I_X : \Omega_*^{\text{so}}(Y, \partial Y) \rightarrow W(\mathbf{Q})$ tel que pour toute application $f : (V, \partial V) \rightarrow (Y, \partial Y)$ transverse à X d'intersection transverse W on ait*

$$I_X[V, f] = I(W) \in W(\mathbf{Q}).$$

Il existe un unique homomorphisme

$$I_{X,p} : \Omega_*^{\text{so}}(Y, \partial Y; \mathbf{Z}/p) \rightarrow \mathbf{Z}/p \otimes W(\mathbf{Q})$$

tel que pour toute application de \mathbf{Z}/p -variété $f : (V, bV) \rightarrow (Y, \partial Y)$ transverse à X et d'intersection transverse W on ait

$$I_{X,p}[V, f] = I(W) \in \mathbf{Z}/p \otimes W(\mathbf{Q}).$$

Cela résulte directement du théorème de transversalité 3.3 et 4.12 et du fait que l'invariant d'intersection est un invariant de cobordisme 5.11 et 5.14 (dans le cas de \mathbf{Z}/p -variétés il faut utiliser deux fois le théorème de transversalité une fois sur δV puis sur V).

6.3. Soient $\iota_{p,q} : \Omega_*^{\text{so}}(\cdot, \mathbf{Z}/p) \rightarrow \Omega_*^{\text{so}}(\cdot, \mathbf{Z}/pq)$ le morphisme qui à une \mathbf{Z}/p -variété V associe la \mathbf{Z}/pq -variété $V' = \bigcup^q V$ formée de q -exemplaires de V avec $\delta V' = \delta V$, et $\rho_p : \Omega_*^{\text{so}}(\cdot) \rightarrow \Omega_*^{\text{so}}(\cdot, \mathbf{Z}/p)$ le morphisme qui considère une variété comme une \mathbf{Z}/p -variété de Bockstein vide; soient $r_p : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/p$ et $i_{p,q} : \mathbf{Z}/p \rightarrow \mathbf{Z}/pq$ les applications canoniques; il est clair que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{q+4i}^{\text{so}}(Y, \partial Y) & \xrightarrow{I_X} & W(\mathbf{Q}) \\ \downarrow \rho_p & & \downarrow r_p \otimes 1 \\ \Omega_{q+4i}^{\text{so}}(Y, \partial Y, \mathbf{Z}/p) & \xrightarrow{I_{X,p}} & \mathbf{Z}/p \otimes W(\mathbf{Q}) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Omega_{q+4i}^{\text{so}}(Y, \partial Y, \mathbf{Z}/p) & \xrightarrow{I_{X,p}} & \mathbf{Z}/p \otimes W(\mathbf{Q}) \\ \downarrow i_{p,i} & & \downarrow i_{p,i} \otimes 1 \\ \Omega_{q+4i}^{\text{so}}(Y, \partial Y, \mathbf{Z}/pl) & \xrightarrow{I_{X,p^l}} & \mathbf{Z}/pl \otimes W(\mathbf{Q}) \end{array}$$

sont commutatifs, on dit que les morphismes I_X et $I_{X,p}$ sont compatibles.

PROPOSITION 6.4. — Les homomorphismes I_X et $I_{X,p}$ sont multiplicatifs par rapport à la signature : si V_0 est une variété différentiable fermée et $[V_1, f_1] \in \Omega_*^{\text{so}}(Y, \partial Y)$ on a

$$I_X[V_0 \times V_1, f_1 \cdot pr_1] = I(V_0) \cdot I_X[V_1, f_1].$$

Si V_0 est une \mathbf{Z}/p -variété différentiable sans bord et

$$[V_1, f_1] \in \Omega_*^{\text{so}}(Y, \partial Y; \mathbf{Z}/p)$$

on a

$$I_{X,p}[V_0 \times V_1, f_1 \cdot pr_1] = I(V_0) I_{X,p}[V_1, f_1] = \sigma(V_0) \cdot I_{X,p}[V_1, f_1] \in \mathbf{Z}/p \otimes W(\mathbf{Q}),$$

où pr_1 est la composée $V_0 \times V_1 \rightarrow \tilde{V}_0 \times \tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}_1$.

Démonstration. — Dans le premier cas si $f_1 : (V_1, \partial V_1) \rightarrow (Y, \partial Y)$ est transverse à X d'intersection transverse W_1 alors $f_1 \cdot pr_1$ est transverse à X d'intersection transverse $V_0 \times W_1$ le résultat découle de 5.7.

Dans le second cas si $f_1 : (V_1, bV_1) \rightarrow (Y, \partial Y)$ est transverse à X d'intersection transversale la \mathbf{Z}/p -variété rationnelle W_1 , on peut s'arranger pour que $f_1 \cdot pr_1 : (V_0 \times V_1, V_0 \times bV_1) \rightarrow (Y, \partial Y)$ soit transverse à X d'intersection transverse $V_0 \times W_1$, et par 5.20 on a dans $\mathbf{Z}/p \otimes W(\mathbf{Q}) : I(V_0 \times W_1) = \sigma(V_0) \cdot I(W_1)$. \square

6.5. NOUS ALLONS EXPLOITER LES MORPHISMES I_X et $I_{X,p}$ selon les méthodes de Sullivan, il y aura donc deux cas suivant que p est une puissance de deux ou que p est impair. Pour construire des classes de cohomologie à partir des morphismes I_X et $I_{X,p}$ pour p puissance de deux nous utilisons le théorème suivant [12].

THÉORÈME 6.5. — Soit (A, B) une paire de C.W. complexes de type fini (squelettes finis); l'application de $H^*(A, B; \mathbb{Z}_{(2)})$ dans le groupe des morphismes

$$u : \Omega_*^{\text{so}}(A, B; \mathbb{Z}_{(2)}) \rightarrow \mathbb{Z}_{(2)}, \quad u_\alpha : \Omega_*^{\text{so}}(A, B; \mathbb{Z}/2^\alpha) \rightarrow \mathbb{Z}/2^\alpha, \quad \alpha \geq 1,$$

compatibles et multiplicatifs par rapport à la signature, définie par les formules

$$u[V, f] = \langle f^* x \cup l(V), [V] \rangle, \quad u_\alpha[V, f] = \langle f^* x \cup l(\tilde{V}), [\tilde{V}] \rangle$$

est un isomorphisme.

Remarques :

(1) La classe $l \in H^*(\text{BSO}, \mathbb{Z}_{(2)})$ [$l = 1 + l_1 + \dots + l_j + \dots$ avec $l_j \in H^{4j}(\text{BSO}, \mathbb{Z}_{(2)})$] est caractérisée par : $l^{-1} \otimes \mathbb{Q} = L$ classe de Hirzebruch et l^{-1} se réduit mod 2 au carré de la classe de Wu universelle v définie par $w = S qv$. Si V est une variété différentiable $l(V) = l(v_V)$, si V est une $\mathbb{Z}/2^\alpha$ variété différentiable $l(\tilde{V}) = l(v)$ où v est l'inverse du fibré sur \tilde{V} obtenu à partir de τ_V par l'identification des $\delta_i V$ entre eux. La classe l s'étend en une classe de $H^*(\text{BSPL}; \mathbb{Z}_{(2)})$ [12].

(2) On peut obtenir un théorème analogue pour $H^*(A, B; \mathbb{Z}/2^\alpha)$ en remplaçant A/B par $(A/B) \wedge M_\alpha$ où M_α est l'espace de Moore pour $\mathbb{Z}/2^\alpha : S^1 \bigcup_{2^\alpha} D^2$. Mais nous aurons besoin d'un tel résultat sans hypothèses de finitude aussi nous en donnons une démonstration directe.

LEMME 6.6. — Soient X un espace topologique et G un groupe abélien somme directe de facteurs \mathbb{Z}/p ; l'évaluation est un isomorphisme

$$H^n(X; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(X; \mathbb{Z}/p), G).$$

Démonstration. — Par la formule des coefficients universels on a une suite exacte scindable

$$0 \rightarrow H_n(X) \otimes \mathbb{Z}/p \rightarrow H_n(X, \mathbb{Z}/p) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(X), \mathbb{Z}/p) \rightarrow 0$$

on en déduit [en prenant le foncteur $\text{Hom}(\ , G)$ exact sur les suites exactes scindables et grâce à la formule des coefficients universels pour la cohomologie] le diagramme commutatif où les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ext}(H_{n-1}, G) & \longrightarrow & H^n(X; G) & \longrightarrow & \text{Hom}(H_n(X), G) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(\text{Tor}(H_{n-1}, \mathbb{Z}/p), G) & \longrightarrow & \text{Hom}(H_n(X, \mathbb{Z}/p), G) & \longrightarrow & \text{Hom}(H_n(X) \otimes \mathbb{Z}/p, G) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où on a abrégé $H_{n-1}(X)$ en H_{n-1} . Il est clair que φ'' est un isomorphisme, on a des isomorphismes canoniques $\text{Tor}(H_{n-1}, \mathbb{Z}/p) = {}_p H_{n-1}$ (sous-groupe des éléments annihilés par la multiplication par p) et comme $0 \rightarrow G \rightarrow I \xrightarrow{\times p} I \rightarrow 0$ est une résolution injective de G (I est la somme directe de facteurs \mathbb{Q}/\mathbb{Z} indexée par le même ensemble que pour G)

somme directe de facteurs \mathbf{Z}/p , $\text{Ext}(H_{n-1}, G) = \text{Hom}(H_{n-1}, I) \otimes \mathbf{Z}/p$; par ces isomorphismes ϕ' se transforme en le morphisme de restriction

$$\text{Hom}(H_{n-1}, I) \otimes \mathbf{Z}/p \rightarrow \text{Hom}({}_p H_{n-1}, G);$$

comme I est injectif la suite exacte

$$0 \rightarrow {}_p H_{n-1} \rightarrow H_{n-1} \xrightarrow{\times p} H_{n-1}$$

montre que ϕ' est un isomorphisme. \square

PROPOSITION 6.7. — *Pour tout C.W. complexe X et tout groupe G somme directe de facteurs $\mathbf{Z}/2^\alpha$, la formule*

$$u[V, f] = \langle f^* x \cup l(\tilde{V}), [\tilde{V}] \rangle$$

définit un isomorphisme de $H^*(X; G)$ sur le groupe des morphismes $u : \Omega_*^{\text{so}}(X, \mathbf{Z}/2^\alpha) \rightarrow G$ multiplicatifs par rapport à la signature.

Démonstration. — Cela résulte du lemme précédent et du résultat suivant [12] : l'application $\psi : \Omega_*^{\text{so}}(X, \mathbf{Z}/2^\alpha) \rightarrow H^*(X, \mathbf{Z}/2^\alpha)$ définie par $\psi[V, f] = f_*(l(\tilde{V}) \cap [\tilde{V}])$ définit un isomorphisme

$$\Omega_*^{\text{so}}(X, \mathbf{Z}/2^\alpha) \otimes_{\Omega_*(p^f, \mathbf{Z}/2^\alpha)} \mathbf{Z}/2^\alpha \rightarrow H_*(X, \mathbf{Z}/2^\alpha)$$

où la structure de module de $\mathbf{Z}/2^\alpha$ est définie par la signature mod. 2^α :

$$\Omega_*^{\text{so}}(p^f, \mathbf{Z}/2^\alpha) \rightarrow \mathbf{Z}/2^\alpha.$$

Remarque 6.8. — Soient X un C.W. complexe sans hypothèse de finitude, $u : \Omega_*^{\text{so}}(X, \mathbf{Z}_{(2)}) \rightarrow \mathbf{Z}_{(2)}$, $u_\alpha : \Omega_*^{\text{so}}(X, \mathbf{Z}/2^\alpha) \rightarrow \mathbf{Z}/2^\alpha$ (pour tout $\alpha \geq 1$) des morphismes compatibles et multiplicatifs par rapport à la signature, il existe une classe $x \in H^*(X, \mathbf{Z}_{(2)})$ telle que les formules de 6.5 soient vérifiées mais on ne peut plus assurer l'unicité de x , par contre la proposition précédente montre que les réductions de x mod 2^α sont bien définies pour tout $\alpha \geq 1$.

6.9. Soit pour $\alpha \geq \beta$, $\rho : \Omega_*^{\text{so}}(X, \mathbf{Z}/2^\alpha) \rightarrow \Omega_*(X, \mathbf{Z}/2^\beta)$ la réduction mod 2^β qui consiste à ouvrir une $\mathbf{Z}/2^\alpha$ -variété V en la $\mathbf{Z}/2^\beta$ -variété $V' = V$ avec

$$\delta V' = \delta V \times \{1, \dots, 2^{\alpha-\beta}\}.$$

COROLLAIRE 6.9. — *Pour tout C.W. complexe X et tous morphismes*

$$u : \Omega_*^{\text{so}}(X) \rightarrow W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}), \quad u_\alpha : \Omega_*^{\text{so}}(X, \mathbf{Z}/2^\alpha) \rightarrow \mathbf{Z}/2^\alpha \otimes W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$$

compatibles, multiplicatifs par rapport à la signature et tels que $(r_{2^\beta} \otimes 1) \cdot u_\alpha = u_\beta \cdot \rho$, il existe une unique classe $x \in H^*(X, W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}))$ telle que pour tout $[V, f] \in \Omega_*^{\text{so}}(X)$ on ait

$$u[V, f] = \langle f^* x \cup l(V), [V] \rangle$$

et des formules analogues pour des $\mathbf{Z}/2^\alpha$ variétés.

Démonstration. — Ecrivons $W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) = G' \oplus G''$ où

$$G' = W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(2)}) \oplus \bigoplus_{q \equiv +1(4)} W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(q)}) \quad \text{et} \quad G'' = \bigoplus_{q \equiv -1(4)} W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(q)}),$$

G' est une somme directe de facteurs $\mathbf{Z}/2$ et G'' une somme directe de facteurs $\mathbf{Z}/4$. L'application de 6.7 pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ définit des classes $x' \in H^*(X, G')$ et $x'' \in H^*(X, G'')$ d'où une classe $x \in H^*(G, W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}))$; les conditions sur les morphismes u et u_α assurent alors que les formules désirées sont vérifiées.

6.10. REPRENONS LES NOTATIONS DE 6.1. — Après composition avec la signature $\sigma : W(\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{Z}$ les morphismes $I_X \otimes \mathbf{Z}_{(2)}$ et $I_{X, 2^\alpha}$ vérifient les hypothèses de 6.5, soit $\mathcal{L}(\varphi) \in H^*(Y, \partial Y, \mathbf{Z}_{(2)})$ la classe qu'ils définissent; comme I_X et $I_{X, 2^\alpha}$ sont nuls en dimension différente de $q+4i$ ($i \geq 0$), $\mathcal{L}(\varphi)$ n'a de composantes qu'en dimension $q+4i$,

$$\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}_0(\varphi) + \mathcal{L}_1(\varphi) + \dots + \mathcal{L}_i(\varphi) + \dots,$$

avec $\mathcal{L}_i(\varphi) \in H^{q+4i}(Y, \partial Y, \mathbf{Z}_{(2)})$.

Après composition par $\delta : W(\mathbf{Q}) \rightarrow W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ les mêmes morphismes vérifient les hypothèses de 6.9, soit $\lambda(\varphi) \in H^*(Y, \partial Y; W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}))$ la classe qu'ils définissent, pour la même raison que ci-dessus $\lambda(\varphi) = \lambda_0(\varphi) + \dots + \lambda_i(\varphi) + \dots$ avec

$$\lambda_i(\varphi) \in H^{q+4i}(Y, \partial Y; W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})).$$

On peut transcrire les définitions de $\mathcal{L}(\varphi)$ et $\lambda(\varphi)$ par les formules suivantes où

$$f : (V, \partial V) \rightarrow (Y, \partial Y)$$

est une application transverse à X d'intersection transverse W :

$$\sigma(W) = \langle f^* \mathcal{L}(\varphi) \cup l(V), [V] \rangle, \quad \sigma_0(W) = \langle f^* \lambda(\varphi) \cup l(V), [V] \rangle \in W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}),$$

et des formules analogues pour des $\mathbf{Z}/2^\alpha$ -variétés.

6.11. LA DÉMONSTRATION DE 3.9 SE TRANSPOSE mot pour mot pour monter, avec les mêmes notations

$$\mathcal{L}(\varphi_\xi) = \Phi_\xi^*(\mathcal{L}(\varphi) \cup l(\xi)),$$

$$\lambda(\varphi_\xi) = \Phi_\xi^*(\lambda(\varphi) \cup l(\xi)).$$

6.12. NOTATIONS. — Si φ est le plongement d'une variété rationnelle X^n dans un de ses voisinages réguliers euclidiens de grande dimension $(\bar{X}, \partial \bar{X})^{n+q}$ et si $r : \bar{X} \rightarrow X$ est une rétraction par déformation, on pose

$$\mathcal{L}_j(X) = r_* D_{\bar{X}} \mathcal{L}_j(\varphi) \in H_{n-4j}(X, \mathbf{Z}_{(2)}), \quad \lambda_j(X) = r_* D_{\bar{X}} \lambda_j(\varphi) \in H_{n-4j}(X, W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})).$$

Ces classes sont indépendantes des choix faits, on note

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}_0(X) + \mathcal{L}_1(X) + \dots \quad \text{et} \quad \lambda(X) = \lambda_0(X) + \lambda_1(X) + \dots,$$

on a

$$\mathcal{L}_0(X) = [X], \quad \lambda_0(X) = 0$$

et si X est de dimension $4k$, $\varepsilon \mathcal{L}_k(X) = \sigma(X)$, $\varepsilon \lambda_k(X) = \sigma_0(X)$ [avec ε l'augmentation $H_0(X, G) \rightarrow G$].

6.13. REMARQUES :

(1) Si X est une variété PL orientée on a $D_X l(X) = \mathcal{L}(X)$ et $\lambda(X) = 0$, en effet si v est un tube normal de X et $\varphi : X \hookrightarrow E(v)$ il vient, par unicité, $\Phi_v^*(l(X)) = \mathcal{L}(\varphi)$ et $\lambda(\varphi) = 0$.

(2) Soit X une variété rationnelle la classe eulérienne $\mu(X)$ est égale à la réduction mod 2 de $\mathcal{L}(X)$ cela résulte de 4.16 et de 5.6 remarque 1 .

PROPOSITION 6.14. — Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ un plongement d'une variété rationnelle dans l'intérieur d'une variété PL on a

$$\mathcal{L}(\varphi) = (D_Y^{-1} \varphi_* \mathcal{L}(X)) \cup l^{-1}(Y), \quad \lambda(\varphi) = (D_Y^{-1} \varphi_* \lambda(X)) \cup l^{-1}(Y).$$

Démonstration. — Soit \bar{Y} un voisinage régulier euclidien de grande dimension de Y de tube normal $v = v_Y$; avec les notations de 3.9 on a

$$\mathcal{L}(\varphi_v) = D_{\bar{Y}}^{-1} \varphi_{v*} \mathcal{L}(X)$$

d'après la définition de $\mathcal{L}(X)$ et

$$\mathcal{L}(\varphi_v) = \Phi_v^*(\mathcal{L}(\varphi) \cup l(v))$$

d'après 6.11 donc

$$\varphi_* \mathcal{L}(X) = \rho_* \varphi_{v*} \mathcal{L}(X) = \rho_* D_{\bar{Y}} \Phi_v^*(\mathcal{L}(\varphi) \cup l(v)) = D_Y(\mathcal{L}(\varphi) \cup l(Y)),$$

où ρ est une rétraction par déformation $\bar{Y} \rightarrow Y$. De même pour $\lambda(\varphi)$.

6.15. SOIENT X^n UNE VARIÉTÉ RATIONNELLE DE BORD ∂X , Y^{n+q} une variété PL avec $\partial Y = Y' \cup Y''$, $Y' \cap Y'' = \partial Y' = \partial Y''$ et φ un plongement $(X, \partial X) \rightarrow (Y, Y')$ avec $\varphi(\partial X) \subset \text{Int } Y'$ et $\varphi^{-1}(Y') = \partial X$, on construit comme en 6.2 des morphismes

$$I_X : \Omega_*^{\text{so}}(Y, Y'') \rightarrow W(\mathbf{Q}) \quad \text{et} \quad I_{X,p} : \Omega_*^{\text{so}}(Y, Y'', \mathbf{Z}/p) \rightarrow \mathbf{Z}/p \otimes W(\mathbf{Q})$$

compatibles et multiplicatifs par rapport à la signature. Le même procédé donne des classes

$$\mathcal{L}(X) \in H_{n-4*}(X, \partial X; \mathbf{Z}_{(2)}), \quad \lambda(X) \in H_{n-4*}(X, \partial X; W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}))$$

et par naturalité de la construction on a

$$\mathcal{L}(\partial X) = \partial \mathcal{L}(X), \quad \lambda(\partial X) = \partial \lambda(X),$$

où ∂ est le connectant $H_{n-4*}(X, \partial X; G) \rightarrow H_{n-1-4*}(\partial X, G)$.

PROPOSITION 6.16. — Soit $f : X \rightarrow X'$ une résolution rationnelle entre deux variétés rationnelles de dimension n on a

$$f_* \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X'), \quad f_* \lambda(X) = \lambda(X').$$

Preuve. — Soient K et K' des triangulations de X et X' telle que $f : K \rightarrow K'$ soit simpliciale, le cylindre simplicial de f , C est une variété rationnelle de bord $-X \cup X'$, soit ρ la rétraction par déformation $C \rightarrow X'$, $\rho|_X = f$;

$$\mathcal{L}(X') - f_* \mathcal{L}(X) = \rho_* \mathcal{L}(\partial C) = \rho_* \partial \mathcal{L}(C) = \partial \rho_* \mathcal{L}(C) = 0$$

puisque $\rho_* \mathcal{L}(C) \in H_{n+1-4*}(X', X'; \mathbb{Z}_{(2)})$; de même pour $\lambda(X') - f_* \lambda(X)$.

6.17. DANS LE RESTE DE CE CHAPITRE p DÉSIGNERA UN NOMBRE IMPAIR; comme $W(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ est annulé par 4, $\mathbb{Z}/p \otimes W(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ est nul, les morphismes I_X et $I_{X,p}$ se réduisent donc à des morphismes $\Omega_*^{\text{so}}(Y, \partial Y) \rightarrow \mathbb{Z}$ et $\Omega_*^{\text{so}}(Y, \partial Y; \mathbb{Z}/p) \rightarrow \mathbb{Z}/p$, compatibles et multiplicatifs par rapport à la signature.

Soient K_* et K^* les théories homologiques et cohomologiques obtenues en localisant la K -théorie réelle par $\mathbb{Z}[1/2]$; d'après [18] comme I_X et $I_{X,p}$ sont nuls en dimension non congrue à $q \bmod 4$, ils définissent une classe $\Delta(\varphi) \in K^q(Y, \partial Y)$.

6.18. SOIT φ LE PLONGEMENT D'UNE VARIÉTÉ RATIONNELLE X^n dans un de ses voisinages réguliers euclidiens de grande dimension $(\bar{X}, \partial \bar{X})^{n+q}$; les variétés PL orientées sont naturellement orientées dans la théorie K_* , on note par D l'isomorphisme de Poincaré correspondant. On pose $\Delta(X) = r_* D_{\bar{X}} \Delta(\varphi) \in K_n(X)$ où r est une rétraction par déformation $\bar{X} \rightarrow X$.

Les propriétés des classes $\mathcal{L}(\varphi)$ et $\lambda(\varphi)$ se transposent pour $\Delta(\varphi)$, notons seulement qu'on a une construction pour les variétés rationnelles à bord; si X^n admet ∂X comme bord on a $\Delta(\partial X) = \partial \Delta(X) \in K_{n-1}(\partial X)$.

On en conclut comme en 6.16 :

PROPOSITION. — Soit $f : X \rightarrow X'$ une résolution rationnelle entre deux variétés rationnelles de dimension n ; dans $K_n(X')$ on a

$$f_* \Delta(X) = \Delta(X').$$

CHAPITRE VII

Type d'homotopie de l'espace des $\mathbb{Z}_{(2)}$. Données de chirurgie

PRÉLIMINAIRE ALGÈBRE.

7.1. Soit $WQ(\mathbb{Z}_{(2)})$ le groupe de Witt des formes quadratiques sur l'anneau $\mathbb{Z}_{(2)}$ (nous utilisons les notations et les résultats de l'appendice de [2]. Soit $WQ(\mathbb{Z}_{(2)}, \mathbb{Z})$

le groupe de Witt des formes quadratiques d'enlacement sur les groupes abéliens finis d'ordre impair. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{WQ}(\mathbf{Z}) & \rightarrow & \text{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}) & \xrightarrow{\delta} & \text{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z}) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{W}(\mathbf{Z}) & \rightarrow & \text{W}(\mathbf{Z}_{(2)}) & \rightarrow & \text{W}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z}) \rightarrow 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes et les flèches verticales sont les morphismes d'oubli; l'oubli $\text{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\delta} \text{W}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z})$ est un isomorphisme, les deux autres oublis sont injectifs. La suite exacte inférieure est scindée par la signature, la suite exacte supérieure n'est pas scindable. Si $q : C \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est une forme quadratique d'enlacement sur le groupe abélien fini C , la somme de Gauss

$$\Gamma(C) = (\# C)^{-1/2} \sum_{x \in C} e^{2i\pi q(x)}$$

est une racine 8^e de l'unité et l'on a un morphisme $\gamma : \text{WQ}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}/8$ défini par

$$\Gamma(C) = \exp\left(2i\pi \frac{1}{8} \gamma[C]\right).$$

Si $x \in \text{WQ}(\mathbf{Q})$ on a la formule [8] $\sigma(x) \equiv \gamma(\delta(x))$ modulo 8 où $\sigma(x)$ est la signature de x ; or

$$\text{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z}) \simeq \text{W}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z}) = \bigoplus_q \text{W}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(q)})$$

(pour q premier impair) et le choix d'une uniformisante de l'anneau de valuation discrète $\mathbf{Z}_{(q)}$ définit un isomorphisme de $\text{W}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}_{(q)})$ sur $\text{W}(\mathbf{F}_{(q)})$ qui est $\mathbf{Z}/4$ ou $\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2$ suivant que $q \equiv -1(4)$ ou $q \equiv 1(4)$; on vérifie que $\gamma(\text{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z})) = \mathbf{Z}/4 \subset \mathbf{Z}/8$. La signature d'un élément de $\text{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)})$ est donc paire; si l'on note $\omega : \text{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}) \rightarrow \mathbf{Z}$, $\omega(x) = (1/2) \sigma(x)$ et $\sigma_0 : \text{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}) \rightarrow \text{W}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z})$ la composé σ, δ , $\text{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)})$ est le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \text{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}) & \xrightarrow{\sigma_0} & \text{W}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z}) \\ \omega \downarrow & & \downarrow \gamma_0 \\ \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z}/4 \end{array}$$

où γ_0 est

$$\left\langle \frac{1}{2} \right\rangle \cdot \gamma \cdot \theta^{-1} : \text{W}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z}) \xleftarrow{\theta} \text{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\gamma} \mathbf{Z}/8 \xleftarrow{2} \mathbf{Z}/4$$

et où la flèche $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/4$ est la réduction modulo 4. Si α est un entier ≥ 2 on a le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}/2^\alpha \otimes \text{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}) & \xrightarrow{\sigma_0} & \text{W}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z}) \\ \omega \downarrow & & \downarrow \gamma_0 \\ \mathbf{Z}/2^\alpha & \longrightarrow & \mathbf{Z}/4 \end{array}$$

tandis que pour $\alpha = 1$ on a l'isomorphisme

$$\mathbf{Z}/2 \otimes \text{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}) \xrightarrow{\sigma_0} \mathbf{Z}/2 \otimes \text{W}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z}).$$

7.2. ON DIT QU'UN POLYÈDRE X DE DIMENSION n EST UN $\text{CP}_{(2)}$ DE DIMENSION n (complexe de Poincaré pour l'anneau $\mathbf{Z}_{(2)}$) s'il est muni d'une classe $[X] \in H_n(X, \mathbf{Z})$ telle que le cap-produit par $[X]$ induise des isomorphismes

$$D_X: H^i(X, \mathbf{Z}_{(2)}) \rightarrow H_{n-i}(X, \mathbf{Z}_{(2)}).$$

Remarque. — D'après 5.4 et 5.21, un $\text{CP}_{(2)}$ X possède un invariant d'intersection $I(X) \in W(\mathbf{Z}_{(2)})$; les résultats du chapitre 5 sont valables pour les $\text{CP}_{(2)}$ et les $\mathbf{Z}/p - \text{CP}_{(2)}$ introduits plus loin.

7.3. ON APPELLE $\mathbf{Z}_{(2)}$ DONNÉE DE CHIRURGIE SUR UN $\text{CP}_{(2)}$ X DE DIMENSION n , la donnée

- (1) d'une variété PL orientée fermée de dimension n M ;
- (2) d'une application de degré 1 $f: M \rightarrow X$;
- (3) d'un SPL-fibré ξ sur X ;
- (4) d'une $\text{SPL}_{(2)}$ trivialisations t de $\tau_M \oplus f^* \xi$ [8].

On note une telle donnée de chirurgie (f, t) .

On a une notion étendant la notion habituelle, de cobordisme de $\mathbf{Z}_{(2)}$ -donnée de chirurgie. On dit qu'une $\mathbf{Z}_{(2)}$ -donnée (f, t) , est une équivalence si

$$f_*: H_*(M, \mathbf{Z}_{(2)}) \rightarrow H_*(X, \mathbf{Z}_{(2)}) \text{ est un isomorphisme.}$$

7.4. Si (f, t) est une $\mathbf{Z}_{(2)}$ donnée de chirurgie de dimension $4k$, où $f: M^{4k} \rightarrow X^{4k}$, on montre que sur la partie libre de $K_{2k}(f) = \ker(H_{2k}(M, \mathbf{Z}_{(2)}) \rightarrow H_{2k}(X, \mathbf{Z}_{(2)}))$ la forme d'intersection de M est non dégénérée et paire [2]; on note $\tau(f, t)$ la classe de la forme quadratique associée dans $\text{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)})$; comme

$$H_{2k}(M, \mathbf{Z}_{(2)}) = K_{2k}(f) \oplus H_{2k}(X, \mathbf{Z}_{(2)}) \quad (\text{somme orthogonale}) \text{ on a dans } W(\mathbf{Z}_{(2)}):$$

$$\tau(f, t) = I(M) - I(X).$$

Si (f, t) est une $\mathbf{Z}_{(2)}$ -donnée de chirurgie de dimension $4k+2$, on définit [2] une généralisation de l'invariant de Kervaire $\tau(f, t) \in \mathbf{Z}/2$.

Dans les deux cas $\tau(f, t)$ ne dépend que de la classe de bordisme de la donnée (f, t) . Rappelons le résultat suivant ([1], [2]) :

PROPOSITION 7.4. — *Soit X un $\text{CP}_{(2)}$ de dimension n , simplement connexe et soit (f, t) une $\mathbf{Z}_{(2)}$ donnée de chirurgie sur X .*

- (1) *Si n est impair, (f, t) est cobordant à une équivalence.*
- (2) *Si n est pair (et $n \neq 4$), (f, t) est cobordant à une équivalence si et seulement si $\tau(f, t) = 0$.*

7.5. ON APPELLE $Z_{(2)}$ DONNÉE DE CHIRURGIE RELATIVE SUR UN $CP_{(2)}$ A BORD X DE DIMENSION n une donnée analogue à celle de 7.3 où $f : (M, \partial M) \rightarrow (X, \partial X)$ induit un isomorphisme $H_*(\partial M; Z_{(2)}) \rightarrow H_*(\partial X; Z_{(2)})$.

La notion de cobordisme de $Z_{(2)}$ données s'étend au cas des $Z_{(2)}$ données de chirurgie relative; on construit par le même procédé qu'en 7.4 un invariant de cobordisme τ ; la proposition 7.4 s'étend aux $Z_{(2)}$ -données de chirurgie relative lorsque la base et son bord sont simplement connexes.

Pour tout k et tout $u \in WQ(Z_{(2)})$ il existe une $Z_{(2)}$ donnée de chirurgie relative (f, t) sur D^{4k} telle que $\tau(f, t) = u$ [2].

7.6. En remplaçant dans 5.13 variété rationnelle par $CP_{(2)}$ on obtient la définition de Z/p - $CP_{(2)}$ et de Z/p - $CP_{(2)}$ à bord. On dit qu'un Z/p - $CP_{(2)}$ X est simplement connexe si X et δX sont simplement connexes.

On appelle $Z_{(2)}$ donnée de chirurgie sur un Z/p - $CP_{(2)}$ X de dimension n , la donnée notée (f, t) de :

- (1) une Z/p variété PL sans bord M de dimension n ;
- (2) une application de Z/p -variétés $f : M \rightarrow X$ de degré 1;
- (3) un SPL fibré ξ sur X tel que les $\varphi_i^* \xi$ soient tous égaux ($\varphi_i : \delta X \hookrightarrow \partial X$);
- (4) une $SPL_{(2)}$ trivialisations t de $\tau_M \oplus f^* \xi$ telle que sur les $\delta_i M$ toutes les trivialisations soient égales.

Remarque. — $f|_{\partial M} : \partial M \rightarrow \partial X$ est donc la réunion de p exemplaires de la donnée $(\delta f, \delta t)$ sur δX .

On a une notion de cobordisme de $Z_{(2)}$ donnée de chirurgie sur un Z/p - $CP_{(2)}$ et une notion d'équivalence que le lecteur dégage.

Dorénavant p sera toujours une puissance de deux, $p = 2^\alpha$.

OBSTRUCTIONS POUR UNE $Z_{(2)}$ DONNÉE DE CHIRURGIE SUR UN $Z/2^\alpha$ $CP_{(2)}$.

7.7. DIMENSIONS CONGRUES A ZÉRO mod 4. CAS SIMPLEMENT CONNEXE. — Soit (f, t) une $Z_{(2)}$ donnée de chirurgie (où $f : M^{4k} \rightarrow X^{4k}$) sur le Z/p - $CP_{(2)}$ X ; comme la donnée $(\delta f, \delta t)$ est de dimension impaire, il existe un cobordisme de $Z_{(2)}$ données $U^{4k} \xrightarrow{g} \delta X \times I$ entre $(\delta f, \delta t)$ et une équivalence (7.4).

Soient $M' = M \bigcup_{\partial M} p U$ et $f' : M' \rightarrow X \bigcup_{\partial X} p (\delta X \times I) = X$ et t' la $SPL_{(2)}$ trivialisations associée : (f', t') est une $Z_{(2)}$ donnée de chirurgie relative sur le $CP_{(2)}$ à bord $(X, \partial X)$ donc $I(M') - I(X) = \tau(f', t') \in WQ(Z_{(2)})$, d'après le cas particulier ($Z = \emptyset$) de 5.10 on a $\tau(f', t') = I(M) - I(X) + p I(U)$. Si U' est un autre cobordisme entre $(\delta f, \delta t)$ et une équivalence, pour la même raison $I(U) - I(U') \in WQ(Z_{(2)})$. La classe de $I(M) - I(X) + p I(U)$ dans $WQ(Z_{(2)})/p WQ(Z_{(2)})$ est donc indépendante du choix de U on la note $\tau(f, t)$.

PROPOSITION 7.7. — Soit (f, t) une $Z_{(2)}$ -donnée de chirurgie sur un Z/p $CP_{(2)}$ X simplement connexe de dimension $4k \geq 8$. Pour que (f, t) soit cobordant à une équivalence il faut et il suffit que $\tau(f, t) = 0$ dans $WQ(Z_{(2)})/p WQ(Z_{(2)})$.

Démonstration. — On démontre comme plus haut que $\tau(f, t)$ est un invariant de cobordisme. Si $\tau(f, t) = 0$ quitte à faire la somme connexe avec une $\mathbf{Z}_{(2)}$ -donnée de chirurgie relative sur D^{4k} on peut d'après 7.5 choisir un cobordisme U entre $(\delta f, \delta t)$ et une équivalence de sorte que $I(M) - I(X) + p I(U) = 0$ dans $WQ(\mathbf{Z}_{(2)})$, on peut alors faire la chirurgie relative sur le problème (f', t') associé.

7.8. ON NOTE $\omega(f, t) \in \mathbf{Z}/2^\alpha$ ET $\sigma_0(f, t) \in \mathbf{Z}/2^\alpha \otimes W(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z})$ LES DEUX PROJECTIONS DE $\tau(f, t)$ dans le produit fibré de 7.1; supposons d'abord $p = 2^\alpha \geq 4$, comme $W(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z})$ est annulé par 4 on a $\sigma_0(f, t) = \sigma_0(M) - \sigma_0(X)$ et comme M est PL on sait [8] que $\sigma_0(M) = -e(\partial M) = -pe(\delta M) = 0$ [où $e(\)$ est l'invariant d'enlacement] donc $\sigma_0(f, t) = -\sigma_0(X)$ et $\omega(f, t) = \gamma_0(\sigma_0(f, t)) = -\gamma_0(\sigma_0(X)) \pmod{4}$.

Si $\alpha = 1$ le même raisonnement montre que $\sigma_0(f, t) \equiv -\sigma_0(X) \pmod{2 W(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z})}$.

PROPOSITION 7.8. — Si $\alpha \geq 2$, $\sigma_0(f, t) = -\sigma_0(X)$ dans $W(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z})$ et $\tau(f, t)$ est déterminé mod 4 par $\sigma_0(X)$. Si $\alpha = 1$, $\sigma_0(X)$ détermine $\tau(f, t)$ par la formule $\sigma_0(f, t) \equiv -\sigma_0(X)$ dans $\mathbf{Z}/2 \otimes W(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z})$.

7.9. AUTRES DIMENSIONS. — En dimension $4k+1$ ($\neq 5$), on a une obstruction pour faire la chirurgie sur $(\delta f, \delta t)$; comme $p \delta M$ et $p \delta X$ bordent, $\sigma(\delta M) = \sigma(\delta X) = 0$, comme M est PL, $\sigma_0(\delta M) = 0$ et l'obstruction totale pour la $\mathbf{Z}_{(2)}$ donnée (f, t) est $-\sigma_0(\delta X) \in W(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z})$ (qui est d'ordre 2 si X est un $\mathbf{Z}/2$ - $\mathbf{CP}_{(2)}$).

En dimension $4k+2$, on peut trouver un cobordisme U entre $(\delta f, \delta t)$ et une équivalence et former le $\mathbf{Z}_{(2)}$ problème de chirurgie relative (f', t') où $f' : M \cup p U \rightarrow X$. Son invariant de Kervaire $\tau(f', t') \in \mathbf{Z}/2$ est indépendant du choix de U et est l'obstruction du problème (f, t) .

En dimension $4k+3$ on a une obstruction l'invariant de Kervaire $\tau(\delta f, \delta t)$.

7.10. Si Y est un $\mathbf{CP}_{(2)}$ de dimension $2l-1$, on définit

$$\chi^*(Y, F) \equiv \sum_0^{l-1} \dim_F H_i(Y, F) \pmod{2},$$

où F est un corps et on pose

$$R(Y) = \chi^*(Y, \mathbf{Q}) + \chi^*(Y, \mathbf{Z}/2).$$

$R(Y)$ est l'invariant de de Rham qui par la formule des coefficients universels est congru mod 2 à $\dim_{\mathbf{Z}/2} [(\text{Tors } H_{l-1}(Y, \mathbf{Z}_{(2)})) \otimes \mathbf{Z}/2]$.

PROPOSITION 7.10. — Soit (f, t) une $\mathbf{Z}_{(2)}$ -donnée de chirurgie sur X $\mathbf{Z}/2^\alpha$ - $\mathbf{CP}_{(2)}$ de dimension $4k$ avec $f : M \rightarrow X$. On a

$$\sigma(M) \equiv \sigma(X) \pmod{2}$$

et

$$\omega(f, t) \equiv \frac{1}{2}(\sigma(M) - \sigma(X)) + 2^{\alpha-1}(R(\delta M) + R(\delta X)) \pmod{2^\alpha}.$$

Démonstration. — Soit $U \xrightarrow{g} \delta X \times I$ un cobordisme de $Z_{(2)}$ donnée de chirurgie entre $\delta f : \delta M \rightarrow \delta X$ et une équivalence $\delta M' \rightarrow \delta X$; la relation

$$I(M) - I(X) + 2^\alpha I(U) \in WQ(Z_{(2)})$$

montre que $\sigma(M) \equiv \sigma(X) \pmod{2}$. Calculons $\sigma(U) \pmod{2}$; on a la formule classique

$$\begin{aligned} \sigma(U) &\equiv \chi(U) + \chi^*(\partial U; \mathbf{Q}) \pmod{2} \\ &\equiv \chi(U) + \chi^*(\delta M; \mathbf{Q}) + \chi^*(\delta X; \mathbf{Q}) \end{aligned}$$

puisque $\delta M' \rightarrow \delta X$ est une équivalence de même

$$\rho_U \equiv \chi(U) + \chi^*(\partial U; \mathbf{Z}/2) \equiv \chi(U) + \chi^*(\delta M; \mathbf{Z}/2) + \chi^*(\delta X; \mathbf{Z}/2),$$

où ρ_U est le rang de la forme d'intersection sur $H_{2k}(U; \mathbf{Z}/2)$ qui est la somme orthogonale $K_{2k}(g, \mathbf{Z}/2) \oplus H_{2k}(\delta X \times I, \mathbf{Z}/2)$. Or comme $\tau_U \oplus g^*(\delta \xi \times I)$ est $SPL_{(2)}$ trivialisé on sait, par un argument de classes de Wu [3] que la forme d'intersection de $K_{2k}(g, \mathbf{Z}/2)$ est symplectique ($x \cdot x = 0, \forall x$) son rang est donc pair et $\rho_U \equiv \rho_{\delta X \times I} \equiv 0$ d'où en sommant $\sigma(U) \equiv R(\delta M) + R(\delta X)$.

Remarque 7.11. — A la différence du cas des \mathbf{Z} -données de chirurgie [12], 7.8 et 7.10 calculent l'obstruction d'une $\mathbf{Z}_{(2)}$ donnée de chirurgie de dimension $4k$, à l'aide de la structure homologique de la source et du but, et servant de définition de $\tau(f, t)$ dans le cas général sans hypothèse de simple connexité.

FORMULE DE PRODUIT.

LEMME 7.12. — Soit $\phi : E \otimes F \rightarrow k$ un accouplement (non dégénéré) entre deux k -espaces vectoriels de dimension paire, soient P_0 et P_1 deux sous-espaces de E alors :

$$\dim((P_0 \oplus P_0^\perp) \cap (P_1 \oplus P_1^\perp)) \equiv \dim P_0 + \dim P_1 \pmod{2}.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \dim((P_0 \oplus P_0^\perp) \cap (P_1 \oplus P_1^\perp)) &= \dim(P_0^\perp \cap P_1^\perp) + \dim(P_0 \cap P_1) \\ &= \dim(P_0 \cap P_1) + \dim((P_0 + P_1)^\perp) \\ &\equiv \dim(P_0 \cap P_1) + \dim(P_0 + P_1) \equiv \dim P_0 + \dim P_1. \end{aligned}$$

PROPOSITION 7.13. — Soient X et Y deux $\mathbf{Z}/2^\alpha$ - $CP_{(2)}$ de dimension paire on a

$$R(\delta(X \times Y)) = \sigma(X)R(\delta Y) + \sigma(Y)R(\delta X).$$

Démonstration. — Soient $2m = \dim Y$, $2l = \dim X$ et $Z = \delta(X \times Y)$, Z est obtenu à partir de $X \times \delta Y$ et $\delta X \times Y$ en recollant

$$V = \delta X \times \delta Y \times \{1, \dots, 2^\alpha\} \simeq \partial X \times \delta Y \simeq \delta X \times \partial Y.$$

La suite exacte de Mayer-Vietoris (tous les groupes d'homologie sont à coefficients F) :

$$0 \rightarrow A \rightarrow H_{m+l-1}(\delta X \times Y) \oplus H_{m+l-1}(X \times \delta Y) \rightarrow H_{m+l-1}(Z) \rightarrow H_{m+l-2}(V) \rightarrow \dots$$

où

$$A = \text{Im} [H_{m+l-1}(V) \rightarrow H_{m+l-1}(\delta X \times Y) \oplus H_{m+l-1}(X \times \delta Y)]$$

montre que (puisque $\dim H_j(V) \equiv 0 \pmod{2}$) :

$$\chi^*(Z, F) \equiv \chi^*(\delta X \times Y, F) + \chi^*(X \times \delta Y, F) + \dim A$$

et

$$\chi^*(\delta X \times Y, F) \equiv \sum_{i+j \leq m+l-1} \dim H_i(\delta X) \dim H_j(Y) = \sum_{i \geq 0} \dim H_{l-i-1}(\delta X) \sum_{m-i}^{m+i} \dim H_j(Y),$$

la suite exacte

$$0 \rightarrow B \rightarrow H_m(Y, \partial Y) \rightarrow H_{m-1}(\partial Y) \rightarrow H_{m-1}(Y) \rightarrow \dots \rightarrow K_{m-i-1}(\partial Y) \rightarrow 0$$

(où $B = \text{Im} [H_m(Y) \rightarrow H_m(Y, \partial Y)]$ et $K_j(\partial Y) = \ker [H_j(\partial Y) \rightarrow H_j(Y)]$) montre ($\dim H_j(\partial Y) \equiv 0$) :

$$\sum_{m-i}^{m+i} \dim H_j(Y) \equiv \dim B + \dim K_{m-i-1}(\partial Y) \equiv \sigma(Y) + \dim K_{m-i-1}(\partial Y),$$

donc

$$\begin{aligned} \chi^*(\delta X \times Y) &\equiv \sigma(Y) \chi^*(\delta X) + \sum_{i \geq 0} \dim H_{l-i-1}(\delta X) \dim K_{m-i-1}(\partial Y) \\ &\equiv \sigma(Y) \chi^*(\delta X) + \sum_{i \geq 0} \dim H_{l+i}(\delta X) \dim K_{m-i-1}(\partial Y), \end{aligned}$$

de même

$$\chi^*(X \times \delta Y) = \sigma(X) \chi^*(\delta Y) + \sum_{j \geq 0} \dim K_{l-j-1}(\partial X) \dim H_{m+j}(\delta Y).$$

Or

$$\begin{aligned} \dim A &\equiv \dim \ker [H_{m+l-1}(V) \rightarrow H_{m+l-1}(\delta X \times Y) \oplus H_{m+l-1}(X \times \delta Y)] \\ &\equiv \dim(L_0 \cap L_1) \end{aligned}$$

où

$$L_0 = \ker [H_{m+l-1}(V) \rightarrow H_{m+l-1}(\delta X \times Y)] = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} (H_{l+i}(\delta X) \otimes K_{m-i-1}(\partial Y))$$

et

$$L_1 = \ker [H_{m+l-1}(V) \rightarrow H_{m+l-1}(X \times \delta Y)] = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} (K_{l-j-1}(\partial X) \otimes H_{m+j}(\delta Y)).$$

Or on a la décomposition en somme orthogonale

$$H_{m+l-1}(\delta X \times \delta Y) = \bigoplus_{i \geq 0} (H_{l+i}(\delta X) \otimes H_{m-i-1}(\delta Y) \oplus H_{l-i-1}(\delta X) \otimes H_{m+i}(\delta Y)),$$

et l'on obtient une décomposition $H_{m+l-1}(V) = \bigoplus_{i \geq 0} V_i$ en prenant 2^x exemplaires de la décomposition précédente; les deux lagrangiens L_0 et L_1 se décomposent dans cette somme orthogonale. Il est clair que l'orthogonal de $K_{l+i}(\partial X) \otimes H_{m-i-1}(\delta Y)$ est

$$K_{l-i-1}(\partial X) \otimes H_{m+i}(\delta Y)$$

et celui de $H_{l+i}(\delta X) \otimes K_{m-i-1}(\partial Y)$ est $H_{l-i-1}(\delta X) \otimes K_{m+i}(\partial Y)$. Un calcul basé sur le lemme 7.12 montre alors

$$\dim(L_0 \cap L_1 \cap V_i) \equiv \dim H_{l+i}(\delta X) \dim K_{m-i-1}(\partial Y) + \dim K_{l-i-1}(\partial X) \dim H_{m+i}(\delta Y),$$

d'où en sommant

$$\chi^*(Z, F) \equiv \sigma(X) \chi^*(\delta Y, F) + \sigma(Y) \chi^*(\delta X, F).$$

7.14. SOIT N UNE $\mathbf{Z}/2^\alpha$ VARIÉTÉ PL ET (f, t) UNE $\mathbf{Z}_{(2)}$ DONNÉE DE CHIRURGIE SUR UN $\mathbf{Z}/2^\alpha$ - $\mathbf{CP}_{(2)}$ X où $f: M \rightarrow X$; formons

$$f \times 1_N: M \times N \rightarrow X \times N$$

cela permet de définir une $\mathbf{Z}_{(2)}$ donnée de chirurgie notée $(f, t) \times 1_N$ sur $X \times N$.

THÉORÈME 7.14. — Si $\dim X + \dim N \equiv 0 \pmod{4}$ on a dans $\mathbf{Z}/2^\alpha \otimes \mathbf{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)})$:

$$\tau((f, t) \times 1_N) = \sigma(N) \tau(f, t).$$

Démonstration :

Cas 1. $\dim N \equiv 0 \pmod{4}$. Par 7.8 et 5.20 on a dans $\mathbf{Z}/2^\alpha \mathbf{W} \otimes (\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z})$:

$$\sigma_0((f, t) \times 1_N) = -\sigma_0(X \times N) = -\sigma(N) \sigma_0(X) = \sigma(N) \sigma_0(f, t).$$

Par 7.10, 7.13 et 5.17 on a dans $\mathbf{Z}/2^\alpha$:

$$\begin{aligned} \omega((f, t) \times 1_N) &= \frac{1}{2}(\sigma(M \times N) - \sigma(X \times N)) + 2^{\alpha-1}(\mathbf{R}(\delta(M \times N)) + \mathbf{R}(\delta(X \times N))) \\ &= \sigma(N) \left[\frac{1}{2}(\sigma(M) - \sigma(X)) + 2^{\alpha-1}(\mathbf{R}(\delta M) + \mathbf{R}(\delta X)) \right] \\ &\quad + 2^{\alpha-1} \mathbf{R}(\delta N)(\sigma(M) - \sigma(X)) \\ &= \sigma(N) \tau(f, t). \end{aligned}$$

Cas 2. $\dim N \equiv 2 \pmod{4}$ le même argument s'applique pour montrer que

$$\tau((f, t) \times 1_N) = 0.$$

Cas 3. $\dim X$ et $\dim N$ impair. La méthode précédente ne s'applique plus d'abord parce que dans le calcul de $\mathbf{R}(\delta(X \times N))$ apparaît un terme médian difficile à évaluer et surtout que dans 5.18 on n'a de renseignement sur $\sigma(X \times N)$ que mod 2^α .

Nous utilisons 7.8 lorsque $\alpha \leq 2$, par 5.18 $\sigma_0(X \times N) = 0$ dans $\mathbf{Z}/2^\alpha \otimes \mathbf{W}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z})$ donc $\tau((f, t) \times 1_N) = 0$.

En dimension $4k+3$, on peut [12] à partir de la sphère de Kervaire, construire une \mathbf{Z} -donnée de chirurgie (f_0, t_0) sur une $\mathbf{Z}/2$ variété PL d'obstruction non nulle dans $\mathbf{Z}/2$. On considère la réunion de $2^{\alpha-1}$ copies de (f_0, t_0) comme une donnée de chirurgie sur une $\mathbf{Z}/2^\alpha$ variété, on la note $(f_0, t_0)_\alpha$. Si N est une $\mathbf{Z}/2^\alpha$ variété PL, on note \bar{N} la $\mathbf{Z}/2$

variété obtenue en ouvrant N ($\bar{N} = N$ et $\delta\bar{N} = \delta N \times \{1, \dots, 2^{\alpha-1}\}$). Si $\dim N \equiv 1$ (4) on a $\tau((f_0, t_0)_{\alpha} \times 1_N) = \tau((f_0, t_0) \times 1_{\bar{N}})$ qui est nul d'après le cas particulier $\alpha \leq 2$.

Soit (f, t) une $Z_{(2)}$ -donnée de chirurgie sur un $Z/2^{\alpha}$ - $CP_{(2)}$ de dimension $4k+3 \geq 7$; la somme disjointe $(f', t') = (f, t) \cup \lambda(f_0, t_0)_{\alpha}$ (où λ est l'invariant de Kervaire de $(\delta f, \delta t)$) est d'obstruction nulle; d'après [4] et [21] (chap. 9) il existe un $Z/2^{\alpha}$ - $CP_{(2)}$ à bord Y de dimension $4k+4$, avec $DY = X' \cup X''$, une $Z/2^{\alpha}$ -variété PL à bord P avec $bP = M' \cup M''$, une extension (g, θ) de (f', t') avec $g : P \rightarrow Y$ et $f'' : M'' \rightarrow X''$ équivalence. On a alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \tau((f'', t'') \times 1_N) = \tau((f', t') \times 1_N) \\ &= \tau((f, t) \times 1_N) + \lambda \tau((f_0, t_0)_{\alpha} \times 1_N) = \tau((f, t) \times 1_N). \end{aligned}$$

Si (f, t) est de dimension 3, $(f, t) \times 1_{CP_2}$ est de dimension 7, l'argument précédent et le cas 1 montrent que $\sigma(CP_2) \tau((f, t) \times 1_N) = 0$.

En dimension $4k+1$, on peut à partir des exemples de [2], pour chaque nombre premier, impair q , construire une $Z_{(2)}$ -donnée de chirurgie (f_q, t_q) sur un $Z/4$ - $CP_{(2)}$ dont l'obstruction engendre $W(\mathbb{F}_q)$: on répète l'argument précédent (où maintenant \bar{N} est la $Z/4$ -variété PL obtenue en ouvrant N).

7.15. $Z_{(2)}$ -DONNÉES DE CHIRURGIE RELATIVE SUR UN $Z/2^{\alpha}$ - $CP_{(2)}$ A BORD. — La définition est analogue à 7.6 mais maintenant $f : M \rightarrow X$ est une application de Z/p -variétés à bord et on suppose en outre que f induit une équivalence

$$bf : bM \rightarrow bX.$$

Les résultats sur les $Z_{(2)}$ -données de chirurgie absolue se transposent, notons seulement deux complications techniques.

7.16. Lorsque, comme en 7.7 on forme $M' = M \cup_p U$ on recolle sur une partie du bord seulement, on n'a plus forcément $I(M') = I(M) + pI(U)$; grâce à l'expression du terme complémentaire de 5.10 et au fait que bf induit une équivalence $\partial bM \rightarrow \partial bX$, on a

$$I(M') - I(X \cup_p (\delta X \times I)) = I(M) + pI(U) - I(X).$$

7.17. Soit (f, t) une $Z_{(2)}$ -donnée de chirurgie avec $f : M^{4k} \rightarrow X^{4k}$; formons

$$C_f = M \cup_{bf} bM \times I \cup X,$$

c'est un $Z/2^{\alpha}$ - $CP_{(2)}$ sans bord de dimension $4k$ et 7.10 devient

LEMME 7.17. — On a

$$\omega(f, t) \equiv \frac{1}{2}(\sigma(M) - \sigma(X)) + 2^{\alpha-1} R(\delta C_f) \pmod{2^{\alpha}}.$$

Preuve. — Comme $\delta f| : \partial \delta M \rightarrow \partial \delta X$ est une équivalence, on peut dans le cas simplement connexe, trouver un cobordisme U entre $\delta M \rightarrow \delta X$ et une équivalence

$\delta M' \rightarrow \delta X$ tel que $\partial U = \delta M \cup \partial \delta M \times I \cup \delta M'$, l'application $\phi : \partial U \rightarrow \delta C_f$ qui est l'identité sur $\delta M \cup \partial \delta M \times I$ et l'équivalence $\delta M' \rightarrow \delta X$ sur $\delta M'$, est une équivalence donc $R(\delta C_f) = R(\partial U) \equiv \sigma(U) \pmod{2}$. Cette formule et 7.8 définissent $\tau(f, t)$ dans le cas général sans hypothèses de simple connexité.

De plus une démonstration analogue à 7.16 montre que $\sigma(C_f) = \sigma(M) - \sigma(X)$ ($\equiv 0 \pmod{2}$), la démonstration de 7.14 se généralise donc.

ESPACE DES $Z_{(2)}$ -DONNÉES DE CHIRURGIE. — Nous utilisons les méthodes fonctionnelles de Casson et Quinn; nos références sont [14] et [21].

7.18. ON APPELLE (m, k) « VARIÉTÉ » LA DONNÉE, notée $M^{m,k}$, de « variétés » M_σ pour tout simplexe σ de Δ^k (canoniquement triangulé) (M_σ étant de dimension $m + |\sigma|$) et pour $\sigma < \tau$ d'inclusion de M_σ comme sous-variété du bord de M_τ (on considère qu'une variété de dimension négative est \emptyset et que \emptyset est une variété de dimension n pour tout n). Si $M^{m,k}$ est une (m, k) variété on obtient $k+1$ variétés de type $(m, k-1)$ notées $d_i M$ en prenant $(d_i M)_\sigma = M_{d_i \sigma}$ où $d_i : \Delta^{k-1} \rightarrow \Delta^k$ est l'inclusion comme i -ième face. On appelle bord d'une (m, k) variété $M^{m,k}$ la variété $bM = \partial M_{\Delta^k} - \bigcup_{|\sigma| < k} M_\sigma$, c'est une variété à bord de dimension $m+k-1$. Un morphisme de (m, k) variétés : $M^{m,k} \rightarrow X^{m,k}$ est une application $f : M_{\Delta^k} \rightarrow X_{\Delta^k}$ telle que $f(M_\sigma) \subset X_\sigma$ pour tout σ ; un tel morphisme est appelé équivalence si toutes les restrictions $M_\sigma \rightarrow X_\sigma$ sont des équivalences.

Une $Z_{(2)}$ -donnée de chirurgie sur un (m, k) $CP_{(2)}$ est la donnée d'un morphisme

$$f : M^{m,k} \rightarrow X^{m,k},$$

où M est une (m, k) variété PL orientée, d'un SPL fibré ξ sur X_{Δ^k} , et d'une SPL $_{(2)}$ trivialisée t de $\tau_{M_{\Delta^k}} \oplus f^* \xi$, avec f de degré 1 et $f|_{bM} : bM \rightarrow bX$ une équivalence; on note une telle donnée (f, t) . Par restriction on obtient des données notées $d_i(f, t)$ sur le $(m, k-1)$ $CP_{(2)}$ $d_i X^{m,k}$.

On appelle $L_m(Z_{(2)})$ le complexe semi-simplicial sans dégénérescences (ou encore « Δ -set ») dont les k simplexes sont les $Z_{(2)}$ -données de chirurgie sur les $(-m, k)$ $CP_{(2)}$ et les opérateurs faces induits des d_i .

On pointe $L_m(Z_{(2)})$ en choisissant dans les k simplexes la $Z_{(2)}$ -donnée sur l'ensemble vide. Si $m > 0$, $L_m(Z_{(2)})$ est $(m-1)$ connexe (il n'a que le point base comme k simplexe pour $k < m$).

7.19. L'INVARIANT $\tau(f, t)$ DÉFINIT UN MORPHISME $\pi_0(L_m(Z_{(2)}))$ dans le groupe de Wall $L_m(Z_{(2)})$ qui est $WQ(Z_{(2)})$, $0, Z/2, 0$, suivant le reste de $m \pmod{4}$. Si $m < -4$, on sait [21] et [4], que c'est un isomorphisme. On a des équivalences d'homotopie

$$\Omega L_m(Z_{(2)}) \simeq L_{m-1}(Z_{(2)})$$

et donc

$$\pi_i(L_m(Z_{(2)})) \simeq L_{i-m}(Z_{(2)}) \quad \text{pour } i - m > 4.$$

7.20. DORÉNAVANT NOUS NOUS INTÉRESSONS A $\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)})$ AVEC $m > 0$ (ET MÊME m GRAND).
 — Si V^n est une variété PL une application $g : V^n \rightarrow \mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)})$ est la donnée d'une triangulation K de V et d'un morphisme semi-simplicial

$$g : K \rightarrow \mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)}).$$

Les diverses $\mathbf{Z}_{(2)}$ -données de chirurgie sur un $(-m, n)$ $\mathbf{CP}_{(2)}$, $g(\sigma)$ (pour σ simplexe principal de K) se recollent le long de leurs faces communes pour donner une donnée de chirurgie relative $f : M^{n-m}$ où maintenant X est un $\mathbf{CP}_{(2)}$ de dimension $n-m$ à bord. Cela est en fait la définition sur les 0-simplexes d'une application

$$(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)}))^V \rightarrow \mathbf{L}_{m-n}(\mathbf{Z}_{(2)})$$

(voir [14] pour la définition de l'espace fonctionnel Y^V).

L'élément de $\pi_0(\mathbf{L}_{m-n}(\mathbf{Z}_{(2)}))$ associé à $g : V^n \rightarrow \mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)})$ ne dépend que de la classe de bordisme de (V, g) [en confondant $\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)})$ et sa réalisation géométrique] cela définit un morphisme τ :

$$\tau : \Omega_{m+4k}^{\text{SPL}}(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)})) \rightarrow \mathbf{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}),$$

soit par composition

$$\tau : \Omega_{m+4k}^{\text{SO}}(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)})) \rightarrow \mathbf{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}).$$

Si maintenant V^n est une \mathbf{Z}/p variété PL, et g une application $V \rightarrow \mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)})$ par un procédé analogue on obtient une $\mathbf{Z}_{(2)}$ -donnée de chirurgie relative sur un \mathbf{Z}/p - $\mathbf{CP}_{(2)}$ de dimension $n-m$ à bord dont l'invariant τ ne dépend que de la classe de bordisme de (V, g) . Cela définit des morphismes :

$$\tau_\alpha : \Omega_{m+4k}^{\text{SO}}(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)}), \mathbf{Z}/2^\alpha) \rightarrow \mathbf{Z}/2^\alpha \otimes \mathbf{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}).$$

On prolonge τ et τ_α par zéro dans les autres dimensions.

PROPOSITION 7.21. — *Les morphismes*

$$\Omega_*^{\text{SO}}(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)})) \xrightarrow{\tau} \mathbf{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}),$$

$$\Omega_*^{\text{SO}}(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)}), \mathbf{Z}/2^\alpha) \xrightarrow{\tau_\alpha} \mathbf{Z}/2^\alpha \otimes \mathbf{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}),$$

sont compatibles et multiplicatifs pour la signature.

La compatibilité est claire; en raisonnant comme en 6.4, la multiplicativité par rapport à la signature découle de 7.14 et 7.15.

7.22. En raisonnant comme au chapitre 6, les morphismes

$$\sigma_0 \cdot \tau_\alpha : \Omega_*^{\text{SO}}(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)}), \mathbf{Z}/2^\alpha) \rightarrow \mathbf{Z}/2^\alpha \otimes \mathbf{W}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z})$$

définissent des classes

$$\lambda_j(\mathbf{Z}_{(2)}) \in H^{m+4j}(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)}), \mathbf{W}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z})).$$

Par 6.8, il existe une classe

$$\mathcal{L}_j(\mathbf{Z}_{(2)}) \in H^{m+4j}(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)}), \mathbf{Z}_{(2)})$$

induisant les morphismes $\omega \cdot \tau$ et $\omega \cdot \tau_\alpha$, la classe $\mathcal{L}_j(\mathbf{Z}_{(2)})$ n'est peut-être pas unique mais on sait que ses réductions modulo 2^α le sont, en particulier on a

$$\rho_4 \mathcal{L}_j(\mathbf{Z}_{(2)}) = \gamma_{0*} \lambda_j(\mathbf{Z}_{(2)}) \in H^{m+4j}(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)}), \mathbf{Z}/4),$$

où ρ_4 est la réduction modulo 4 et γ_{0*} le morphisme induit sur les groupes de cohomologie par $\gamma_0 : \mathbf{W}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}/4$.

Remarque. — Si on suppose que les $\pi_j(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)}))$ en basses dimensions sont somme directe d'un groupe abélien libre et d'un groupe annulé par la multiplication par un entier, on peut montrer l'unicité des classes $\mathcal{L}_j(\mathbf{Z}_{(2)})$.

Les classes $\lambda_j(\mathbf{Z}_{(2)})$ et $\mathcal{L}_j(\mathbf{Z}_{(2)})$ se regroupent pour définir une classe

$$\Lambda_j(\mathbf{Z}_{(2)}) \in H^{m+4j}(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)}), \mathbf{Z}_{(2)} \otimes \mathbf{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)})).$$

La démonstration de [16] s'étend pour montrer la formule de produit pour l'invariant de Kervaire k d'une $\mathbf{Z}_{(2)}$ -donnée de chirurgie relative sur un $\mathbf{Z}/2$ - $\mathbf{CP}_{(2)}$; les morphismes $k : \Omega_{m+4j+2}^{\text{SPL}}(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)}), \mathbf{Z}/2) \rightarrow \mathbf{Z}/2$ définissent donc [16] des classes

$$k_j \in H^{m+4j+2}(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)}), \mathbf{Z}/2)$$

telles que pour toute application g d'une $\mathbf{Z}/2$ -variété PL \mathbf{V}^{m+4j+2} dans $\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)})$ on ait

$$k[\mathbf{V}, g] = \langle f^* k \cup v^2(\tilde{\mathbf{V}}), [\tilde{\mathbf{V}}] \rangle.$$

Vu 7.19 on peut alors répéter la démonstration de Sullivan [17] pour voir que :

THÉORÈME 7.23. — *Il existe deux complexes $\bar{\mathbf{L}}_m(\mathbf{Z}_{(2)})$ et $\mathbf{L}'_m(\mathbf{Z}_{(2)})$ tels que :*

- (1) *le $\mathbf{Z}_{(2)}$ -localisé de $\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)})$ ait le type d'homotopie de $\bar{\mathbf{L}}_m(\mathbf{Z}_{(2)}) \times \mathbf{L}'_m(\mathbf{Z}_{(2)})$;*
- (2) *$\pi_j(\bar{\mathbf{L}}_m(\mathbf{Z}_{(2)})) = 0$ pour $j > m+4$;*
- (3) *les classes $\Lambda_j(\mathbf{Z}_{(2)})$ et k_j définissent une équivalence d'homotopie*

$$\mathbf{L}'_m(\mathbf{Z}_{(2)}) \simeq \prod_{j>1} \mathbf{K}(\mathbf{Z}_{(2)} \otimes \mathbf{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}), m+4j) \times \prod_{j>1} \mathbf{K}(\mathbf{Z}/2, m+4j+2).$$

COMPARAISON DES ESPACES $\mathbf{L}_m(\mathbf{Z})$ ET $\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)})$.

7.24. Soit $\mathbf{L}_m(\mathbf{Z})$ l'espace analogue à $\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)})$ obtenu à partir des données de chirurgie sur les complexes de Poincaré; soit $\bar{\sigma} : \Omega_{m+4j}(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z})) \rightarrow \mathbf{Z}$ le morphisme défini par $\bar{\sigma}[\mathbf{V}, g] = (1/8)(\sigma(\mathbf{M}) - \sigma(\mathbf{X}))$ où $f : \mathbf{M}^{4j} \rightarrow \mathbf{X}^{4j}$ est la donnée de chirurgie associée à $g : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{L}_m(\mathbf{Z})$.

Soit i l'application naturelle $\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)})$ il est clair que

$$4\bar{\sigma} = \omega \cdot \tau \cdot i : \Omega_{m+4j}(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z})) \rightarrow \mathbf{Z}$$

et que pour tout α ,

$$\sigma_0 \cdot \tau_\alpha \cdot i : \Omega_{m+4j}(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}/2^\alpha) \rightarrow \mathbf{Z}/2^\alpha \otimes \mathbf{W}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z})$$

est le morphisme nul, par unicité on en déduit que $i^* \lambda_j(\mathbf{Z}_{(2)}) = 0$ pour tout j et donc $\rho_4 i^* \mathcal{L}_j(\mathbf{Z}_{(2)}) = 0$. Il existe donc $\mathcal{L}'_j \in H^{m+4j}(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}_{(2)})$ telles que

$$i^* \mathcal{L}_j(\mathbf{Z}_{(2)}) = 4 \mathcal{L}'_j.$$

Soit $[\mathbf{V}, f] \in \Omega_{m+4k}(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}))$ on a

$$4 \bar{\sigma}[\mathbf{V}, f] = \omega \tau[\mathbf{V}, i \circ f] = \langle f^* i^* \mathcal{L}(\mathbf{Z}_{(2)}) \cup l(\mathbf{V}), [\mathbf{V}] \rangle = 4 \langle f^* \mathcal{L}' \cup l(\mathbf{V}), [\mathbf{V}] \rangle,$$

donc $\mathcal{L}' \in H^{m+4k}(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}_{(2)})$ calcule $\bar{\sigma}$, cela suffit à assurer que le $\mathbf{Z}_{(2)}$ -localisé de $\mathbf{L}_m(\mathbf{Z})$ a le type d'homotopie d'un produit $\bar{\mathbf{L}}_m(\mathbf{Z}) \times \mathbf{L}'_m(\mathbf{Z})$ où $\pi_i(\bar{\mathbf{L}}_m(\mathbf{Z})) = 0$ si $i > m+4$ et les classes \mathcal{L}'_j et les classes de Kervaire définissent une équivalence d'homotopie

$$\mathbf{L}'_m(\mathbf{Z}) \simeq \prod_{j>1} \mathbf{K}(\mathbf{Z}_{(2)}, m+4j) \times \prod_{j>1} \mathbf{K}(\mathbf{Z}/2, m+4j+2).$$

La signature divisée par 8 est un isomorphisme de $\mathbf{WQ}(\mathbf{Z})$ sur \mathbf{Z} , grâce à cet isomorphisme on considère les classes \mathcal{L}'_j dans $H^{m+4j}(\mathbf{L}_m(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}_{(2)} \otimes \mathbf{WQ}(\mathbf{Z}))$.

Soit u l'inclusion $\mathbf{WQ}(\mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)})$ et u_* l'application induite sur les complexes d'Eilenberg-Mac Lane, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}_m(\mathbf{Z}) & \xrightarrow{i} & \mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)}) \\ \downarrow \mathcal{L}'_j & & \downarrow \Lambda_j(\mathbf{Z}_{(2)}) \\ \mathbf{K}(\mathbf{Z}_{(2)} \otimes \mathbf{WQ}(\mathbf{Z}), m+4j) & \xrightarrow{u_*} & \mathbf{K}(\mathbf{Z}_{(2)} \otimes \mathbf{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}), m+4j) \end{array}$$

est commutatif.

La suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{WQ}(\mathbf{Z}) \xrightarrow{u} \mathbf{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}) \xrightarrow{\sigma_0} \mathbf{W}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z}) \rightarrow 0$$

montre que

$$u_* : \mathbf{K}(\mathbf{Z}_{(2)} \otimes \mathbf{WQ}(\mathbf{Z}), m+4j) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{Z}_{(2)} \otimes \mathbf{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}), m+4j)$$

est la fibre de l'application

$$\sigma_{0*} : \mathbf{K}(\mathbf{Z}_{(2)} \otimes \mathbf{WQ}(\mathbf{Z}_{(2)}), m+4j) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{W}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z}), m+4j).$$

Comme pour les classes de Kervaire on a $i^* k_j(\mathbf{Z}_{(2)}) = k_j(\mathbf{Z})$ les résultats précédents montrent :

7.25. $\mathbf{L}'_m(\mathbf{Z}) \xrightarrow{i} \mathbf{L}'_m(\mathbf{Z}_{(2)})$ est la fibre de

$$\lambda(\mathbf{Z}_{(2)}) : \mathbf{L}'_m(\mathbf{Z}_{(2)}) \rightarrow \prod_{j>1} \mathbf{K}(\mathbf{W}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z}), m+4j).$$

THÉORÈME 7.26. — Soient X un complexe $m+4$ connexe et $f : X \rightarrow \mathbf{L}_m(\mathbf{Z}_{(2)})$. Pour que f se relève à homotopie près en $g : X \rightarrow \mathbf{L}_m(\mathbf{Z})$ il faut et il suffit que

$$f^*(\lambda(\mathbf{Z}_{(2)})) = 0 \quad \text{dans} \quad H^{m+4*}(X, \mathbf{W}(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z})).$$

Démonstration. — Soit F la fibre de $i : L_m(\mathbf{Z}) \rightarrow L_m(\mathbf{Z}_{(2)})$ pour $j > 4$ on a $\pi_{m+j-1}(F) = 0$ si $j \not\equiv 0 \pmod{4}$ et $W(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z})$ si $j \equiv 0 \pmod{4}$. En dimensions $> m+3$ $\pi_i F$ est un 2-groupe, vu l'hypothèse de connectivité sur X il suffit d'étudier le problème de relèvement après avoir localisé par $\mathbf{Z}_{(2)}$; le résultat est alors conséquence de 7.25.

CHAPITRE VIII

Type d'homotopie des variétés de $\mathbf{Z}_{(2)}$ -homologie

8.1. Soit X une variété de $\mathbf{Z}_{(2)}$ -homologie de dimension n , 4-connexe et qui vérifie la dualité de Poincaré à coefficients \mathbf{Z} . Dans [10] Levitt développe une théorie d'obstructions pour savoir s'il existe une variété PL M^n et une équivalence d'homotopie $f : M \rightarrow X$; explicitement, il dit que si une série d'obstructions dans $H^{4i}(X, G)$ (pour $4i < n$) s'annulent, le problème a une solution, où G est une somme directe infinie dénombrable de facteurs $\mathbf{Z}/2$.

Il apparaît que la valeur annoncée du groupe G est fautive, l'erreur venant du calcul des groupes de Wall $L_m(\mathbf{Z}_{(2)})$.

Nous utilisons les résultats des chapitres précédents pour montrer que l'on peut exprimer *a priori* la valeur des obstructions de Levitt.

THÉORÈME 8.2. — *Soit X^n une variété de $\mathbf{Z}_{(2)}$ -homologie, 4-connexe et qui vérifie la dualité de Poincaré à coefficients \mathbf{Z} . Pour qu'il existe une variété PL M^n et une équivalence d'homotopie $M \rightarrow X$, il est suffisant que les classes $\lambda_i(X) \in H_{n-4i}(X, W(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z}))$ soient nulles.*

Remarque. — Si $\dim X = 4k$, comme X vérifie la dualité de Poincaré à coefficients \mathbf{Z} on a automatiquement $\varepsilon(\lambda_k(X)) = \sigma_0(X) = 0$.

8.3. Soient ξ_m un SG_m -fibré de base B , $T(\xi_m)$ son espace de Thom, Levitt considère $\omega_{(2)}(\xi_m)$ le sous-complexe du complexe singulier de $T(\xi_m)$ dont les k -simplexes sont les applications $\Delta^k \rightarrow T(\xi_m)$, $CP_{(2)}$ transverses à ξ_m ainsi que toutes leurs faces. Si V est une variété PL de dimension n et f une application de V dans $\omega_{(2)}(\xi_m)$ par recollement comme en 7.20, on obtient une intersection transverse W qui est un $CP_{(2)}$ de dimension $n-m$. Si V est une $\mathbf{Z}/2^\alpha$ -variété PL et $f : \tilde{V} \rightarrow \omega_{(2)}(\xi_m)$ l'intersection transverse W est un $\mathbf{Z}/2^\alpha$ - $CP_{(2)}$. Prendre l'invariant d'intersection de l'intersection transverse définit des morphismes

$$\iota : \Omega_{m+4k}^{SO}(\omega_{(2)}(\xi_m)) \rightarrow W(\mathbf{Z}_{(2)})$$

et

$$\iota_\alpha : \Omega_{m+4k}^{SO}(\omega_{(2)}(\xi_m), \mathbf{Z}/2^\alpha) \rightarrow \mathbf{Z}/2^\alpha \otimes W(\mathbf{Z}_{(2)}).$$

Après composition avec $\delta : W(\mathbf{Z}_{(2)}) \rightarrow W(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z})$, ces morphismes vérifient les hypothèses de 6.9, ils définissent donc des classes

$$\lambda_k(\omega_{(2)}(\xi_m)) \in H^{m+4k}(\omega_{(2)}(\xi_m), W(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z})).$$

8.4. Soit X une variété de $\mathbf{Z}_{(2)}$ -homologie de dimension n , simplement connexe et qui vérifie la dualité de Poincaré à coefficients \mathbf{Z} ; soit ξ_m un fibré normal de Spivak de dimension m de X ; les théorèmes de transversalité 3.3 et 6.1 permettent de construire une section homotopique $s_X : T(\xi_m) \rightarrow \omega_{(2)}(\xi_m)$ de l'inclusion $\omega_{(2)}(\xi_m) \rightarrow T(\xi_m)$ [on confond $T(\xi_m)$ et son complexe singulier].

La définition 6.12 de la classe $\lambda_k(X) \in H_{n-4k}(X, W(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z}))$ montre, si D_X est l'isomorphisme de Poincaré (coeff. \mathbf{Z}) et Φ^* l'isomorphisme de Thom :

LEMME 8.4. — *On a*

$$s_X^* \lambda_k(\omega_{(2)}(\xi_m)) = \Phi^* D_X^{-1} \lambda_k(X).$$

8.5. Soit $\omega(\xi_m)$ le sous-complexe de $\omega_{(2)}(\xi_m)$ dont les k -simplexes sont les applications $\Delta^k \rightarrow T(\xi_m)$, CP-transverses à ξ_m ainsi que toutes leurs faces; soit j l'inclusion $\omega(\xi_m) \rightarrow \omega_{(2)}(\xi_m)$.

LEMME 8.5. — *Soient A la suspension d'un complexe $m+3$ connexe et $g : A \rightarrow \omega_{(2)}(\xi_m)$. Si $g^*(\lambda(\omega_{(2)}(\xi_m))) = 0$ dans $H^{m+4*}(A, W(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z}))$ il existe une application $g' : A \rightarrow \omega(\xi_m)$ telle que $g \sim j \circ g'$.*

Démonstration. — Soient F et $F_{(2)}$ les fibres homotopiques des inclusions $\omega(\xi_m) \rightarrow T(\xi_m)$ et $\omega_{(2)}(\xi_m) \rightarrow T(\xi_m)$; il existe [10] [11] un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\varphi} & L_m(\mathbf{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow i \\ F_{(2)} & \xrightarrow{\varphi_{(2)}} & L_m(\mathbf{Z}_{(2)}) \end{array}$$

où φ et $\varphi_{(2)}$ induisent des isomorphismes sur les π_l pour $l \geq m+4$.

Si C est un complexe $(m+4)$ -connexe les applications $\varphi_* : [C, F] \rightarrow [C, L_m(\mathbf{Z})]$ et $\varphi_{(2)*} : [C, F_{(2)}] \rightarrow [C, L_m(\mathbf{Z}_{(2)})]$ sont des bijections donc d'après 7.26 une application $h : C \rightarrow F_{(2)}$ se relève dans F si et seulement si $h^* \varphi_{(2)*}(\lambda(\mathbf{Z}_{(2)})) = 0$. La définition de $\varphi_{(2)}$ et 7.8 montrent que $\varphi_{(2)*} \lambda_k(\mathbf{Z}_{(2)}) = -\psi^* \lambda_k(\omega_{(2)}(\xi_m))$ si ψ est l'inclusion $F_{(2)} \rightarrow \omega_{(2)}(\xi_m)$.

Soit $A = \sum B$ avec B $m+3$ connexe et soit $g : A \rightarrow \omega_{(2)}(\xi_m)$. Si $g^* \lambda(\omega_{(2)}(\xi_m))$ est nulle dans $H^{m+4*}(A, W(\mathbf{Z}_{(2)}, \mathbf{Z}))$ le lemme des 5 montre que g se relève dans $\omega(\xi_m)$.

8.6. EN COMBINANT 8.4 ET 8.5 NOUS VOYONS QUE si X^n est une variété de $\mathbf{Z}_{(2)}$ -homologie, 4-connexe, qui est un complexe de Poincaré, et dont les classes $\lambda_k(X)$ sont nulles, l'application $s_X : T(\xi_m) \rightarrow \omega_{(2)}(\xi_m)$ se relève en section $T(\xi_m) \rightarrow \omega(\xi_m)$, dans ce cas [11] montre que X a le type d'homotopie d'une variété PL.

INDEX

| | |
|---|-------------|
| Classes de Stiefel-Whitney homologiques : | |
| d'une variété eulérienne..... | 2.11, p. 14 |
| d'une variété eulérienne à bord..... | 2.14, p. 15 |
| d'une variété eulérienne mod 2..... | 2.26, p. 18 |
| Classes $\mu_j(X) \in H_{n-j}(X; \mathbf{Z}/2)$ pour X variété eulérienne mod 2..... | 3.27, p. 33 |
| Classes $\mathcal{L}_j(X) \in H_{n-4j}(X; \mathbf{Z}_{(2)})$ pour X variété rationnelle de dimension n | 6.12, p. 54 |
| $H_{n-4j}(X, \partial X; \mathbf{Z}_{(2)})$ pour X variété rationnelle de dimension n , à bord..... | 6.16, p. 56 |
| Classes $\lambda_j(X) \in H_{n-4j}(X; W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}))$ pour X variété rationnelle de dimension n | 6.12, p. 54 |
| Classe $\Delta(X) \in K_n(X)$ pour X variété rationnelle de dimension n | 6.18, p. 56 |
| Complexe de Poincaré pour l'anneau $\mathbf{Z}_{(2)}$ (abrégié en $\mathbf{CP}_{(2)}$)..... | 7.2, p. 58 |
| \mathbf{Z}/p -complexe de Poincaré pour $\mathbf{Z}_{(2)}$ (abrégié en $\mathbf{Z}/p\text{-CP}_{(2)}$)..... | 7.6, p. 59 |
| Cycle géométrique de dimension n | 1.4, p. 5 |
| Cycle géométrique de dimension n à bord..... | 1.16, p. 8 |
| $\mathbf{Z}_{(2)}$ -donnée de chirurgie sur un $\mathbf{CP}_{(2)}$ | 7.3, p. 58 |
| $\mathbf{Z}_{(2)}$ -donnée de chirurgie sur un $\mathbf{Z}_p\text{-CP}_{(2)}$ | 7.6, p. 59 |
| Invariant d'intersection $I(X) \in W(\mathbf{Q})$ d'une variété rationnelle X..... | 5.4, p. 39 |
| Invariant d'intersection $I(X) \in \mathbf{Z}_p \otimes W(\mathbf{Q})$ d'une \mathbf{Z}_p -variété rationnelle X..... | 5.14, p. 43 |
| Produit de deux \mathbf{Z}_p -variétés rationnelles..... | 5.15, p. 44 |
| Résolution eulérienne..... | 2.1, p. 12 |
| Résolution eulérienne mod 2..... | 2.25, p. 17 |
| Résolution géométrique..... | 1.1, p. 4 |
| Résolution rationnelle..... | 4.1, p. 35 |
| Variété eulérienne de dimension n | 2.3, p. 12 |
| Variété eulérienne de dimension n à bord..... | 2.6, p. 13 |
| Variété eulérienne mod 2 de dimension n | 2.25, p. 17 |
| Variété rationnelle..... | 4.3, p. 35 |
| Variété rationnelle à bord..... | 4.7, p. 36 |
| \mathbf{Z}_p -variété rationnelle..... | 5.13, p. 43 |

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. BARGE, *Structures différentiables sur les types d'homotopie rationnelle simplement connexe* (Thèse, Orsay, 1975).
- [2] J. BARGE, J. LANNES, F. LATOUR et P. VOGEL, Λ -sphères (*Annales scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 7, 1974, p. 463-506).
- [3] W. BROWDER, *Surgery on Simply Connected Manifolds*, Springer, 1972.
- [4] W. BROWDER, *Poincaré Spaces, their Normal Fibrations and Surgery* (*Inventiones Math.*, 17, 1972, p. 191-202).
- [5] M. COHEN, *Simplicial Structures and Transverse Cellularity* (*Ann. of Maths*, vol. 85, 1967, p. 218-245).
- [6] P. CONNER and E. FLOYD, *Differentiable Periodic Maps*, Springer, 1964.
- [7] S. HALPERIN and D. TOLEDO, *Stiefel Whitney Homology Classes* (*Ann. of Maths*, vol. 96, 1972, p. 511-525).
- [8] J. LANNES et F. LATOUR, *Forme quadratique d'enlacement et application* (*Astérisque*, n° 26, 1975).
- [9] F. LATOUR, *Résolutions de variétés d'homologie rationnelle. I. Existence de résolutions* (*Comptes rendus*, t. 280, série A, 1975, p. 1105-1108).
- [10] N. LEVITT, *Homotopy Equivalences which are Cellular at the Prime 2* (*Bull. A.M.S.*, vol. 79, 1973, p. 601-605).
- [11] N. LEVITT and J. MORGAN, *Transversality Structures and P.L. Structures on Spherical Fibrations* (*Bull. A.M.S.*, vol. 78, 1972, p. 1064-1068).

- [12] J. MORGAN and D. SULLIVAN, *Transversality Characteristic Cycles and Linking Cycles in Surgery Theory* (*Ann. of Maths*, vol. 99, 1974, p. 463-544).
- [13] C. MORLET, *Les méthodes de la topologie différentielle dans l'étude des variétés semi-linéaires* (*Annales Scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 1, 1968, p. 313-394).
- [14] C. ROURKE, *The Hauptvermutung According to Sullivan* (*Lecture notes I.A.S.*, 1967).
- [15] C. ROURKE and B. SANDERSON, *Introduction to Piecewise-linear Topology*, Springer, 1972.
- [16] C. ROURKE and D. SULLIVAN, *On the Kervaire Obstruction* (*Ann. of Maths*, vol. 94, 1971, p. 397-413).
- [17] D. SULLIVAN, *Geometric Topology*, Mimeo, Princeton, 1967.
- [18] D. SULLIVAN, *Geometric Topology*. Part I, Mimeo, M.I.T., 1970.
- [19] D. SULLIVAN, *Singularities in Spaces* [*Proceedings of Liverpool Singularities Symposium II* (*Springer Lecture Notes*, n° 209)].
- [20] C. WALL, *Non Additivity of the Signature* (*Inventiones*, vol. 7, 1969, p. 269-274).
- [21] C. WALL, *Surgery on Compact Manifolds*, Academic Press, 1970.

François LATOUR,
Université de Paris XI,
91405 Orsay.

(Manuscrit reçu le 29 septembre 1975,
révisé le 2 juillet 1976.)