

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BERNARD PERRON

**Familles à un paramètre de pseudo-isotopies de plongements  
en codimension deux**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 9, n° 4 (1976), p. 567-609

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1976\\_4\\_9\\_4\\_567\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1976_4_9_4_567_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## FAMILLES A UN PARAMÈTRE DE PSEUDO-ISOTOPIES DE PLONGEMENTS EN CODIMENSION DEUX

PAR BERNARD PERRON  
(Université de Dijon)

### INTRODUCTION

Dans cet article on ne considère que des variétés  $C^\infty$  compactes, connexes, orientées. Soit  $f_0 : V^n \rightarrow Q^q$  un plongement fixé dans toute la suite tel que  $f_0^{-1}(\partial Q) = \partial V$ . On note  $\mathcal{F}(V^n, Q^q, f_0)$  l'espace (muni de la topologie  $C^\infty$ ) des pseudo-isotopies, c'est-à-dire des plongements  $F : V \times I \rightarrow Q \times I$  coïncidant avec  $f_0 \times \text{id}_I$  sur  $V \times \{0\} \cup \partial V \times I$ , telles que le complémentaire de l'image de  $F$  soit un cylindre (condition automatiquement vérifiée si  $q-n \geq 3$ ). On désigne par  $\mathcal{P}(Q, \partial)$  l'espace des pseudo-isotopies de difféomorphismes de  $Q$ .

Dans [8], par une « méthode élémentaire » inspirée de la démonstration du théorème du  $s$ -cobordisme on a calculé  $\pi_0(\mathcal{F}(V^n, Q^{n+2}; f_0))$  sous les hypothèses (★) suivantes :

- $\dim Q = \dim V + 2 \geq 7$ ;
- $f_0$  est à fibré normal trivial et  $\pi_1(Q - f_0(V)) \rightarrow \pi_1(Q)$  est un isomorphisme.

Plus précisément on a une bijection

$$\pi_0(\mathcal{F}(V^n, Q^{n+2}, f_0)) \simeq Z[\pi_1(Q)]/[ag - ga; Z],$$

où  $[ag - ga; Z]$  est le sous-groupe additif de  $Z[\pi_1(Q)]$  engendré par les éléments du type  $ag - ga$ ,  $a \in f_{0*} Z[\pi_1(V)]$ ,  $g \in Z[\pi_1(Q)]$  et  $Z = Z[0] \subset Z[\pi_1(Q)]$ .

*Remarque.* -  $Z[\pi_1(Q)]/[ag - ga; Z]$  n'est autre que  $H_0(\pi_1(V), Z[\pi_1(Q)]/Z[0])$  l'action de  $\pi_1(V)$  sur  $Z[\pi_1(Q)]/Z[0]$  étant donnée par  $a.g = f_{0*}(a)g f_{0*}(a)^{-1}$  où  $a \in \pi_1(V)$  et  $g \in Z[\pi_1(Q)]/Z[0]$ .

On peut se poser la question de savoir si l'homologie de  $\pi_1(V)$  à coefficients dans le groupe  $Z[\pi_1(Q)]/Z[0]$  intervient dans le calcul des groupes d'homotopie supérieurs de  $\mathcal{F}(V^n, Q^{n+2}, f_0)$ .

Le but de cet article est de donner une réponse affirmative à cette question tout au moins pour le premier groupe d'homotopie.

Plus précisément on a la :

PROPOSITION 1. — *Sous les hypothèses (★) précédentes on a un homomorphisme surjectif*

$$\pi_1(\underline{\mathcal{F}}(V^n, Q^{n+2}; f_0)) \rightarrow H_1(\pi_1(V); Z[\pi_1(Q)]/Z).$$

COROLLAIRE. — *Soit  $V^n$  ( $n \geq 5$ ) une variété telle que  $\pi_1(V)$  soit abélien et agisse trivialement sur  $\pi_2(V)$ . Alors il existe un homomorphisme surjectif*

$$\pi_1(\mathcal{P}(S^2 \times V)) \rightarrow \pi_1(V) \otimes_Z Z[\pi_1(V)]/Z[0].$$

*Démonstration.* — Considérons les premiers termes de la suite exacte de la fibration  $\mathcal{P}(D^2 \times V, \partial) \rightarrow \mathcal{P}(S^2 \times V) \rightarrow \underline{\mathcal{F}}(V, V \times S^2; f_0)$  :

$$(1) \quad \begin{aligned} \dots &\rightarrow \pi_1(\mathcal{P}(S^2 \times V)) \rightarrow \pi_1(\underline{\mathcal{F}}(V^n, V \times S^2, f_0)) \\ &\rightarrow \pi_0(\mathcal{P}(D^2 \times V, \partial)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}(S^2 \times V)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Les calculs de Hatcher-Wagoner [4] montrent que sous les hypothèses du corollaire l'application induite par l'inclusion  $\pi_0(\mathcal{P}(D^2 \times V)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}(S^2 \times V))$  est injective. De la suite exacte (1) et de la proposition 1, il résulte que la composition

$$\pi_1(\mathcal{P}(S^2 \times V)) \rightarrow \pi_1(\underline{\mathcal{F}}(V, V \times S^2; f_0)) \rightarrow H_1(\pi_1(V), Z[\pi_1(V)]/Z)$$

est surjective. D'après les hypothèses du corollaire,  $\pi_1(V)$  opérant trivialement sur  $Z[\pi_1(V)]/Z[0]$ , on a  $H_1(\pi_1(V), Z[\pi_1(V)]/Z) \simeq \pi_1(V) \otimes_Z Z[\pi_1(V)]/Z[0]$ .

*Remarque.* — A ma connaissance les seuls autres renseignements de nature algébrique concernant le calcul des groupes d'homotopie supérieurs de  $\mathcal{P}(M, \partial)$  sont ceux obtenus par Hatcher [3] et Volodin [9] :

PROPOSITION 2. — *Si  $M^p$  est 2-connexe et  $p \geq 7$  alors on a un isomorphisme*

$$\pi_1(\mathcal{P}(M, \partial)) \simeq Z_2 \oplus Wh_3(0),$$

où  $Wh_3(0)$  est un groupe (défini algébriquement) qu'on ne sait pas calculer.

Le plan et les méthodes de ce travail sont inspirées de [2]. Dans [8] on a considéré une pseudo-isotopie de plongements comme un  $s$ -cobordisme plongé. L'étude des familles à un paramètre de pseudo-isotopies de plongements peut alors être mise en parallèle avec l'étude des familles à un paramètre de fonctions réelles sur une variété du type  $V \times I$ , c'est-à-dire avec le travail de Hatcher [2] (voir aussi [4]). L'obstruction dans  $H_1(\pi_1(V), Z[\pi_1(Q)]/Z[0])$  qu'on fait apparaître correspond à la partie  $Wh_2(\pi_1(V))$  du calcul de Hatcher.

Après quelques préliminaires (chap. I) on rappelle (chap. II) comment, dans [8], on associe à toute pseudo-isotopie vérifiant les hypothèses ★ précédentes un couple de matrices (jouant un rôle analogue à la matrice d'intersection dans le théorème du  $s$ -cobordisme).

Au chapitre III on exhibe un représentant « générique » dans chaque classe d'homotopie de  $\pi_1(\mathcal{F}(V, Q, f_0), \mathcal{E}(V, Q, f_0))$ . Au chapitre IV on associe à un tel représentant générique une classe d'homologie dans  $H_1(\pi_1(V), Z[\pi_1(Q)]/Z)$ .

Au chapitre V on montre que cette classe d'homologie ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin générique.

## CHAPITRE I

### Préliminaires

I. PRÉLIMINAIRES ALGÈBRIQUES. — 1. *Le groupe*  $GL(\pi \xrightarrow{i_*} \pi')$ . — Soit  $\pi$  un groupe,  $Z[\pi]$  son anneau de groupe à coefficients entiers. On note  $GL_n(Z[\pi])$  le groupe des matrices inversibles d'ordre  $n$  à coefficients dans  $Z[\pi]$ . Notons  $e_{ij}^a$  ( $a \in Z[\pi]$ ) la matrice ne différant de la matrice nulle que par son terme à la place  $(i, j)$  ( $i$  indice de ligne,  $j$  celui de colonne) qui vaut  $a$  et soit  $E_{ij}^a = I + e_{ij}^a$  ( $i \neq j$ ) la matrice élémentaire correspondante.

On désigne par  $F_k^\gamma$  ( $\gamma \in \pm \pi$ ) la matrice diagonale ne différant de la matrice identité que par son terme à la place  $(k, k)$  qui est égal à  $\gamma$ .

Soit  $\pi'$  un second groupe et  $i_* : \pi \rightarrow \pi'$  un homomorphisme.

DÉFINITION 1.1 :

(a) On note  $\mathcal{M}_n(\pi \xrightarrow{i_*} \pi')$  l'ensemble des couples de matrices  $\left( A, \left( \begin{array}{c|c} i_*(A) & 0 \\ \hline B & i_*(A) \end{array} \right) \right)$

où  $A$  (resp.  $B$ ) est une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans  $Z[\pi]$  (resp.  $Z[\pi']$ ). Cet ensemble a une structure de monoïde pour la loi

$$\begin{aligned} & \left( A, \left( \begin{array}{c|c} i_*(A) & 0 \\ \hline B & i_*(A) \end{array} \right) \right) \times \left( A', \left( \begin{array}{c|c} i_*(A') & 0 \\ \hline B' & i_*(A') \end{array} \right) \right) \\ &= \left( A \times A', \left( \begin{array}{c|c} i_*(A) & 0 \\ \hline B & i_*(A) \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c|c} i_*(A') & 0 \\ \hline B' & i_*(A') \end{array} \right) \right). \end{aligned}$$

(b) On note  $GL_n(\pi \xrightarrow{i_*} \pi')$  le sous-monoïde de  $\mathcal{M}_n(\pi \xrightarrow{i_*} \pi')$  constitué des couples  $\left( A, \left( \begin{array}{c|c} i_*(A) & 0 \\ \hline B & i_*(A) \end{array} \right) \right)$  tels que  $A$  appartient au sous-groupe de  $GL_n(Z[\pi])$  engendré par les matrices élémentaires et les matrices  $F_k^\gamma$  ( $\gamma \in \pm \pi$ ).  $GL_n(\pi \rightarrow \pi')$  est clairement un groupe.

DÉFINITION 1.2. — On note  $\mathcal{M}(\pi \xrightarrow{i_*} \pi')$  [resp.  $GL(\pi \xrightarrow{i_*} \pi')$ ] la limite inductive des  $\mathcal{M}_n(\pi \xrightarrow{i_*} \pi')$  [resp.  $GL_n(\pi \xrightarrow{i_*} \pi')$ ] définie par

$$\left( A, \left( \begin{array}{c|c} i_*(A) & 0 \\ \hline B & i_*(A) \end{array} \right) \right) \rightarrow \left( \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c|c} \left( \begin{array}{c|c} i_*(A) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \\ \hline \left( \begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c|c} i_*(A) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \end{array} \right).$$

On a une deuxième interprétation, évidente, des groupes  $\mathcal{M}_n(\pi \xrightarrow{i_*} \pi')$ ,  $\mathcal{M}(\pi \rightarrow \pi')$ ... donnée par le :

LEMME 1.3. — *Le monoïde  $\mathcal{M}(\pi \rightarrow \pi')$  (resp. le groupe  $\text{GL}(\pi \rightarrow \pi')$ ) s'identifie naturellement avec l'ensemble des couples  $(A, B)$  muni de la loi*

$$(A, B) \times (A', B') = (AA', i_*(A)B' + B i_*(A'))$$

$A, B$  satisfaisant aux propriétés des définitions 1.1 et 1.2.

Remarque. — La première définition des ensembles  $\mathcal{M}_n, \text{GL}_n$ , plus lourde que la seconde, se justifie par le fait qu'elle intervient naturellement, comme on le verra au chapitre suivant, dans le calcul de l'obstruction à l'isotopie.

DÉFINITION 1.4. — *On note  $[ag - ga]$  le sous-groupe additif de  $Z[\pi']$  engendré par les éléments du type  $i_*(a)g - g i_*(a)$  où  $a \in Z[\pi], g \in Z[\pi']$ .*

LEMME 1.5. — *Soit  $A$  (resp.  $B$ ) une matrice à  $n$  (resp.  $m$ ) lignes et  $m$  (resp.  $n$ ) colonnes à coefficients dans  $Z[\pi]$  (resp.  $Z[\pi']$ ). Alors  $\text{trace}(i_*(A)B - B i_*(A))$  appartient à  $[ag - ga]$ .*

COROLLAIRE 1.6. — *L'application  $\text{tr} : \text{GL}(\pi \rightarrow \pi') \rightarrow Z[\pi']/[ag - ga]$  donnée par*

$$\text{tr}(A, B) = \text{trace } B i_*(A)^{-1}$$

*est bien définie et est un homomorphisme de groupes.*

On aura besoin du lemme suivant dont la démonstration est analogue à celle de la proposition 5.1 de [2].

LEMME 1.7. — *Soit  $(A, B)$  un élément de  $\text{GL}(\pi \xrightarrow{i_*} \pi')$ . On note  $a_{ij}$  (resp.  $b_{ij}$ ) l'élément à la place  $(i, j)$  de  $A$  (resp.  $B$ ). Si  $a_{hi} = b_{hi} = 0$  on a :*

1° pour tout  $\lambda \in Z[\pi]$  :

$$(A, B) = \prod_{q \neq h} (E_{qh}^{-a_{q1}\lambda}, 0)(I, e_{qh}^{-b_{q1}\lambda})(A, B) \prod_{p \neq i} (E_{ip}^{\lambda a_{hp}}, 0)(I, e_{ip}^{\lambda b_{hp}});$$

2° pour tout  $\gamma \in Z[\pi']$  :

$$(A, B) = \prod_{q \neq h} (I, e_{qh}^{-a_{q1}\gamma})(A, B) \prod_{p \neq i} (I, e_{ip}^{\gamma a_{hp}}).$$

2. *Homologie de groupes.* — Soit  $C_n(\pi)$  le groupe abélien libre engendré par les  $(n+1)$ -uplets  $(a_0, \dots, a_n)$ ,  $a_i \in \pi$ . C'est un  $Z[\pi]$ -module à droite pour la loi

$$\left( \sum_i n_i(a_0^i, \dots, a_n^i) \right) \cdot a = \sum_i n_i(a_0^i a, \dots, a_n^i a).$$

Le groupe  $\pi$  opère à gauche sur le groupe  $Z[\pi']/Z[0]$  par  $a.g = i_*(a)g i_*(a)^{-1}$  et en fait un  $Z[\pi]$ -module à gauche. Par définition les groupes d'homologie de  $\pi$  à coefficients dans  $Z[\pi']/Z$ , notés  $H_*(\pi, Z[\pi']/Z[0])$  sont ceux du complexe de chaînes :  $C_*(\pi) \otimes_{Z[\pi]} Z[\pi']/Z[0]$ , les homomorphismes bords étant classiquement définis par

$$\partial(a_0, \dots, a_n) = \sum_i (-1)^i (a_0, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n).$$

DÉFINITION 1.8. — Soit  $\alpha \in Z[\pi]$  s'écrivant sous la forme  $\alpha = \sum_i n_i \sigma_i$ ,  $n_i \in Z$ ,  $\sigma_i \in \pi$ . Soient  $a_i, b_i$  des éléments de  $\pi$ ,  $g, g'$  des éléments de  $Z[\pi']$ . On pose

$$(a_0 \alpha b_0, \dots, a_n \alpha b_n) \overline{\otimes} g i_*(\alpha) g' = \sum_i n_i (a_0 \sigma_i b_0, \dots, a_n \sigma_i b_n) \otimes g i_*(\alpha) g'.$$

Les règles de calcul du symbole  $\overline{\otimes}$  sont analogues à celle du produit tensoriel. Le lemme suivant donne quelques formules utiles pour la suite :

LEMME 1.9. — On a pour tout  $a_i \in \pi$ ,  $\alpha \in Z[\pi]$ ,  $g, g' \in Z[\pi']$  les égalités suivantes :

- 1°  $(a_0, \dots, a_n) \otimes i_*(\alpha) g = (a_0 \alpha, \dots, a_n \alpha) \overline{\otimes} g i_*(\alpha)$ ;
- 2°  $(a_0, \dots, a_n) \otimes g i_*(\alpha) = (a_0 \alpha, \dots, a_n \alpha) \overline{\otimes} i_*(\alpha) g$ ;
- 3°  $\partial(a_0 \alpha b_0, \dots, a_n \alpha b_n) \overline{\otimes} g i_*(\alpha) g'$   
 $= \sum_i (-1)^i (a_0 \alpha b_0, \dots, \widehat{a_i \alpha b_i}, \dots, a_n \alpha b_n) \overline{\otimes} g i_*(\alpha) g'.$

II. LES ESPACES DE PLONGEMENTS. — On se place dans la catégorie des variétés différentiables, connexes, compactes orientées et des applications  $C^\infty$ .

DÉFINITION 1.10. — Soit  $f_0 : (V^n, \partial V) \rightarrow (Q^q, \partial Q)$  un plongement tel que  $f^{-1}(\partial Q) = \partial V$ . On note  $\mathcal{F}(V, Q, f_0)$  [resp.  $\mathcal{F}(V)$ ] l'espace des pseudo-isotopies de plongements  $F : (V, \partial V) \times I \rightarrow (Q, \partial Q) \times I$  (resp. des applications  $f : V \times I \rightarrow I$ ) telles que

$$F|_{V \times \{0\}} \cup \partial V \times I = f_0 \times id_I \quad [\text{resp. } f^{-1}(i) = V \times \{i\} \quad \text{pour } i = 0, 1],$$

muni de la topologie  $C^\infty$ .

DÉFINITION 1.11. — On note  $\underline{\mathcal{F}}(V, Q, f_0)$  le sous-espace de  $\mathcal{F}(V, Q, f_0)$  constitué des pseudo-isotopies telles que  $(Q \times I - \dot{N}, Q \times \{0\} - \dot{N}_0, Q \times \{1\} - \dot{N}_1 \cup \delta N)$  est un cylindre, où  $N$  désigne un voisinage tubulaire de  $F, N_i (i = 0, 1)$  les voisinages induits de  $F|_{V \times \{i\}}$  et  $\delta N$  le bord latéral de  $N$ .

Remarque. —  $\underline{\mathcal{F}}(V^n, Q^q, f_0) = \mathcal{F}(V^n, Q^q, f_0)$  dès que  $q-n \geq 3$  et  $q \geq 5$  d'après le théorème du  $s$ -cobordisme.

On a une application naturelle, continue pour les topologies  $C^\infty$ ,

$$p_\# : \mathcal{F}(V, Q, f_0) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

définie par  $p_\#(F) = p \circ F$  où  $p : Q \times I \rightarrow I$  désigne la projection.

DÉFINITION 1.12. — On note  $\mathcal{E}(V, Q, f_0)$  [resp.  $\mathcal{E}(V)$ ] le sous-espace de  $\mathcal{F}(V, Q, f_0)$  [resp.  $\mathcal{F}(V)$ ] formé des pseudo-isotopies  $F$  (resp. des applications) sans point critique. (On dira qu'une pseudo-isotopie est sans point critique s'il en est ainsi pour sa fonction cote  $p \circ F$ .)

LEMME 1.13 [7]. — Si le fibré normal à  $f_0$  admet une section non nulle, alors l'application induite par l'inclusion

$$\pi_0(\mathcal{E}(V, Q, f_0)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{F}(V, Q, f_0))$$

est nulle.

LEMME 1.14. — L'application canonique  $p_{\#} : \mathcal{E}(V, Q, f_0) = p_{\#}^{-1}(\mathcal{E}(V)) \rightarrow \mathcal{E}(V)$  est une fibration localement triviale (surjective), la fibre au-dessus de chaque composante connexe étant contractile.

Démonstration. —  $p_{\#}$  est une fibration d'après le lemme 1 de l'appendice de [1]. On peut montrer que la fibre au-dessus de chaque composante connexe est haméomorphe à l'espace des isotopies de plongements de  $V$  dans  $Q$  (donc contractile). La surjectivité résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(V, \partial) & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{E}(V, Q, f_0) \subset \mathcal{F}(V, Q, f_0) \\ \approx \downarrow & \swarrow p_{\#} & \\ \mathcal{E}(V) & & \end{array}$$

l'application  $\lambda$  étant définie par :  $\lambda(F) = (f_0 \times \text{id}_i) \circ F$ .

## CHAPITRE II

### Rappels sur les pseudo-isotopies de plongements en codimension deux

Les résultats de ce chapitre, à l'exception du paragraphe 6, ont été démontrés dans [8].

1. *Un lemme de Whitney relatif.* — Soit  $T^n$  une sous-variété, connexe, compacte, orientée, d'une variété  $Q^{n+2}$  (connexe, compacte, orientée), à fibré normal trivial, telle que  $\pi_1(Q-T) \xrightarrow{i_*} \pi_1(Q)$  est un isomorphisme.

Soient  $M_1^p, M_2^q$  deux sous-variétés de  $Q$  à bord non vide, de dimension complémentaire, ne rencontrant  $T$  que transversalement le long de leur bord.

On associe à cette situation un couple d'intersection appartenant à

$$Z[Z \times \pi_1(T)] \times Z[\pi_1(Q)].$$

Pour cela on se fixe une trivialisatoin  $\tau$  du fibré normal à  $T$ , un point de base  $\star$  dans  $T$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  des chemins dans  $T$  joignant  $\star$  à des points  $A_1, A_2$  de  $\partial M_1$  et  $\partial M_2$ . Soient  $v_1, v_2$  des champs de vecteurs normaux à  $T$  définis le long de  $\mu_1$  et  $\mu_2$  donnant en  $\star$  des vecteurs indépendants et coïncidant aux autres extrémités avec les champs rentrant dans  $M_1$  et  $M_2$ ,

On associe à tout point  $P$  de  $\partial M_1 \cap \partial M_2$  (on suppose  $\partial M_1$  et  $\partial M_2$  transverses) un triple  $(\varepsilon_p, n_p, a_p) \in \{\pm 1\} \times Z \times \pi_1(T)$ . Le couple  $(\varepsilon_p, a_p)$  est le nombre d'intersection classique de  $\partial M_1$  et  $\partial M_2$  dans  $T$ . Pour définir l'entier  $n_p$ , on considère le champs  $v'_i$  rentrant dans  $M_i$  et coïncidant avec  $v_i$  en  $A_i$ ; soit  $v''_1$  un champ normal à  $T$  le long de  $\mu_2$  coïncidant

en  $\star$  avec  $v_1$  et en  $A_2$  avec  $v'_2$  tel que le champ  $v_1 \cup v'_1 \cup v'_2 \cup v''_1$  soit trivial (par rapport à la trivialisation  $\tau$  du fibré normal à  $T$ ) le long du lacet  $\mu_1 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \mu_2$  où  $\gamma_i$  est un chemin sur  $\partial M_i$  joignant  $A_i$  à  $P$ . Alors  $n_p$  désigne le « nombre de tours » du champ  $\gamma''_1$  par rapport au champ  $v_2$ .

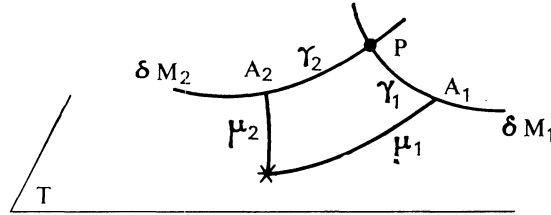


Fig. 2.1

DÉFINITION 2.1. — On pose

$$\alpha(M_1, M_2) = \sum_{p \in \partial M_1 \cap \partial M_2} \varepsilon_p(n_p, a_p) \in Z[Z \times \pi_1(T)]$$

et on note  $\beta(M_1, M_2) \in Z[\pi_1(Q)]$  le nombre d'intersection classique de l'intérieur de  $M_1$  et  $M_2$  dans  $Q$ .

On démontre dans [8] les résultats suivants :

LEMME 2.2. — Si  $(\alpha = \sum_i \varepsilon_i(n_i, a_i), \beta)$  et  $(\alpha', \beta')$  sont des couples d'intersection associés à des choix différents de chemins, d'orientations et de champs on a,

$$\alpha' = \varepsilon \sum_i \varepsilon_i(n_i + n, v a_i v^{-1}), \quad \beta' = \varepsilon i_*(v) \beta i_*(v)^{-1},$$

où  $n \in Z$ ,  $v \in \pi_1(T)$ ,  $\varepsilon = \pm 1$  et où  $i_*$  désigne l'homomorphisme  $\pi_1(T) \xrightarrow{i_*} \pi_1(Q)$ .

LEMME 2.3. — Pour des choix fixés d'orientations, de chemins et de champs, une isotopie de  $Q$  laissant  $T$  globalement invariante transforme le couple d'intersection

$$(\alpha(M_1, M_2) = \sum \varepsilon_i(n_i, a_i), \beta(M_1, M_2))$$

en

$$(\alpha' = \sum_i \varepsilon_i(n_i + m_i, a_i), \beta' = \beta + (-1)^{p'} \sum_j \varepsilon_j m_j i_*(a_j)) \quad \text{où } m_i \in Z.$$

COROLLAIRE 2.4. — Pour des choix fixés, on peut associer à la donnée de  $Q, T, M_1, M_2$  un couple d'intersection unique du type :  $(\alpha = \sum_i \varepsilon_i(0, a_i), \beta)$  appelé couple d'intersection réduit, qu'on considéra comme élément de  $Z[\pi_1(T)] \times Z[\pi_1(Q)]$ .

Le principal résultat de ce paragraphe est donné par la :

PROPOSITION 2.5. — On se place dans les hypothèses du début du paragraphe. On suppose en outre que  $p, p' \geq 3$  et dans le cas  $p = 3$  que  $\pi_1(T - \partial M_1) \rightarrow \pi_1(T)$  est un isomorphisme. Alors il existe une isotopie  $(h_t)$  de  $Q$  laissant  $T$  invariante telle que  $h_1(M_1) \cap M_2 = \Phi$  si et seulement si le couple d'intersection réduit est nul.



## 2. Pseudo-isotopies de Morse. Membranes

DÉFINITION 2.6 :

(a) On note  $\mathcal{F}^0(V, Q, f_0)$  [resp.  $\mathcal{O}^0(V, Q, f_0)$ ] le sous-espace des pseudo-isotopies  $F$  de  $\mathcal{F}(V, Q; f_0)$  dont la fonction cote  $p \circ F : V \times I \rightarrow I$  est une fonction de Morse avec valeurs critiques simples (resp. et en plus ordonnée).

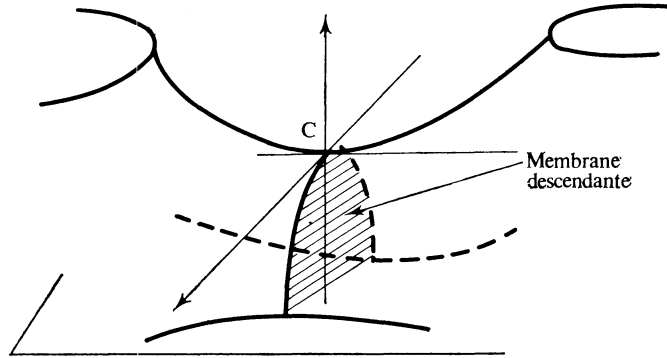


Fig. 2.2

(b) On note  $\mathcal{O}(V, Q, f_0)$  le sous-espace des pseudo-isotopies de  $\mathcal{F}(V, Q, f_0)$  n'ayant que des points critiques de type Morse, ou naissance, ordonnées, possédant éventuellement des points critiques de même indice au même niveau.

On note  $D^{i+1}$  le disque de rayon 1 de  $\mathbb{R}^{i+1}$  et on pose

$$D_+^{i+1} = \{x \in D^{i+1}; x_{i+1} \geq 0\}, \quad \partial_+ D^{i+1} = \partial D^{i+1} \cap D_+.$$

MEMBRANES. — DÉFINITION ET EXISTENCE. — Soient  $F \in \mathcal{F}^0(V^n, Q^q; f_0)$ ,  $c$  un point critique de Morse de  $p \circ F$  et  $Q_t$  un niveau au-dessous de  $F(c)$ . On suppose que les points critiques de  $p \circ F$  compris entre le niveau de  $F(c)$  et  $Q_t$  sont tous d'indice supérieur ou égal à celui de  $c$ . Alors il existe un plongement

$$G : (D_+^{i+1}, \partial_+ D^{i+1}, D^i) \rightarrow (Q \times [t, 1], F(V \times I) \cap Q \times [t, 1], Q_t)$$

vérifiant :

- 1°  $\text{Im } G$  rencontre  $F(V \times I)$  transversalement le long de  $G(\partial_+ D)$ ;
- 2°  $G(0, \dots, 0, 1) = F(c)$ ;
- 3°  $p \circ G|_{D_+^{i+1}}$  est sans point critique, ainsi que  $p \circ G|_{D_+^{i+1} - (0, 0, \dots, 0, 1)}$ ;
- 4°  $G(D_i) \subset Q_t$ .

L'image  $\text{Im}(G)$  est appelée une membrane descendante de  $c$  jusqu'à  $Q_t$  et  $G(D_i)$  est la projection de cette membrane sur  $Q_t$ .

$F^{-1}(G(\partial_+ D^{i+1}))$  est une nappe descendante (au sens de [1]) du point critique  $c$  de  $p \circ F$ .

On a de même la notion de membrane ascendante (voir fig. 2.2.).

3. *Classification des membranes descendantes d'un point critique d'indice  $p$  ne rencontrant que des niveaux critiques de même indice dans le cas  $q = n + 2$ .* — Soit  $F : V^n \times I \rightarrow Q^{n+2} \times I$  une pseudo-isotopie de Morse n'admettant sur  $Q \times [t_0, t_1]$  que des points critiques d'indice  $p$ , notés  $c_0, \dots, c_m$  tels que  $p \circ F(c_i) > p \circ F(c_{i+1})$  et équipés d'un système disjoint de bimembranes allant de  $Q \times \{t_0\}$  à  $Q \times \{t_1\}$ .

D'après [8], chapitre III, toute membrane descendante de  $c_0$  jusqu'à  $Q \times \{t_0\}$  se déduit (à isotopie près) de la membrane initiale par des opérations de l'un des deux types suivants :

TYPE A. — On fait passer la membrane de  $c_0$  « par-dessus » celle de  $c_i$  ( $i \geq 1$ ) (donc situé en dessous de  $c_0$ ) suivant la figure 2.3 :

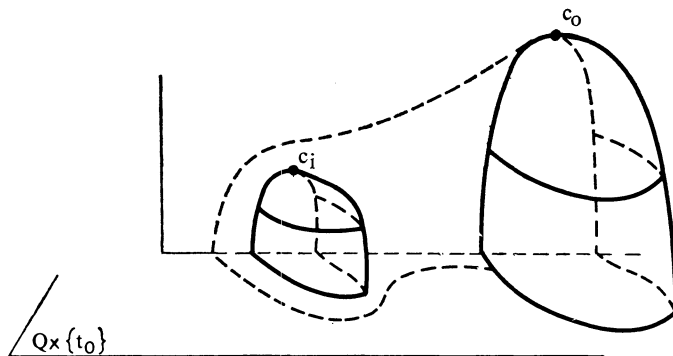


Fig 2.3

TYPE B. — On fait passer la membrane de  $c_0$  « par-dessus » la coupole ([8], chap. III) de  $c_i$ . La coupole d'un point critique est définie par la figure 2.4 :

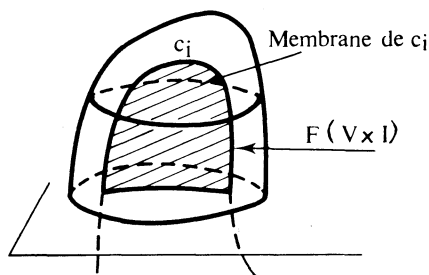


Fig. 2.4

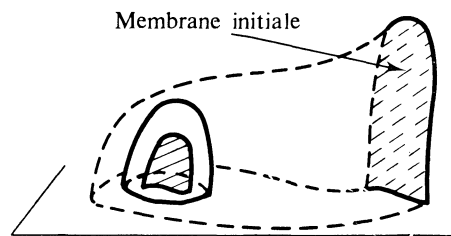


Fig. 2.5

Le changement de membranes de type (B) est alors décrit par la figure 2.5.

L'existence et la classification des membranes permet de démontrer le :

LEMME 2.7 (prop. 3.4 de [8]). — Soit  $F \in \mathcal{F}(V^n, Q^{n+2}, f_0)$  où  $f_0$  est un plongement à fibré normal trivial tel que  $\pi_1(Q - f_0(V)) \rightarrow \pi_1(Q)$  est un isomorphisme. Alors  $F$  est isotope à une pseudo-isotopie n'ayant que des points critiques d'indice  $p$  et  $p + 1$  pour  $2 \leq p \leq n - 3$ .

4. *Couple de suites associé à une pseudo-isotopie ordonnée.* — On fait choix de niveaux intermédiaires  $Q_i$  et  $V_i = F(V \times I) \cap Q_i$  entre les points critiques d'indice  $i - 1$  et  $i$ , de

bimembranes orientées pour chaque point critique, d'un point de base  $\star$  dans  $F(V \times I)$  et de chemins dans  $F(V \times I)$  joignant ce point de base aux points critiques de  $F$ . On prend le long de ces chemins des champs normaux à  $F$  induisant à l'une des extrémités le vecteur tangent rentrant dans la membrane descendante.

On note  $E_i$  (resp.  $C_i$ ) le  $Z[\pi_1(V)]$  (resp.  $Z[\pi_1(Q)]$ )-module libre ayant autant de générateurs que de points critiques d'indice  $i$ , et on définit des homomorphismes (identifiés à des matrices) :

$$\partial_i: E_i \rightarrow E_{i-1}, \quad b_i: C_i \rightarrow C_{i-1}.$$

Si  $\partial_i = (a_{\alpha\beta})$  et  $b_i = (b_{\alpha\beta})$  alors  $(a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta})$  est le couple d'intersection réduit dans  $Q_i$  de la membrane descendante du point critique d'indice  $i$ ,  $c_\alpha^i$  avec la membrane ascendante du point critique d'indice  $i-1$ ,  $d_\beta^{i-1}$ .

*Remarque.* — La suite  $(\dots \rightarrow E_i \xrightarrow{\partial_i} E_{i-1} \dots)$  est le complexe de chaînes acyclique associé à la fonction de Morse  $p \circ F: V \times I \rightarrow I$ .

On a le :

LEMME 2.8. — *A toute pseudo-isotopie de  $\mathcal{O}^0(V, Q, f_0)$  équipée de membranes, de chemins et de champs, on associe un couple de suites :*

$$(1) \quad 0 \rightarrow E_{n+1} \dots E_i \xrightarrow{\partial_i} E_{i-1} \dots E_0 \rightarrow 0,$$

$$(2) \quad 0 \rightarrow C_{n+1} \dots C_i \xrightarrow{b_i} C_{i-1} \rightarrow \dots C_0 \rightarrow 0$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(a) la suite (1) est un  $Z[\pi_1(V)]$ -complexe de chaînes, libre, basé, acyclique, de torsion nulle;

(b) la suite (2) est une suite de  $Z[\pi_1(Q)]$ -modules, libre et basée telle que  $\dim E_i = \dim C_i$ ;

(c) pour tout  $j$  on a  $b_{j+1}f_{0*}(\partial_j) - f_{0*}(\partial_{j-1})b_j = 0$  (après identification des bases de  $E_i$  et  $C_i$ ).

On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des couples de suites satisfaisant aux propriétés du lemme 2.8.

### 5. L'obstruction à l'isotopie

DÉFINITION 2.9. — *On note  $[ag-ga; Z]$  le sous-groupe du groupe additif  $Z[\pi_1(Q)]$  engendré par les éléments du type  $ag-ga$ ,  $a \in f_{0*}(Z[\pi_1(V)])$ ,  $g \in Z[\pi_1(Q)]$  et par  $Z = Z[0] \subset Z[\pi_1(Q)]$ .*

Soit  $S = ((E_i \xrightarrow{\partial_i} E_{i-1}), (C_i \xrightarrow{b_i} C_{i-1}))$  un couple de suites de  $\mathcal{C}$ . Le complexe  $(\dots E_i \xrightarrow{\partial_i} E_{i-1} \dots)$  étant acyclique, on peut trouver une homotopie  $\eta_i: E_i \rightarrow E_{i+1}$  de l'identité à zéro, telle que  $\eta^2 = 0$ . On montre que l'application

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\varphi} Z[\pi_1(Q)]/[ag-ga; Z]$$

donnée par  $\varphi(S) = \sum_i \text{trace } b_i f_{0*}(\eta_{i-1})$  est bien définie.

On montre dans [8] la :

PROPOSITION 2.10. — Soit  $f_0 : V^n \rightarrow Q^{n+2}$  ( $n \geq 5$ ) un plongement à fibré normal trivial tel que  $\pi_1(Q - f_0(V)) \rightarrow \pi_1(Q)$  est un isomorphisme :

- (a) l'application induite par l'inclusion  $\pi_0(\mathcal{O}(V, Q, f_0)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{F}(V, Q, f_0))$  est bijective;
- (b) l'application  $\theta : \pi_0(\mathcal{O}(V, Q; f_0)) \rightarrow Z[\pi_1(Q)]/[ag - ga; Z]$  donnée par

$$\theta(F) = \varphi(S) = \sum_i \text{trace } b_i f_{0*}(\eta_{i-1})$$

est bien définie et est bijective, où S est un couple associé à F.

6. Une interprétation matricielle de l'obstruction. — Par définition un couple de suites de  $\mathcal{C}$  vérifie pour tout  $i$  la relation :  $b_{i+1} f_{0*}(\partial_i) - f_{0*}(\partial_{i-1}) b_i = 0$ .

LEMME 2.11. — La condition  $b_{i+1} f_{0*}(\partial_i) - f_{0*}(\partial_{i-1}) b_i = 0$  équivaut à dire que la suite :

$$\dots C_i \oplus C_i \xrightarrow{\Lambda_i} C_{i-1} \oplus C_{i-1} \dots$$

définie par

$$\Lambda_i = \left( \begin{array}{c|c} f_{0*}(\partial_i) & 0 \\ \hline (-1)^i b_i & f_{0*}(\partial_i) \end{array} \right)$$

est un complexe de chaînes.

LEMME 2.12. — Le complexe défini dans le lemme précédent est acyclique et possède une homotopie de l'identité à zéro

$$\Delta_j = \left( \begin{array}{c|c} f_{0*}(\eta_j) & 0 \\ \hline \lambda_j & f_{0*}(\eta_j) \end{array} \right)$$

ayant les propriétés suivantes :

1°  $\{\eta_j\}$  est une homotopie de l'identité à 0 du complexe

$$(\dots E_i \xrightarrow{\partial_i} E_{i-1} \rightarrow 0) \quad \text{telle que } \eta^2 = 0;$$

2°  $\Delta^2 = 0$ ;

3°  $\sum_i \text{trace } (\lambda_{2i} \partial_{2i+1}) = \sum_j \text{trace } (\eta_{2j} b_{2j+1}) \pmod{[ag - ga]}$ .

DÉMONSTRATION. — L'existence de  $\eta_j$  est bien connue. Prenons  $\lambda_j = (-1)^j \eta_j b_{j+1} \eta_j$ . Il est alors facile de voir que  $\Delta$  est une homotopie possédant la propriété 2°.

La propriété 3° découle des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_i \text{tr}(\lambda_{2i} \partial_{2i+1}) &= + \sum_i \text{tr}(\eta_{2i} b_{2i+1} \eta_{2i} \partial_{2i+1}) \\ &= + \sum_i \text{tr}(\eta_{2i} b_{2i+1}) - \sum_i \text{tr}(\eta_{2i} b_{2i+1} \partial_{2i} \eta_{2i+1}). \end{aligned}$$

Le dernier terme est nul mod  $[ag - ga]$  du fait que  $\eta^2 = 0$ , compte tenu du lemme 1.5.

DÉFINITION 2.13. — On pose (P pour pair)

$$\begin{aligned}\partial_P &= \bigoplus_i \partial_{2i} : \bigoplus_i E_{\text{pair}} \rightarrow \bigoplus E_{\text{imp}}, \\ \eta_P &= \bigoplus_i \eta_{2i} : \bigoplus_i E_{\text{pair}} \rightarrow \bigoplus E_{\text{imp}}, \\ b_P &= \bigoplus_i b_{2i}, \quad \eta_P = \bigoplus \eta_{2j} : \bigoplus C_{\text{pair}} \rightarrow \bigoplus C_{\text{imp}}.\end{aligned}$$

On définit de même  $\partial_I, \eta_I, b_I, \lambda_I$  ainsi que  $\Delta_P, \Lambda_P, \Lambda_I, \Delta_I$ .

LEMME 2.14 :

(a) La matrice  $\Lambda_P + \Delta_P$  est inversible, d'inverse  $\Lambda_I + \Delta_I$ ;

(b) le couple  $\{\partial_P + \eta_P, b_P + \lambda_P\}$  associé à la pseudo-isotopie F définit un élément de  $\text{GL}(\pi_1(V) \xrightarrow{f_{0*}} \pi_1(Q))$  (chap. I);

(c) l'obstruction à l'isotopie est donnée par

$$\text{tr}(\partial_P + \eta_P, b_P + \lambda_P)$$

où

$$\text{tr} : \text{GL}(\pi_1(V) \rightarrow \pi_1(Q)) \rightarrow Z[\pi_1(Q)]/[ag - ga; Z]$$

est défini au chapitre I.

Démonstration :

(a) est immédiat du fait que  $\Lambda^2 = \Delta^2 = 0$  et que  $\{\Delta_j\}$  est une homotopie du complexe  $\{\Lambda_i\}$ ;

(b) la torsion de la matrice  $\partial_P + \eta_P$  est nulle, étant égale à celle du complexe  $\{\partial_i\}$ ;

(c) par définition de l'homomorphisme  $\text{tr}$  on a

$$\begin{aligned}(1) \quad \text{tr}(\partial_P + \eta_P, b_P + \lambda_P) &= \text{trace}(b_P + \lambda_P) f_{0*}(\partial_P + \eta_P)^{-1} \\ &= \text{trace}((b_P + \lambda_P) f_{0*}(\partial_I + \eta_I)) = \text{trace}(b_P f_{0*}(\eta_I) + \lambda_P f_{0*}(\eta_I))\end{aligned}$$

du fait que  $\lambda_P f_{0*}(\eta_I)$  et  $b_P f_{0*}(\partial_I)$  ont des blocs diagonaux nuls. On a donc

$$(1) \quad = \sum_j \text{trace } b_{2j} f_{0*}(\eta_{2j-1}) + \text{trace } \lambda_{2j} f_{0*}(\partial_{2j+1}) = \sum \text{trace}(b_k f_{0*}(\eta_{k-1}))$$

compte tenu du lemme 2.12 (c).

Effet des choix sur le couple  $(\partial_P + \eta_P, b_P + \lambda_P)$

DÉFINITION 2.15. :

1° Soit  $e_{hk}^g : C_j \rightarrow C_j$  la matrice ne différant de la matrice nulle que par l'élément à la place  $(h, k)$  ( $h$  indice de ligne,  $k$  indice de colonne) qui vaut  $g \in Z[\pi_1(Q)]$ ;

2° si  $j$  est pair (resp. impair) on note  ${}^j e_{hk}^g$  :

$$\bigoplus C_{\text{pair}} \rightarrow \bigoplus C_{\text{pair}} \text{ (resp. } \bigoplus C_{\text{imp}} \rightarrow \bigoplus C_{\text{imp}})$$

la matrice égale à  $e_{hk}^g$  dans le bloc  $(j, j)$  et 0 ailleurs.

On pose  ${}^j E_{hk}^g = I + {}^j e_{hk}^g$ . On définit de même  ${}^j F_k^g, F_k^g$  étant défini au chapitre I.

La définition du couple  $(\partial_P, b_P)$  dépend des choix suivants :

- choix du point de base  $\star$  de  $F(V \times I)$ , des chemins et des champs;
- choix des membranes.

Le lemme 4.8. de [8] est équivalent au :

LEMME 2.16 :

1° Un changement de chemins et de champs pour un point critique d'indice  $j$  pair (resp. impair) transforme le couple  $(\partial_P, b_P)$  en

$$(\partial_P, b_P) \times ({}^jF_k^u, 0) \times (I, {}^j e_k^u) \text{ [resp. } (I, {}^j e_k^{-n}) \times ({}^jF_k^{u-1}, 0) \times (\partial_P, b_P)] \quad \text{où } u \in \pm \pi_1(V);$$

2° un changement de membranes de type (A) pour un point critique  $j$  pair (resp. impair) transforme  $(\partial_P, b_P)$  en  $(\partial_P, b_P) \times ({}^jE_{kl}^a, 0) \times (I, {}^j e_{kl}^{na})$  [resp.  $(I, {}^j e_{kl}^{-na}) \times ({}^jE_{kl}^a, 0) \times (\partial_P, b_P)$ ] où  $a \in Z[\pi_1(V)]$ ;

3° un changement de membranes de type B pour un point critique  $j$  pair (resp. impair) transforme  $(\partial_P, b_P)$  en  $(\partial_P, b_P) \times (I, {}^j e_{kl}^g)$  [resp.  $(I, {}^j e_{kl}^{-g}) (\partial_P, b_P)$ ] où  $g \in Z[\pi_1(Q)]$ .

Remarque 1. -  $\eta_P$  et  $\Delta_P$  sont transformés par les opérations 1°, 2°, 3° du lemme précédent en des homotopies de l'identité à zéro conservant toutes les propriétés du lemme 2.12.

Remarque 2. - La trace de  $(b_P + \lambda_P) f_{0*} (\partial_P + \eta_P)^{-1}$  est invariante (mod  $[ag - ga]$ ) par les modifications 1°, 2°, 3° de ce dernier lemme.

### CHAPITRE III

#### Familles génériques à un paramètre de pseudo-isotopies

1. Familles génériques à un paramètre. - Soit  $I = J = [0, 1]$  et posons  $W^{n+1} = V^n \times J$ . Soit  $F_t : W^{n+1} \rightarrow Q^q \times J$  une famille à un paramètre de pseudo-isotopies. On pose  $F(x, t) = (F_t(x), t)$ .

Soit  $S_1 = \{ (x, t) \in W \times I \mid \text{rang } p \circ F \leq 1 \}$  et  $S^2 = \{ (x, t) \in S_1^2 \mid \text{rang } (p \circ F \mid S_1) = 0 \}$ . Génériquement  $S_1$  est une sous-variété de  $W \times I$  de dimension 1 et  $S_1^2 \subset S_1$  est un ensemble fini de points (points où la tangente à  $S_1$  est parallèle au facteur  $J$ ).

Pour  $n = 0$  et  $q = 1$ , l'allure de l'image d'une famille à un paramètre générique au voisinage d'un point de  $S_1^2$  est donnée par la figure :

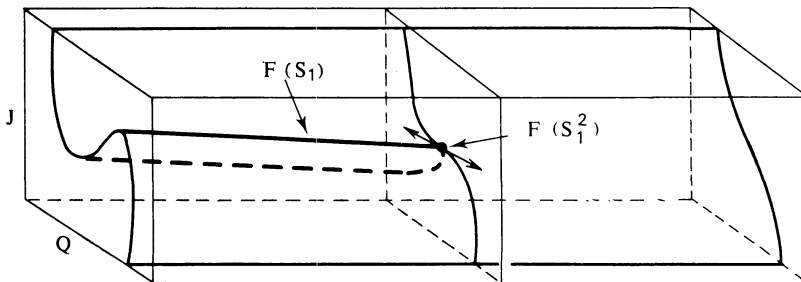


Fig. 3.1

## 2. Couple de champs de vecteurs adaptés

LEMME 3.1. [7]. — Soit  $F : V^n \times I \rightarrow Q^a \times I$  une pseudo-isotopie de Morse. Alors il existe des champs de vecteurs  $\xi$  sur  $V \times I$ ,  $\eta$  sur  $Q \times I$  tels que :

1°  $\eta_{F(x)} = d_x F(\xi_x)$  pour tout  $x \in V \times I$ .

2°  $\xi$  est un champ « gradient-like » [6] de  $p \circ F$ .

3°  $\eta(p) > 0$  ( $p : Q \times I \rightarrow I$ ) en dehors des points critiques de  $F$ .

4° Les trajectoires de  $\eta$  aboutissant à (resp. partant de) un point critique de  $F$  engendrent la membrane descendante (resp. ascendante) de ce point (voir fig. 3.2).

Un tel couple est dit adapté à  $F$ .

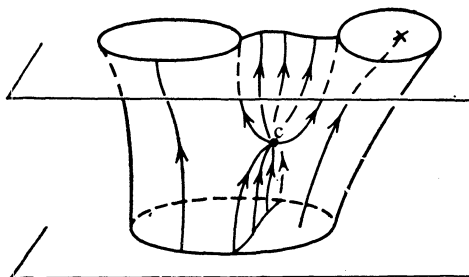


Fig. 3.2

LEMME 3.2 (d'existence d'un couple de champs adapté à une famille à un paramètre générique). — Soit  $F_t : V \times I \rightarrow Q \times I$  une famille à un paramètre générique. Alors il existe une famille à un paramètre de couples de champs  $(\xi_t, \eta_t)$  adapté à  $F_t$  en dehors des points de  $S_1^2$  et dont l'allure des trajectoires au voisinage d'un point  $\beta$  de  $S_1^2$  est donnée par la figure 3.3

$\beta$  étant un point naissance de  $S_1^2$  d'indice  $i$ , les points de  $F_t(V \times I)$  dans un niveau en dessous (resp. au-dessus) de  $\beta$ , joints à  $\beta$  par une trajectoire de  $\xi_t$ , forment un disque  $S^i$  (resp.  $T^{n-i}$ ). Ces disques jouent le rôle des sphères d'attachement (respectivement transverses) des points critiques de Morse.

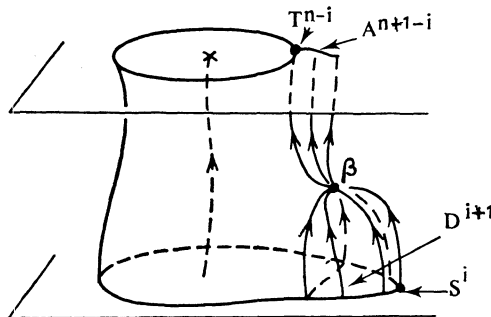


Fig. 3.3

Les points d'un niveau en-dessous de (resp. au-dessus de)  $\beta$  joints à  $\beta$  par des trajectoires de  $\eta$ , forment un disque  $D^{i+1}$  (resp.  $A^{n+1-i}$ ) qui joue le rôle de la projection de la membrane d'un point critique de Morse.

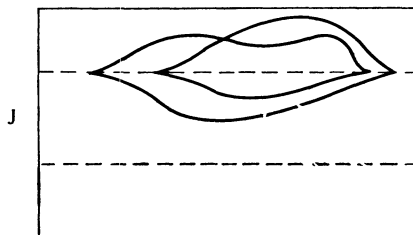


Fig. 3.4

3. Réordonnement d'une famille à un paramètre générique. — Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux points critiques de Morse consécutifs d'une pseudo-isotopie de Morse  $F$  équipée d'un couple de champs adaptés en position générale, d'indice respectif  $j$  et  $i$  tels que  $p \circ F(\alpha) > p \circ F(\beta)$ .

DÉFINITION 3.3. — On dira que le couple  $(\alpha, \beta)$  définit une  $j/i$  intersection des nappes (resp. membranes) si la projection sur un niveau intermédiaire de la nappe (resp. membrane) descendante de  $\alpha$  coupe la projection de la nappe (resp. membrane) ascendante de  $\beta$ .

Remarque. — La dimension d'une  $j/i$  intersection des nappes (resp. membranes) est  $(j-1) + (n-i) - n = j-i-1$  [resp.  $j + (n+1-i) - q = (n-q) + j-i+1$ ].

Par transversalité on démontre la :

PROPOSITION 3.4 (réordonnement). — Soit  $F : W^{n+1} \times I \rightarrow (Q^q \times J) \times I$  une famille générique à un paramètre. Si  $q \geq n+2$ , on peut déformer  $F$  en une pseudo-isotopie  $G$  telle que  $J \times I$  soit divisé en  $n+2$  bandes (parallèles au facteur  $I$ ) de façon que dans l'intérieur de la  $i$ -ième bande figurent les arcs de valeurs critiques d'indice  $i-1$  et que les  $S_1^2$ -singularités soient sur les bords des bandes (voir fig. 3.4).

#### 4. Indépendance des $S_1^2$ singularités

DÉFINITION 3.5 [2]. — Une  $S_1^2$  singularité  $\beta$  d'indice  $i$  de  $F_{r_0}$  est dite indépendante (pour un couple de champs adapté) s'il n'existe pas de trajectoire joignant  $\beta$  à un point critique d'indice  $i-1, i, i+1, i+2$ .

LEMME 3.6 [2]. — Le couple de champs adapté peut être déformé (en introduisant au besoin des  $i/j$  intersections) de façon que les  $S_1^2$ -singularités soient indépendantes, sauf éventuellement pour les  $S_1^2$  singularités d'indices extrêmes  $0, 1, n, n+1$ , lesquelles peuvent être rendues « algébriquement » indépendantes (au sens de [2] proposition 2.6).

On a ainsi démontré la :

PROPOSITION 3.7. — Tout élément de  $\pi_1(\mathcal{F}(V, Q, f_0), \mathcal{E}(V, Q, f_0))$  ( $\dim Q \geq \dim V + 2$ ) est représenté par une famille à un paramètre  $F_t : V \times I \rightarrow Q \times I$  telle que :

1° les singularités de  $F_t$  consistent en des arcs de points critiques de Morse et des singularités de type  $S_1^2$  isolées;



2° la famille  $F_t$  est ordonnée;

3° il existe une famille à un paramètre de champs adaptés  $\xi_t, \eta_t$ , en position générale, c'est-à-dire que les  $i/i$  intersections sont isolées et correspondent à des valeurs distinctes du paramètre. Quand  $q = n+2$ , ces  $i/i$  intersections correspondent au passage de la membrane d'un point critique par dessus la membrane (type A) ou la coupole (type B) d'un point critique de même indice;

4° les  $S_1^2$  singularités sont indépendantes;

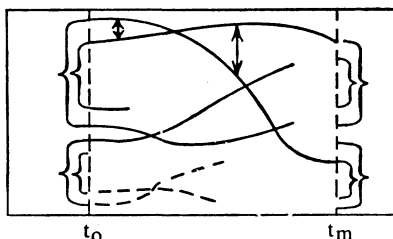
5° les  $S_1^2$  singularités de type naissance (resp. mort) arrivent avant (resp. après) les  $i/i$  intersections.

## CHAPITRE IV

### Invariant algébrique attaché à un chemin générique

Dans toute la suite on se place dans les hypothèses  $\star$  de l'introduction et on considère une famille à un paramètre générique satisfaisant aux propriétés de la proposition 3.7.

Le graphique d'un tel chemin a l'allure suivante :



(Les flèches verticales correspondent aux différentes  $i/i$  intersections et indiquent quels points critiques sont en cause.)

1. *Effet sur le couple de matrices et la trace d'une  $i/i$  intersection.* — Soient  $F_t : V \times I \rightarrow Q \times I$  une famille à un paramètre comme ci-dessus,  $(\xi_t, \eta_t)$  une famille de couples de champs adaptés,  $\{t_k\}$  une partition de  $[0,1]$  telle que chaque intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$  ( $0 \leq k \leq m-1$ ) ne contienne qu'une seule  $i/i$  intersection. Après avoir ordonné les points critiques de  $F_{t_0}$  et fait choix de chemins et de champs (chap. III), on peut définir le couple d'intersection  $(\partial_p^0, b_p^0)$  associé à  $F_{t_0}$ . Soient

$$\Lambda_p^0 = \left( \begin{array}{c|c} \eta_p^0 & 0 \\ \lambda_p^0 & \eta_p^0 \end{array} \right)$$

une homotopie associée au couple  $(\partial_p^0, b_p^0)$  (lemme 2.12) et  $(\partial_p^0 + n_p^0, b_p^0 + \lambda_p^0)$  l'élément de  $GL(\pi_1(V) \xrightarrow{f_{0*}} \pi_1(Q))$ .

On posera dans toute suite

$$(A_p^0, B_p^0) = (\partial_p^0 + \eta_p^0, b_p^0 + \lambda_p^0).$$

Le lemme 2.16 permet de calculer le couple  $(A_p^k, B_p^k)$  associé à  $F_{t_k}$  à l'aide du couple  $(A_p^{k-1}, B_p^{k-1})$  de  $F_{t_{k-1}}$  suivant la nature de la  $k$ -ième  $i/i$  intersection. On en rappelle le résultat :

Si la  $k$ -ième  $i/i$  intersection :

*Premier cas* : est une intersection au sens (A) avec  $i$  pair alors :

$$(A_p^k, B_p^k) = (A_p^{k-1}, B_p^{k-1}) \times ({}^i E_{hl}^a, {}^i e_{hl}^{nf_{0*}(a)})(a \in \pm \pi_1(V)).$$

*Deuxième cas* : est une intersection au sens (A) avec  $i$  impair alors :

$$(A_p^k, B_p^k) = ({}^i E_{hl}^{-a}, {}^i e_{hl}^{-nf_{0*}(a)})(A_p^{k-1}, B_p^{k-1}).$$

*Troisième cas* : est une intersection au sens (B) avec  $i$  pair alors :

$$(A_p^k, B_p^k) = (A_p^{k-1}, B_p^{k-1})(I, {}^i e_{hl}^g) \quad \text{où } g \in \pm \pi_1(Q).$$

*Quatrième cas* : est une intersection au sens (B) avec  $i$  impair alors :

$$(A_p^k, B_p^k) = (I, {}^i e_{hl}^{-g})(A_p^{k-1}, B_p^{k-1}).$$

Le lemme suivant décrit l'effet du passage par une  $i/i$  intersection du type ci-dessus sur la trace de  $B_p^k f_{0*} (A_p^k)^{-1}$  notée  $\text{tr} (A_p^k, B_p^k)$ .

LEMME 4.1. — *On a les résultats suivants correspondant aux quatre cas ci-dessus :*

*Premier cas* :

$$\text{tr} (A_p^k, B_p^k) - \text{tr} (A_p^{k-1}, B_p^{k-1}) = \sum_i nf_{0*}(\alpha_{jh} a \beta_{ij})$$

où  $\alpha_{jh}$  (resp.  $\beta_{ij}$ ) est l'élément à la place  $(j, h)$  [resp.  $(i, j)$ ] de la matrice  $A_p^{k-1}$  [resp.  $(A_p^{k-1})^{-1}$ ].

*Deuxième cas* :

$$\text{tr} (A_p^k, B_p^k) - \text{tr} (A_p^{k-1}, B_p^{k-1}) = g_{ih} f_{0*}(a) - f_{0*}(a) g_{ih}$$

où  $g_{ih}$  est l'élément à la place  $(i, h)$  de la matrice  $B_p^{k-1} f_{0*} (A_p^{k-1})^{-1}$ .

*Troisième cas* :

$$\text{tr} (A_p^k, B_p^k) - \text{tr} (A_p^{k-1}, B_p^{k-1}) = \sum_j f_{0*}(\alpha_{jh}) g f_{0*}(\beta_{ij})$$

où  $\alpha_{jh}, \beta_{ij}$  sont définis au premier cas.

*Quatrième cas* :

$$\text{tr} (A_p^k, B_p^k) - \text{tr} (A_p^{k-1}, B_p^{k-1}) = 0.$$

*Démonstration.* — Elle est évidente.

2. La suite  $\mathcal{S}$  : Soit  $\{F_t\}$  la famille à un paramètre du paragraphe 1.

DÉFINITION 4.2. — On note  $\mathcal{S}$  la suite associée à  $F_t$  obtenue en rangeant (de gauche à droite) les couples de matrices correspondant aux  $i/j$  intersections dans l'ordre où elles se présentent sur le graphique de  $\{F_t\}$  :  ${}^{j_1}M_1 \dots {}^{j_m}M_m$ . Le couple  ${}^{j_k}M_k$  est égal à  $({}^{j_k}E_{hl}^a, {}^{j_k}e_{hl}^{na})$  ou  $(I, {}^{j_k}e_{hl}^g)$  suivant que la  $k$ -ième intersection est une  $j_k/l_k$  intersection au sens (A) ou (B).

DÉFINITION 4.3. — On note  $\mathcal{S}_p^k$  (resp.  $\mathcal{S}_1^k$ ) le produit (défini au chapitre I) des couples  ${}^{j_i}M_i$   $i \leq k$  figurant dans  $\mathcal{S}$  (dans l'ordre où ils se présentent) affectés d'un indice  $j_i$  pair (resp. impair).

D'après le début de ce chapitre on a le :

LEMME 4.4. —  $(A_p^k, B_p^k) = (\mathcal{S}_1^k)^{-1} (\partial_p^0 + \eta_p^0, b_p^0 + \lambda_p^0) (\mathcal{S}_p^k)$ .

3. 1-chaîne de  $C_1(\pi_1(V)) \otimes_{Z[\pi_1(V)]} Z[\pi_1(Q)]/Z[0]$  associée à une famille à un paramètre générique. — On rappelle (chap. I) que  $C_1(\pi_1(V))$  désigne le groupe abélien libre engendré par les couples  $(\xi, \xi')$  où  $\xi, \xi' \in \pi_1(V)$ . Il est naturellement muni d'une structure de  $Z[\pi_1(V)]$ -module à droite. D'autre part l'homomorphisme  $f_{0*} : \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(Q)$  fait de  $Z[\pi_1(Q)]/Z[0]$  un  $Z[\pi_1(V)]$ -module à gauche en posant

$$a \cdot (\sum n_i g_i) = \sum n_i f_{0*}(a) g_i f_{0*}(a)^{-1} \quad \text{où } a \in \pi_1(V), g_i \in Z[\pi_1(Q)].$$

Alors  $C_1(\pi_1(V)) \otimes_{Z[\pi_1(V)]} Z[\pi_1(Q)]/Z[0]$  est le groupe des 1-chaînes servant à définir  $H_1(\pi_1(V), Z[\pi_1(Q)]/Z)$ .

DÉFINITION 4.5. — Soit  $\mathcal{S} = {}^{j_1}M_1 \dots {}^{j_m}M_m$  le mot associé à la famille  $\{F_t\}$  (définition 4.3). A chaque couple  ${}^{j_k}M_k$  de  $\mathcal{S}$  on associe la 1-chaîne  $c_k$  de

$$C_1(\pi_1(V)) \otimes_{Z[\pi_1(V)]} Z[\pi_1(Q)]/Z[0]$$

de la façon suivante, chacun des cas ci-dessous correspondant aux différents cas du lemme 4.1 :

Premier cas :  $j_k$  est pair et  ${}^{j_k}M_k = ({}^{j_k}E_{hl}^a, {}^{j_k}e_{hl}^{nf^*(a)}(a)) :$

$$c_k = -n \sum_j (1, \alpha_{jh}) \overline{\otimes} f_{0*}(a \beta_{lj} \alpha_{jh})$$

( $\overline{\otimes}$  a été défini au chapitre I) où  $\alpha_{jl}$  et  $\beta_{lj}$  sont respectivement éléments de  $A_p^{k-1}$  et  $(A_p^{k-1})^{-1}$

Deuxième cas :  $j_k$  est impair,  ${}^{j_k}M_k = ({}^{j_k}E_{hl}^a, {}^{j_k}e_{hl}^{nf^{*0}}(a)) :$

$$c_k = (1, a) \otimes g_{lh} f_{0*}(a),$$

où  $g_{lh}$  est l'élément à la place  $(l, h)$  de  $B_p^{k-1} f_{0*}(A_p^{k-1})^{-1}$ .

Troisième cas :  $j_k$  pair et  ${}^{j_k}M_k = (I, {}^{j_k}e_{hl}^g) :$

$$c_k = -\sum_j (1, \alpha_{jh}) \otimes g f_{0*}(\beta_{lj} \alpha_{jh}).$$

Quatrième cas :  $j_k$  impair,  ${}^{j_k}M_k = (I, {}^{j_k}e_{hl}^g) : c_k = 0$ .

REMARQUE FONDAMENTALE. — Par construction, dans chacun des cas, le bord  $\partial c_k$  de la 1-chaîne  $c_k$  est égal à la différence des traces :  $\text{tr}(A_p^k, B_p^k) - \text{tr}(A_p^{k-1}, B_p^{k-1})$  (voir lemme 4.1) C'est clair dans les deuxième et quatrième cas. Pour le premier cas on a d'après les règles de calcul pour  $\overline{\otimes}$  du chapitre I :

$$\partial c_{k+1} = -n \sum_j f_{0*}(a \beta_{lj} \alpha_{jh}) + n \sum_j f_{0*}(\alpha_{jh} a \beta_{lj})$$

compte tenu de la définition de l'action de  $\pi_1(V)$  sur  $Z[\pi_1(Q)]$ . Le premier terme est nul du fait que  $\sum_j \beta_{lj} \alpha_{jh}$  est le terme à la place  $(l, h)$  ( $l \neq h$ ) de  $(A_p^{k-1}) (A_p^{k-1})^{-1}$ .

DÉFINITION 4.6 (de la 1-chaîne associée à une famille générique). — Soit  $F_t$  une famille à un paramètre satisfaisant aux hypothèses de la proposition 3.7. Soit  $\mathcal{S}$  le mot donné par la définition 4.2. On associe à  $F_t$  la 1-chaîne de  $c_1(\pi_1(V)) \overline{\otimes}_{Z[\pi_1(V)]} Z[\pi_1(Q)]/Z[0]$  définie par :  $c = \sum_1^m c_k$ .

Remarque. — Le bord de la 1-chaîne est égal à  $\text{tr}(A_p^m, B_p^m) - \text{tr}(A_p^0, B_p^0)$  où  $(A_p^0, B_p^0)$  [resp.  $(A_p^m, B_p^m)$ ] est le couple de matrices associé à  $F_{t_0}$  (resp.  $F_{t_m}$ ) défini dans le lemme 2.14.

4. La 1-chaîne associée à une famille générique est un 1-cycle. — La 1-chaîne définie au paragraphe précédent dépend d'un certain nombre de choix :

- (a) choix d'un ordre sur les points critiques;
- (b) choix de l'homotopie  $\Lambda_p^0$  du couple initial  $(\partial_p^0, b_p^0)$ ;
- (c) choix des chemins et des champs.

Dans toute la suite on choisit un ordre sur les points critiques, des chemins des champs et une homotopie de sorte que le couple initial  $(A_p^0, B_p^0) = (\partial_p^0 + \eta_p^0, b_p^0 + \lambda_p^0)$  soit égal au couple  $(I, 0)$ .

Le but de ce paragraphe est de démontrer le :

LEMME 4.7. — La 1-chaîne associée à une famille générique et aux choix ci-dessus est un cycle.

Démonstration. — Compte-tenu de la définition 4.6 et du fait que  $(A_p^0, B_p^0) = (I, 0)$  il suffit de montrer que  $\text{tr}(A_p^m, B_p^m) = 0$ . Rappelons que  $A_p^m = \partial_p^m + \eta_p^m$  et  $B_p^m = b_p^m + \lambda_p^m$  où  $(\partial_p^m, b_p^m)$  est le couple de matrices d'intersection de  $F_{t_m}$ . Comme  $F_{t_m}$  est équipé de membranes en position de destruction mutuelle (d'après le graphique) il en résulte que le couple  $(\partial_p^m, b_p^m)$  ne diffère de  $(\partial_p^0, b_p^0)$  que par l'ordre des points critiques, le choix des chemins et des champs.

Il en résulte que

$$(1) \quad (\partial_p^m, b_p^m) = ((P^I D^I)^{-1}, 0)(\partial_p^0, b_p^0)(I, \text{Diag})(n_i)(P^P D^P, 0),$$

où

- $P^I, P^P$  sont des matrices de permutations;
- $D^I, D^P$  sont des matrices diagonales à coefficients dans  $\pm \pi_1(V)$ ;
- $\text{Diag}(n_i)$  est une matrice diagonale à coefficients entiers.

On en déduit (les notations étant celles du paragraphe 6 du chapitre II) :

$$(2) \quad \Lambda_p^m = \left( \begin{array}{c|c} P^I D^I & 0 \\ \hline 0 & P^I D^I \end{array} \right)^{-1} \Lambda_p^0 \left( \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \text{Diag}(n_i) & I \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} P^P D^P & 0 \\ \hline 0 & P^P D^P \end{array} \right).$$

Le complexe servant à définir  $\Lambda_p^m$  est donc muni de deux homotopies de l'identité à zéro satisfaisant aux propriétés du lemme 2.12, la première  $\Delta_p^m = \left( \begin{array}{c|c} \eta_p & 0 \\ \hline \lambda_p & \lambda_p \end{array} \right)$ , la seconde, notée  $\Delta_p$  étant donnée par

$$(3) \quad \Delta_p = \left( \begin{array}{c|c} \eta_p & 0 \\ \hline \lambda_p & \eta_p \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} P^I D^I & 0 \\ \hline 0 & P^I D^I \end{array} \right)^{-1} \Delta_p^0 \left( \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \text{Diag}(n_i) & I \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} P^P D^P & 0 \\ \hline 0 & P^P D^P \end{array} \right).$$

Par hypothèse  $\Delta_p^0 + \Lambda_p^0 = \left( \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right)$ . Il résulte donc de (2) et (3) que :

$$(4) \quad \Delta_p + \Lambda_p^m = \left( \begin{array}{c|c} P^I D^I & 0 \\ \hline 0 & P^I D^I \end{array} \right)^{-1} \left( \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \text{Diag}(n_i) & I \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} P^P D^P & 0 \\ \hline 0 & P^P D^P \end{array} \right).$$

Le lien entre les deux homotopies  $\Delta_p^m$  et  $\Delta_p$  est fourni par la relation (cf Maumary [5]) :

$$(5) \quad (I + \Delta_p^m \Delta_I) (\Lambda_p^m + \Delta_p) = (\Lambda_p^m + \Delta_p^m) (I + \Delta_I^m \Delta_p)$$

(I pour impair).

En terme de couples (5) est équivalent à :

$$(6) \quad (I + \eta_p^m \eta_I, \lambda_p^m \eta_I + \eta_p^m \lambda_I) \times (\partial_p^m + \eta_p, b_p^m + \lambda_p) \\ = (\partial_p^m + \eta_p^m, b_p^m + \lambda_p^m) (I + \eta_I^m \eta_p, \lambda_I^m \eta_p + \eta_I^m \lambda_p).$$

Posons

$$T_I = I + \eta_p^m \eta_I,$$

$$T_P = I + \eta_I^m \eta_p,$$

$$\mathcal{F}_I = \lambda_p^m \eta_I + \eta_p^m \lambda_I,$$

$$\mathcal{F}_P = \lambda_I^m \eta_p + \eta_I^m \lambda_p.$$

*Remarque.* — Les applications  $\lambda, \lambda^m, \eta, \eta^m$  étant de degré 1 ( $C_i \rightarrow C_{i+1}$ ), les matrices  $T_I, T_P$  (resp.  $\mathcal{F}_I, \mathcal{F}_P$ ) sont des matrices blocs dont les blocs diagonaux sont l'identité (resp. nuls) et dont les blocs en-dessous de la diagonale sont nuls.

Compte tenu de (7) et (4) l'égalité (6) s'écrit :

$$(8) \quad (A_p^m, B_p^m) = (\partial_p^m + \eta_p^m, b_p^m + \lambda_p^m) = (T_I, \mathcal{F}_I) (A, B) (T_P, \mathcal{F}_P)^{-1}$$

où on a posé

$$A = (P^I D^I)^{-1} P^P D^P \quad \text{et} \quad B = (P^I D^I)^{-1} \text{Diag}(n_i) P^P D^P.$$

D'après la définition du produit des couples (chap. I) on a

$$(9) \quad (A_P^m, B_P^m) = (T_I A T_P^{-1}, \mathcal{F}_I A T_P^{-1} + T_I B T_P^{-1} - T_I A T_P^{-1} \mathcal{F}_P T_P^{-1}).$$

De (9) on déduit

$$\begin{aligned} \text{tr}(A_P^m, B_P^m) &= \text{trace}(B_P^m f_{0*}(A_P^m)^{-1}) \\ &= \text{trace}(\mathcal{F}_I T_I^{-1} + T_I B A^{-1} T_I^{-1} - T_I A T_P^{-1} \mathcal{F}_P A^{-1} T_I^{-1}). \end{aligned}$$

Compte tenu de la remarque suivant (7) on a  $\text{trace}(\mathcal{F}_I T_I^{-1}) = 0$ . La matrice  $B A^{-1} = (P^I D^I)^{-1} \text{Diag}(n_i) (P^I D^I)^{-1}$  est diagonale à coefficients entiers. Du fait que  $T_I$  est triangulaire avec des blocs diagonaux égaux à l'identité il résulte que :  $\text{trace}(T_I B A^{-1} T_I^{-1}) \in \mathbb{Z}$ .

Il reste à étudier la trace de  $T_I A T_P^{-1} \mathcal{F}_P A^{-1} T_I^{-1}$ .  $T_P^{-1} \mathcal{F}_P$  est une matrice triangulaire bloc dont les blocs diagonaux sont nuls. La matrice  $A$  étant égale à  $P_{\alpha_1} \dots P_{\alpha_k} D$  où  $D$  est diagonale et  $P_{\alpha_i}$  une matrice de permutation opérant sur  $C_{2\alpha_i}$ , il en résulte que les blocs diagonaux de  $A T_P^{-1} \mathcal{F}_P A^{-1}$  sont nuls, ainsi que ceux de  $T_I A T_P^{-1} \mathcal{F}_P A^{-1} T_I^{-1}$ .

Donc  $\text{tr}(A_P^m, B_P^m) = \partial c = 0$ .

On a vu au début du paragraphe 4 que la classe d'homologie du 1-cycle  $c$  dépend des choix suivants :

1° choix des bases des modules  $C_i$ , des chemins et des champs de sorte que le couple initial soit  $(I, 0)$ ;

2° choix de la famille générique représentant un élément donné de  $\pi_1(\mathcal{F}(V, Q, f_0), \mathcal{E}^*(V, Q, f_0))$ .

La fin de ce chapitre est consacrée à la démonstration de l'invariance de la classe  $c$  sous l'effet du choix 1°.

LEMME 4.8. — *La classe d'homologie de  $c$  ne dépend pas de l'ordre des éléments de base des  $C_i$ , ni du choix des chemins et des champs.*

*Démonstration.* — Il suffit de démontrer l'invariance de  $c$  dans les trois cas suivants :

1° permutation de deux points critiques de même indice;

2° changement de chemin pour un point critique, d'indice  $j$  pair par exemple, de rang  $p$  dans la base ordonnée de  $\oplus C_{\text{pair}}$ ;

3° changement de champ pour un point critique.

On montre facilement que  $c$  est invariante par les changements 1° et 3°.

Soit  $\mathcal{S} = {}^{j_1}M_1 \dots {}^{j_m}M_m$  et  $\mathcal{S}' = {}^{j_1}M'_1 \dots {}^{j_m}M'_m$  les mots correspondant au changement (2). On a  ${}^{j_i}M'_i = D_i^{b-1} ({}^{j_i}M_i) D_i^b$  où  $D_i^b$  est la matrice diagonale

$$I \begin{bmatrix} & p & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & \vdots & & & \\ 0 & b & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}, \quad b \in \pi_1 \pm (V).$$

Soit  $c_k$  (resp.  $c'_k$ ) la 1-chaîne associée au couple  ${}^{jk}M_k$  (resp.  ${}^{jk}M'_k$ ) de  $\mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{S}'$ ) et  $c = \sum c_k$  (resp.  $c' = \sum c'_k$ ) le 1-cycle défini plus haut.

L'invariance de  $c$  par le changement 2° sera une conséquence du :

LEMME 4.9. — Pour tout  $k$ ,  $c'_k - c_k = (b^{-1}, 1) \otimes \lambda_{ll}^k \pmod{\text{les bords}}$  où  $\lambda_{ll}^k$  est le  $l$ -ième élément diagonal de la matrice  $B_P^k f_{0*} (A_P^k)^{-1} - B_P^{k-1} f_{0*} (A_P^{k-1})^{-1}$ .

Ce lemme étant démontré, on a  $c' - c = (b^{-1}, 1) \otimes \lambda_{ll}$  (mod les bords) où  $\lambda_{ll}$  est le  $l$ -ième élément diagonal de  $B_P^m f_{0*} (A_P^m)^{-1}$ . On a vu au cours de la démonstration du lemme 4.7 que ces éléments diagonaux sont entiers. Donc  $c$  et  $c'$  représentent la même classe d'homologie dans  $H_1(\pi_1(V), Z[\pi_1(Q)]/Z[0])$ .

Démonstration du lemme 4.9. — On va la faire dans le cas  $j_k$  pair,  ${}^{jk}M_k$  du type  $(E_{hl}^a, e_{hl}^{na})$  et  $p = h$ . Soit  $(A_P^{k-1}, B_P^{k-1})$  le produit  ${}^{j_1}M_1 \times \dots \times {}^{j_{k-1}}M_{k-1}$ .

Dans la nouvelle suite  $\mathcal{S}'$  on a

$$(1) \quad \begin{cases} {}^{jk}M'_k = (D_h^{b^{-1}}, 0)(E_{hl}^a e_{hl}^{nf_{0*}(a)})(D_h^b, 0) = (E_{hl}^{b^{-1}a}, e_{hl}^{nf_{0*}(b^{-1}a)}) \\ \text{et} \\ (A_P^{k-1}, B_P^{k-1}) = (D_h^{b^{-1}} A_P^{k-1} D_h^b, D_h^{b^{-1}} A_P^{k-1} D_h^b). \end{cases}$$

Par définition on a

$$c_k = -\sum_i n(1, \alpha_{ih}) \overline{\otimes} f_{0*}(a \beta_{ii} \alpha_{ih}),$$

$$c'_k = -\sum_i n(1, \alpha'_{ih}) \overline{\otimes} f_{0*}(b^{-1} a \beta'_{ii} \alpha'_{ih}),$$

où  $\alpha, \beta$  (resp.  $\alpha', \beta'$ ) sont éléments de  $A_P^{k-1}, (A_P^{k-1})^{-1}$  [resp.  $A_P^{k-1}, (A_P^{k-1})^{-1}$ ].

Compte tenu de (1) on a  $\beta'_{ii} = \beta_{ii}$  pour  $i \neq h$ ,  $\beta'_{ih} = \beta_{ih} b$ ,  $\alpha'_{ih} = \alpha_{ih} b$  pour  $i \neq h$  et  $\alpha'_{hh} = b^{-1} \alpha_{hh} b$ .

On a donc

$$(2) \quad c'_k = -n \sum_{i \neq h} (1, \alpha_{ih} b) \overline{\otimes} f_{0*}(b^{-1} \beta_{ii} \alpha_{ih} b) \\ - n(1, b^{-1} \alpha_{hh} b) \overline{\otimes} f_{0*}(b^{-1} a \beta_{ih} b b^{-1} \alpha_{hh} b).$$

Des propriétés de  $\overline{\otimes}$  on déduit

$$(3) \quad c'_k = -n \sum_{i \neq h} (b^{-1}, \alpha_{ih}) \overline{\otimes} f_{0*}(a \beta_{ii} \alpha_{ih}) \\ - n(b^{-1}, b^{-1} \alpha_{hh}) \overline{\otimes} f_{0*}(a \beta_{ih} \alpha_{hh}).$$

On a donc

$$(4) \quad c'_k - c_k = -n \sum_{i \neq h} [(b^{-1}, \alpha_{ih}) - (1, \alpha_{ih})] \overline{\otimes} f_{0*}(a \beta_{ii} \alpha_{ih}),$$

$$(5) \quad + (b^{-1}, b^{-1} \alpha_{hh}) - (1, \alpha_{hh}) \overline{\otimes} f_{0*}(a \beta_{ih} \alpha_{hh}).$$

De la formule  $\partial(a, b, c) = (b, c) - (a, c) + (a, b)$  on déduit

$$\begin{aligned}
 (4) \quad &= - \sum_{i \neq h} (1, b^{-1}) \overline{\otimes} f_{0*}(a \beta_{li} \alpha_{ih}) \pmod{\text{les bords}} \\
 &= -(1, b^{-1}) \overline{\otimes} f_{0*}(a) \sum_{i \neq h} f_{0*}(\beta_{li} \alpha_{ih}) \\
 &= (1, b^{-1}) \overline{\otimes} f_{0*}(a) \beta_{lh} \alpha_{hh}
 \end{aligned}$$

[puisque  $\beta$  et  $\alpha$  sont éléments de  $A_p^{k-1}$  et  $(A_p^{k-1})^{-1}$  et que  $l \neq h$ ].

Il reste donc

$$c'_k - c_k = -n [(b^{-1}, b^{-1} \alpha_{hh}) - (1, \alpha_{h,h}) + (1, b^{-1})] \overline{\otimes} f_{0*}(a \beta_{lh} \alpha_{hh}).$$

Modulo les bords on a donc

$$\begin{aligned}
 c'_k - c_k &= -n [(b^{-1}, b^{-1} \alpha_{hh}) - (b^{-1}, \alpha_{hh})] \overline{\otimes} f_{0*}(a \beta_{lh} \alpha_{hh}) \\
 &= -n (b^{-1} \alpha_{hh}, \alpha_{hh}) \overline{\otimes} f_{0*}(a \beta_{lh} \alpha_{hh}) \\
 &= n (b^{-1}, 1) \overline{\otimes} f_{0*}(\alpha_{hh} a \beta_{lh}).
 \end{aligned}$$

Il est facile de constater que  $\lambda_{hh}^k = n f_{0*}(\alpha_{hh} a \beta_{lh})$  est le  $h$ -ième élément diagonal de  $B_p^k (A_p^k)^{-1} - B_p^{k-1} (A_p^{k-1})^{-1}$ .

### CHAPITRE V

#### Invariance de la classe d'homologie associée à une famille générique

I. FAMILLES A DEUX PARAMÈTRES. — 1. *Familles génériques à deux paramètres.* — Soient  $F_{t,0}, F_{t,1}$  deux familles génériques à un paramètre (au sens de la proposition 3.7) représentant le même élément de  $\pi_1(\mathcal{F}(V, Q, f_0), \mathcal{E}(V, Q, f_0))$  et  $F_{t,u}$  une homotopie entre  $F_{t,0}$  et  $F_{t,1}$ . Notons  $F : W \times I \times I \rightarrow (Q^q \times I) \times I \times I$  le plongement défini par

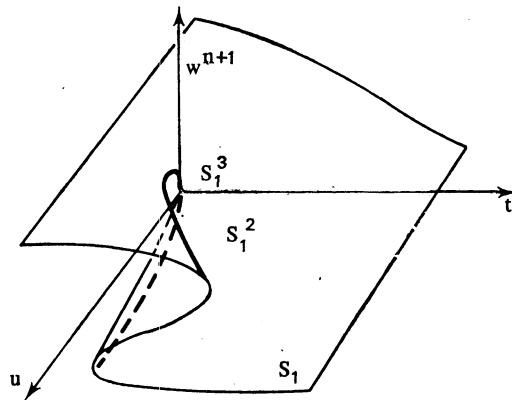


Fig. 5.1

$F(x, t, u) = (F_{t,u}(x), t, u)$ . On sait que génériquement l'ensemble  $S_1$  des points critiques de  $F$  est une sous-variété de dimension 2. Génériquement l'ensemble

$$S_1^2 = \{ p \in S_1 \mid \text{rang } d_p(F|_{S_1}) \leq 1 \}$$



est une sous-variété de dimension 1 et  $S_1^3 = \{p \in S_1^2 \mid d_p(F \mid S_1^2) = 0\}$  est un ensemble fini de points. Au voisinage d'un point de  $S_1^3$  l'allure de  $S_1$  est indiquée par la figure 5.1.

2. *Couples de champs adaptés à une famille à deux paramètres.*

PROPOSITION 5.1. — Soient  $F_{t,u}$  une homotopie générique entre deux familles à un paramètre génériques  $F_{t,0}$  et  $F_{t,1}$  et  $(\xi_{t,0}, \eta_{t,0}), (\xi_{t,1}, \eta_{t,1})$  des couples de champs adaptés à  $F_{t,0}$  et  $F_{t,1}$ . Alors il existe une famille à deux paramètres de couples de champs  $(\xi_{t,u}, \eta_{t,u})$  étendant  $(\xi_{t,i}, \eta_{t,i})$  ( $i = 0,1$ ) telle que :

1°  $(\xi_{t,u}, \eta_{t,u})$  est adapté à  $F_{t,u}$  en dehors des  $S_1^3$  singularités;

2° au voisinage d'une  $S_1^3$  singularité l'allure des trajectoires des champs est donnée par la figure 5.2 :

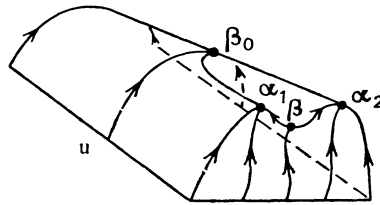


Fig. 5.2

Plus précisément, soit  $\beta_0$  une  $S_1^3$  singularité correspondant à  $(t_0, u_0)$ , donnant naissance à trois points critiques  $\alpha_1, \beta, \alpha_2$ . Les trajectoires des champs au voisinage de  $\beta_0$  satisfont aux propriétés suivantes :

(a) il existe une trajectoire unique de  $\xi_{t_0, u}$  joignant  $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ ;

(b) dans un niveau en dessous de  $\beta$  l'ensemble des points qui peuvent être joints à  $\alpha_1$  (resp.  $\alpha_2$ ) par une trajectoire de  $\xi_{t_0, u}$  forment un disque  $D_{\alpha_1}^i$  (resp.  $D_{\alpha_2}^i$ ). Ces disques se raccordent le long de la sphère d'attachement de  $\beta$ ;

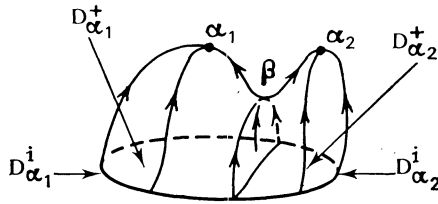


Fig. 5.3

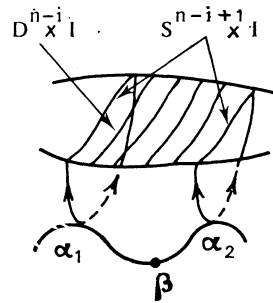


Fig. 5.4

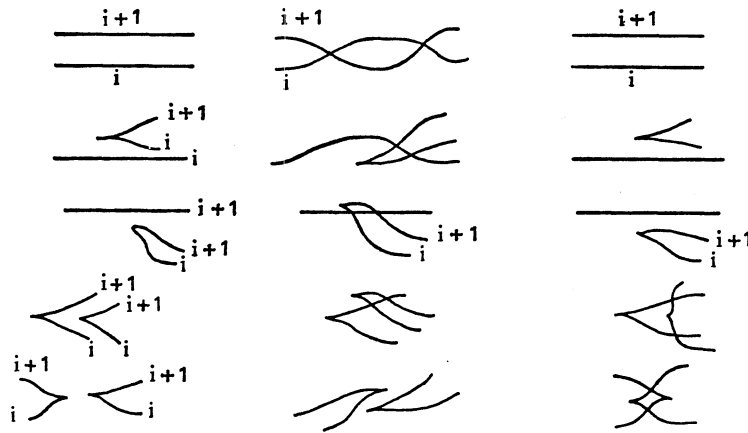
(c) les points d'un niveau en-dessous de  $\beta$  joints à  $\alpha_1$  (resp.  $\alpha_2$ ) par une trajectoire de  $\eta_{t_0, u}$  forment un disque  $D_{\alpha_1}^+$  (resp.  $D_{\alpha_2}^+$ ) s'appuyant sur  $D_{\alpha_1}^i$  (resp.  $D_{\alpha_2}^i$ ) et la membrane de  $\beta$  (fig. 5.3);

(d) les points d'un niveau au-dessus de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  joints à  $\beta$  par une trajectoire de  $\xi_{t_0 u}$  forment un anneau ( $\approx S^{n-i-1} \times I$ ) limité par les sphères transverses de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ ;

(e) les points d'un niveau au-dessus de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  joints à  $\beta$  par une trajectoire de  $\eta_{t_0 u}$  forment une sous-variété diffeomorphe à  $D^{n-i} \times I$  limitée par les membranes de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  et l'anneau  $S^{n-i-1} \times I$  (fig 5.4).

3. Réordonnement d'une famille à deux paramètres

PROPOSITION 5.2. — On peut réordonner  $F_{t_u}$  de sorte que  $J \times I \times I$  [de point courant  $(s, t, u)$ ] soit partitionné en  $n+2$  bandes horizontales [parallèles au plan  $(t, u)$ ] telles que la  $i$ -ième bande contienne les valeurs critiques d'indice  $i-1$ , sauf dans de petites boules isolées, au voisinage des frontières, où une plaque de valeurs critiques d'indice  $i$  peut être située au-dessus d'une plaque d'indice  $i+1$  dans les cas suivants :



La démonstration de la proposition 4.6 de [2] s'applique directement en tenant compte de la nature des trajectoires arrivant en une  $S_1^3$  singularité décrites au-dessus.

4. Indépendance des  $S_1^2$  singularités. — (a) Indépendance des  $S_1^2$  singularités au voisinage d'une  $S_1^3$  singularité : une  $S_1^3$  singularité correspond à une modification du graphique du type :



LEMME 5.3 (voir [2], lemme 4.4). — On peut rendre les  $S_1^2$  singularités indépendantes au voisinage d'une  $S_1^3$  singularité en introduisant les :

1°  $i+1/i+1$  intersections des nappes correspondant au passage au sens (A) de la membrane de  $\alpha_1$  par dessus celle de  $\alpha_2$  et au passage de la membrane de  $\alpha_2$  par dessus celle de  $\alpha_1$ ;

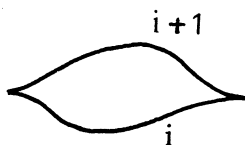
2°  $i/j$  intersections au sens (A) (resp. B) correspondant au passage de la membrane de  $\beta$  par dessus les membranes (resp. Coupoles) de  $\partial\alpha$  (resp.  $b\alpha$ ),  $\partial$  et  $b$  désignant les homomorphismes d'intersection des bords et des intérieurs des membranes.

Par transversalité on peut rendre les  $S_1^2$  singularités indépendantes loin des  $S_1^3$  singularités. Finalement on a la :

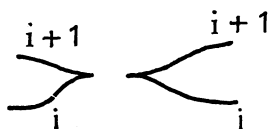
PROPOSITION 5.4. — Deux familles génériques  $F_{t,0}, F_{t,1}$  représentant le même élément de  $\pi_1(\mathcal{F}(V, Q, f_0), \mathcal{E}(V, Q, f_0))$  peuvent être jointes par une famille à deux paramètres  $F_{t,u}$ , telle que les familles à un paramètre pour  $u$  fixé sont génériques, sauf pour un nombre fini de valeurs de  $u$  où on a les catastrophes suivantes :

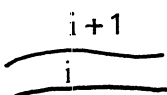
I. CHANGEMENTS DANS LE GRAPHIQUE :

(a) Introduction ou suppression de



(b) Passage d'un graphique



à un graphique  (splitting).

(c) Passage par une  $S_1^3$  singularité c'est-à-dire qu'on a un changement de graphique du type :



II. CHANGEMENT DANS LES  $i/j$  INTERSECTIONS :

(a) introduction ou suppression d'une paire de  $i/j$  intersections;

(b) croisement de  $i/j$  intersections;

(c) passage par une  $i/j+1$  intersections.

Démonstration. — Elle est analogue à celle de la proposition 4.6 de [2].

II. INVARIANCE DU 1-CYCLE ATTACHÉ A UNE FAMILLE GÉNÉRIQUE. — 1. *Invariance par introduction ou suppression d'une paire de  $j|j$  intersections (changement II a) de la proposition 5.4) :*

Cette opération revient à ajouter ou à supprimer dans le mot  $\mathcal{S}$  associé à une famille générique un mot du type  ${}^jM ({}^jM)^{-1}$ .

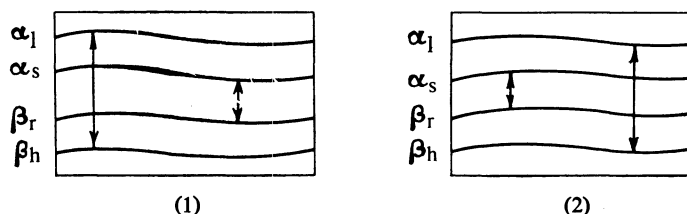
Soient

$$\mathcal{S} = {}^{j_1}M_1 \dots {}^{j_k}M_k \dots {}^{j_m}M_m \quad \text{et} \quad \mathcal{S}' = {}^{j_1}M_1 \dots {}^{j_k}M_k [{}^jM ({}^jM)^{-1}] \dots {}^{j_m}M_m,$$

$c$  et  $c'$  les 1-cycles associés à  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  et  $d_1, d_2$  les 1-chaînes correspondant aux couples  ${}^jM$  et  $({}^jM)^{-1}$  dans  $\mathcal{S}'$ . Plaçons-nous dans le cas  $j$  pair et  ${}^jM$  du type  $(E_{hl}^a, e_{hl}^n f_{0*}^{(a)})$ .

Par définition  $d_1 = -\sum_i n(1, \alpha_{jh}) \otimes \overline{f_{0*}}(a \beta_{lj} \alpha_{jh})$  où  $\alpha$  et  $\beta$  désignent des éléments de  $A_p^k$  et  $(A_p^k)^{-1}$  et  $d_2 = -\sum_i n(1, \alpha'_{jh}) \otimes \overline{f_{0*}}(-a) \beta'_{lj} \alpha'_{jh}$  où  $\alpha'$  et  $\beta'$  sont des éléments de  $A_p^k E_{hl}^a$  et  $(A_p^k E_{hl}^a)^{-1}$ . On a donc,  $h$  étant différent de  $l$ ,  $\alpha'_{jh} = \alpha_{jh}$  et  $\beta'_{lj} = \beta_{lj}$ . Donc  $d_1 + d_2 = 0$ . De plus les 1-chaînes  $c_p$  ( $p > k$ ) sont inchangées. Donc  $c = c'$ .

2. *Invariance par permutation des  $i|i$  intersections (changement II b dans la proposition 5.4).* — Il s'agit de comparer les cycles associés aux deux graphes :



( $\updownarrow$  indique la valeur du paramètre où la membrane de  $\alpha_i$  (resp.  $\alpha_s$ ) passe par dessus celle de  $\beta_h$  [resp.  $\beta_r$ ] au sens (A) ou (B)].

Soit  $p$  (resp.  $q$ ) l'indice des points critiques  $\alpha_i, \beta_h$  (resp.  $\alpha_s, \beta_r$ ).

*Premier cas.* — Les quatre arcs de points critiques  $\alpha_i, \alpha_s, \beta_r, \beta_h$  sont distincts.

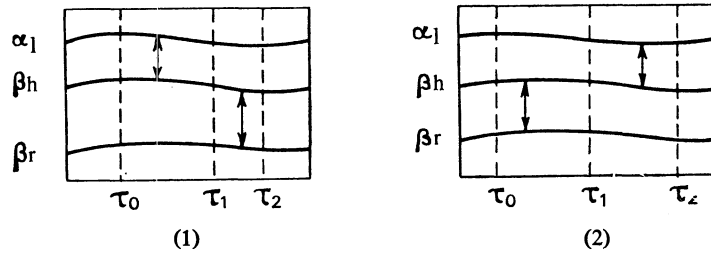
Alors les mots  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  associés aux graphiques (1) et (2) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= {}^{j_1}M_1 \dots ({}^{j_k}M_k {}^{j_{k+1}}M_{k+1}) \dots \\ \mathcal{S}_2 &= {}^{j_1}M_1 \dots ({}^{j_{k+1}}M_{k+1} {}^{j_k}M_k) \dots \end{aligned}$$

On vérifie alors facilement que les classes d'homologie associées à  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont égales. Dans le cas où  $p$  et  $q$  ont même parité l'un des éléments permettant de conclure est que les deux couples  ${}^{j_k}M_k, {}^{j_{k+1}}M_{k+1}$  commutent (pour le produit défini au chapitre I) : dans le cas  $p \neq q$  c'est évident car  ${}^{j_k}M_k$  (resp.  ${}^{j_{k+1}}M_{k+1}$ ) est un couple de matrices bloc nul ou égal à l'identité en dehors du bloc  $(p, p)$  [resp.  $(q, q)$ ]. Dans le cas  $p = q$ , c'est l'analogue des relations de Steinberg [4] sur les matrices élémentaires.

*Deuxième cas.* —  $p = q$  et supposons que les arcs  $\beta_h$  et  $\alpha_s$  soient confondus.

On a donc le changement suivant dans les  $i/i$  intersections :



(a) *Cas de deux  $p/p$  intersections du sens (A)* : la contribution dans le mot associé au graphique (1) est alors  ${}^pM_k {}^pM_{k+1}$  où  ${}^pM_k = ({}^pE_{hl}^a, {}^pe_{hl}^{nfs_0(a)})$  et  ${}^pM_{k+1} = (E_{rh}^b, e_{rh}^{mfs_0(b)})$ .

Dans le graphique (2) le passage de  $\tau_0$  à  $\tau_1$  a pour effet de remplacer la membrane  $D(\beta_h)$  descendante de  $\beta_h$  par sa somme connexe au sens (A) avec la membrane descendante  $D(\beta_r)$  de  $\beta_r$ . Le passage de  $\tau_1$  à  $\tau_2$  a pour effet de remplacer la membrane de  $\alpha_l$  par sa somme connexe au sens (A) avec la nouvelle membrane de  $\beta_h$  :  $D(\beta_h) \stackrel{A}{\neq} b. D(\beta_r)$ .

Tout se passe comme si la membrane de  $\alpha_l$  passe par dessus celle de  $\beta_h$  [au sens (A)] puis par dessus celle de  $\beta_r$  avec nombre d'intersections  $-ba$ . La contribution dans le mot associé à (2) est alors  $M_{k+1} {}^pM_k (E_{rl}^{-ba}, e_{rl}^{-(n+m)ba})$ . On doit comparer les 1-cycles  $c$  et  $c'$  associés aux mots

$$\mathcal{S} = {}^{j_1}M_1 \dots {}^{j_{k-1}}M_{k-1} ({}^pM_k {}^jM_{k+1}) \dots$$

et

$$\mathcal{S}' = {}^{j_1}M_1 \dots {}^{j_{k-1}}M_{k-1} ({}^pM_{k+1} {}^pM_k M) \dots,$$

où  $M = (E_{rl}^{-ba}, e_{rl}^{-(n+m)ba})$ . Soient  $c_k, c_{k+1}$  les 1-chaînes de rang  $k$  et  $k+1$  de  $\mathcal{S}$  et  $d, d', d''$  les 1-chaînes de rang  $k, k+1, k+2$  de  $\mathcal{S}'$ , On va montrer que  $c_k + c_{k+1} = d + d' + d''$  (mod. les bords).

On a par définition

$$\begin{aligned} c_k &= -\sum_i n(1, \alpha_{ih}) \overline{f_{0*}}(a \beta_{ii} \alpha_{ih}), \\ c_{k+1} &= -\sum_j m(1, \alpha'_{jr}) \overline{f_{0*}}(b \beta'_{hj} \alpha'_{jr}) \end{aligned} \tag{1}$$

où  $\alpha, \beta$  (resp.  $\alpha', \beta'$ ) sont éléments de  $A_P^{k-1}$  et  $(A_P^{k-1})^{-1}$  [resp.  $A_P^k = A_P^{k-1} E_{hl}^a$  et  $(A_P^k)^{-1}$ ]. Donc

$$\alpha'_{jr} = \alpha_{jr} \quad \text{et} \quad \beta'_{hj} = \beta_{hj} - \alpha \beta_{lj}. \tag{2}$$

De même on a

$$\begin{aligned} d &= -\sum_j m(1, \alpha_{jr}) \overline{f_{0*}}(b \beta_{hj} \alpha_{jr}), \\ d' &= -\sum_i n(1, \gamma_{ih}) \overline{f_{0*}}(a \delta_{li} \gamma_{ih}) \end{aligned} \tag{3}$$

où  $\gamma$  et  $\delta$  sont respectivement éléments de  $A_P^{k-1} E_{rh}^b$  et  $(A_P^{k-1} E_{rh}^b)^{-1}$ .

Donc

$$(4) \quad \gamma_{ih} = \alpha_{ih} + \alpha_{ir} b, \quad \delta_{li} = \beta_{li}.$$

Par définition on a aussi

$$d'' = - \sum_j (n+m) (1, \gamma'_{jr}) \overline{\otimes} f_{0*} (-ba \delta'_{lj} \gamma'_{jr})$$

où  $\gamma'$  et  $\delta'$  sont respectivement éléments de  $A_p^{k-1} E_{rh}^b E_{hl}^a$  et  $(A_p^{k-1} E_{rh}^b E_{hl}^a)^{-1}$ .

Donc

$$(5) \quad \gamma'_{jr} = \gamma_{jr} = \alpha_{jr}, \quad \delta'_{lj} = \delta_{lj} = \beta_{lj}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} c_k + c_{k+1} - (d + d' + d'') &= \sum_i n(1, \alpha_{ir} b) \overline{\otimes} f_{0*} (a \beta_{li} \alpha_{ir} b) \\ &\quad - \sum_j n(1, \alpha_{jr}) \overline{\otimes} f_{0*} (ba \beta_{lj} \alpha_{jr}) \\ &= \sum_j n [(1, \alpha_{jr} b) - (b, \alpha_{jr} b)] \overline{\otimes} f_{0*} (a \beta_j \alpha_{jr}) \\ &= \sum_j n(1, b) \overline{\otimes} f_{0*} (a \beta_{lj} \alpha_{jr}) \pmod{\partial} \\ &= n(1-b) \overline{\otimes} f_{0*} (a) f_{0*} (\sum_j \beta_{lj} \alpha_{jr}) = 0 \end{aligned}$$

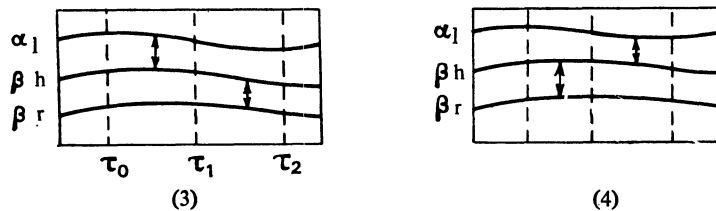
du fait que  $\sum_j \beta_{lj} \alpha_{jr} = 0$ .

De plus les 1-chaînes  $c_j$  et  $c'_{j+1}$  de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  pour  $j > k+1$  sont égales en vertu de l'égalité

$$(E_{hl}^a, e_{hl}^{na}) \times (E_{rh}^b, e_{rh}^{mb}) = (E_{rh}^b, e_{rh}^{mb}) (E_{hl}^a, e_{hl}^{na}) \times (E_{rh}^{-ba}, e_{rh}^{-(n+m)ba}).$$

La vérification de cette égalité est facile. Cette relation est analogue aux relations de Steinberg entre matrices élémentaires.

(b) *Cas de deux p/p intersections de membranes.* — On reprend les mêmes diagrammes que précédemment :



*Mot associé au graphique (3).* — Soit  $\mathcal{S} = {}^{j_1}M_1 \dots ({}^{j_k}M_k {}^{j_{k+1}}M_{k+1} \dots$  le mot associé au graphique (3), les  $p/p$  intersections concernées correspondant à  ${}^pM_k$  et  ${}^pM_{k+1}$  où  ${}^pM_k = (I, e_{hl}^\lambda)$  et  ${}^pM_{k+1} = (I, e_{rh}^\mu)$  avec  $\lambda, \mu \in Z[\pi_1(Q)]$ .

*Mot associé au graphique (4).* — Le passage de  $\tau_0$  à  $\tau_1$  a pour effet de remplacer la membrane descendante  $D(\beta_h)$  de  $\beta_h$  par sa somme connexe avec le bord d'un disque normal

à la membrane ascendante  $A(\beta_r)$  de  $\beta_r$  (c'est aussi le bord de la coupole de  $\beta_r$ ). Le passage de  $\tau_1$  à  $\tau_2$  a pour effet de remplacer  $D(\alpha_l)$  par sa somme connexe avec la nouvelle coupole de  $\beta_h$ . Cette nouvelle coupole n'introduit pas d'enlacement supplémentaire entre la membrane descendante de  $\alpha_l$  et celle montante de  $\beta_r$  (voir *fig. 5.5*); plus précisément

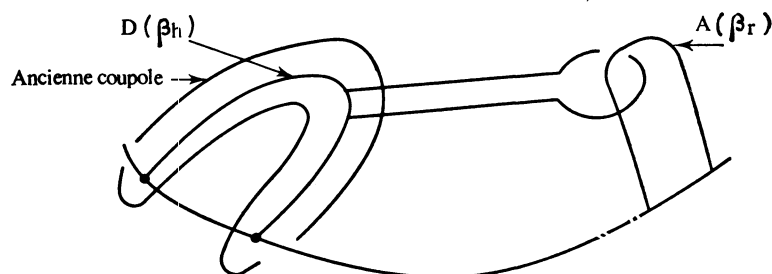


Fig. 5.5

il s'introduit deux enlacements géométriques qui se détruisent. La contribution dans le mot  $\mathcal{S}'$  est alors  ${}^p M_{k+1} {}^p M_k = (I, e_{rh}) (I, e_{hl}^\lambda)$ . On montre alors facilement que les 1-cycles associés à  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  sont égaux, tenant compte du fait que  ${}^p M_k$  et  ${}^p M_{k+1}$  commutent pour le produit des couples.

(c) *Cas d'une p/p intersection d'une nappe et d'une membrane.* — Supposons que dans les graphiques (3), (4) précédents la  $p/p$  intersection  $(\alpha_l, \beta_h)$  [resp.  $(\beta_h, \beta_r)$ ] soit une intersection de nappes (resp. membranes).

*Mot associé au graphique (3).* — Le passage de  $\tau_0$  à  $\tau_1$  a pour effet de remplacer la membrane descendante  $D(\alpha_l)$  par sa somme connexe au sens (A) avec la membrane descendante  $D(\beta_h)$ . Le passage de  $\tau_1$  à  $\tau_2$  a pour effet de remplacer  $D(\beta_h)$  par sa somme connexe avec la coupole  $C(\beta_r)$ . La contribution dans le mot  $\mathcal{S}$  est alors  ${}^p M_k {}^p M_{k+1}$  où  ${}^p M_k = (E_{hl}^a, e_{hl}^{na})$  et  ${}^p M_{k+1} = (I, e_{rh}^g)$  ( $a \in \pm \pi_1(V)$ ,  $g \in \pi_1(Q)$ ).

*Mot associé au graphique (4).* — Le passage de  $\tau_0$  à  $\tau_1$  a pour effet de remplacer  $D(\beta_h)$  par  $D(\beta_h) \overset{B}{\#} C(\beta_r)$ . Le passage de  $\tau_1$  à  $\tau_2$  a pour effet de remplacer  $D(\alpha_l)$  par  $D(\alpha_l) \overset{A}{\#} D(\beta_h) \overset{B}{\#} C(\beta_r)$ . Donc tout se passe comme si la membrane de  $\alpha_l$  passe par dessus celle de  $\beta_h$  au sens (A) et par dessus celle de  $\beta_r$  au sens (B). La contribution dans le mot  $\mathcal{S}'$  est alors  ${}^p M_{k+1} {}^p M_k M$  où  $M = (I, e_{rl}^{-ga})$ .

Une démonstration analogue à celle du cas (a) montre que les 1-cycles associés à  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  sont homologues compte tenu de l'égalité

$$(E_h^a, e_h^{na}) \times (I, e_{rh}^g) = (I, e_{rh}^g) (E_h^a, e_h^{na}) (I, e_r^{-ga}).$$

3. *Invariance par passage par une  $i/i+1$  intersection.* — Supposons qu'on fait une  $i/i+1$  intersection (des nappes ou des membranes) du point critique  $\alpha$  d'indice  $i+1$  avec le point critique  $\beta$  d'indice  $i$ , intervenant pour la valeur  $(t_1, u_1)$  du paramètre. On peut supposer que  $\alpha$  et  $\beta$  sont les seuls points de  $F_{t_1, u_1}$  à ne pas être dans le bon ordre.

Soit  $S_{tu}(\beta)$  [resp.  $D_{tu}(\beta)$ ] la sphère (resp. membrane) d'attachement de  $\beta$  dans un niveau intermédiaire entre  $\beta$  et  $\alpha$  et  $T_{tu}(\alpha)$  [resp.  $A_{tu}(\alpha)$ ] la sphère (resp. membrane) transverse de  $\alpha$ . Par hypothèse, les familles à deux paramètres  $S_{tu}(\beta)$  et  $T_{tu}(\alpha)$  [resp.  $D_{tu}(\beta)$ ,  $A_{tu}(\alpha)$ ] se coupent en seul point pour la valeur  $(t_1, u_1)$  du paramètre.

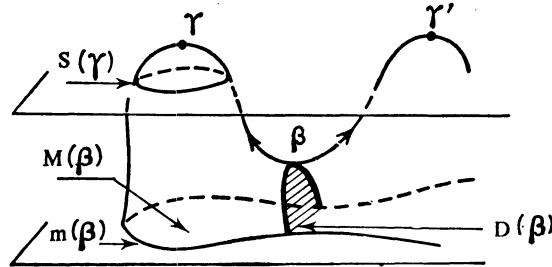


Fig. 5.6

**DÉFINITION 5.5.** — Soit  $m_{tu}(\beta)$  [resp.  $M_{tu}(\beta)$ ] l'ensemble des points du niveau intermédiaire entre  $\beta$  et  $\alpha$  qui sont joints à  $\beta$  par une trajectoire de  $\xi_{tu}$  (resp.  $\eta_{tu}$ ) ou à des points critiques d'indice  $i+1$  au dessus de  $\beta$ .

**LEMME 5.6 :**

1°  $m_{tu}(\beta)$  est une  $i$ -variété avec singularités le long de  $S_{tu}(\beta)$ . La structure locale de  $m_{tu}(\beta)$  au voisinage de  $S_{tu}(\beta)$  est donnée par  $S_{tu}(\beta) \times \{ \text{cône sur un ensemble fini } E \}$  où  $d(E)$  est égal au nombre de points d'intersection de  $T_{tu}(\beta)$  avec les nappes descendantes des points critiques d'indice  $i+1$  au-dessus de  $\beta$ ;

2°  $M_{tu}(\beta)$  est une  $(i+1)$ -variété avec singularités le long de  $D_{tu}(\beta)$ . La structure locale au voisinage de  $D_{tu}(\beta)$  est donnée par les deux modèles suivants :

(a)  $D_{tu}(\beta) \times \{ \text{cône sur } E \}$  ( $E$  étant défini en 1);

(b)  $S_i \times [0,1] / \mathcal{R}$  où  $\mathcal{R}$  est la relation d'équivalence sur  $S^i \times \{ 0 \}$  identifiant deux points symétriques par rapport à un hyperplan de symétrie de  $S^i \times \{ 0 \}$ . Il y a autant de telles variétés que de points d'intersection de  $A_{tu}(\beta)$  avec les membranes des points critiques d'indice  $i+1$  situés au-dessus de  $\beta$ .

*Démonstration :*

1° Soit  $\gamma$  un point critique d'indice  $i+1$  au-dessus de  $\beta$  dont la sphère d'attachement  $S(\gamma)$  rencontre en un point  $P$  la sphère transverse  $T(\beta)$ . Dans un niveau en dessous de  $\beta$ , les points joints par une trajectoire de  $\xi$  (resp.  $\eta$ ) à un point de  $S(\gamma)$  [resp.  $D(\gamma)$ ], autre que  $P$ , forment une variété diffeomorphe à  $S(\gamma) - \{ P \}$  [resp.  $D(\gamma) - \{ P \}$ ] dont l'adhérence contient  $S(\beta)$  [resp.  $D(\beta)$ ] (voir fig. 5.6).

2° Soit  $\gamma$  comme dans 1° dont la membrane descendante  $D(\gamma)$  coupe la membrane ascendante de  $\beta$ ,  $A(\beta)$  en un point  $P$  de son intérieur. Dans un niveau en dessous de  $\beta$ , les points joints à  $S(\gamma)$  [resp.  $D(\gamma) - \{ P \}$ ] par une trajectoire de  $\xi$  (resp.  $\eta$ ) forment



une variété  $C$  (resp.  $C'$ ) diffeomorphe à  $S(\gamma)$  [resp.  $M(\gamma) - \{P\}$ ]. De plus  $C'$  contient dans son adhérence la membrane descendante de  $\beta$ ,  $D(\beta)$ . L'allure d'une telle sous-variété avec singularités est donnée par la figure 5.7.

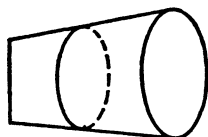


Fig. 5.7

Finalement au voisinage de  $D(\beta)$ ,  $M_{tu}(\beta)$  à l'allure suivante :

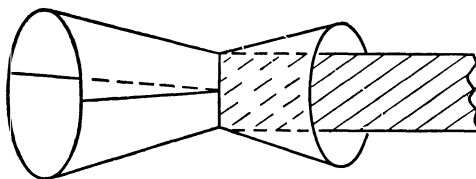


Fig. 5.8

Dans un niveau intermédiaire entre  $\beta$  et  $\alpha$  on définit de même  $n_{tu}(\alpha)$ ,  $N_{tu}(\alpha)$ , ensemble des points joints à  $\alpha$  ou à des points critiques d'indice  $i$  en dessous de  $\alpha$  par des trajectoires de  $\xi$  (resp.  $\eta$ ).

LEMME 5.7. :

(A) Cas d'une  $i/i+1$  intersection de nappes :

— les familles à deux paramètres  $T_{tu}(\alpha)$  et  $m_{tu}(\beta)$  [resp.  $S_{tu}(\beta)$ ,  $n_{tu}(\alpha)$ ] se coupent au voisinage de  $(t_1, u_1)$  suivant une famille finie de cônes de dimension 1 ayant pour sommet le point de  $i/i+1$  intersection. Ces arcs d'intersection correspondent aux  $i+1/i+1$  (resp.  $i/i$ ) intersections [au sens (A)] de  $\delta$  avec  $\alpha$  (resp.  $\beta$  avec  $\partial\alpha$ ),  $\partial$  étant l'homomorphisme bord  $E_{i+1} \rightarrow E_i$  et  $\delta$  le dual;

— les familles à deux paramètres  $A_{ut}(\alpha)$  et  $M_{tu}(\beta)$  [resp.  $D_{tu}(\beta)$ ,  $N_{tu}(\alpha)$ ] se coupent au voisinage de  $(t_1, u_1)$  suivant une famille finie d'arcs aboutissant au point de  $i/i+1$  intersection, chaque arc correspondant aux  $i+1/i+1$  (resp.  $i/i$ ) intersections au sens (B) de  $\bar{b}\beta$  avec  $\alpha$  (resp.  $\beta$  avec  $b\alpha$ ) où  $b$  désigne l'homomorphisme d'intersection des membranes  $b : C_{i+1} \rightarrow C_i$  et  $\bar{b}$  son dual.

(B) Cas d'une  $i/i+1$  intersection des membranes :

— les familles à deux paramètres  $T_{tu}(\alpha)$  et  $m_{tu}(\beta)$  [resp.  $S_{tu}(\beta)$ ,  $n_{tu}(\alpha)$ ] sont disjointes au voisinage de  $(t_1, u_1)$ ;

— les familles à deux paramètres  $A_{tu}(\alpha)$ ,  $M_{tu}(\beta)$  [resp.  $D_{tu}(\beta)$ ,  $N_{tu}(\alpha)$ ] se coupent suivant une famille d'arcs aboutissant au point de  $i/i+1$  intersection. Ces arcs sont de deux types :

(a) le premier type correspond au  $i+1/i+1$  (resp.  $i/i$ ) intersection au sens (B) de  $\delta\beta$  avec  $\alpha$  (resp.  $\beta$  et  $\partial\alpha$ );

(b) les arcs du second type peuvent être groupés par couples et correspondent aux  $i+1/i+1$  (resp.  $i/i$ ) intersection de  $\bar{b}\beta$  avec  $\alpha$  (resp.  $\beta$  et  $b\alpha$ ), avec nombre d'intersection opposés.

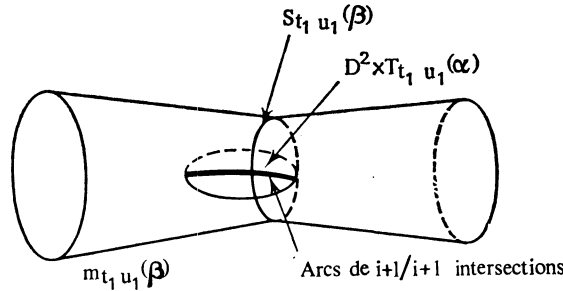


Fig. 5.9

**Démonstration.**

(A)  $D_{tu}$ ,  $A_{tu}$ ,  $M_{tu} \dots$  ne dépendent pas (à isotopie près) de  $(t, u)$  au voisinage de  $(t_1, u_1)$ . Il suffit donc de se placer dans un niveau de  $F_{r_1, u_1}$  entre  $\alpha$  et  $\beta$  et de regarder l'intersection de  $m_{t_1 u_1}^i(\beta)$  [resp.  $M_{t_1 u_1}^{i+1}(\beta)$ ] avec une famille à deux paramètres  $T_{tu}^{n-i-1}(\alpha)$  [resp.  $A_{tu}^{n-i}(\alpha)$ ] telle que  $T_{t_1 u_1}^{n-i-1}(\alpha) \cap m_{t_1 u_1}^i(\beta)$  se réduit à un point de  $S_{t_1 u_1}(\beta) \subset m_{t_1 u_1}^i(\beta)$ .

La « démonstration » de la partie (A) est indiquée par la figure 5.9.

**Démonstration de (B).** — Soit  $D_0$  une composante de type (a) du lemme 5.7 de  $M_{r_1 u_1}(\beta)$  correspondant à un point d'intersection de la nappe descendante d'un point critique  $\gamma$  d'indice  $i+1$  au-dessus de  $\beta$  avec la nappe ascendante de  $\beta$ . L'intersection de la famille à deux paramètres  $A_{tu}(\alpha)$  avec  $D_0$  est alors un arc aboutissant au point de  $i/i+1$  intersection (voir fig. 5.10).

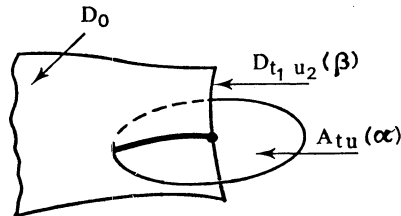


Fig. 5.10

Ce chemin est un arc de  $i+1/i+1$  intersection au sens (B) de  $\gamma$  avec  $\alpha$ .

L'intersection de la famille  $A_{tu}(\alpha)$  avec une composante de  $M_{r_1 u_1}(\alpha)$  de type (b) du lemme 5.7 se composent de deux arcs aboutissant au point de  $i/i+1$  intersection. Ces deux

chemins correspondent à une  $i+1/i+1$  intersection au sens (B) d'un point  $\gamma$  d'indice  $i+1$  au dessus de  $\beta$  avec  $\alpha$  (voir fig. 5.11).

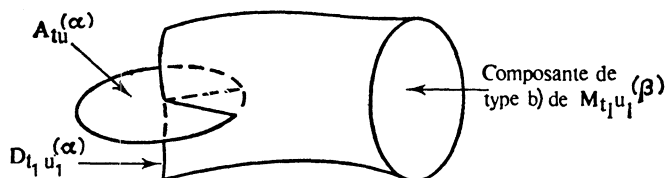
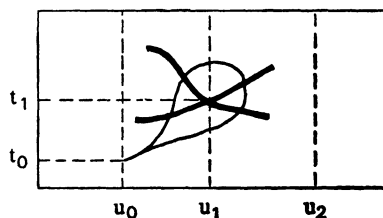


Fig. 5.11

On est alors en mesure de prouver le :

LEMME 5.8. — *Le 1-cycle associé à une famille générique à un paramètre est invariant (mod les bords) par passage par une  $i/i+1$  intersection.*

*Démonstration.* — Considérons en projection sur le plan  $(t, u)$  les arcs de  $k/k$  intersections et soit  $\Gamma$  un lacet autour du point  $(t_1, u_1)$  :



Soit  $u_0$  (resp.  $u_2$ ) une valeur immédiatement avant (resp. après)  $u_1$ . Soit  $L$  la famille à un paramètre obtenue par composition de  $F_{tu_0}$  ( $0 \leq t \leq t_0$ ),  $\Gamma$  et de  $F_{tu_0}$  ( $t_0 \leq t \leq 1$ ).  $L$  est homotope, parmi les familles génériques à  $F_{tu_2}$ ; les 1-cycles associés sont donc les mêmes.

Soient  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_\Gamma, \mathcal{S}_1$  les mots respectivement associés aux familles  $F_{tu_0}$  ( $0 \leq t \leq t_0$ )  $\Gamma$ ,  $F_{tu_0}$  ( $t_0 \leq t \leq 1$ ). Alors le mot associé à  $F_{tu_0}$  (resp.  $L$ ) est  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \mathcal{S}_1$  (resp.  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}_0 \mathcal{S}_\Gamma \mathcal{S}_1$ ).

Soit  $(A^k, B^k)$  le couple de matrices associé au mot  $\mathcal{S}_0$ , d'éléments génériques  $a_{ij}, b_{ij}$ . Le point critique  $\beta$  (de rang  $h$  dans la base ordonnée de  $\oplus C_i$ ) étant au-dessus de  $\alpha$  (de rang  $l$  dans  $C_{i+1}$ ), il en résulte que  $a_{hl} = b_{hl} = 0$ .

(A) *Cas d'une  $i/i+1$  intersection de nappes*: le mot  $\mathcal{S}_\Gamma$ , d'après la partie (A) du lemme 3.7 est la suite

$$\prod_{p \neq l} ({}^{i+1}E_{lp}^{\lambda a_{hp}}, e_{lp}^{n \lambda a_{hp}}) \prod_{p \neq l} (I, {}^{i+1}e_{lp}^{\lambda b_{hp}}) \prod_{q \neq h} ({}^i E_{qh}^{a_{qi} \lambda}, {}^i e_{qh}^{n a_{qi} \lambda}) \prod_{q \neq h} (I, {}^i e_{qh}^{b_{qi} \lambda}) \quad \text{ou } \lambda \in \pm \pi_1(V);$$

— les termes  ${}^{i+1}E_{lp}$  (resp.  ${}^i E_{qh}$ ) correspondent aux  $i+1/i+1$  (resp.  $i/i$ ) intersections au sens (A) de  $\delta\beta$  avec  $\alpha$  (resp.  $\beta$  avec  $\partial\alpha$ );

— les termes  ${}^{i+1}e_{lp}$  (resp.  ${}^i e_{qh}$ ) correspondent aux  $i+1/i+1$  (resp.  $i/i$ ) intersections au sens (B) de  $b\beta$  avec  $\alpha$  (resp.  $\beta$  avec  $b\alpha$ ).

Supposons  $i+1$  pair et soient  $c_0, d, c_1$  (resp.  $c'_1$ ) les 1-chaînes associées aux parties  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_\Gamma, \mathcal{S}_1$  (resp.  $\mathcal{S}'_1$ ) des mots  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_0 \mathcal{S}_\Gamma, \mathcal{S}_0 \mathcal{S}_1$  (resp.  $\mathcal{S}_0 \mathcal{S}_\Gamma \mathcal{S}'_1$ ). Il s'agit de prouver que  $c_0 + c_1 = c_0 + d + c'_1 \pmod{\text{les bords}}$ . On va montrer que  $d = 0$  et  $c_1 = c'_1$ .

Compte-tenu de l'écriture de  $\mathcal{S}_\Gamma$ , on a  $d = d_0 + d_1 + d_2$  où

$$(1) \quad d_0 = - \sum_{p \neq l} n \left[ \sum_i (1, \alpha_{il}) \otimes \overline{f_{0*}(\lambda a_{hp} \beta_{pi} \alpha_{il})} \right],$$

$$(2) \quad d_1 = - \sum_{p \neq l} \left[ \sum_i (1, \alpha_{il}) \otimes \overline{\lambda b_{hp} f_{0*}(\beta_{pi} \alpha_{il})} \right],$$

$$(3) \quad d_2 = \sum_{q \neq h} (1, a_{ql} \lambda) \otimes \overline{g_{hq} a_{ql} \lambda},$$

où  $a_{ij} = \alpha_{ij}, \beta_{ij}, b_{ij}, g_{ij}$  sont respectivement éléments des matrices  $A^k, (A_p^k)^{-1}, B_p^k, B_p^k (A_p^k)^{-1}$ .

On a donc

$$d_0 = -n \sum_i (1, \alpha_{il}) \otimes \overline{\lambda \left( \sum_{p \neq l} \alpha_{hp} \beta_{pi} \right) \alpha_{il}}$$

où

$$\sum_{p \neq l} \alpha_{hp} \beta_{pi} = \sum_p \alpha_{hp} \beta_{pi} = \delta_{hl} \text{ (symbole de Kronecker)}$$

du fait que  $\alpha_{hl} = 0$ .

Donc  $d_0 = 0$ .

Les propriétés de  $\otimes$  permettent d'écrire  $d_1$  sous la forme

$$d_1 = - \sum_i (1, \alpha_{il}) \otimes \overline{\lambda \left( \sum_{p \neq l} b_{hp} \beta_{pi} \right) \alpha_{il}}.$$

On a

$$\sum_{p \neq l} b_{hp} \beta_{pi} = \sum_p b_{hp} \beta_{pi},$$

puisque  $b_{hl} = 0$ .  $b_{ij}$  et  $\beta_{pi}$  étant respectivement éléments de  $B_p^k$  et  $(A_p^k)^{-1}$  il en résulte que  $\sum_{p \neq l} b_{hp} \beta_{pi} = g_{hi}$ . D'où finalement

$$d_1 = - \sum_i (\lambda, \alpha_{il} \lambda) \otimes \overline{g_{hi} \alpha_{il} \lambda}.$$

On a alors

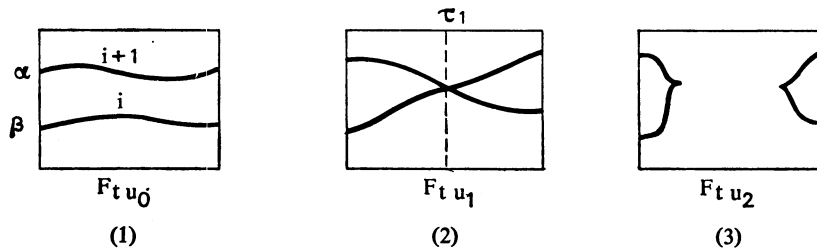
$$d_1 + d_2 = \sum_{i \neq l} (1, \alpha_i \lambda) - (\lambda, \alpha_{il} \lambda) \otimes \overline{g_{hi} \alpha_{il} \lambda} \quad \text{(puisque } a_{ij} = \alpha_{ij}\text{)}.$$

Donc, modulo les bords

$$d_1 + d_2 = \sum_i (1, \lambda) \otimes \overline{g_{hi} \alpha_{il} \lambda} = (1, \lambda) \otimes \overline{\left( \sum_i g_{hi} \alpha_{ih} \right) \lambda},$$

$\sum_i g_{hi} \alpha_{il}$  est l'élément à la place  $(h, l)$  de la matrice  $[\overline{B_p^k (A_p^k)^{-1}}] A_p^k$ . C'est donc  $b_{hl} = 0$  par hypothèse. Donc  $d = d_0 + d_1 + d_2 = 0$ . Ainsi le 1-cycle associé au mot  $\mathcal{S}_0 \mathcal{S}_\Gamma \mathcal{S}_1$  (resp.  $\mathcal{S}_0 \mathcal{S}'_1$ ) est égal à  $c_0 + c_1$  (resp.  $c_0 + c'_1$ ). Tenant compte du lemme 1.7 on a  $c_1 = c'_1$ , d'où  $c_0 + c_1 = c_0 + c'_1$ .

(B) *Cas d'une  $i/i+1$  intersection des membranes* : Le mot  $\mathcal{S}_\Gamma$ , d'après la partie B du lemme 5.7 est la suite  $\prod_{p \neq i} (I, e_{ip}^{va_{hp}}) \prod_{q \neq h} (I, e_{qh}^{va_{qi}})$  où  $v \in Z[\pi_1(Q)]$ . Une démonstration analogue au cas précédent montre que les 1-cycles associés à  $\mathcal{S}_0 \mathcal{S}_\Gamma \mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_0 \mathcal{S}_1$  sont homologues.



4. *Invariance du 1-cycle par passage par une singularité du type « splitting »*. — Soit  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) le point critique d'indice  $i+1$  (resp.  $i$ ) intervenant dans le « splitting », de rang  $h$  (resp.  $l$ ) dans les bases ordonnées. Soit  $\mathcal{S}_0$  (resp.  $\mathcal{S}_1$ ) la suite de  $i/i$  intersections intervenant avant (resp. après) le splitting. Le couple de matrices  $(A_p^k, B_p^k)$  associé à  $\mathcal{S}_0$  est du type :

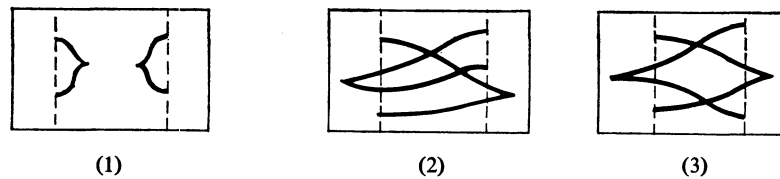
$$A_p^k = l \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \dots \sigma \dots 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_p^k = l \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \dots n \sigma \dots 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

où  $\sigma \in \pm \pi_1(V)$ ,  $n \in Z$ , du fait que  $\alpha_h$  et  $\beta_l$  sont en position de destruction mutuelle.

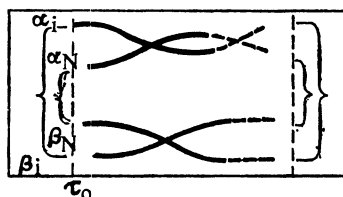
Soit  $c$  (resp.  $c'$ ) le 1-cycle associé au graphique (1) [resp. (3)]. On va montrer que  $c = c'$  (mod les bords) dans le cas particulier où  $F_{tu}$  n'a que des points critiques d'indice  $i+1$  et  $i$  ( $i+1$  pair) et où  $n = 0$ .

Notons  $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}$  (resp.  $\beta_1 \dots \beta_{N-1}$ ) les arcs de points critiques d'indice respectif  $i+1$  et  $i$  de sorte que  $\alpha_i, \beta_i$  proviennent d'une même  $S^2_1$  singularité  $\left\langle \begin{matrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{matrix} \right\rangle$  munis de membranes telles que au départ le couple d'intersection soit  $(1,0)$ .

Au chapitre IV, on a défini un 1-cycle pour une famille générique ordonnée dont les naissances (resp. : morts) interviennent avant (resp. après) toutes les  $j/j$  intersections. On homotope  $F_{tu_2}$  à un tel chemin à travers les déformations suivantes :



Le graphique de  $F_{tu_2}$  devient alors :



(4)

Ce chemin diffère de la famille  $F_{tu_0}$  pour la valeur  $\tau_0$  du paramètre par l'introduction de la paire de points critiques  $\alpha_N, \beta_N$ , les  $j/j$  intersections étant les mêmes que pour  $F_{tu_0}$  mais affectant des points critiques indexés différemment à partir du « splitting » [ $\tau_1$  sur le graphique (2)]. La définition du 1-cycle  $c'$  associé au graphique (4) nécessite le choix d'un système de bimembranes pour  $\alpha_N, \beta_N$  de sorte que le couple d'intersection soit  $(1,0)$ , alors que les bimembranes héritées du graphique (3) de  $F_{tu_2}$  ont un couple d'intersection égal à  $(\sigma, 0)$ . Il suffit (par exemple) de changer le chemin joignant  $\star$  à  $\alpha_N$ .

Soit  $\mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{S}'$ ) le mot associé à  $F_{tu_0}$  (resp.  $F_{tu_2}$ ). D'après ce qui précède  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}_0 \mathcal{S}'_1$  avec  $\mathcal{S}_1 = j_{k+1} M_{k+1} \dots j_m M_m$ ,  $\mathcal{S}'_1 = j_{k+1} M'_{k+1} \dots j_m M'_m$  ( $j_p = i$  ou  $i+1$ ). Le lien entre  $j_p M_p$  et  $j_p M'_p$  est le suivant :

– si  $j_p = i+1$  (pair) on a

$$(1) \quad j_p M'_p = \begin{pmatrix} 0 & +\sigma \\ \sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix} j_p M_p \begin{pmatrix} 0 & \dots & N \\ +\sigma^{-1} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

( $\sigma$  provenant du changement de chemins évoqué plus haut)

– si  $j_p = i$  (impair) on a

$$(2) \quad j_p M'_p = \begin{pmatrix} 0 & \dots & N \\ +1 & \dots & 0 \end{pmatrix} j_p M_p \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit  $c_p$  (resp.  $c'_p$ ) la 1-chaîne associée à  $j_p M_p$  (resp.  $j_p M'_p$ ) de  $\mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{S}'$ ).

CAS I :  $j_p$  pair :

$$(A) \quad j_p M_p = (j_p E_{rs}^a, j_p e_{rs}^{ma}) \text{ avec } r, s \neq h.$$

On a alors

$$(3) \quad j_p M'_p = j_p M_p \text{ et } (A_p^{p-1}, B_p^{p-1}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & N \\ +1 & \dots & 0 \end{pmatrix} (A_p^{p-1}, B_p^{p-1}) \begin{pmatrix} 0 & \dots & N \\ +\sigma^{-1} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Par définition on a

$$c_p = -\sum_i m(1, \alpha_{ir}) \overline{a} \beta_{si} \alpha_{ir},$$

$$c'_p = -\sum_i m(1, \alpha'_{ir}) \overline{a} \beta'_{si} \alpha'_{ir}.$$

D'après (3) on a

$$\begin{aligned} \alpha'_{ir} &= \alpha_{ir} & \text{pour } i \neq (l, N), & \quad \alpha'_{ir} = \alpha_{Nr} = 0, & \quad \alpha'_{Nr} = +\alpha_{ir} \\ \beta'_{si} &= \beta_{si} & \text{pour } i \neq (l, N), & \quad \beta'_{sl} = \beta_{sN} = 0 & \text{et } \beta'_{sN} = +\beta_{sl}. \end{aligned}$$

Donc

$$c'_p = - \sum_{i \neq l, N} m(1, \alpha_{ir}) \otimes a \beta_{si} \alpha_{ir} - m(1, 0) \otimes 0 - m(1, \alpha_{ir}) \otimes a \beta_{si} \alpha_{ir}.$$

Donc  $c'_p = c_p$  du fait que  $\alpha_{Nr} = 0$ .

(B)  ${}^{j_p}M_p = ({}^{j_p}E_{rh}^a, {}^{j_p}e_{rh}^{ma})$ . On a

$${}^{j_p}M'_p = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \sigma \\ \sigma^{-1} & & 0 \end{pmatrix} {}^{j_p}M_p \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \sigma \\ \sigma^{-1} & & 0 \end{pmatrix} = (E_{rN}^{a\sigma}, e_{rN}^{ma\sigma}).$$

Avec les notations précédentes on a

$$c'_p = - \sum_i m(1, \alpha'_{ir}) \otimes a \sigma \beta'_{Ni} \alpha'_{ir}$$

où  $\alpha'$  et  $\beta'$  sont éléments de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_P^{p-1} \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix} = A_P^{p-1} \text{ et } (A_P^{p-1})^{-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \alpha'_{ir} &= \alpha_{ir} & \text{pour } i \neq l, N, & \quad \alpha'_{ir} = \alpha_{Nr} = 0, & \quad \alpha'_{Nr} = \alpha_{ir}, \\ \beta'_{Ni} &= \sigma^{-1} \beta_{hi} & \text{pour } i \neq l, N, & \quad \beta'_{Ni} = \sigma^{-1} \beta_{hN} & \text{et } \beta'_{NN} = \sigma^{-1} \beta_{hl}. \end{aligned}$$

La 1-chaîne  $c'_p$  est alors égale à

$$- \sum_{i \neq l, N} m(1, \alpha_{ir}) \otimes a \sigma (\sigma^{-1} \beta_{hi} \alpha_{ir}) - m(1, 0) \otimes 0 - m(1, \alpha_{ir}) \otimes a (\sigma^{-1} \beta_{hi}) \alpha_{ir}.$$

Il est alors immédiat que  $c_p = c'_p$  :

(C)  ${}^{j_p}M_p = (E_{hs}^a, e_{hs}^{ma})$ . Alors

$${}^{j_p}M'_p = (E_{Ns}^{\sigma^{-1}a}, e_{Ns}^{m\sigma^{-1}a}) \quad \text{et} \quad c'_p = - \sum_i m(1, \alpha'_{iN}) \otimes \sigma^{-1} a \beta'_{si} \alpha'_{iN}.$$

On vérifie que  $\alpha'_{iN} = \alpha_{ih} \sigma$  pour  $i \neq l, N$ ,  $\alpha'_{iN} = \alpha_{Nh} \sigma = 0$ ,  $\alpha'_{NN} = \alpha_{ih} \sigma$  et  $\beta'_{si} = \beta_{si}$  pour  $i \neq l, N$ ,  $\beta'_{s} = \beta_{sN} = 0$  et  $\beta'_{sN} = \beta_{sl}$ .

La 1-chaîne  $c'_p$  est donc égale à

$$- \sum_{i \neq l, N} m(1, \alpha_{ih} \sigma) \otimes \sigma^{-1} a \beta_{si} \alpha_{ih} \sigma - m(1, 0) \otimes 0 - m(1, \alpha_{ih}) \otimes \sigma^{-1} a \beta_{si} \alpha_{ih}.$$

On a alors

$$c'_p - c_p = - m \sum_i (1, \alpha_{ih} \sigma) \otimes \sigma^{-1} a \beta_{si} \alpha_{ih} \sigma + m \sum_i (1, \alpha_{ih}) \otimes a \beta_{si} \alpha_{ih}.$$

Modulo les bords  $c'_p - c_p$  est égal à

$$m(1, \sigma^{-1}) \otimes a \left( \sum_i \beta_{si} \alpha_{ih} \right) = 0$$

car  $\sum_i \beta_{si} \alpha_{ih}$  représente l'élément à la place  $(s, h)$  ( $s \neq h$ ) de  $(A_p^{p-1})^{-1} (A_p^{p-1}) = I$ .

Le cas où  ${}^j p M_p$  est du type  $(I, e_{rs}^g)$  se traite de façon analogue.

CAS II :  $j_p$  impair :

(A)  ${}^j p M_p = (E_{rs}^a, e_{rs}^{ma}), r, s \neq l$ .

Alors

$${}^j p M'_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} {}^j p M_p \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = {}^j p M_p.$$

Les 1-chaînes  $c_p$  et  $c'_p$  s'écrivent alors :

$$c_p = (1, a) \otimes g_{sr} a, \quad c'_p = (1, a) \otimes g'_{sr} a$$

où  $g_{sr}$  (resp.  $g'_{sr}$ ) est l'élément à la place

$$(s, r) \text{ de } (B_p^{p-1}) (A_p^{p-1})^{-1}$$

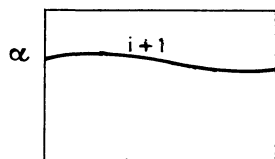
[resp.  $B_p^{p-1} (A_p^{p-1})^{-1} = S^{-1} B_p^{p-1} (A_p^{p-1})^{-1} S$ ] où  $S$  est la matrice de permutation  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Comme  $r, s \neq l$  il en résulte que  $g'_{sr} = g_{sr}$ .

(B)  ${}^j p M_p = (E_{ls}^a, e_{ls}^{ma})$ . Alors  ${}^j p M'_p = (E_{Ns}^a, e_{Ns}^{ma})$ . Donc  $c'_p = (1, a) \otimes g'_{sN} a$ . On montre que  $g'_{sN} = g_{sl}$ . Donc  $c'_p = c_p$ .

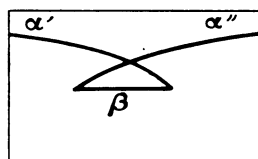
(C)  ${}^j p M_p = (E_{rl}^a, e_{rl}^{ma})$ . La démonstration est analogue à la précédente.

(D)  ${}^j p M_p = (I, e_{rs}^g)$ . Alors par définition  $c'_p = c_p \neq 0$ .

5. *Invariance du 1-cycle par passage par une  $S_1^3$  singularité.* — Soient  $F_{tu}$  une famille à deux paramètres ayant une  $S_1^3$  singularité pour la valeur  $(t_1, u_1)$  des paramètres et  $u_0$  (resp.  $u_2$ ) une valeur de  $u$  immédiatement avant (resp. après)  $u_1$ . La déformation du graphique est du type :

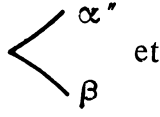
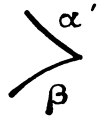


(1)



(2)

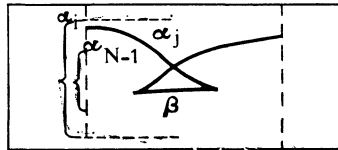


On a vu (lemme 5.3) que les  $S_1^2$  singularités  et 

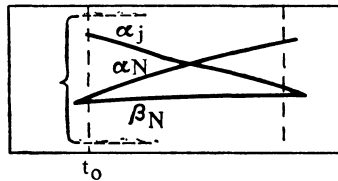
deviennent indépendantes si on passe  $\alpha'$  « par dessus »  $\alpha''$  au sens (A),  $\beta$  par dessus  $\partial\alpha$  (au sens (A),  $\beta$  par dessus  $b\alpha$  [au sens (B)] puis  $\alpha''$  par dessus  $\alpha'$  au sens (A).

On va faire la démonstration de l'invariance dans le cas  $i+1$  pair et où  $F_{tu}$  n'a que des points critiques d'indice  $i+1$  et  $i$ .

Comme dans le cas du splitting en homotope le chemin  $F_{tu_2}$  de graphique



en un chemin générique de graphique :



Le graphique (4) diffère du graphique (2) pour la valeur  $t_0$  du paramètre par l'introduction de la paire  $\alpha_N, \beta_N$ .

Soit  $\mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{S}'$ ) le mot associé au graphique (2) [resp. (4)].  $\mathcal{S}$  se décompose en  $\mathcal{S}_0 \mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_0$  ( $\mathcal{S}_1$ ) correspondant aux  $k/k$  intersections intervenant avant (resp. après) la  $S_1^3$  singularité. Alors  $\mathcal{S}'$  s'écrit :

$$\mathcal{S}_0({}^{i+1}E_{Nj}^1, 0) \prod_{k \neq N} (I, {}^i e_{kN}^{-b_{kj}}) \prod_{k \neq N} ({}^i E_{kN}^{-a_{kj}}, 0) ({}^{i+1}E_{jN}^1, 0) \mathcal{S}'_1,$$

où  $a_{kj}$  et  $b_{kj}$  sont respectivement éléments de  $A_p, B_p$ , couple de matrices associé à  $\mathcal{S}_0$ .

L'introduction de  $({}^{i+1}E_{Nj}^1, 0)$  [resp.  $({}^{i+1}E_{jN}^1, 0)$ ] correspond au passage de  $\alpha'$  par dessus  $\alpha''$  (resp.  $\alpha''$  par dessus  $\alpha'$ ).

L'introduction de  $\prod_{k \neq N} (I, {}^i e_{kN}^{-b_{kj}})$  [resp.  $\prod_{k \neq N} ({}^i E_{kN}^{-a_{kj}}, 0)$ ] correspond au passage de  $\beta_N$  par dessus  $b\alpha$  (resp.  $\partial\alpha$ ) au sens (B) [resp. (A)].

De plus on a

$$\mathcal{S}_1 = {}^{j_{k+1}}M_{k+1} \dots {}^{j_m}M_m, \quad \mathcal{S}'_1 = {}^{j_{k+1}}M'_{k+1} \dots {}^{j_m}M'_m$$

avec

$${}^{j_p}M'_p = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} {}^{j_p}M_p \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

car les  $i+1/i+1$  intersections concernant  $\alpha_j$  dans  $F_{tu_0}$  concernent  $\alpha_N$  dans  $F_{tu_2}$ .

Notons  $c_0, d_1, d_2, d_3, d_4, c'_1$  les 1-chaînes associées à  $\mathcal{S}_0, ({}^{i+1}E_{Nj}, 0), \prod_{k \neq N} (I, {}^i e_{kN}^{-bkj}), \prod_{k \neq N} ({}^i E_{kN}^{-akj}, 0), ({}^{i+1}E_{jN}, 0), \mathcal{S}'_1$  considérés comme éléments du mot  $\mathcal{S}$  et  $c_1$  la 1-chaîne associée à  $\mathcal{S}'_1$  dans  $\mathcal{S}$ .

Le 1-cycle  $c$  (resp.  $c'$ ) associé à  $\mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{S}'$ ) s'écrit alors  $c_0 + c_1$  (resp.  $c_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + c'_1$ ).

Par définition  $d_1 = d_2 = d_4 = 0$  ( $i+1$  étant supposé pair). Par définition on a

$$d_3 = \sum_{k \neq N} (1, -a_{kj}) \otimes \overline{g'_{Nk}} (-a_{kj})$$

où  $g'_{Nk}$  est l'élément à la place  $(N, k)$  de  $B'A'^{-1}$ , où  $A'$  et  $B'$  sont définis par

$$(A', B') = (I, \prod_{k \neq N} {}^i e_{kN}^{-bkj}) \times (A_P^k, B_P^k) \times (E_{Nj}^1, 0)$$

$[(A_P^k, B_P^k)$  étant le couple associé à  $\mathcal{S}_0]$ .

Un calcul rapide montre que

$$(A', B') = (A_P^k E_{Nj}^1, B_P^k E_{Nj}^1 + \sum_{k \neq N} e_{kN}^{-bkj} A_P^k E_{Nj}^1).$$

D'où

$$B' A'^{-1} = B_P^k (A_P^k)^{-1} + \sum_{k \neq N} {}^i e_{kN}^{-bkj}.$$

Il en résulte que  $g'_{Nk} = g_{Nk}$  où  $g_{Nk}$  est l'élément à la place  $(N, k)$  de  $B_P^k (A_P^k)^{-1}$ ,  $B_P^k$  et  $A$  s'écrivant respectivement

$$\left( \begin{array}{c|c} \times & N \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{c|c} \times & N \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right).$$

Donc  $g_{Nk} = 0$ . D'où  $d_3 = 0$ .

Il reste à voir que  $c'_1 = c_1$ . Les mots de  $\mathcal{S}'_1$  se déduisant par une permutation de ceux de  $\mathcal{S}_1$ , il est facile de le vérifier.

On a ainsi démontré la :

PROPOSITION 5.9. — *Sous les hypothèses (★) de l'introduction il existe une application*

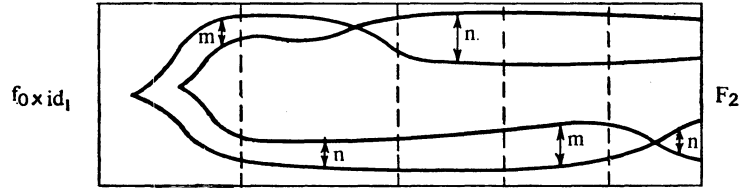
$$\theta : \pi_1(\mathcal{F}(V, Q, f_0), \mathcal{E}(V, Q, f_0)) \rightarrow H_1(\pi_1(V), Z[\pi_1(Q)]/Z[0]).$$

PROPOSITION 5.10. — *L'application  $\theta$  de la proposition précédente est un homomorphisme surjectif.*

*Démonstration.* —  $\theta$  est clairement un homomorphisme. Montrons qu'il est surjectif. Soit  $c$  une classe d'homologie de  $H_1(\pi_1(V), Z[\pi_1(Q)]/Z[0])$  représentée par un cycle  $\sum_{p=1}^m (1, a_p) \otimes \overline{g_p} a_p$  ( $a_p \in \pi_1(V), g_p \in Z[\pi_1(Q)]/Z[0]$ ). On va faire la démonstration dans le cas  $m = 1$ , c'est-à-dire quand  $c = (1, a) \otimes \overline{g} a$ , la démonstration dans le cas général étant analogue.  $c$  étant cycle, on a  $\partial c = 0 = \overline{g} a - a \overline{g}$  dans  $Z[\pi_1(Q)]/Z$ . Soit  $g$

un relèvement de  $\bar{g}$  dans  $Z[\pi_1(Q)]$ ; il vérifie donc  $ga - ag = n \in Z \subset Z\pi_1(Q)$ . Il est facile de voir ( $Z[\pi_1(Q)]$  étant le groupe abélien libre engendré par  $\pi_1(Q)$ ) que  $ga - ag = n = 0 \in Z[\pi_1(Q)]$ .

Soit  $i$  un entier, impair par exemple, tel que  $2 \leq i \leq n-3$ . On considère alors le mot (avec les notations du chapitre IV, § 2)  $\mathcal{S} = {}^{i+1}(\mathbb{I}, e_{12}^g) {}^i(E_{21}^a, 0) {}^{i+1}(E_{21}^a, 0) {}^i(\mathbb{I}, e_{21}^{-aga}) {}^i(\mathbb{I}, e_{12}^g)$ . On lui associe le chemin  $\alpha$  d'origine  $f_0 \times id_1$  parmi les pseudo-isotopies, de graphique :



Il est facile de voir que le 1-cycle associé à un tel chemin est  $c = (1, a) \otimes ga$  et que le couple de matrices associé à l'extrémité  $F_2$  du chemin est

$$\mathcal{S}_{\text{imp}}^{-1} \times \mathcal{S}_{\text{pair}} = \left[ \mathbb{I}, \begin{pmatrix} ga & 0 \\ 0 & -ag \end{pmatrix} \right]$$

( $ga - ag = 0$ ).

La proposition 5.10 sera une conséquence du :

LEMME 5.11. — On peut joindre  $F_2$  à une pseudo-isotopie  $F_3$  sans point critique par un chemin  $\beta$  tel que l'invariant du chemin  $\alpha \star \beta$  est  $c$ .

Démonstration. — Posons  $\lambda = ga = ag$ . Soit  $\mathcal{S}'$  le mot

$$\mathcal{S}' = {}^i(\mathbb{I}, e_{21}^\lambda) {}^i(E_{12}^{-1}, 0) {}^{i+1}(E_{12}^{-1}, 0) {}^i(\mathbb{I}, e_{21}^{-\lambda}) {}^i(\mathbb{I}, e_{12}^{-\lambda})$$

et soit  $\beta$  le chemin de pseudo-isotopies d'origine  $F_2$  d'extrémité  $F_3$  correspondant à ce mot.

On peut vérifier que la 1-chaîne associée au mot  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$  est  $c = (1, a) \otimes ga$  et que le couple de matrices associé à l'extrémité  $F_3$  est

$$\mathcal{S}'_{\text{imp}}^{-1} \times \mathcal{S}_{\text{imp}}^{-1} \times \mathcal{S}_{\text{pair}} \times \mathcal{S}'_{\text{pair}} = (\mathbb{I}, 0).$$

Il résulte de [8] que  $F_3$  peut être jointe à une isotopie  $F_4$  par un chemin ne comportant pas de  $j/j$  intersection.

PROPOSITION 5.12. — L'application composée

$$\pi_1(\mathcal{F}(V, Q, f_0)) \xrightarrow{is} \pi_1(\mathcal{F}(V, Q, f_0), \mathcal{E}(V, Q, f_0)) \rightarrow H_1(\pi_1(V); Z[\pi_1(Q)]/Z)$$

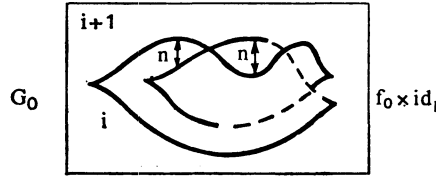
est un homomorphisme surjectif (sous les hypothèses  $\star$  de l'introduction).

Démonstration. — Compte tenu de la proposition 5.10, il suffit de montrer que toute pseudo-isotopie  $G$  sans point critique peut être jointe à  $f_0 \times id_1$  par un chemin dont l'invariant est nul. D'après [2],  $p \circ G$  et  $p : V \times I \rightarrow I$  peuvent être jointes par un chemin  $h_i : V \times I \rightarrow I$  n'ayant que des points critiques d'indice  $i+1$  et  $i$  ( $i$  impair) et que des  $i+1/i+1$  intersections de nappes.

Soit  $F_0 : V \times I \rightarrow Q$  un plongement obtenu en « poussant »  $f_0$  le long d'un champ normal non nul. La famille à un paramètre de pseudo-isotopies définie par

$$G_t(x, s) = (F_0(x, s), h_t(x, s))$$

a pour graphique celui de  $h_t$  :



Son invariant est nul, du fait qu'on a que des  $i+1/i+1$  de nappes avec  $i+1$  pair. De plus son extrémité est  $f_0 \times id$  et son origine  $G_0$  est telle que  $p \circ G_0 = h_0 = p \circ G$ . D'après le lemme 1.14  $G_0$  et  $G$  peuvent être joints par un chemin sans point critique. Il existe donc un chemin joignant  $f_0 \times id_1$  à  $G$  d'invariant nul.

Index des principales notations

$I_j^q, E_{ij}^q, F_k$	p. 569	$E_i, C_i$	p. 576
$GL(\pi \rightarrow \pi')$	p. 569	$\partial_i, b_i$	p. 576
$(A, B)$	p. 570	$\eta_i$	p. 576
$[ag-ga]$	p. 570	$\oplus E_{\text{pair}}, \oplus C_{\text{pair}}$	p. 578
$\bar{\otimes}$	p. 571	$\Delta_p, \Lambda^p$	p. 578
$\mathcal{F}(V, Q, f_0), \mathcal{F}(V, Q, f_0)$	p. 571	${}^j e_{hk}^q, {}^j E_k^q$	p. 578
$\mathcal{E}(V, Q, f_0)$	p. 571	$(A_p^k, B_p^k)$	p. 583
$\mathcal{F}_0(V, Q, f_0), \mathcal{O}^0(V, Q, f_0)$	p. 574	$\mathcal{S}, \mathcal{S}_p^k, \mathcal{S}_1^k$	p. 584
$\mathcal{O}(V, Q, f_0)$	p. 574	$C_k$	p. 584
Type A, Type B	p. 575	${}^j_k M_k$	p. 584

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. CERF, *Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension 3* ( $\Gamma_4 = 0$ ) (Lectures notes in Math., n° 53, Springer-Verlag, 1968).

[2] A. HATCHER, *A  $K_2$  Obstruction for Pseudo-Isotopies* (Ph. D. Thesis, Stanford University 1971).

[3] A. HATCHER, *On the two-Parameters  $h$ -Cobordism Theorem for two-Connected Manifolds*, Notes mimeographiées, Princeton University 1973.

[4] A. HATCHER and J. WAGONER, *Pseudo-Isotopies of Compact Manifolds* (Astérisque, n° 6, 1973, 275 p.).

[5] S. MAUMARY, *Type simple d'homotopie (Théorie algébrique)* (Lecture Notes in Math., n° 48, Springer-Verlag, 1967).

[6] J. MILNOR, *Lecture on the  $h$ -Cobordism Theorem*, Princeton, Princeton University Press, 1965 (Princeton Mathematical Notes).

[7] B. PERRON, *Pseudo-isotopies de plongements en codimension deux* (Thèse, Dijon, 1974).

[8] B. PERRON, *Pseudo-isotopies de plongements en codimension deux* (Bull. Soc. math. France, tome 103, 1975, p. 289-339).

[9] I. A. VOLODIN, *Algebraic K-theory* (Uspechi. Math. Nank., 27, 1972).

(Manuscrit reçu le 29 mai 1975, révisé le 5 juillet 1976.)

Bernard PERRON,  
 Département de Mathématiques,  
 Faculté des Sciences Mirande,  
 214, rue de Mirande,  
 21000 Dijon.