

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN BARGE

**Structures différentiables sur les types d'homotopie  
rationnelle simplement connexes**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 9, n° 4 (1976), p. 469-501

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1976\\_4\\_9\\_4\\_469\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1976_4_9_4_469_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# STRUCTURES DIFFÉRENTIABLES SUR LES TYPES D'HOMOTOPIE RATIONNELLE SIMPLEMENT CONNEXES

PAR JEAN BARGE

---

## Introduction

Le problème de l'existence et de la classification à  $h$ -cobordisme près des variétés topologiques, PL ou différentiables, dont le type d'homotopie est un complexe de Poincaré  $X$  donné se résout en deux étapes. Il a été traité d'abord dans le cas différentiable pour  $X = S^n$  par M. Kervaire et J. Milnor [8].

La première obstruction à l'existence d'une structure de variété différentiable sur  $X$  est du type obstruction au lissage. Le fibré de Spivak doit admettre une réduction vectorielle. Cette obstruction s'exprime alors en terme homotopique. D. Sullivan a montré [12] que de telles réductions s'identifiaient aux données de chirurgie sur  $X$ . Pour obtenir, à partir de là, une équivalence d'homotopie on utilise la technique de chirurgie. On rencontre alors une seconde obstruction calculée pour  $X$  simplement connexe par W. Browder et S. Novikov [2], puis dans le cas général par C. T. C. Wall [15].

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à la classification des variétés différentiables ayant un type d'homotopie rationnelle [13] simplement connexe,  $X$ , donné. Nous supposons bien sûr que  $X$  est un  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré, c'est-à-dire qu'il vérifie la dualité à coefficients rationnels. Nous adaptons à ce cadre la définition des données de chirurgie sur  $X$  et la méthode de W. Browder et S. Novikov.

L'existence de telles données ne s'exprime plus en termes homotopiques mais sous forme de conditions algébriques portant sur les classes de Pontrjagin rationnelles des fibrés vectoriels de base  $X$ .

Les types d'homotopie rationnelle s'identifient au modèle minimal des algèbres différentielles graduées sur  $\mathbf{Q}$  [5]. Ce travail constitue donc une approche d'une description purement algébrique des variétés différentiables.

Précisément, nous nous posons les deux problèmes suivants : soit  $X$  un  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré,  $\mathbf{Q}$ -local, simplement connexe, sans bord, de dimension formelle  $n$ .

1° Existe-t-il une variété différentiable, compacte, orientée, sans bord de dimension  $n$ ,  $V$ , et une application continue  $f : V \rightarrow X$  qui soit une équivalence d'homologie rationnelle — c'est-à-dire que l'application  $f_* : H_*(V; \mathbf{Q}) \rightarrow H_*(X; \mathbf{Q})$  soit un isomorphisme. Nous appelons un tel couple  $(V, f)$  une structure différentiable sur  $X$ .

Nous n'imposons pas à  $V$  d'être simplement connexe.

2° Soient  $(V_0, f_0)$  et  $(V_1, f_1)$  deux structures différentiables sur  $X$ . Nous dirons qu'elles sont équivalentes s'il existe un cobordisme orienté  $W$  entre  $V_0$  et  $V_1$  et une équivalence d'homologie rationnelle  $F : W \rightarrow X$  qui prolonge  $f_0$  et  $f_1$ .

Nous notons  $\mathcal{S}^{\mathbf{Q}}(X)$  l'ensemble des classes d'équivalences de structures différentiables sur  $X$  et nous voulons le calculer.

*Deux premiers invariants :*

(a) soit  $d : \mathcal{S}^{\mathbf{Q}}(X) \rightarrow H_n(X; \mathbf{Q}) - \{0\}$  l'application définie par  $d(V, f) = f_*([\mathbf{V}])$ ;

(b) soit  $(V, f)$  une structure différentiable sur  $X$  et soient  $p_i(V) \in H^{4i}(V; \mathbf{Q})$  les classes de Pontrjagin rationnelles du fibré normal stable de la variété  $V$ . Les éléments  $(f^*)^{-1}(p_i(V))$  appartenant au  $H^{4i}(X; \mathbf{Q})$  sont invariants par équivalence de structures. Nous avons donc construit une application

$$\theta : \mathcal{S}^{\mathbf{Q}}(X) \rightarrow \bigoplus_{i>0} H^{4i}(X; \mathbf{Q}).$$

Soit  $x$  un élément non nul de  $H_n(X; \mathbf{Q})$  et soit  $[v]$  un élément de  $\bigoplus_{i>0} H^{4i}(X; \mathbf{Q})$ . Nous notons  $\mathcal{S}^{\mathbf{Q}}(X, x, [v])$  le sous-ensemble, éventuellement vide de  $\mathcal{S}^{\mathbf{Q}}(X)$ ,  $d^{-1}(x) \cap \theta^{-1}([v])$ .

*Remarque.* — Le localisé  $BSO_{\mathbf{Q}}$  de l'espace simple  $BSO$  par rapport à la famille vide de nombres premiers est isomorphe *via* les classes de Pontrjagin au produit des espaces d'Eilenberg-MacLane  $\prod_{i>0} K(\mathbf{Q}, 4i)$ . Il en résulte que la somme  $\bigoplus_{i>0} H^{4i}(X; \mathbf{Q})$  est isomorphe aux classes d'homotopie d'applications de  $X$  dans  $BSO_{\mathbf{Q}}$ . Ceci pour justifier la notation  $[v]$ . C'est une classe d'isomorphisme de  $\mathbf{Q}$ -fibrés de base  $X$ . Par exemple, si  $\omega$  est une partition de l'entier  $k$ ,  $\omega = (i_1, i_2, \dots, i_r)$  nous noterons  $p_{\omega}([v])$  la classe de cohomologie dans  $H^{4k}(X; \mathbf{Q})$   $v_{i_1} \cup v_{i_2} \cup \dots \cup v_{i_r}$  où  $v_i$  est la composante de  $[v]$  dans  $H^{4i}(X; \mathbf{Q})$ .

Soit  $X$  un  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré de dimension  $4k$ , et soit  $x$  un élément non nul de  $H_{4k}(X; \mathbf{Q})$ . La dualité associée à  $x$  induit une forme bilinéaire, symétrique et non dégénérée sur le  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel  $H_{2k}(X; \mathbf{Q})$ . Nous notons  $\tau(X, x)$  la classe dans le groupe de Witt  $W(\mathbf{Q})$  de l'espace vectoriel bilinéaire  $H_{2k}(X; \mathbf{Q})$ . Soit  $W(\mathbf{Z})$  le groupe de Witt de l'anneau  $\mathbf{Z}$ . Il est isomorphe à  $\mathbf{Z}$  par la signature [10]. Soit  $W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$  le groupe de Witt relatif. La suite

$$0 \rightarrow W(\mathbf{Z}) \rightarrow W(\mathbf{Q}) \xrightarrow{\theta} W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \rightarrow 0$$

est exacte et scindée par l'homomorphisme de signature  $\sigma : W(\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{Z}$ .

Nous pouvons énoncer le théorème suivant dû à Denis Sullivan.

THÉORÈME 1. — Soit  $X$  un  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré de dimension  $n$ . Soit  $x$  un élément non nul de  $H_n(X; \mathbf{Q})$  et soit  $[v]$  un élément de  $\bigoplus_{i>0} H^{4i}(X; \mathbf{Q})$ .

(a) Pour  $n \neq 4k$  l'ensemble  $\mathcal{S}^{\mathbf{Q}}(X, x, [v])$  est non vide.

(b) Si  $n = 4k$  ( $k \neq 1$ ) les conditions suivantes sont équivalentes :

1°  $\mathcal{S}^{\mathbf{Q}}(X, x, [v]) \neq \emptyset$ ;

2° (i) les  $\pi(k)$  nombres rationnels  $\langle p_{\omega}([v]), x \rangle$  sont les nombres de Pontrjagin d'une variété orientée compacte sans bord, de dimension  $4k$ ;

(ii)  $\partial(\tau(X, x)) = 0$ ,

(iii)  $\sigma(\tau(X, x)) = \langle L_k(p_{\omega}([v]), x \rangle$ ,

où  $L_k$  est le polynôme de Hirzebruch.

Exemple. — Soit  $X$  le localisé  $S_{\mathbf{Q}}^n$  de la sphère  $S^n$  et soit  $x \in H_n(S_{\mathbf{Q}}^n; \mathbf{Q})$  l'image par le changement de coefficients de la classe d'orientation entière de la sphère  $S^n$ .

Pour  $n \neq 4k$ ,  $[v] = 0$  car il n'y a pas d'autre choix.

Pour  $n = 4k$  la condition (iii) du théorème 1 impose de choisir  $p_k([v]) = v_k = 0$  donc encore  $[v] = 0$ .

L'ensemble  $\mathcal{S}^{\mathbf{Q}}(S_{\mathbf{Q}}^n, [S^n], [0])$  est en fait un groupe abélien (pour la somme connexe des variétés et des applications) isomorphe au groupe  $\theta_n^{\mathbf{Q}}$  des sphères d'homologie rationnelles modulo  $H_{\mathbf{Q}}$ -cobordisme. Le groupe  $\theta_n^{\mathbf{Q}}$  a été calculé dans [1]. Lorsque l'ensemble  $\mathcal{S}^{\mathbf{Q}}(X, x, [v])$  est non vide, nous définissons une opération du groupe  $\theta_n^{\mathbf{Q}}$  ( $n = \dim X$ ) sur cet ensemble, de la manière suivante.

Soit  $(V, f)$  une structure différentiable sur  $X$ , et soit  $\Sigma$  une  $\mathbf{Q}$ -sphère d'homologie. Nous construisons la nouvelle structure différentiable  $(V \# \Sigma, f \# \star)$ . Nous avons bien

$$d(V, f) = d(V \# \Sigma, f \# \star) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}(V, f) = \mathcal{O}(V \# \Sigma, f \# \star).$$

Nous avons alors

THÉORÈME 2. — Pour tout  $n \neq 3$  le groupe  $\theta_n^{\mathbf{Q}}$  opère transitivement sur  $\mathcal{S}^{\mathbf{Q}}(X, x, [v])$ . Pour  $n \neq 4k-1$ , le groupe  $\theta_n^{\mathbf{Q}}$  opère sans point fixe. Si  $n = 4k-1$ , ( $k \neq 1$ ), notons  $I(X, x, [v])$  le sous-groupe d'inertie. La suite

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}/\sigma(x, [v])\mathbf{Z} \rightarrow I(X, x, [v]) \rightarrow (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^{n(x, [v])} \rightarrow 0$$

est exacte.

De plus si  $[v] = 0$  le groupe  $I(X, x, [0])$  est le sous-groupe nul.

La transitivité de l'action a été conjecturée par D. Sullivan.

### 1. $\mathbf{Q}$ -Complexe de Poincaré

DÉFINITION 1.1. — Nous appelons  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré (à bord) de dimension  $n$  un couple  $(X, Y)$  de CW-complexes tels que :

(i)  $\dim_{\mathbf{Q}} H_i(X; \mathbf{Q})$  est finie pour tout  $i$ ;

- (ii)  $Y$  est un sous-CW-complexe de  $X$  ayant la même propriété;  
 (iii) il existe un élément  $x$  du groupe d'homologie relatif  $H_n(X, Y; \mathbf{Q})$  tel que

$$\cap x : H^p(X, Y; \mathbf{Q}) \rightarrow H_{n-p}(X; \mathbf{Q})$$

soit un isomorphisme pour tout  $p$ .

L'élément  $x$  est appelé classe d'orientation du  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré  $(X, Y)$ .

Nous appelons  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré orienté et nous notons  $(X, Y, x)$  un  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré  $(X, Y)$  muni d'une classe d'orientation  $x$ .

*Remarques 1.2 :*

(a) l'élément  $x$  n'est pas unique. Par exemple si  $X$  est connexe, tout élément non nul de  $H_n(X, Y; \mathbf{Q})$  est une classe d'orientation;

(b) soit  $(X, Y)$  un  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré de dimension  $n$ ; alors  $Y$  est un  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré sans bord de dimension  $n-1$ . Soit en effet  $x \in H_n(X, Y; \mathbf{Q})$  une orientation; alors  $y = \partial x \in H_{n-1}(Y; \mathbf{Q})$  est une classe d'orientation de  $y$ . Nous disons que  $Y$  est le bord du  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré  $(X, Y)$ . Lorsque nous munissons  $Y$  de la classe d'orientation  $y = \partial x$ , nous disons que  $(Y, y)$  est le bord orienté de  $(X, Y, x)$ .

1.3. RECOLLEMENT DE DEUX  $\mathbf{Q}$ -COMPLEXES DE POINCARÉ ORIENTÉS. — Soient  $(X_1, Y, x_1)$  et  $(X_2, Y, x_2)$  deux  $\mathbf{Q}$ -complexes de Poincaré orientés de dimension  $n$ , de même bord orienté  $(Y, y)$ . Soit  $\hat{X} = X_1 \cup_Y X_2$ , le CW-complexe obtenu en recollant les deux CW-complexes  $X_1$  et  $X_2$  le long du sous-complexe commun  $Y$ .

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & 0 \\ & & \downarrow \\ & & H_n(\hat{X}; \mathbf{Q}) \\ & & \downarrow i \\ H_n(X_1, Y; \mathbf{Q}) \oplus H_n(X_2, Y; \mathbf{Q}) & \xrightarrow{i_1 \oplus i_2} & H_n(\hat{X}, Y; \mathbf{Q}) \\ & & \downarrow \\ & & H_{n-1}(Y; \mathbf{Q}) \end{array}$$

et soit  $\hat{x} = (i)^{-1} [i_1 \oplus i_2 (x_1, -x_2)]$ .

Le couple  $(\hat{X}, \hat{x})$  est un  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré orienté sans bord de dimension  $n$ , que nous appelons le recollé du  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré  $(X_1, Y, x_1)$  avec le  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré  $(X_2, Y, x_2)$ .

*Dans la suite nous ne considérerons, sauf mention expresse du contraire, que des  $\mathbf{Q}$ -complexes de Poincaré  $(X, Y)$  pour lesquels les composantes connexes de  $X$  et  $Y$  sont simplement connexes.*

**2. Formes d'intersection et d'enlacement**  
**sur les  $\mathbf{Q}$ -Complexes de Poincaré et sur les variétés différentiables**

2.1. Soit  $X$  un  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré de dimension  $4k$ , de bord  $Y$ , et soit  $x$  appartenant à  $H_{4k}(X, Y; \mathbf{Q})$  une orientation.

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^{2k}(X, Y; \mathbf{Q}) & \longrightarrow & H^{2k}(X; \mathbf{Q}) \\ & \downarrow x & \downarrow \\ H_{2k}(Y; \mathbf{Q}) & \xrightarrow{i_*} & H_{2k}(X; \mathbf{Q}) \rightarrow \text{Hom}(H_{2k}(X; \mathbf{Q}), \mathbf{Q}) \end{array}$$

munit l'espace vectoriel  $H_{2k}(X; \mathbf{Q})$  d'une forme bilinéaire, symétrique de noyau  $i_*(H_{2k}(Y; \mathbf{Q}))$  notée  $\circ$ . Cette forme induit donc une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée sur le quotient  $H_{2k}(X; \mathbf{Q})/i_*(H_{2k}(Y; \mathbf{Q}))$ . C'est la régularisée de la forme d'intersection sur  $X$  associée à  $x$ .

2.1.1. NOTATIONS. — Nous notons  $\tau(X, Y, x)$  la classe dans le groupe de Witt  $W(\mathbf{Q})$  du corps  $\mathbf{Q}$ , du  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel  $H_{2k}(X; \mathbf{Q})/i_*(H_{2k}(Y; \mathbf{Q}))$  muni de la régularisée de la forme d'intersection sur  $X$  associée à  $x$ . Une variété différentiable compacte et orientée  $W$  est un  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré orienté. Si  $[W]$  est la classe d'orientation, la notation  $\tau(W)$  est une abréviation de  $\tau(W, \partial W, [W])$ .

LEMME 2.1.2 (Thom) [7]. — Soit  $(X, x)$  un  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré sans bord, de dimension  $4k$ , qui soit le bord orienté d'un  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré orienté  $(Y, y)$ . Alors  $\tau(X, x)$  est nul.

2.1.3. Soient  $(Y_1, y_1)$  et  $(Y_2, y_2)$  deux  $\mathbf{Q}$ -complexes de Poincaré orientés. Nous appelons  $H_{\mathbf{Q}}$ -cobordisme entre  $(Y_1, y_1)$  et  $(Y_2, y_2)$  un  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré orienté  $(X, x)$  de bord  $(Y_1, y_1) \cup (Y_2, -y_2)$  tel que :  $i_i^* H_*(Y_i, \mathbf{Q}) \rightarrow H_*(X; \mathbf{Q})$  ( $i = 1, 2$ ) soit un isomorphisme.

LEMME 2.1.3. — Soit  $(X, x)$  un  $H_{\mathbf{Q}}$ -cobordisme de dimension  $4k$ . Alors

$$\tau(X, Y_1 \cup Y_2, x) = 0.$$

*Démonstration.* — L'application  $i_* : H_{2k}(Y_1; \mathbf{Q}) \oplus H_{2k}(Y_2; \mathbf{Q}) \rightarrow H_{2k}(X; \mathbf{Q})$  est surjective.

COROLLAIRE 2.1.4. — Soit  $X$  un  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré de dimension  $4k-1$ , sans bord. Alors  $\tau(X \times I, X \times \partial I, x)$  est nul pour tout  $x$ .

LEMME 2.1.5 (Novikov). — Soient  $(X_1, Y, x_1)$  et  $(X_2, Y, x_2)$  deux  $\mathbf{Q}$ -complexes de Poincaré orientés de dimension  $4k$  et de même bord orienté  $(Y, y)$ . Si  $(\hat{X}, \hat{x})$  est le recollé (1.2), nous avons :  $\tau(\hat{X}, \hat{x}) = \tau(X_1, Y, x_1) - \tau(X_2, Y, x_2)$ .

*Démonstration.* — Soit  $I$  l'image par l'inclusion de  $H_{2k}(Y; \mathbf{Q})$  dans  $H_{2k}(\hat{X}; \mathbf{Q})$ . Nous vérifions que le sous-espace vectoriel  $I$  est contenu dans son orthogonal  $I^\perp$  et que l'application

$$H_{2k}(X_1; \mathbf{Q}) \oplus H_{2k}(X_2; \mathbf{Q}) \rightarrow H_{2k}(\hat{X}; \mathbf{Q})$$

induit une isométrie de

$$[H_{2k}(X_1; \mathbf{Q})/i_{1*}(H_{2k}(Y; \mathbf{Q}))] \oplus [-H_{2k}(X_2; \mathbf{Q})/i_{2*}(H_{2k}(Y_2; \mathbf{Q}))]$$

sur  $I^\perp/I$  muni de la forme bilinéaire induite par la forme d'intersection sur  $\hat{X}$  associée à  $\hat{x}$ . Mais  $I^\perp/I$  et  $H_{2k}(\hat{X}; \mathbf{Q})$  ont même classe dans le groupe  $W(\mathbf{Q})$ .

**COROLLAIRE 2.1.6.** — Soient  $(X_1, Y_1, x_1)$  et  $(X_2, Y_2, x_2)$  deux  $\mathbf{Q}$ -complexes de Poincaré orientés de dimension  $4k$ . Soit de plus  $(X, x)$  un  $H_{\mathbf{Q}}$ -cobordisme orienté entre  $(Y_1, y_1)$  et  $(Y_2, y_2)$ . On construit  $(\hat{X}, \hat{x})$  le recollé de  $(X_1, x_1) \cup (X_2, -x_2)$  et  $(X, x)$ . Nous avons  $\tau(\hat{X}, \hat{x}) = \tau(X_1, Y_1, x_1) - \tau(X_2, Y_2, x_2)$ .

Cela résulte de 2.1.3 et 2.1.5.

**COROLLAIRE 2.1.7** (Invariance de  $\tau$  par cobordisme induisant un  $H_{\mathbf{Q}}$ -cobordisme entre les bords). — Avec les notations de 2.1.6, supposons que  $(\hat{X}, \hat{x})$  soit un bord orienté. Alors  $\tau(X_1, Y_1, x_1) = \tau(X_2, Y_2, x_2)$ .

Cela résulte de 2.1.6 et de 2.1.2.

Nous aurons besoin de la généralisation suivante de 2.1.5.

**PROPOSITION 2.1.8** (Addition des cobordismes). — Soient  $(X_1, Y_1, x_1)$  et  $(X_2, Y_2, x_2)$  deux  $\mathbf{Q}$ -complexes de Poincaré dont les bords ont une composante connexe  $(Z, z)$  en commun. Soit alors  $(\hat{X}, (Y_1 \cup Y_2) - Z, x)$  le recollé le long de  $(Z, z)$ . Alors

$$\tau(\hat{X}, Y_1 \cup Y_2 - Z, x) = \tau(X_1, Y_1, x_1) - \tau(X_2, Y_2, x_2).$$

**2.2. COMPARAISON DES GROUPES DE WITT DE  $\mathbf{Z}$  ET DE  $\mathbf{Q}$ .** — Les démonstrations des résultats ci-dessous sont dans [1].

**DÉFINITION 2.2.1.** — Un  $e$ -module sur  $\mathbf{Z}$  est un groupe abélien fini, muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée à valeurs dans  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ . Nous notons  $\mathfrak{B}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $e$ -modules. La somme orthogonale en fait un monoïde avec élément neutre.

**DÉFINITION 2.2.2.** — Un  $e$ -module est neutre s'il contient un sous-groupe égal à son orthogonal. Nous notons  $\mathfrak{N}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$  le sous-monoïde de  $\mathfrak{B}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$  engendré par les classes d'isomorphismes de  $e$ -modules neutres.

**DÉFINITION 2.2.3.** — Nous notons  $W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$  le quotient  $\mathfrak{B}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})/\mathfrak{N}(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ .

**PROPOSITION 2.2.4.** — L'ensemble  $W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$  est un groupe abélien (pour la somme orthogonale). L'opposé de la classe de  $G$  est la classe du groupe  $G$  muni de la forme d'enlacement opposée.

PROPOSITION 2.2.5. — Soit  $I$  un sous-groupe du  $e$ -module  $G$ , contenu dans son orthogonal  $I^\perp$ . La forme d'enlacement sur  $G$  induit une forme d'enlacement sur  $I^\perp/I$ . De plus les deux  $e$ -modules  $G$  et  $I^\perp/I$  ont même classe dans  $W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ .

2.2.6. Soit  $E$  un  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire, symétrique et non-dégénérée, et soit  $P$  un réseau dans  $E$  sur lequel la forme précédente est entière. Notons  $P^\#$  le réseau dual. Le groupe fini  $P^\#/P$  est muni d'une forme bilinéaire symétrique à valeurs dans  $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$  induite par celle sur  $E$ , qui en fait un  $e$ -module. La classe dans  $W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$  du  $e$ -module  $P/P^\#$  ne dépend pas du choix du réseau  $P$ .

De plus, elle ne dépend que de la classe de  $E$  dans le groupe de Witt de  $\mathbf{Q}$ . Nous avons donc construit une application  $\partial : W(\mathbf{Q}) \rightarrow W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ . C'est un homomorphisme. Notons  $W(\mathbf{Z})$  le groupe de Witt de l'anneau  $\mathbf{Z}$ . Il est isomorphe à  $\mathbf{Z}$  par la signature [10]. Tensoriser par  $\mathbf{Q}$  fournit un homomorphisme  $W(\mathbf{Z}) \rightarrow W(\mathbf{Q})$ .

THÉORÈME 2.2.7. — La suite  $0 \rightarrow W(\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sigma} W(\mathbf{Q}) \xrightarrow{\partial} W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}) \rightarrow 0$  est exacte. Elle est scindée par la signature.

### 2.3. FORME D'ENLACEMENT SUR LES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES.

2.3.1. Soit  $V$  une variété différentiable compacte, orientée, sans bord de dimension  $4k-1$ . Notons  $T_*(V)$  [resp.  $T^*(V)$ ] la torsion de  $H_*(V; \mathbf{Z})$  [resp. de  $H^*(V; \mathbf{Z})$ ] et  $L^*(V)$  [resp.  $L_*(V)$ ] le quotient libre. La formule des coefficients universels identifie  $T^*(V)$  avec  $\text{Ext}(T_{*-1}(V); \mathbf{Z})$ , groupe isomorphe à  $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(T_{*-1}(V); \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  que nous notons  $\widehat{T_{*-1}(V)}$ . La dualité de Poincaré :

$$H^{2k}(V; \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cap [V]} H_{2k-1}(V; \mathbf{Z})$$

induit entre les composantes de torsion un isomorphisme

$$\widehat{T_{2k-1}(V)} \rightarrow T_{2k-1}(V)$$

qui fait du groupe abélien  $T_{2k-1}(V)$  un  $e$ -module. (La symétrie est évidente.) Nous notons  $e(V)$  la classe du  $e$ -module  $T_{2k-1}(V)$  dans  $W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ .

PROPOSITION 2.3.2. — Soit  $W$  une variété différentiable, compacte, orientée, de dimension  $4k$  et de bord  $V$ .

Nous avons  $\partial\tau(W) + e(V) = 0$  [dans  $W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ ].

Démonstration. — Nous reproduisons ici la démonstration de [9], chapitre 5.

Soit  $P$  le réseau de  $H_{2k}(W; \mathbf{Q})/i_*(H_{2k}(V; \mathbf{Q}))$ , image de la composée

$$H_{2k}(W; \mathbf{Z}) \rightarrow H_{2k}(W; \mathbf{Q}) \rightarrow H_{2k}(W; \mathbf{Q})/i_*(H_{2k}(V; \mathbf{Q})).$$



Comme  $P \circ P \subset Z$  nous savons déjà d'après 2.2.6 que  $\partial\tau(W)$  est égal à la classe de  $P^\# / P$ . Considérons d'autre part le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^{2k}(V; Z) & \longrightarrow & H^{2k+1}(W, V; Z) & & \\ \downarrow \cap [V] & & \downarrow \cap [W] & & \\ H_{2k}(W, V; Z) & \xrightarrow{\partial} & H_{2k-1}(V; Z) & \xrightarrow{i_*} & H_{2k-1}(W; Z) \end{array}$$

En prenant les composantes de torsion et en utilisant le théorème des coefficients universels pour la cohomologie nous obtenons :

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{T}_{2k-1}(V) & \xrightarrow{\widehat{T}\partial} & \widehat{T}_{2k}(W, v) & & \\ \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \\ T_{2k}(W, V) & \xrightarrow{T\partial} & T_{2k-1}(V) & \xrightarrow{Ti_*} & T_{2k-1}(W) \end{array}$$

Notons  $I$  le sous-module de  $T_{2k-1}(V)$ ,  $\text{Im}(T\partial)$ . Le diagramme ci-dessus montre que  $I^\perp = \text{Ker}(Ti_*)$  contient  $I$ . La proposition 2.3.2 est une conséquence de 2.2.5 et du lemme suivant :

LEMME 2.3.3. — *Les deux  $e$ -modules  $P^\# / P$  et  $I^\perp / I$  sont anti-isométriques.*

*Démonstration.* — Considérons le diagramme ci-dessous dans lequel les colonnes et la ligne centrale sont exactes.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T_{2k}(W) & \longrightarrow & T_{2k}(W, V) & \xrightarrow{T\partial} & T_{2k-1}(V) & \longrightarrow & T_{2k-1}(W) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{2k}(W; Z) & \longrightarrow & H_{2k}(W, V; Z) & \xrightarrow{\partial} & H_{2k-1}(V; Z) & \longrightarrow & H_{2k-1}(W; Z) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L_{2k}(W) & \xrightarrow{\beta} & L_{2k}(W, V) & \xrightarrow{\gamma} & L_{2k-1}(V) & \longrightarrow & L_{2k-1}(W) \\ \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \\ & & \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(L_{2k}(W); Z) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(L_{2k}(V); Z) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Il en résulte un isomorphisme de  $\text{Ker } \gamma / \text{Im } \beta \rightarrow I^\perp / I$ . Le module  $\text{Ker } \gamma / \text{Im } \beta$  est isomorphe au conoyau de l'homomorphisme  $P \rightarrow \text{Hom}(P; Z) \simeq P^\#$ . Nous obtenons donc un isomorphisme  $\varphi : P^\# / P \rightarrow I^\perp / I$ . Pour démontrer que  $\varphi$  est une anti-isométrie nous renvoyons à [1].

COROLLAIRE 2.3.4 (*Invariance de  $e$  par  $H_{\mathbf{Q}}$ -cobordisme*). — *Soit  $W_{4k}$  un  $H_{\mathbf{Q}}$ -cobordisme entre  $V_1$  et  $V_2$ . Alors  $e(V_1) = e(V_2)$ .*

*Démonstration.* —  $e(\partial W) = e(V_1) - e(V_2) = -\partial\tau(W)$  d'après 2.3.2, et  $\tau(W) = 0$  d'après 2.1.3.

2.4. CAS D'UNE FLÈCHE. — Soient  $(X_1, Y_1)$  et  $(X_2, Y_2)$  deux  $\mathbf{Q}$ -complexes de Poincaré connexes à bord, de même dimension  $n$ , et soit  $f : (X_1, Y_1) \rightarrow (X_2, Y_2)$  une application continue. Nous supposons dans tout ce paragraphe que :

1°  $f_* : H_*(Y_1; \mathbf{Q}) \rightarrow H_*(Y_2; \mathbf{Q})$  est un isomorphisme. Nous disons que  $f$  induit au bord une équivalence d'homologie rationnelle;

2°  $f_* : H_n(X_1, Y_1; \mathbf{Q}) \rightarrow H_n(X_2, Y_2; \mathbf{Q})$  est non nulle (c'est donc un isomorphisme).

2.4.1. Soit  $x_1$  une orientation du  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré  $(X_1, Y_1)$ . Nous définissons l'application  $\alpha_* : H_*(X_2; \mathbf{Q}) \rightarrow H_*(X_1; \mathbf{Q})$  par la commutativité du diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} H^{n-p}(X_1, Y_1; \mathbf{Q}) & \xleftarrow{f_*} & H^{n-p}(X_2, Y_2; \mathbf{Q}) \\ \downarrow \cap x_1 & & \downarrow \cap f_*(x_1) \\ H_p(X_1; \mathbf{Q}) & \xleftarrow{\alpha_*} & H_p(X_2; \mathbf{Q}) \end{array}$$

LEMME 2.4.1. — *L'application  $\alpha_*$  est une section de l'application  $f_*$ . De plus si  $n = 4k$ ,  $\alpha_{2k}$  est une isométrie du  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel  $H_{2k}(X_2; \mathbf{Q})$  muni de la forme d'intersection associée à  $f_*(x_1)$  dans le  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel  $H_{2k}(X_1; \mathbf{Q})$  muni de la forme d'intersection associée à  $x_1$ .*

*Démonstration :*

$$\begin{aligned} f_* \alpha_*(x_2) &= f_* [x_1 \cap f^*([\cap f_*(x_1)]^{-1}(x_2))] \\ &= f_*(x_1) \cap ([\cap f_*(x_1)]^{-1}(x_2)) = x_2. \end{aligned}$$

Soient  $x_2, x'_2$  deux éléments de  $H_{2k}(X_2; \mathbf{Q})$ .

$$\begin{aligned} \alpha_*(x_2) \circ \alpha_*(x'_2) &= \langle [\cap x_1]^{-1}(\alpha_*(x_2)), \alpha_*(x'_2) \rangle \\ &= \langle f^*([\cap f_*(x_1)]^{-1}(x_2)), \alpha_*(x'_2) \rangle \\ &= \langle [\cap f_*(x_1)]^{-1}(x_2), f_* \alpha_*(x'_2) \rangle \\ &= x_2 \circ x'_2. \end{aligned}$$

COROLLAIRE 2.4.2. — *Les applications*

$$f_* : H_*(X_1; \mathbf{Q}) \rightarrow H_*(X_2; \mathbf{Q})$$

et

$$f_* : H_*(X_1, Y_1; \mathbf{Q}) \rightarrow H_*(X_2, Y_2; \mathbf{Q})$$

sont surjectives.

La première admet une section par 2.4.1 et la seconde aussi par une démonstration analogue.

Notons  $K_*(f)$  le noyau de l'application  $f_*$ .

LEMME 2.4.3. — *L'orthogonal du sous-espace vectoriel  $K_{2k}(f)$  de  $H_{2k}(X_1; \mathbf{Q})$  pour la forme d'intersection associée à  $x_1$  est  $\alpha_*(H_{2k}(X_2; \mathbf{Q}))$ .*

*Démonstration.* — Soient  $x \in H_{2k}(X_1; \mathbf{Q})$  et  $u - \alpha_* f_*(u)$  un élément arbitraire de  $K_{2k}(f)$ . Supposons

$$x \circ (u - \alpha_* f_*(u)) = 0, \quad \forall u \in H_{2k}(X_1; \mathbf{Q}).$$

Or

$$x \circ (u - \alpha_* f_*(u)) = x \circ u - x \circ \alpha_* f_*(u) = x \circ u - f_*(x) \circ f_*(u).$$

Il en résulte que l'élément  $x - \alpha_* f_*(x)$  appartient au noyau de forme d'intersection de  $H_{2k}(X_1; \mathbf{Q})$  donc à  $i_*(H_{2k}(Y_1; \mathbf{Q}))$ . Considérons le diagramme ci-dessous où la première flèche horizontale est surjective d'après 2.4.2, et celle du milieu, un isomorphisme par hypothèse

$$\begin{array}{ccccc} H_{2k+1}(X_1, Y_1; \mathbf{Q}) & \rightarrow & H_{2k-1}(X_2, Y_2; \mathbf{Q}) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H_{2k}(Y_1; \mathbf{Q}) & \xrightarrow{\sim} & H_{2k}(Y_2; \mathbf{Q}) & & \\ \downarrow i_* & & \downarrow & & \\ H_{2k}(X_1; \mathbf{Q}) & \xrightarrow{f_*} & H_{2k}(X_2; \mathbf{Q}) & & \end{array}$$

L'application  $f_* \circ i_*$  est injective, et comme  $f_*(x - \alpha_* f_*(x)) = f_*(x) - f_*(x) = 0$ , il en résulte que  $x - \alpha_* f_*(x)$  appartient à  $\alpha_*(H_{2k}(X_2; \mathbf{Q}))$ . Réciproquement, soient  $x \in K_{2k}(f)$  et  $x' \in H_{2k}(X_2; \mathbf{Q})$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_*(x') \circ x &= \langle [\bigcap x_1]^{-1} \alpha_*(x'), x \rangle \\ &= \langle f^*(\quad), x \rangle = \langle (\quad), f_*(x) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

**COROLLAIRE 2.4.4.** — *La restriction de la forme d'intersection sur  $H_{2k}(X_1, \mathbf{Q})$  associée à  $x_1$ , au sous-espace vectoriel  $K_{2k}(f)$  est non dégénérée.*

Il suffit de remarquer que  $K_{2k}(f) \cap \alpha_*(H_{2k}(X_2; \mathbf{Q})) = \{0\}$  et d'appliquer 2.4.3.

**DÉFINITION 2.4.5.** — Nous notons  $\tau(f, x_1)$  la classe dans le groupe de Witt  $W(\mathbf{Q})$  de l'espace  $K_{2k}(f)$  muni de la restriction de la forme d'intersection sur  $H_{2k}(X_1; \mathbf{Q})$  associée à  $x_1$ .

**PROPOSITION 2.4.6.** — *Nous avons  $\tau(f, x_1) = \tau(X_1, Y_1, x_1) - \tau(X_2, Y_2, f_*(x_1))$ .*

C'est une conséquence de 2.4.1 et de 2.4.3.

### 3. Données de chirurgie rationnelles

3.1. Soit  $(X, Y)$  un  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré de dimension  $n$ .

**DÉFINITION 3.1.1.** — Une donnée de chirurgie rationnelle sur  $X$  est un quadruple  $(W, f, v, \Phi)$  :

- (i)  $W$  est une variété différentiable compacte, orientée de dimension  $n$ , de bord  $V$ ;
- (ii)  $f: (W, V) \rightarrow (X, Y)$  une application continue vérifiant :
  - (a)  $f_*([W]) \in H_n(X, Y; \mathbf{Q})$  est non nul,

(b)  $f_* : H_*(V; \mathbf{Q}) \rightarrow H_*(Y; \mathbf{Q})$  est un isomorphisme;

(iii) Soit  $\mu : BSO \rightarrow BSO_{\mathbf{Q}}$  une localisation donnée une fois pour toute de l'espace simple  $BSO$  par rapport à la famille de nombres premiers vide [13].

$v : X \rightarrow BSO_{\mathbf{Q}}$  est une application continue. Soit alors :

$$\begin{array}{ccc} X^v & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow v \\ BSO & \xrightarrow{\mu} & BSO_{\mathbf{Q}} \end{array}$$

le « pull-back » de  $(X, v)$  et de  $(BSO, \mu)$  au-dessus de  $BSO_{\mathbf{Q}}$ . Nous notons  $\gamma^v$  le  $SO$ -fibré de base  $X^v$ , « image réciproque du  $SO$ -fibré universel de base  $BSO$  » par la projection  $X^v \rightarrow BSO$ ;

(iv)  $\Phi$  est un  $SO$ -morphisme du fibré normal stable  $v_w$  à la variété  $W$  dans le fibré  $\gamma^v$  au-dessus de  $f$  :

$$\begin{array}{ccc} v_w & \longrightarrow & \gamma^v \\ \downarrow & \Phi & \downarrow \\ W & \longrightarrow & X^v \\ & \searrow f & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

DÉFINITION 3.1.2. — Nous appelons plus généralement, avec les notations précédentes,  $X^v$ -orientation d'une variété, tout  $SO$ -morphisme de son fibré normal stable dans le fibré  $\gamma^v$ .

DÉFINITION 3.1.3. — Deux données de chirurgie rationnelles sont normalement cobordantes s'il existe une donnée de chirurgie rationnelle sur  $X \times I$  qui les relie.

Remarque 3.1.4. — Un cobordisme normal entre  $(W_1, f_1, v_1, \Phi_1)$  et  $(W_2, f_2, v_2, \Phi_2)$  induit un cobordisme entre  $W_1$  et  $W_2$  qui est un  $H_{\mathbf{Q}}$ -cobordisme entre les bords  $V_1$  et  $V_2$ .

3.1.5. Nous notons  $\tau$  l'application qui à toute donnée de chirurgie rationnelle  $(W, f, v, \Phi)$  de dimension  $4k$  associe l'élément  $\tau(f, [W])$ , 2.4.5.

PROPOSITION 3.1.6. — L'application  $\tau$  est invariante par cobordisme normal.

Cela résulte de 3.1.3, 2.4.6 et 2.1.7.

### 3.2. CALCUL DE $\tau$ DANS LE CAS OÙ $Y$ EST VIDE ( $\dim X = 4K$ ).

PROPOSITION 3.2.1. — Soit  $a = (W, f, v, \Phi)$  une donnée de chirurgie rationnelle sur  $X$ . Alors :

$$\begin{aligned} \partial\tau(a) &= -\partial\tau(X, f_*([W])) \quad \text{dans } W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z}), \\ \sigma\tau(a) &= \langle L_k(P_i(v)), f_*([W]) \rangle - \sigma(\tau(X, f_*([W])) \quad \text{dans } \mathbf{Z}, \end{aligned}$$

où  $P_i(v) \in H^{4i}(X; \mathbf{Q})$  sont les images par  $v^*$  des classes de Pontrjagin rationnelles universelles de  $H^{4i}(BSO_{\mathbf{Q}}; \mathbf{Q}) \simeq H^{4i}(BSO; \mathbf{Q})$  et  $L_k$  le polynôme de Hirzebruch.

Cette proposition est fondamentale car elle permet le calcul de  $\tau(a)$  dès que l'on connaît  $v$  et  $f_*([W])$ .

*Démonstration.* — D'après 2.4.6 :

$$\tau(a) = \tau(W) - \tau(X, f_*([W])).$$

La variété  $W$  étant sans bord, la forme d'intersection sur  $H_{2k}(W; \mathbf{Z})$  est non dégénérée.  $\tau(W)$  appartient donc à  $W(\mathbf{Z})$  et d'après 2.2.7,  $\partial\tau(W) = 0$ . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow v_w & & \downarrow v \\ BSO & \xrightarrow{\mu} & BSO_{\mathbf{Q}} \end{array}$$

où  $v_w$  est une classifiante du fibré normal à  $W$ , est homotopiquement commutatif. Il en résulte que  $f^*(P_i(v)) = P_i(v_w)$  dans  $H^{4i}(W; \mathbf{Q})$  et donc d'après la formule de Hirzebruch [7], p. 86, que  $\sigma(W) = \langle L_k(P_i(v)), f_*([W]) \rangle$ .

3.3. ÉTUDE DE  $\tau$  QUAND  $(X, Y)$  EST DE LA FORME  $(X \times I, X \times \partial I)$ ,  $\dim X = 4k - 1$ .

PROPOSITION 3.3.1. — Soit  $a = (W, V_0, V_1, f, v, \Phi)$  une donnée de chirurgie rationnelle sur  $(X \times I, X \times \partial I)$ .

Nous avons  $\partial\tau(a) = -[e(V_1) - e(V_0)]$  dans  $W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ .

*Démonstration.* — D'après 2.4.6 et 2.4.1,  $\tau(a) = \tau(W)$  et d'après 2.3.2,  $\partial\tau(W) = -e(\partial W) = -[e(V_1) - e(V_0)]$ .

PROPOSITION 3.3.2 (addition des cobordismes normaux). — Soient  $a = (W, V_0, V_1, f, v, \Phi)$  et  $a' = (W', V_0, V_1, f', v', \Phi')$  deux données de chirurgie rationnelles sur  $(X \times I, X \times \partial I)$ . Si  $\hat{a} = (\hat{W}, V_1, V_1, \hat{f}, \hat{v}, \Phi)$  est le recollé le long de  $V_0$ , nous avons  $\tau(\hat{a}) = \tau(a) - \tau(a')$ .

Nous appliquons 2.1.8 et 2.4.6.

#### 4. Le théorème de chirurgie rationnelle

L'objet de ce chapitre est la démonstration du théorème :

THÉORÈME 4. — Soit  $(X, Y)$  un  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré, et soit  $a = (W, f, v, \Phi)$  une donnée de chirurgie rationnelle sur  $X$  :

(i) pour  $n \neq 4k$ , la donnée de chirurgie rationnelle  $a$  est normalement cobordante à une structure différentiable sur  $X$ . C'est-à-dire une donnée de chirurgie  $a' = (W', f', v', \Phi')$  telle que l'application  $f' : H_*(W', \mathbf{Q}) \rightarrow H_*(X; \mathbf{Q})$  soit un isomorphisme;

(ii) pour  $n = 4k$  et  $k \neq 1$ , la condition nécessaire et suffisante pour que la donnée de chirurgie rationnelle  $a$  soit normalement cobordante à une structure différentiable est que l'élément  $\tau(a)$  du groupe de Witt  $W(\mathbf{Q})$  soit nul.

DÉFINITION 4.1. — Soit  $(W, f, v, \Phi)$  une donnée de chirurgie rationnelle sur  $X$ . Nous appelons chirurgie de dimension  $k$  la donnée :

1° d'un plongement  $\varphi : S^k \times D^{n-k} \rightarrow (\text{Int } W) \times \{1\}$ ;

2° d'une  $X^v$ -orientation  $T$  de la variété  $W \times I \cup D^{k+1} \times D^{n-k}$  qui étend  $\Phi$  sur  $W \times \{0\}$ .

Nous posons  $\partial(W \times I \cup_{\varphi} D^{k+1} \times D^{n-k}) = W \times \{0\} \cup \partial W \times I \cup W'$ ,  $\Phi' = \Phi/W'$  et  $f' : W' \rightarrow X$  l'application induite par la  $X^v$ -orientation  $\Phi'$ . Nous disons que la donnée de chirurgie rationnelle  $(W', f', v', \Phi')$  est obtenue à partir de  $(W, f, v, \Phi)$  en effectuant la chirurgie correspondante. Ces deux données de chirurgie sont normalement cobordantes par construction. Nous disons qu'une chirurgie est associée à  $y \in H_k(W; \mathbf{Q})$  si  $\varphi_*([S^k]) = r \cdot y$  où  $r$  est un rationnel non nul. Pour  $k \geq 1$  nous disons que  $f : W \rightarrow X$  est  $(\mathbf{Q}, k)$ -connexe si  $K_i(f) = 0$ ,  $i \leq k$ , et de plus  $\pi_1(W) = 0$ .

PROPOSITION 4.2. — Soient  $(W, f, v, \Phi)$  une donnée de chirurgie rationnelle sur  $X$ , et  $y$  un élément de  $K_k(f)$ . Nous supposons l'application  $f$   $(\mathbf{Q}, k-1)$ -connexe. Il existe une chirurgie associée à  $y$  dans les cas suivants :

- (i)  $k \leq [(n-1)/2]$ ;
- (ii)  $n = 2k \geq 6$  et  $k$  impair;
- (iii)  $n = 2k \geq 6$ ,  $k$  pair et  $y \cdot y = 0$ .

Démonstration. — Comme  $f$  est  $(\mathbf{Q}; k-1)$ -connexe, il résulte du théorème de Hurewicz-Serre qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S^k & \xrightarrow{g} & W \\ \downarrow & & \downarrow f \\ D^{k+1} & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

tel que  $g_*([S^k]) = r \cdot y$ . Comme  $\pi_*(X^v) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{\sim} \pi_*(X) \otimes \mathbf{Q}$  est un isomorphisme, nous pouvons supposer que nous avons, quitte à changer le rationnel  $r$ , le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S^k & \xrightarrow{g} & W \\ \downarrow & & \downarrow \Phi \\ D^{k+1} & \xrightarrow{h} & X^v \end{array}$$

soit, en épaississant

$$\begin{array}{ccc} S^k \times D^{n-k} & \xrightarrow{\bar{g}} & W \\ \downarrow & & \downarrow \Phi \\ D^{k+1} \times D^{n-k} & \xrightarrow{\bar{h}} & X^v \end{array}$$

Ce diagramme est recouvert par un diagramme de SO-morphismes fibrés, unique à homotopie près

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} {}^v S^k \times D^{n-k} & \xrightarrow{G} & {}^v W \\ \downarrow & & \downarrow \Phi \\ {}^v D^{k+1} \times D^{n-k} & \xrightarrow{H} & {}^v \gamma \end{array}$$

Lorsque  $n-k \geq 2$ , la classification des immersions donne une classe d'homotopie régulière d'immersion  $\psi : S^k \times D^{n-k} \rightarrow W$ , homotope à  $\bar{g}$  et induisant  $G$  sur les fibrés normaux. S'il existe un plongement  $\varphi$  dans cette classe, le diagramme (1) munit la variété  $W \times I \cup D^{k+1} \times D^{n-k}$  d'une  $X^v$ -orientation qui étend  $\Phi$  sur  $W \times \{0\}$ . Pour chercher  $\varphi$ , il est équivalent de chercher un plongement de  $S^k$  dans  $W$  régulièrement homotope à la restriction  $\psi : S^k \times \{0\} \rightarrow W$ .

Si  $n \geq 2k+1$ , un tel plongement existe toujours, ce qui montre la partie (i) pour  $n \geq 3$ . (Pour  $n \leq 2$ , c'est évident).

Si  $n = 2k \geq 6$ , et  $k$  impair, il existe toujours une chirurgie associée à  $y$  car si  $\psi : S^k \times \{0\} \rightarrow W$  n'est pas régulièrement homotope à un plongement, son double l'est.

Si  $n = 2k \geq 6$  et  $k$  pair, la variété  $W$  est simplement connexe et le procédé de Whitney montre que  $\psi : S^k \times \{0\} \rightarrow W$  est régulièrement homotope à un plongement si  $\psi_*([S^k]) \cdot \psi_*([S^k]) = 0$ , c'est-à-dire  $y \cdot y = 0$ .

**COROLLAIRE 4.3.** — *Toute donnée de chirurgie rationnelle sur  $X$  est normalement cobordante à une donnée de chirurgie  $(W, f, v, \Phi)$  où  $f$  est  $(\mathbf{Q} - [n/2] - 1)$ -connexe.*

Comme  $\pi_1(X^v) = 0$ , la démonstration précédente montre que pour tout  $y$  de  $\pi_1(W)$ , il existe une chirurgie de dimension 1 telle que  $\varphi_*([S^1]) = y$ . La démonstration classique [2] fait alors passer de la proposition au corollaire.

**4.4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.** — *1° Cas  $n$  impair,  $n = 2k + 1$ .* — Le résultat est manifeste pour  $n = 1$ . Pour  $n \geq 3$ , nous choisissons une donnée de chirurgie rationnelle  $(W, f, v, \Phi)$  où  $f$  est  $(\mathbf{Q}, k-1)$ -connexe et nous calquons la démonstration de Browder [2] pour tuer  $K_k(f)$  par une suite de chirurgies de dimension  $k$ .

*2° Cas  $n = 2k, k$  impair.* — Le résultat est évident pour  $k = 1$ . Pour  $k \geq 2$ , il n'y a pas de difficulté à tuer  $K_k(f)$  par une suite de chirurgies de dimension  $k$ , car il existe des chirurgies associées à tout élément d'une base symplectique de  $K_k(f)$ .

*3° Cas  $n = 2k, k$  pair,  $k \neq 2$ .* — Soit  $a = (W, f, v, \Phi)$  une donnée de chirurgie rationnelle sur  $X$  qui vérifie  $\tau(a) = 0$ . Nous pouvons supposer  $f$   $(\mathbf{Q}, k-1)$ -connexe. L'espace vectoriel bilinéaire  $K_k(f)$  est neutre. Il existe donc une base  $(e_i, f_i), 1 \leq i \leq p$ , telle que  $e_i \cdot e_j = 0, f_i \cdot f_j = 0$  et  $e_i \cdot f_j = \delta_{i,j}$ .

Nous tuons alors  $K_k(f)$  en effectuant les chirurgies associées aux  $e_i$ . La démonstration s'achève grâce au lemme :

**LEMME 4.5.** — *Soit  $(W, f, v, \Phi)$  une donnée de chirurgie rationnelle sur  $X$  où  $f$  est  $(\mathbf{Q}, [n/2])$ -connexe. Alors  $f$  est une équivalence d'homologie rationnelle.*

En effet les dualités de  $W$  et de  $X$ , identifient  $K_i(f)$  au dual de  $K_{n-i}(f)$ .

## 5. Cobordisme et données de chirurgie rationnelles

5.1. Soit  $X$  un  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré connexe sans bord de dimension  $n$ .

**DÉFINITION 5.1.1.** — Nous notons  $A_n(X)$  l'ensemble des classes d'équivalence de données de chirurgie rationnelles sur  $X$ , pour la relation de cobordisme normal.

L'application, qui à la donnée de chirurgie rationnelle  $(V, f, v, \Phi)$  associe l'image dans le groupe  $H_n(X; \mathbf{Q})$  de la classe d'orientation de la variété  $V$  par l'application  $f_*$ , définit par passage au quotient une application

$$d : A_n(X) \rightarrow H_n(X; \mathbf{Q}) - \{0\}.$$

L'application, qui à la donnée de chirurgie rationnelle  $(V, f, v, \Phi)$  associe la classe d'homotopie de l'application  $v$ , définit par passage au quotient une application

$$\theta : A_n(X) \rightarrow [X, BSO_{\mathbf{Q}}].$$

Soient  $[v]$  un élément de  $[X, BSO_{\mathbf{Q}}]$  et  $x$  un élément non nul de  $H_n(X; \mathbf{Q})$ . Nous notons respectivement  $A_n(X, [v])$  et  $A_n(X, x, [v])$  les sous-ensembles  $\theta^{-1}([v])$  et  $d^{-1}(x) \cap \theta^{-1}([v])$ , éventuellement vides, de  $A_n(X)$ .

5.1.2. Soit  $v : X \rightarrow BSO_{\mathbf{Q}}$  une application continue. Nous avons défini (3.1.2) une  $X^v$ -orientation d'une variété différentiable  $V$ . Nous notons  $\Omega_n^{X^v}$ , l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation de cobordisme  $X^v$ -orienté, de variétés différentiables, compactes sans bord, orientées, de dimension  $n$ , et munies d'une  $X^v$ -orientation. C'est un groupe abélien pour l'union disjointe. Une  $X^v$ -orientation  $t$ , d'une variété  $V$ , donne une application continue  $f$  de  $V$  dans  $X$  :

$$\begin{array}{ccc} v_v \longrightarrow & \gamma^v & \\ \downarrow & \downarrow & \\ V \longrightarrow & X^v & \\ & \searrow f & \downarrow p_1 \\ & & X \end{array}$$

L'application qui, à la variété  $X^v$ -orientée  $(V, t)$  associe l'image par  $f_*$  de la classe d'orientation de la variété  $V$ , définit par passage au quotient un homomorphisme  $\Omega_n^{X^v} \rightarrow H_n(X; \mathbf{Q})$ .

Notons  $\Omega_n^{X^v}(x)$  l'image inverse, éventuellement vide, de l'élément  $x$  de  $H_n(X; \mathbf{Q})$ .

5.2. Le but de ce paragraphe est de définir une opération du groupe  $[X, SO] \otimes \mathbf{Q}$  dans  $\Omega_n^{X^v}(x)$ .

5.2.1. Rappelons comment est construit le « pull-back » :

$$\begin{array}{ccc} X^v & \xrightarrow{p_1} & X \\ \downarrow & & \downarrow v \\ BSO & \xrightarrow{\mu} & BSO_{\mathbf{Q}} \end{array}$$

Nous transformons d'abord l'application  $v : X \rightarrow BSO_{\mathbf{Q}}$  en une fibration  $\tilde{p} : X \rightarrow BSO_{\mathbf{Q}}$ , où  $\tilde{X}$  est la partie du produit  $X \times L(BSO_{\mathbf{Q}}) - L(BSO_{\mathbf{Q}})$  est l'espace des chemins non basés de  $BSO_{\mathbf{Q}}$ , caractérisée par  $(x, \lambda) \in \tilde{X}$  si et seulement si  $v(x) = \lambda(1)$ . La projection  $p$  est



définie par  $p(x, \lambda) = \lambda(0)$ . Soit  $X^v$  l'espace total de la fibration, image réciproque par  $\mu : BSO \rightarrow BSO_{\mathbb{Q}}$  de la fibration  $\tilde{p} : X \rightarrow BSO_{\mathbb{Q}}$ . L'espace  $X^v \subset BSO \times X \times L(BSO_{\mathbb{Q}})$  est l'ensemble des triples  $(m, x, \lambda)$  vérifiant  $\mu(m) = \lambda(0)$ ,  $v(x) = \lambda(1)$ .

5.2.2. Soit  $\mathfrak{R} : X \times I \rightarrow BSO_{\mathbb{Q}}$  une homotopie entre  $v_0$  et  $v_1$ . Nous construisons comme précédemment l'espace  $(X \times I)^{\mathfrak{R}}$ . L'inclusion de  $X$  identifié à  $X \times \{0\}$  dans  $X \times I$  et la projection de  $X \times I$  sur  $X \times \{1\}$  induisent respectivement une inclusion de  $X^{v_0}$  dans  $(X \times I)^{\mathfrak{R}}$  et une rétraction de  $(X \times I)^{\mathfrak{R}}$  sur  $X^{v_1}$ . Par composition, nous obtenons l'application

$$\alpha_{\mathfrak{R}} : X^{v_0} \rightarrow X^{v_1}$$

définie par

$$\alpha_{\mathfrak{R}}(m, x, \lambda) = (m, x, \lambda + \mathfrak{R}(x, -)),$$

où la notation  $\lambda + \mathfrak{R}(x, -)$  désigne la composition des chemins  $\lambda$  d'extrémité  $v(x) = \mathfrak{R}(x, 0)$  et du chemin  $u \rightarrow \mathfrak{R}(x, u)$ . L'application  $\alpha_{\mathfrak{R}}$  respecte les projections sur  $BSO$ . Elle est donc canoniquement recouverte par un morphisme  $\tilde{\alpha}_{\mathfrak{R}} : \gamma^{v_0} \rightarrow \gamma^{v_1}$ . Si deux homotopies  $\mathfrak{R}_0$  et  $\mathfrak{R}_1$  sont homotopes par une homotopie qui laisse fixe  $v_0$  et  $v_1$ , les deux morphismes  $\tilde{\alpha}_{\mathfrak{R}_0}$  et  $\tilde{\alpha}_{\mathfrak{R}_1}$  sont homotopes.

5.2.3. Supposons maintenant que  $v_0 = v_1 = v$ .

L'ensemble des classes d'homotopie, d'homotopies de  $v$  à  $v$ , est un groupe canoniquement isomorphe à  $[\sum X, BSO_{\mathbb{Q}}] \simeq [X, SO_{\mathbb{Q}}] = [X, SO] \otimes \mathbb{Q}$ . Soit  $(V, t)$  une variété  $X^v$ -orientée, et  $\mathfrak{R}$  une homotopie de  $v$  à  $v$ . L'application  $(V, t) \rightarrow (V, \tilde{\alpha}_{\mathfrak{R}} \circ t)$  définit une action du groupe  $[X, SO] \otimes \mathbb{Q}$  dans  $\Omega_n^{X^v}$ . L'application  $\alpha_{\mathfrak{R}}$  respecte la projection sur  $X$ . Le groupe  $[X, SO] \otimes \mathbb{Q}$  opère donc dans les fibres de l'application  $\Omega_n^{X^v} \rightarrow H_n(X; \mathbb{Q})$ .

5.3. Soit  $\pi : \Omega_n^{X^v}(x) \rightarrow A_n(X, x, [v])$  l'application définie par  $(V, t) \rightarrow (V, p_1 \circ t, v, t)$ .

PROPOSITION 5.3.1 :

- (i) Les ensembles  $\Omega_n^{X^v}(x)$  et  $A_n(X, x, [v])$  sont simultanément vides.
- (ii) Sinon, l'application  $\pi$  identifie l'ensemble  $A_n(X, x, [v])$  au quotient de  $\Omega_n^{X^v}(x)$  par l'action du groupe  $[X, SO] \otimes \mathbb{Q}$ .

*Démonstration.* — Soit  $(V, f, v_0, t_0)$  un représentant d'un élément de  $A_n(X, x, [v])$ . Choisissons une homotopie  $\mathfrak{R}$  entre  $v_0$  et  $v$ . Par relèvement des homotopies, on peut étendre la  $X^{v_0}$ -orientation  $t_0$  de  $V$  en une  $(X \times I)^{\mathfrak{R}}$ -orientation  $T$ , de la variété  $V \times I$ . Dans  $A_n(X, x, [v])$  nous avons  $(V, f, v_0, t_0) = (V, g, v, T/V \times \{1\})$  qui est l'image par  $\pi$  de  $(V, T/V \times \{1\})$ . Ceci démontre (i) et la surjectivité de  $\pi$  dans (ii). Soient maintenant  $(V_0, t_0)$  et  $(V_1, t_1)$  deux variétés  $X^v$ -orientées qui ont même image dans  $A_n(X, x, [v])$ . Il existe donc un cobordisme  $W$  entre  $V_0$  et  $V_1$  une homotopie  $\mathfrak{R}$  de  $v$  à  $v$  et une  $(X \times I)^{\mathfrak{R}}$ -orientation de  $W$  qui étend  $t_0$  et  $t_1$ . En rétractant  $(X \times I)^{\mathfrak{R}}$  sur  $X^v$ , on obtient une  $X^v$ -orientation de  $W$  qui étend les  $X^v$ -orientations  $\alpha_{\mathfrak{R}} \circ t_0$  et  $t_1$  respectivement de  $V_0$  et  $V_1$ . Il en résulte que les classes dans  $\Omega_n^{X^v}(x)$  des éléments  $(V_0, \alpha_{\mathfrak{R}} \circ t_0)$  et  $(V_1, t_1)$  coïncident. Réciproquement, soient  $\mathfrak{R}$  une homotopie de  $v$  à  $v$  et  $(V, t)$  une variété  $X^v$ -orientée. Si  $t(v) = (m(v), x(v), \lambda(v)) \in X^v$ , nous prolongeons  $t$  en une  $(X \times I)^{\mathfrak{R}}$ -orientation de  $V \times I$ ,  $T$  par la formule

$$T(v, u) = (m(v), x(v), \lambda + \mathfrak{R}(x, -))$$

où la notation  $\lambda + \mathfrak{R}(x, -)$  désigne la composition des chemins  $\lambda$  d'extrémité  $v(x)$  et du chemin  $t \rightarrow \mathfrak{R}(x, t)$ , ( $0 \leq t \leq u$ ). Il en résulte que les classes des variétés  $X^v$ -orientées  $(V, t)$  et  $(V, \alpha_{\mathfrak{R}} \circ t)$  ont même image par  $\pi$ .

### 6. Étude du groupe de cobordisme $\Omega_n^{X^v}$

Dans ce chapitre, nous allons calculer le groupe  $\Omega_n^{X^v}$  dans le cas où le  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré connexe  $X$  est  $\mathbf{Q}$ -local. (C'est-à-dire que  $\tilde{H}_*(X; \mathbf{Z})$  est un  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel [13].)

6.1.  $E^{\mathbf{Q}}$ -ORIENTATION ET GROUPE  $\Omega_n^{\mathbf{Q}}$ . — Les démonstrations des résultats de ce paragraphe sont dans [1].

6.1.1. Notons  $E^{\mathbf{Q}} \rightarrow BSO$  la fibration, image réciproque par la localisation  $\mu : BSO \rightarrow BSO_{\mathbf{Q}}$ , de la fibration des chemins basés de  $BSO_{\mathbf{Q}}$ .

Notons  $\gamma^{\mathbf{Q}}$  le  $SO$ -fibré image réciproque du  $SO$ -fibré universel de base  $BSO$  par la projection  $E^{\mathbf{Q}} \rightarrow BSO$ .

DÉFINITION 6.1.1. — Une  $E^{\mathbf{Q}}$ -orientation d'une variété différentiable est un  $SO$ -morphisme de son fibré normal stable dans  $\gamma^{\mathbf{Q}}$ .

DÉFINITION 6.1.2. — Notons  $\Omega_n^{\mathbf{Q}}$  le groupe des classes, pour la relation de cobordisme  $E_{\mathbf{Q}}$ -orienté, de variétés différentiables, compactes, orientées, sans bord, de dimension  $n$  et munies d'une  $E^{\mathbf{Q}}$ -orientation.

6.1.3. Notons  $\Omega_n^{\text{SO}}$  le groupe de cobordisme orienté des variétés différentiables orientées, compactes, sans bord de dimension  $n$ .

PROPOSITION 6.1.3. — Si  $n \neq 4k-1$ , l'application d'oubli  $\Omega_n^{\mathbf{Q}} \rightarrow \Omega_n^{\text{SO}}$  induit un isomorphisme du groupe  $\Omega_n^{\mathbf{Q}}$  sur la torsion  $T \Omega_n^{\text{SO}}$  du groupe  $\Omega_n^{\text{SO}}$ .

Si  $n = 4k-1$ , nous avons la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{Q}^{\pi(k)}/\mathcal{L} \rightarrow \Omega_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \rightarrow \Omega_{4k-1}^{\text{SO}} \rightarrow 0$$

où  $\pi(k)$  est le nombre de partitions de l'entier  $k$ , et  $\mathcal{L}$ , le réseau dans  $\mathbf{Q}^{\pi(k)}$  des nombres de Pontrjagin des variétés compactes, orientées, sans bord de dimension  $4k$ .

6.1.4. Rappelons comment est défini l'isomorphisme du noyau de  $\Omega_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \rightarrow \Omega_{4k-1}^{\text{SO}}$ , sur  $\mathbf{Q}^{\pi(k)}/\mathcal{L}$ . Soient  $(V, t)$  une variété de dimension  $4k-1$ ,  $E^{\mathbf{Q}}$ -orientée, qui borde une variété  $W$ . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{t} & E^{\mathbf{Q}} \\ \downarrow i & & \downarrow \\ W & \xrightarrow{v_w} & BSO \end{array}$$

où  $v_W$  est une classifiante du fibré normal stable de la variété  $W$  est homotopiquement commutatif. Nous avons la suite d'applications

$$\begin{array}{ccc} H_{4k}(W, V; \mathbf{Z}) \rightarrow H_{4k}(\text{BSO}, E^{\mathbf{Q}}; \mathbf{Q}) & \xrightarrow{\alpha} & H_{4k}(\text{BSO}; \mathbf{Q}) \\ & & \downarrow P \\ & & \mathbf{Q}^{\pi(k)} \rightarrow \mathbf{Q}^{\pi(k)}/\mathcal{L} \end{array}$$

L'application  $\alpha$  est un isomorphisme pour  $k > 0$  car  $\tilde{H}_*(E^{\mathbf{Q}}; \mathbf{Q}) = 0$ . L'application  $P$  est l'isomorphisme donné par les nombres de Pontrjagin rationnels.

L'image de la classe d'orientation  $[W]$  dans  $\mathbf{Q}^{\pi(k)}/\mathcal{L}$  est indépendante du choix de la variété  $W$ .

6.2. COMPARAISON DES GROUPES  $\Omega_n^{\mathbf{Q}}$  ET  $\Omega_n^{X^v}$ .

6.2.1. L'espace  $E^{\mathbf{Q}}$  est la fibre homotopique de la localisation :  $\mu : \text{BSO} \rightarrow \text{BSO}_{\mathbf{Q}}$ ; c'est donc aussi la fibre de la fibration  $p_1 : X^v \rightarrow X$ . Choisir un point de  $X$  donne une inclusion de  $E^{\mathbf{Q}}$  dans  $X^v$ , au-dessus de l'identité de  $\text{BSO}$ , donc un morphisme

$$i : \begin{array}{ccc} \gamma^{\mathbf{Q}} & \rightarrow & \gamma^v \\ \downarrow & & \downarrow \\ E^{\mathbf{Q}} & \rightarrow & X^v \end{array}$$

qui induit une application d'oubli  $\Omega_n^{\mathbf{Q}} \rightarrow \Omega_n^{X^v}$ .

6.2.2. Considérons la suite exacte de cobordisme relatif

$$\rightarrow \Omega_p^{X^v} \rightarrow \Omega_p^{X^v, \mathbf{Q}} \rightarrow \Omega_{p-1}^{\mathbf{Q}} \rightarrow$$

LEMME 6.2.2. — *Le groupe  $\Omega_p^{X^v, \mathbf{Q}}$  est  $\mathbf{Q}$ -local (c'est-à-dire que le morphisme  $\Omega_p^{X^v, \mathbf{Q}} \rightarrow \Omega_p^{X^v, \mathbf{Q}} \otimes \mathbf{Q}$  est un isomorphisme).*

Démonstration. — Le morphisme  $i$  induit, par image réciproque au-dessus de  $\text{BSO}(k)$ , le morphisme

$$i_k : \begin{array}{ccc} \gamma_k^{\mathbf{Q}} & \rightarrow & \gamma_k^v \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_k^{\mathbf{Q}} & \rightarrow & X_k^v \end{array}$$

Soient  $T i_k : T \gamma_k^{\mathbf{Q}} \rightarrow T \gamma_k^v$  l'application induite entre les espaces de Thom et  $C(T i_k)$  son cône. Le groupe  $\Omega_p^{X^v}$  est isomorphe à  $\lim_k \pi_{p+k} [C(T i_k)]$  [11].

L'espace  $X^v$  est l'espace total d'une fibration de base  $X$ ,  $\mathbf{Q}$ -local et de fibre  $E^{\mathbf{Q}}$ . Il résulte alors de la suite spectrale homologique que  $i_{k*} : H_*(E_k^{\mathbf{Q}}; \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H_*(X_k^v; \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$  est un isomorphisme [puisque  $\tilde{H}_*(X; \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = 0$ ]. Des isomorphismes de Thom on déduit que

$$(T i_k)_* : H_*(T \gamma_k^{\mathbf{Q}}; \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H_*(T \gamma_k^v; \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

est un isomorphisme. Il en résulte [13] que l'espace  $C(T i_k)$  est  $\mathbf{Q}$ -local, d'où le lemme.

6.2.3. Soit  $W$  une variété compacte orientée, sans bord, de dimension  $p$ ,  $X^v$ -orientée (resp.  $E^{\mathbf{Q}}$ -orientée). Prendre l'image de la classe d'orientation de  $W$  par l'application

induite en homologie par la  $X^v$ -orientation (resp.  $E^0$ -orientation) fournit un homomorphisme  $\Omega_p^{X^v} \rightarrow H_p(X^v)$  [resp.  $\Omega_p^0 \rightarrow H_p(E^0)$ ].

LEMME 6.2.3 [11]. — *Les homomorphismes précédents induisent des isomorphismes*

$$\Omega_p^{X^v} \otimes \mathbf{Q} \rightarrow H_p(X^v; \mathbf{Q}) \quad \text{et} \quad \Omega_p^0 \otimes \mathbf{Q} \rightarrow H_p(E^0; \mathbf{Q}).$$

COROLLAIRE 6.2.4. — *Le groupe  $\Omega_p^{X^v, 0}$  est isomorphe à  $H_p(X, \star; \mathbf{Q})$ .*

*Démonstration.* — Nous avons la suite d'isomorphismes

$$\Omega_p^{X^v, 0} \xrightarrow{1} \Omega_p^{X^v, 0} \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{2} H_p(X^v, E^0; \mathbf{Q}) \xrightarrow{3} H_p(X, \star; \mathbf{Q}),$$

1 est un isomorphisme d'après 6.2.2.

2 en est un d'après 6.2.3 et le lemme des cinq.

3 est un isomorphisme car la fibre  $E^0$  de  $X^v$  est  $\mathbf{Q}$ -contractile.

6.3. CALCUL DE  $\Omega_n^{X^v}$ . — Comme  $X$  est un  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré de dimension  $n$  — en particulier  $H_i(X; \mathbf{Q}) = 0$ ,  $i > n$ , et  $H_n(X; \mathbf{Q}) \simeq \mathbf{Q}$  — la suite exacte 6.2.2 donne, compte tenu de 6.2.4 :

$$0 \rightarrow \Omega_n^0 \rightarrow \Omega_n^{X^v} \rightarrow H_n(X; \mathbf{Q}) \rightarrow \Omega_{n-1}^0.$$

Le groupe  $\Omega_{n-1}^0$  est de torsion [1], p. 481. Pour  $n \neq 4k$ , il est de type fini d'après 6.1.3. Nous obtenons :

PROPOSITION 6.3.1. — *Pour  $n \neq 4k$ , la suite :  $0 \rightarrow \Omega_n^0 \rightarrow \Omega_n^{X^v} \rightarrow H_n(X; \mathbf{Q}) \rightarrow 0$  est exacte.*

COROLLAIRE 6.3.2. — *Pour  $n \neq 4k$ , pour tout  $x$  de  $H_n(X; \mathbf{Q})$  l'ensemble  $\Omega_n^{X^v}(x)$  est homogène sous le groupe  $\Omega_n^0$ .*

COROLLAIRE 6.3.3. — *Pour  $n \neq 4k$ , pour tout  $x$  de  $H_n(X; \mathbf{Q})$  et pour tout  $[v]$  de  $[X, BSO_{\mathbf{Q}}]$  l'ensemble  $A_n(X, x, [v])$  n'est pas vide.*

Appliquer 5.3.1 et 6.3.2.

6.3.4. Supposons donc  $n = 4k$ ,  $k > 0$ . Nous allons calculer le noyau de l'homomorphisme

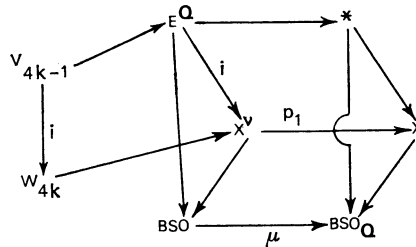
$$b : H_{4k}(X; \mathbf{Q}) \rightarrow \Omega_{4k-1}^0.$$

Considérons le diagramme

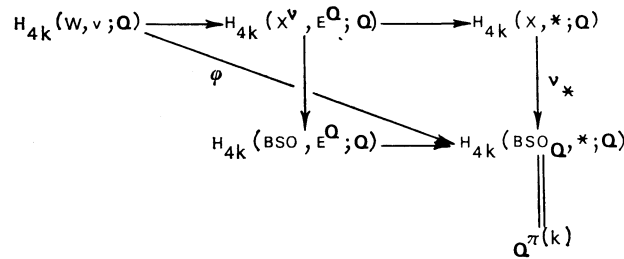
$$\begin{array}{ccc} & & 0 \\ & & \downarrow \\ & & \mathbf{Q}^{\pi(k)}/\mathcal{L} \\ & \nearrow \tilde{b} & \downarrow \\ H_{4k}(X; \mathbf{Q}) = \Omega_{4k}^{X^v, 0} & \xrightarrow{b} & \Omega_{4k-1}^0 \\ & & \downarrow \theta \\ & & \Omega_{4k-1}^{SO} \\ & & \downarrow \\ & & 0 \end{array}$$

La composée  $\theta \circ b$  est évidemment nulle. L'homomorphisme  $b$  se relève donc en  $\tilde{b} : \Omega_{4k}^{X^v} \rightarrow \mathbb{Q}^{\pi(k)}/\mathcal{L}$  de même noyau et que l'on calcule comme indiqué en 6.1.4.

Considérons le diagramme homotopiquement commutatif



d'où en homologie



Soient  $u \in \Omega_{4k}^{X^v, \mathbb{Q}}$  et  $x$  son image dans  $H_{4k}(X; \mathbb{Q})$ . Nous avons 6.1.4  $\tilde{b}(u) = \langle \overline{p_{\omega}}, \varphi([W]) \rangle$  dans  $\mathbb{Q}^{\pi(k)}/\mathcal{L}$  :

$$\tilde{b}(u) = \langle \overline{p_{\omega}}, v_*(x) \rangle = \langle \overline{p_{\omega}(v)}, x \rangle.$$

Nous obtenons :

PROPOSITION 6.3.5. — Soit  $N_{4k}$  le sous-groupe de  $H_{4k}(X; \mathbb{Q})$  formé des  $x$  tels que le vecteur de  $\mathbb{Q}^{\pi(k)}$  de coordonnées  $\langle \overline{p_{\omega}(v)}, x \rangle$  appartienne au réseau  $\mathcal{L}$  des nombres de Pontrjagin des variétés différentiables compactes sans bord de dimension  $4k$ . La suite

$$0 \rightarrow \Omega_{4k}^{\mathbb{Q}} \rightarrow \Omega_{4k}^{X^v} \rightarrow N_{4k} \rightarrow 0$$

est exacte.

Nous en déduisons le :

COROLLAIRE 6.3.6. — L'ensemble  $\Omega_{4k}^{X^v}(x)$  est non vide si et seulement si les nombres  $\langle \overline{p_{\omega}(v)}, x \rangle$  sont les nombres de Pontrjagin d'une variété différentiable compacte sans bord, de dimension  $4k$ . Dans ce cas le groupe  $\Omega_{4k}^{\mathbb{Q}}$  opère de façon simplement transitive.

COROLLAIRE 6.3.7. — Soit  $x$  un élément de  $H_{4k}(X; \mathbb{Q})$  et soit  $[v]$  un élément de  $[X, BSO_{\mathbb{Q}}]$ . La condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble  $A_{4k}(X, x, [v])$

soit non vide, est que les nombres  $\langle p_\omega(v), x \rangle$  soient les nombres de Pontrjagin d'une variété différentiable compacte sans bord orientée de dimension  $4k$ .

### 7. Calcul de l'ensemble $A_n(X, x, [v])$

Dans ce chapitre nous allons calculer l'action du groupe  $[X, \text{SO}] \otimes \mathbf{Q}$  dans l'ensemble  $\Omega_n^{\text{Xv}}(x)$ . L'espace  $X$  est toujours supposé  $\mathbf{Q}$ -local.

7.1. Remarquons que l'action du groupe  $[X, \text{SO}] \otimes \mathbf{Q}$  respecte la classe de cobordisme orientée des variétés. Il agit donc dans les fibres de l'application d'oubli  $\theta : \Omega_n^{\text{Xv}}(x) \rightarrow \Omega_n^{\text{SO}}$ . Soit  $u$  un élément de  $\Omega_n^{\text{Xv}}(x)$  et  $\mathfrak{R} : X \times I \rightarrow \text{BSO}_{\mathbf{Q}}$  une homotopie de  $v$  à  $v$ . Nous notons  $\alpha_{\mathfrak{R}}.u$  le transformé de  $u$  par l'action de  $\mathfrak{R}$ .

7.1.1. L'élément  $\alpha_{\mathfrak{R}}.u - u$  appartient au noyau de l'homomorphisme

$$\theta + d : \Omega_n^{\text{Xv}} \rightarrow \Omega_n^{\text{SO}} \oplus H_n(X; \mathbf{Q}).$$

Il résulte des propositions 6.3.1 et 6.1.3, que pour  $n \neq 4k-1$ ,  $\theta + d$  est injectif.

PROPOSITION 6.1.1. — Pour  $n \neq 4k-1$  le groupe  $[X, \text{SO}] \otimes \mathbf{Q}$  agit trivialement dans l'ensemble  $\Omega_n^{\text{Xv}}(x)$ .

7.1.2. Supposons donc  $n = 4k-1$ . — D'après 6.3.1 et 6.1.3 nous avons dans ce cas le diagramme où lignes et colonnes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \mathbf{Q}^{\pi(k)}/\mathcal{L} & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & \Omega_{4k-1}^{\mathbf{Q}} & \rightarrow & \Omega_{4k-1}^{\text{Xv}} & \xrightarrow{d} & H_{4k-1}(X; \mathbf{Q}) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \theta & & \\ & & \Omega_{4k-1}^{\text{SO}} & \xrightarrow{\text{id}} & \Omega_{4k-1}^{\text{SO}} & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

qui nous montre que  $\text{Ker}(\theta + d)$  est isomorphe au quotient  $\mathbf{Q}^{\pi(k)}/\mathcal{L}$ .

Soit  $(V, t)$  un représentant d'un élément de  $\text{Ker}(\theta + d)$ . Il existe un cobordisme  $(W, T)$   $\text{Xv}$ -orienté entre  $(V, t)$  et  $(V', t')$  où  $t'$  est une  $E^{\mathbf{Q}}$ -orientation de la variété  $V'$ . La variété  $V'$  borde une variété  $M'$ . Appliquer le calcul 6.1.4 à  $(M', V', t')$  fournit la classe de  $(V, t)$  dans  $\mathbf{Q}^{\pi(k)}/\mathcal{L}$ . Malheureusement cet isomorphisme de  $\text{Ker}(\theta + d)$  sur le quotient  $\mathbf{Q}^{\pi(k)}/\mathcal{L}$  n'est pas calculable car il est difficile de trouver le cobordisme  $W$ .



L'image dans  $H_{4k}(X \times S^1; \mathbf{Q})$  de la classe d'orientation de la variété  $V \times I$  provient de l'élément  $x \times i$  de  $H_{4k}(X \times S^1; \mathbf{Q})$ , d'où la proposition.

7.2. Dans ce paragraphe nous allons calculer l'action du groupe  $[X, SO] \otimes \mathbf{Q}$  dans  $\Omega_n^{X \vee}(x)$  en termes de classes caractéristiques.

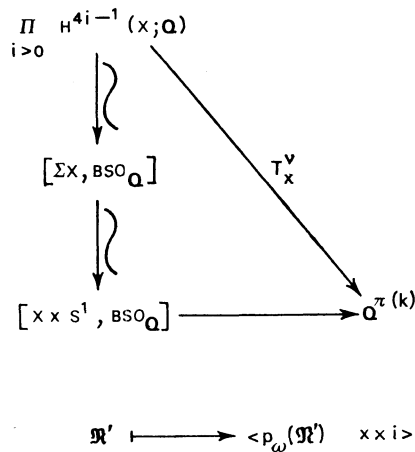
7.2.1. Rappelons que le localisé  $BSO_{\mathbf{Q}}$  de l'espace simple  $BSO$  est isomorphe au produit  $\prod_{i>0} K(\mathbf{Q}, 4i)$  où  $K(\mathbf{Q}, 4i)$  est un espace d'Eilenberg-MacLane [12]. Il en résulte que le localisé  $SO_{\mathbf{Q}}$  du groupe  $SO$  est isomorphe au produit  $\prod_{i>0} K(\mathbf{Q}, 4i-1)$  (car  $\Omega(BSO_{\mathbf{Q}}) \simeq (\Omega BSO)_{\mathbf{Q}} \simeq SO_{\mathbf{Q}}$ ). Nous obtenons :

LEMME 7.2.1. — *Le groupe  $[X, SO] \otimes \mathbf{Q}$  est isomorphe à la somme  $\bigoplus_{i>0} H^{4i-1}(X; \mathbf{Q})$ .*

7.2.2. Notons  $[X \times S^1, BSO_{\mathbf{Q}}]_{\vee}$  l'ensemble des classes à homotopie près de prolongements à  $X \times S^1$  de l'application  $v : X \rightarrow BSO_{\mathbf{Q}}$ . Soit  $\phi : X \times S^1 \rightarrow \Sigma X$  la projection du produit  $X \times S^1$  sur la suspension réduite de  $X$  et soit  $p : X \times S^1 \rightarrow X$  la projection. Soit  $\eta : \Sigma X \rightarrow BSO_{\mathbf{Q}}$  une application continue. La correspondance :  $\eta \rightarrow \eta \circ \phi + v \circ p$  (où  $+$  désigne la loi de H-espace de  $BSO_{\mathbf{Q}}$ ) induit un isomorphisme

$$[\Sigma X, BSO_{\mathbf{Q}}] = [X, SO] \otimes \mathbf{Q} \rightarrow [X \times S^1, BSO_{\mathbf{Q}}]_{\vee}.$$

7.2.3. Nous avons le diagramme où  $x$  est un élément non nul de  $H_{4k-1}(X; \mathbf{Q})$  :



et nous voulons calculer l'application  $T_x^v$ .

Fixons les notations suivantes : soient  $v_i \in H^{4i}(X; \mathbf{Q})$   $i = 1, 2, \dots, k-1$  la classe d'homotopie de l'application  $v : X \rightarrow BSO_{\mathbf{Q}}$ . Soient  $\eta_i \in H^{4i-1}(X; \mathbf{Q})$   $i = 1, 2, \dots, k$  un élément  $\eta$  du groupe  $[X, SO] \otimes \mathbf{Q}$ . Notons, si  $\omega$  est une partition de l'entier  $k$ ,  $T_x^v(\eta)_{\omega}$  la  $\omega$ -ième composante dans  $\mathbf{Q}^{\pi(k)}$  de  $T_x^v(\eta)$ .



PROPOSITION 7.2.4. — Soit  $\omega = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ . Alors il existe des polynômes universels  $P_i^0$  tels que  $P_i^0(v_i)$  appartienne à  $H^{4(k-1)}(X; \mathbf{Q})$  :

$$T_x^v(\eta)_\omega = \left\langle \sum_{0 < l \leq \sup_j i_j} \eta_l \cup P_l^0(v_l), x \right\rangle$$

et tels que

$$T_x^v(\eta)_{(k)} = \left\langle \sum_{0 < l < k} \eta_l \cup P_l^{(k)}(v_l), x \right\rangle + \langle \eta_k, x \rangle,$$

où  $(k)$  désigne la partition  $(k)$ .

Nous déduisons le :

COROLLAIRE FONDAMENTAL 7.2.5 :

(i) l'application  $T_x^v$  est une application linéaire du  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel  $\bigoplus_{i>0} H^{4i-1}(X; \mathbf{Q})$  dans  $\mathbf{Q}^{\pi(k)}$ ;

(ii) pour tout  $v : X \rightarrow BSO_{\mathbf{Q}}$ , l'image de l'homomorphisme  $T_x^v$  contient le sous-espace vectoriel de dimension 1 de  $\mathbf{Q}^{\pi(k)}$  engendré par la partition  $(k)$ ;

(iii) si l'application  $v$  est homotope à l'application constante ( $v = 0$ ), l'homomorphisme  $T_x^0$  a pour image le sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la partition  $(k)$ .

Démonstration de 7.2.4. — Posons

$$P(v) = v_0 + v_1 + \dots + v_{k-1}, \quad v_0 = 1,$$

$$P(\eta) = 1 + \bar{\eta}_1 + \dots + \bar{\eta}_k,$$

où  $\bar{\eta}_j \in H^{4j}(\Sigma X; \mathbf{Q})$  est le suspendu de  $\eta_j \in H^{4j-1}(X; \mathbf{Q})$ . Soit  $f$  l'image dans  $H^1(S^1; \mathbf{Q})$  du générateur de  $H^1(S^1; \mathbf{Z})$ . Nous avons

$$\varphi^*(\bar{\eta}_j) = \eta_j \times \hat{i},$$

$$p^*(v_j) = v_j \times 1.$$

Soit  $\mathfrak{R}' : X \times S^1 \rightarrow BSO_{\mathbf{Q}}$  définie par  $\mathfrak{R}' = \eta \circ \varphi + v \circ p$ . Alors :

$$P(\mathfrak{R}') = \varphi^*(P(\eta)) \cup p^*(P(v)),$$

$$P(\mathfrak{R}') = 1 + p_1(\mathfrak{R}') + \dots + p_k(\mathfrak{R}')$$

$$= (v_0 + v_1 + \dots + v_{k-1}) \times 1 + [(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_k) \cup (v_0 + \dots + v_{k-1})] \times \hat{i},$$

d'où

$$p_j(\mathfrak{R}') = v_j \times 1 + \left( \sum_{0 < l \leq j} \eta_l \cup v_{j-l} \right) \times \hat{i}$$

et si  $\omega = i_1, \dots, i_r$  est une partition de  $k$  :

$$\langle p_\omega(\mathfrak{R}'), x \times i \rangle = \left\langle \sum_{0 < l < \sup_j i_j} \eta_l \cup P_l^0(v_l), x \right\rangle.$$

## 8. La suite exacte de chirurgie rationnelle

Dans ce chapitre nous allons construire une application  $\gamma$  de l'ensemble  $\mathcal{S}_n^{\mathbf{Q}}(X)$  des classes de structures différentiables sur le  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré  $X$  de dimension  $n$ , dans l'ensemble  $A_n(X)$  des classes de données de chirurgie rationnelle, et étudier grâce à 4 son image et son « noyau ».

8.1. CONSTRUCTION DE  $\gamma$ .

LEMME 8.1.1. — Soit  $(V, f)$  une structure différentiable sur  $X$ . Il existe une application  $v : X \rightarrow \text{BSO}_{\mathbf{Q}}$ , unique à homotopie près, telle que la variété  $V$  soit  $X^v$ -orientable par une orientation  $\Phi$  au-dessus de  $f$ .

Comme  $H^*(X, V; \mathbf{Q}) = 0$ , nous avons, pour tout  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel  $M$ ,  $H^*(X, V; M) = 0$ . Il résulte alors de la théorie de l'obstruction que pour tout espace  $\mathbf{Q}$ -local et simplement connexe  $Y$ , l'application

$$f^* : [X, Y] \rightarrow [V, Y]$$

est un isomorphisme. En particulier, il existe une classe d'homotopie unique  $[v]$ ,  $v : X \rightarrow \text{BSO}_{\mathbf{Q}}$  qui rende homotopiquement commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow v_v & & \downarrow v \\ \text{BSO} & \xrightarrow{\mu} & \text{BSO}_{\mathbf{Q}} \end{array}$$

où  $v_v$  est une classifiante du fibré normal stable de la variété  $V$ .

LEMME 8.1.2. — Soit  $(V, f)$  une structure différentiable sur  $X$  et soient  $\Phi_1, \Phi_2$ , respectivement une  $X^{v_1}$ - et une  $X^{v_2}$ -orientation de la variété  $V$  au-dessus de  $f$ . Il existe une homotopie  $\mathfrak{R} : X \times I \rightarrow \text{BSO}_{\mathbf{Q}}$  entre  $v_1$  et  $v_2$  et une  $(X \times I)^{\mathfrak{R}}$ -orientation de la variété  $V \times I$ , au-dessus de  $f \times \text{id}$  et prolongeant  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ .

La démonstration est analogue à celle du lemme 8.1.1. Nous remarquons que

$$(f \times \text{id})^* : [X \times I, X \times \partial I, \text{BSO}_{\mathbf{Q}}] \rightarrow [V \times I, V \times \partial I, \text{BSO}_{\mathbf{Q}}]$$

est un isomorphisme.

Choisir  $v$  telle que la variété  $V$  soit  $X^v$ -orientable au-dessus de  $f$ , et choisir une telle  $X^v$ -orientation, définit donc une application indépendante des choix précédents en vertu des lemmes 8.1.1 et 8.1.2.

$$\gamma : \mathcal{S}_n^{\mathbf{Q}}(X) \rightarrow A_n(X).$$

8.2. ÉTUDE DE  $\text{Im } \gamma$ . — Le théorème 4 donne :

THÉORÈME 8.2.1. — Si  $n \neq 4k$ , l'application  $\gamma$  est surjective. Si  $n = 4k$ ,  $k \neq 1$ , l'image de  $\gamma$  est le noyau de l'application  $\tau : A_{4k}(X) \rightarrow W(\mathbf{Q})$  (cf. 3).

Il résulte de la proposition 3.2.1 que l'application  $\tau$  est constante sur  $A_{4k}(X, x, [v])$  et que les composantes de  $\tau$  dans  $W(\mathbf{Q}) = \mathbf{Z} \oplus W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$  sont

$$\tau(A_{4k}(X, x, [v])) = \begin{cases} \langle L_k(p_\omega(v), x) \rangle - \sigma(\tau(X, x)), \\ -\partial(\tau(X, x)). \end{cases}$$

Il résulte alors des corollaires 6.3.3 et 6.3.7 le :

**THÉORÈME 8.2.2 (D. Sullivan) [14].** — Pour  $n \neq 4k$ , l'ensemble  $\mathcal{S}_n^{\mathbf{Q}}(X, x, [v])$  est non vide. Pour  $n = 4k$  ( $k \neq 1$ ) les conditions suivantes sont équivalentes :

(a)  $\mathcal{S}_n^{\mathbf{Q}}(X, x, [v]) \neq \emptyset$ ;

(b) (i) les  $\pi(k)$  nombres rationnels  $\langle p_\omega(v), x \rangle$  sont les nombres de Pontrjagin d'une variété différentiable compacte sans bord, orientée, de dimension  $4k$ ,

(ii)  $\langle L_k(p_\omega(v), x) \rangle - \sigma(\tau(X, x)) = 0$ ,

(iii)  $\partial(\tau(X, x)) = 0$ .

**8.3. ÉTUDE DU « NOYAU » DE  $\gamma$ .** — Soient  $s_1$  et  $s_2$  deux structures différentiables sur  $X$  où  $\dim X = n$ , telles que  $\gamma(s_1) = \gamma(s_2)$ . Il existe donc une donnée de chirurgie rationnelle sur  $X \times I$  qui relie les structures  $s_1$  et  $s_2$ . D'après le théorème 6, pour  $n \neq 4k-1$ , l'obstruction à transformer par cobordisme normal, la donnée de chirurgie rationnelle sur  $X \times I$  en une structure est nulle. Nous obtenons :

**PROPOSITION 8.3.1.** — Pour  $n \neq 4k-1$ , l'application  $\gamma$  est injective.

Nous ferons l'étude du cas  $n = 4k-1$  dans le chapitre suivant.

## 9. Étude de l'action de $\theta_n^{\mathbf{Q}}$ dans $\mathcal{S}_n^{\mathbf{Q}}(X, x, [v])$

### 9.1. DÉFINITION DE L'ACTION

**DÉFINITION 9.1.1.** — Nous appelons  $\mathbf{Q}$ -sphère de dimension  $n$ , toute variété  $V$  compacte, orientée, sans bord, de dimension  $n$ , telle que  $\tilde{H}_i(V; \mathbf{Q}) = 0$  pour  $i < n$ . Nous notons  $\theta_n^{\mathbf{Q}}$  l'ensemble des classes de  $\mathbf{Q}$ -sphères de dimension  $n$  modulo  $H_{\mathbf{Q}}$ -cobordisme. C'est un groupe abélien pour la somme connexe.

9.1.2. Soit  $(V, f)$  une structure différentiable sur  $X$ , et soit  $\Sigma$  une  $\mathbf{Q}$ -sphère. Notons  $f \# \star : V \# \Sigma \rightarrow X$  l'application obtenue en recollant par homotopie, la restriction de l'application  $f$  à  $V$  privé d'un disque, et la restriction de l'application constante à  $\Sigma$  privé d'un disque. Le couple  $(V \# \Sigma, f \# \star)$  est une nouvelle structure différentiable sur  $X$ . Nous avons ainsi défini une action du groupe  $\theta_n^{\mathbf{Q}}$  dans  $\mathcal{S}_n^{\mathbf{Q}}(X)$ .

**PROPOSITION 9.1.3.** — Le groupe  $\theta_n^{\mathbf{Q}}$  opère dans les fibres de l'application

$$\theta \oplus d : \mathcal{S}_n^{\mathbf{Q}}(X) \rightarrow \bigoplus_{i>0} H^{4i}(X; \mathbf{Q}) \oplus H_n(X; \mathbf{Q}).$$

En effet les classes de Pontrjagin rationnelles de la  $\mathbf{Q}$ -sphère  $\Sigma$  sont nulles. C'est évident pour  $n \neq 4k$ . Pour  $n = 4k$ , la formule de la signature d'Hirzebruch montre que  $p_k(\Sigma) = 0$ .

Nous nous plaçons désormais dans le cas où l'ensemble  $\mathcal{S}_n^{\mathbf{Q}}(X, x, [v])$  est non vide. — En particulier l'application  $\gamma : \mathcal{S}_n^{\mathbf{Q}}(X, x, [v]) \rightarrow A_n(X, x, [v])$  est surjective. Nous avons alors défini une action du groupe  $\theta_n^{\mathbf{Q}}$  dans l'ensemble  $\mathcal{S}_n^{\mathbf{Q}}(X, x, [v])$ . Le groupe  $\theta_n^{\mathbf{Q}}$  a été calculé dans [1]. Nous renvoyons à cet article pour les démonstrations des résultats le concernant.

## 9.2. CAS $n \neq 4k-1$ .

PROPOSITION 9.2.1. — Soit  $\theta : \mathcal{S}_n^{\mathbf{Q}}(X, x, [v]) \rightarrow \Omega_n^{\text{SO}}$  l'application qui associe à une structure différentiable sur  $X, (V, f)$  la classe de la variété  $V$  dans le groupe de cobordisme des variétés différentiables, compactes, orientées, sans bord, et soit  $s_0$  un élément de  $\mathcal{S}_n^{\mathbf{Q}}(X, x, [v])$ . L'application qui à  $s$  associe l'élément  $\theta(s) - \theta(s_0)$  est une bijection de  $\mathcal{S}_n^{\mathbf{Q}}(X, x, [v])$  sur la torsion du groupe  $\Omega_n^{\text{SO}}$ .

Nous avons en effet les deux bijections

$$\begin{array}{ccc} & \Omega_n^{\text{XV}}(x) & \\ & \downarrow \pi & \\ \mathcal{S}_n^{\mathbf{Q}}(X, x, [v]) & \xrightarrow{\gamma} & A_n(X, x, [v]) \end{array}$$

L'application  $\gamma$  est bijective d'après 8.3.1, l'application  $\pi$  d'après 7.1.1. D'autre part, l'espace  $\Omega_n^{\text{XV}}(x)$  est homogène sous l'action du groupe  $\Omega_n^{\mathbf{Q}}$  d'après 6.3.2. groupe isomorphe à la torsion  $T \Omega_n^{\text{SO}}$  du groupe  $\Omega_n^{\text{SO}}$  d'après 6.1.3. Pour  $n \neq 4k-1$  l'application d'oubli  $\theta_n^{\mathbf{Q}} \rightarrow \Omega_n^{\text{SO}}$  induit un isomorphisme du groupe  $\theta_n^{\mathbf{Q}}$  sur la torsion  $T \Omega_n^{\text{SO}}$  [1]. Nous obtenons le :

THÉORÈME 9.2.2. — Pour  $n \neq 4k-1$ , le groupe  $\theta_n^{\mathbf{Q}}$  opère de façon simplement transitive sur  $\mathcal{S}_n^{\mathbf{Q}}(X, x, [v])$ .

9.3. CAS  $n = 4k-1, k \neq 1$ . — L'étude de l'opération du groupe  $\theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$ , dans l'ensemble  $\mathcal{S}_{4k-1}^{\mathbf{Q}}(X, x, [v])$  résulte de l'étude, d'une part de l'opération du groupe  $A_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$  dans  $A_{4k-1}(X, x, [v])$  et d'autre part de l'opération du groupe de Witt  $W(\mathbf{Q})$  dans les fibres de l'application  $\gamma$ .

### A. Opération dans $A_{4k-1}(X, x, [v])$ .

DÉFINITION A.1. — Notons  $\mathcal{A}_n^{\mathbf{Q}}$  la classe des triples  $(V, x, u)$  où  $V$  est une variété différentiable, compacte, orientée, sans bord, de dimension  $n$ ,  $x$  un point de  $V$ , et  $u$  une  $E^{\mathbf{Q}}$ -orientation du SO-fibré normal stable de  $V-x$ . Un cobordisme entre deux objets  $(V_1, x_1, u_1)$  et  $(V_2, x_2, u_2)$  de  $\mathcal{A}_n^{\mathbf{Q}}$  est un triple  $(W, \gamma, u)$  où  $W$  est un cobordisme orienté entre les variétés  $V_1$  et  $V_2$ ,  $(\gamma, \partial\gamma)$  un chemin plongé dans  $(W, \partial W)$  reliant  $x_1$  à  $x_2$ , et  $u$  une  $E^{\mathbf{Q}}$ -orientation de  $W-\gamma$  qui prolonge  $u_1$  et  $u_2$ . Nous notons  $A_n^{\mathbf{Q}}$  l'ensemble des objets de  $\mathcal{A}_n^{\mathbf{Q}}$  définis à cobordisme près. C'est un groupe abélien pour la somme connexe.

Soit  $c : \theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \rightarrow A_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$  l'application qui, à la classe d'une  $\mathbf{Q}$ -sphère  $V$ , associe la classe du triple  $(V, x, u)$  où  $x$  est un point quelconque de la variété  $V$ , et  $u$  l'unique  $E^{\mathbf{Q}}$ -orientation à homotopie près de  $V-x$ .

PROPOSITION A.2. — L'application  $c$  est surjective.

PROPOSITION A.3. — *L'ensemble des classes d'homotopies de  $E^Q$ -orientations de la sphère  $S^{4k-1}$ , est canoniquement isomorphe au groupe  $\pi_{4k-1}(\text{SO}) \otimes \mathbb{Q}$ .*

Notons  $J^Q : \pi_{4k-1}(\text{SO}) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \Omega_{4k-1}^Q$  l'homomorphisme qui associe à la sphère  $S^{4k-1}$  munie d'une classe d'homotopie de  $E^Q$ -orientations, sa classe dans le groupe de cobordisme des variétés  $E^Q$ -orientées de dimension  $4k-1$ .

PROPOSITION A.4. — *La suite*

$$\pi_{4k-1}(\text{SO}) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{j^Q} \Omega_{4k-1}^Q \xrightarrow{p} A_{4k-1}^Q \rightarrow 0$$

*est exacte [p est l'homomorphisme d'oubli, il est surjectif car  $\pi_{4k-2}(\text{SO}) \otimes \mathbb{Q} = 0$ ].*

Nous avons, d'après la proposition 6.1.3, la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Q}^{\pi(k)}/\mathcal{L} \rightarrow \Omega_{4k-1}^Q \rightarrow \Omega_{4k-1}^{\text{SO}} \rightarrow 0.$$

La sphère  $S^{4k-1}$  borde. L'homomorphisme  $J^Q$  se relève donc en un homomorphisme noté encore  $J^Q$  :

$$J^Q : \pi_{4k-1}(\text{SO}) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^{\pi(k)}/\mathcal{L}.$$

PROPOSITION A.5. — *L'homomorphisme  $J^Q$  se relève dans  $\mathbb{Q}^{\pi(k)}$  en un isomorphisme de  $\pi_{4k-1}(\text{SO}) \otimes \mathbb{Q}$  sur le sous-espace vectoriel de dim 1 de  $\mathbb{Q}^{\pi(k)}$  engendré par la partition (k).*

*Étude de l'action du groupe  $A_{4k-1}^Q$  dans l'ensemble  $A_{4k-1}(X, x, [v])$ . — Nous avons le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \pi_{4k-1}(\text{SO}) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{j^Q} & \Omega_{4k-1}^Q \xrightarrow{p} A_{4k-1}^Q \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{pointillé} \\ [X, \text{SO}] \otimes \mathbb{Q} & \dashrightarrow & \Omega_{4k-1}^{Xv}(x) \xrightarrow{\pi} A_{4k-1}^Q(X, x, [v]) \rightarrow 0 \end{array}$$

La flèche verticale en pointillé désigne l'action simplement transitive, d'après le corollaire 6.3.6, du groupe  $\Omega_{4k-1}^Q$  sur l'espace  $\Omega_{4k-1}^{Xv}(x)$ . La flèche horizontale en pointillé désigne l'action du groupe  $[X, \text{SO}] \otimes \mathbb{Q}$  dans  $\Omega_{4k-1}^{Xv}(x)$ . Notons  $T_x^v$  la composition

$$\begin{array}{ccccccc} [X, \text{SO}] \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{T_x^v} & \mathbb{Q}^{\pi(k)} & \longrightarrow & \mathbb{Q}^{\pi(k)}/\mathcal{L} & \longrightarrow & \Omega_{4k-1}^Q \\ & \searrow & & & \nearrow & & \\ & & & & & & T_x^v \end{array}$$

où  $T_x^v : [X, \text{SO}] \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^{\pi(k)}$  est l'homomorphisme calculé en 7.2.4. L'action du groupe  $[X, \text{SO}] \otimes \mathbb{Q}$  dans l'espace  $\Omega_{4k-1}^{Xv}(x)$  se factorise, via  $T_x^v$  par l'action du groupe  $\Omega_{4k-1}^Q$ .

PROPOSITION A.6 :

(i) *l'action du groupe  $\Omega_{4k-1}^Q$  sur l'espace  $\Omega_{4k-1}^{Xv}(x)$  induit une action du groupe  $A_{4k-1}^Q$  dans l'espace  $A_{4k-1}(X, x [v])$ ;*

(ii) cette action est transitive;

(iii) le sous-groupe d'inertie  $K_{4k-1}(x, [v])$  est isomorphe à  $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^{n(x, [v])}$ .

*Démonstration :*

(i) soit  $a$  un élément de  $A_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$  et soit  $\alpha$  un élément de  $A_{4k-1}(X, x, [v])$ . Posons  $a + \alpha = \pi(\bar{a} + \bar{\alpha})$ , où  $\bar{a}$  est un relevé de  $a$  dans  $\Omega_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$ ,  $\bar{\alpha}$  un relevé de  $\alpha$  dans  $\Omega_{4k-1}^{Xv}$ , et  $\bar{a} + \bar{\alpha}$  le transformé de  $\bar{\alpha}$  par l'action de  $\bar{a}$ . Le corollaire 7.2.5 (ii) dit que  $\text{Im } J^{\mathbf{Q}} \subset \text{Im } T_x^v$ . Il en résulte que l'élément  $a + \alpha$  est bien déterminé;

(ii) la transitivité de l'action résulte de la surjectivité de l'application  $\pi$ ;

(iii) le sous-groupe d'inertie  $K$  est isomorphe au quotient

$$\text{Im } T_x^v / \text{Im } J^{\mathbf{Q}} \simeq \text{Im } T_x^v + \mathcal{L} / \mathbf{Q}_{(k)} + \mathcal{L}.$$

**COROLLAIRE A.7.** — *Le groupe  $A_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$  agit de façon simplement transitive sur l'espace  $A_{4k-1}^{\mathbf{Q}}(X, x, [0])$ .*

*Cela résulte de 7.2.5 (iii).*

Nous laissons le lecteur se convaincre de :

**PROPOSITION A.8.** — *L'action précédemment définie du groupe  $A_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$  sur  $A_{4k-1}(X, x, [v])$  est compatible avec l'action du groupe  $\theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$  dans  $\mathcal{S}_{4k-1}^{\mathbf{Q}}(X, x, [v])$ . C'est-à-dire que l'on a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{c} & A_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \longrightarrow 0 \\ \downarrow \text{dotted} & & \downarrow \text{dotted} \\ \mathcal{S}_{4k-1}^{\mathbf{Q}}(X, x, [v]) & \xrightarrow{\gamma} & A_{4k-1}(X, x, [v]) \longrightarrow 0 \end{array}$$

**B. Étude de l'action du groupe  $W(\mathbf{Q})$  dans les fibres de l'application  $\gamma$ .**

**DÉFINITIONS B.1.** — Nous appelons  $\mathcal{P}_n^{\mathbf{Q}}$  la classe des couples  $(W, u)$  où  $W$  est une variété compacte, orientée, de dimension  $n$ , dont le bord est une  $\mathbf{Q}$ -sphère, et  $u$ , une  $E^{\mathbf{Q}}$ -orientation de  $W$ . Nous appelons cobordisme entre deux objets  $(W_1, u_1)$  et  $(W_2, u_2)$  de  $\mathcal{P}_n^{\mathbf{Q}}$  tout couple  $(X, u)$  où  $X$  est un cobordisme orienté entre  $W_1$  et  $W_2$  induisant un  $H_{\mathbf{Q}}$ -cobordisme entre les  $\mathbf{Q}$ -sphères  $\partial W_1$  et  $\partial W_2$ , et  $u$  une  $E^{\mathbf{Q}}$ -orientation de  $X$  qui prolonge  $u_1$  et  $u_2$ . Nous notons  $P_n^{\mathbf{Q}}$ , l'ensemble des objets de  $\mathcal{P}_n^{\mathbf{Q}}$  définis à cobordisme près. C'est un groupe abélien pour la somme connexe sur le bord.

Soit  $b : P_{4k}^{\mathbf{Q}} \rightarrow \theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$ , l'homomorphisme qui, à la classe de  $(W, u)$  associe la classe de la  $\mathbf{Q}$ -sphère  $\partial W$ .

**PROPOSITION B.2.** — *La suite*

$$P_{4k}^{\mathbf{Q}} \xrightarrow{b} \theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \xrightarrow{c} A_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \rightarrow 0$$

*est exacte.*

**B.3.** Associer à une variété  $W$  de dimension  $4k$ , de bord une  $\mathbf{Q}$ -sphère, la classe dans le groupe de Witt  $W(\mathbf{Q})$ , de la forme d'intersection de  $H_{2k}(W; \mathbf{Q})$  définit un homomorphisme

$$\tau : P_{4k}^{\mathbf{Q}} \rightarrow W(\mathbf{Q}).$$

PROPOSITION B.4. — *L'homomorphisme  $\tau$  est surjectif. Pour  $k \neq 1$ , c'est un isomorphisme.*

Le groupe de Witt  $W(\mathbf{Q})$  est isomorphe à  $\mathbf{Z} \oplus W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$ . En identifiant via  $\tau$  le groupe  $P_{4k}^{\mathbf{Q}}$  au groupe  $W(\mathbf{Q})$ , nous pouvons énoncer :

PROPOSITION B.5. — *Le noyau de l'homomorphisme  $b : P_{4k}^{\mathbf{Q}} \rightarrow \theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$  est contenu dans  $\mathbf{Z}$ . C'est le sous-groupe  $\sigma_{4k}^{\mathbf{Q}} \mathbf{Z}$ , engendré par les signatures des variétés différentiables, orientées, compactes, sans bord, de dimension  $4k$ , dont les nombres de Pontrjagin, exceptés  $p_{(k)}$ , sont nuls. Nous avons*

$$\sigma_{4k}^{\mathbf{Q}} = 2^{2k - v_2[(2k)!] - 1} (2^{2k-1} - 1) \text{num} \left( \frac{B_k}{k} \right),$$

où  $B_k$  est le  $k$ -ième nombre de Bernoulli, et où  $v_2(p)$  désigne la valuation 2-adique de l'entier  $p$ .

Nous définissons l'action du groupe de Witt  $W(\mathbf{Q})$  dans  $\mathcal{S}_{4k-1}^{\mathbf{Q}}(X, x, [v])$  par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} W(\mathbf{Q}) & \xleftarrow{\tau} P_{4k}^{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{b} \theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}} \\ & \downarrow & \downarrow \\ & & \mathcal{S}_{4k-1}^{\mathbf{Q}}(X, x, [v]) \end{array}$$

B.6. Soit  $(V, f)$  une structure différentiable sur  $X$ . Notons  $s$  sa classe dans  $\mathcal{S}_{4k-1}^{\mathbf{Q}}(X, x, [v])$  et  $(V, f, v, \Phi)$  un représentant de  $\gamma(s)$ . Soit  $u$  un élément du groupe de Witt  $W(\mathbf{Q})$ . Nous construisons une donnée de chirurgie rationnelle sur  $X \times I$  qui relie  $s$  et  $u+s$  de la manière suivante.

Soit  $(M, t)$  une variété  $E^{\mathbf{Q}}$ -orientée, de dimension  $4k$ , de bord une  $\mathbf{Q}$ -sphère, dont la classe dans  $P_{4k}^{\mathbf{Q}}$  est l'élément  $\tau^{-1}(u)$ . Notons  $(\dot{M}, t)$  le cobordisme  $E^{\mathbf{Q}}$ -orienté entre  $\partial \dot{M}$  et la sphère  $S^{4k-1}$  obtenu en ôtant un disque à l'intérieur de  $M$ . Soit  $W$  la « somme connexe » de  $V \times I$  et  $\dot{M}$  le long d'un chemin plongé dans  $V \times I$  et dans  $\dot{M}$ , transversalement au bord. La  $X^v$ -orientation  $\Phi$  de  $V$  au-dessus de  $f$ , et la  $E^{\mathbf{Q}}$ -orientation  $t$  de  $\dot{M}$  induisent une  $(X \times I)^{v \times \text{id}}$ -orientation  $\Phi'$ , de  $W$  au-dessus de l'application  $F : W \rightarrow X \times I$ , obtenue en recollant par homotopie, la restriction de l'application  $f \times \text{id} : V \times I \rightarrow X \times I$ , et la restriction de l'application notée  $\star \times \text{id} : \dot{M} \rightarrow X \times I$ , qui envoie  $\dot{M}$  sur  $\star \times I$ , au complémentaire d'un voisinage tubulaire des chemins plongés. La donnée de chirurgie rationnelle sur  $X \times I$ ,  $(W, F, v \times \text{id}, \Phi')$  relie les structures  $s$  et  $u+s$ . De plus

$$\tau(F, [W]) = \tau(W) - \tau(X \times I, X \times \partial I, x)$$

d'après la proposition 2.4.6, et  $\tau(X \times I, X \times \partial I, x) = 0$  d'après le corollaire 2.4.1. Nous avons donc  $\tau(F, [W]) = u$ .

PROPOSITION B.7 :

- (i) *le groupe  $W(\mathbf{Q})$  opère dans les fibres de l'application  $\gamma$ ;*
- (ii) *le groupe  $W(\mathbf{Q})$  opère transitivement dans chaque fibre de l'application  $\gamma$ .*

*Démonstration.* — L'assertion (i) découle de la construction précédente ou des propositions 9.3.1 (a) et 9.3.2 (b);

(ii) soient  $s_0$  et  $s_1$  deux classes de structure différentiable sur  $X$  telles que  $\gamma(s_0) = \gamma(s_1) = \alpha$ . Soit  $a$  une donnée de chirurgie rationnelle sur  $X \times I$  qui relie  $s_0$  à  $s_1$ , et soit  $a'$  la donnée de chirurgie rationnelle, construite en 9.3.3 (a) qui relie les structures  $s_0$  et  $\tau(a) + s_0$ . Soit  $\hat{a}$  le recollé, le long de  $s_0$ , des données de chirurgie rationnelle  $a$  et  $a'$ . Nous avons d'après 3.2,  $\tau(\hat{a}) = \tau(a) - \tau(a') = 0$ . Nous appliquons alors le théorème 4, pour voir que les structures  $s_1$  et  $\tau(a) + s_0$  coïncident.

Soit  $\alpha \in \mathcal{A}_{4k-1}(X, x, [v])$ . Notons  $H(\alpha) \subset W(\mathbf{Q})$  le sous-groupe d'inertie d'une structure différentiable appartenant à  $\gamma^{-1}(\alpha)$ .

La démonstration précédente montre en fait le :

LEMME B.8. — *Le sous-groupe  $H(\alpha)$  de  $W(\mathbf{Q})$  est l'ensemble des obstructions à la chirurgie, des données de chirurgie rationnelle sur  $X \times 0$  qui relient  $s$  à  $s$ .*

PROPOSITION B.9 :

(i) *l'image par l'homomorphisme  $\partial : W(\mathbf{Q}) \rightarrow W(\mathbf{Q}, \mathbf{Z})$  du sous-groupe  $H(\alpha)$  est nulle. Notons  $\sigma(\alpha) \in \mathbf{Z}$ , le sous-groupe de  $\mathbf{Z}$ , image par l'homomorphisme de signature  $\sigma : W(\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{Z}$  du sous-groupe  $H(\alpha)$ ;*

(ii) *l'entier  $\sigma(\alpha)$  divise  $\sigma_{4k}^{\mathbf{Q}}$ .*

*Démonstration :*

(i) soit  $(W, F, \ , \ )$  une donnée de chirurgie sur  $X \times I$ , reliant  $s$  à  $s$ . Nous avons  $\tau(F, [W]) = \tau(W) - \tau(X \times I, X \times \partial I, x) = \tau(W)$ , et d'après la proposition 2.3.2 :

$$\partial(\tau(W)) = -e(\partial W) = e(V) - e(V) = 0;$$

(ii) la définition de l'action de  $W(\mathbf{Q})$  dans  $\mathcal{S}_{4k-1}^{\mathbf{Q}}(X, x, [v])$  montre que  $H(\alpha)$  contient le noyau de l'homomorphisme  $b : P_{4k}^{\mathbf{Q}} \rightarrow \theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$ . Nous appliquons ensuite la proposition B.5.

PROPOSITION B.10. — *Avec les notations de la proposition B.9. Si l'application  $[v]$  est triviale, alors  $\sigma(\alpha) = \sigma_{4k}^{\mathbf{Q}}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $(W, F, v, \Phi)$  une donnée de chirurgie rationnelle sur  $X \times I$ , qui étend sur  $X \times \{0\}$  et sur  $X \times \{1\}$  la structure différentiable sur  $X$ ,  $(V, f)$ . Nous voulons calculer la signature de la variété  $W$ . Notons  $(\hat{W}, \hat{F}, \hat{v}, \hat{\Phi})$  la donnée de chirurgie rationnelle sur  $X \times S^1$ , obtenue en recollant la donnée de chirurgie rationnelle  $(W, F, v, \Phi)$  et  $(V \times I, f \times \text{id})$  le long de leur bord commun. La variété  $\hat{W}$  a même signature que la variété  $W$  d'après le lemme 2.1.5 et le corollaire 2.1.4. La proposition B.10 résulte alors du lemme suivant :

LEMME B.10. — *Soit  $(W, F, v, \Phi)$  une donnée de chirurgie rationnelle sur  $X \times S^1$ . Nous supposons que la restriction de l'application  $v : X \times S^1 \rightarrow \text{BSO}_{\mathbf{Q}}$  à  $X \times \star$  est homotope à l'application constante. Alors la signature de la variété  $W$  est un multiple de  $\sigma_{4k}^{\mathbf{Q}}$ .*



*Démonstration.* — Il suffit de montrer (B. 5) que tous les nombres de Pontrjagin excepté  $p_{(k)}$  de la variété  $W$  sont nuls. Prenons les notations de 7.2. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times S^1 & \xrightarrow{v} & BSO_{\mathbf{Q}} \\ \phi \downarrow & \nearrow \eta & \\ \Sigma X & & \end{array}$$

est homotopiquement commutatif pour une certaine application continue  $\eta : \Sigma X \rightarrow BSO_{\mathbf{Q}}$ . Nous avons

$$\langle p_{\omega}(W), [W] \rangle = \langle p_{\omega}(v), F_*([W]) \rangle = \langle \phi^*(p_{\omega}(\eta)), F_*([W]) \rangle.$$

Mais l'algèbre de cohomologie d'une suspension est multiplicativement triviale, d'où le résultat.

C. Étude de l'action du groupe  $\theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$  dans  $\mathcal{S}_{4k-1}^{\mathbf{Q}}(X, x, [v])$ . — Il résulte des propositions A.6 (a), A.8 et B.7 le :

THÉORÈME C.1. — Pour  $k \neq 1$ , le groupe  $\theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$  opère transitivement sur l'espace  $\mathcal{S}_{4k-1}^{\mathbf{Q}}(X, x, [v])$ .

Il en résulte que l'inertie  $H(\alpha)$  de l'action du groupe  $W(\mathbf{Q})$  sur  $\gamma^{-1}(\alpha)$  est indépendante de  $\alpha$ . Posons  $H(\alpha) = H_{4k-1}(x, [v])$ , et  $\sigma(\alpha) = \sigma'_{4k}(x, [v])$ . Nous posons

$$\sigma_{4k}^{\mathbf{Q}} = \sigma'_{4k}(x, [v]) \cdot \sigma_{4k}(x, [v]).$$

Notons  $I_{4k-1}(x, [v])$  le sous-groupe d'inertie de l'action du groupe  $\theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$  sur l'espace  $\mathcal{S}_{4k-1}^{\mathbf{Q}}(X, x, [v])$ .

Il résulte de la proposition A.6 (a) et de la proposition B.9 les :

THÉORÈME C.2. — Pour  $k \neq 1$ , la suite

$$0 \rightarrow b[H_{4k-1}(x, [v])] \rightarrow I_{4k-1}(x, [v]) \xrightarrow{c} K_{4k-1}(x, [v]) \rightarrow 0$$

est exacte.

Le groupe  $b[H_{4k-1}(x, [v])]$  est isomorphe au groupe cyclique  $\mathbf{Z}/\sigma_{4k}(x, [v])\mathbf{Z}$ .

Le groupe  $K_{4k-1}(x, [v])$  est isomorphe à  $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^{\dim_{\mathbf{Q}}[\text{Im}T_x]^{-1}}$ .

THÉORÈME C.3. — Si  $[v] = 0$ , le groupe  $\theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$  opère de façon simplement transitive sur l'espace  $\mathcal{S}_{4k-1}^{\mathbf{Q}}(X, x, [v])$ .

D. Soit  $\theta_{4k-1}$ , le groupe des sphères d'homotopie de dimension  $4k-1$ . Soit  $V$ , une variété différentiable, compacte, orientée, sans bord, de dimension  $4k-1$  et simplement connexe. Notons  $I_h(V)$  le sous-groupe du groupe  $\theta_{4k-1}$  formé des sphères d'homotopie  $\Sigma$  telles que les variétés  $V$  et  $V \# \Sigma$  soient difféomorphes par un difféomorphisme homotope à l'identité. Notons  $\alpha : \theta_{4k-1} \rightarrow \theta_{4k-1}^{\mathbf{Q}}$  l'homomorphisme d'oubli.

La localisation  $\mu : V \rightarrow V_{\mathbf{Q}}$  est une structure différentiable sur le  $\mathbf{Q}$ -complexe de Poincaré  $\mathbf{Q}$ -local,  $V_{\mathbf{Q}}$ , dont la classe appartient à l'espace  $\mathcal{S}_{4k-1}^{\mathbf{Q}}(V_{\mathbf{Q}}, \mu_*([\mathbf{V}]), [(v)_{\mathbf{Q}}])$  où l'appli-

cation :  $(v_V)_Q : V_Q \rightarrow BSO_Q$  est le localisé d'une classifiante  $v_V : V \rightarrow BSO$ , du fibré normal stable de la variété  $V$ .

Les théorèmes C.2 et C.3 donnent alors :

PROPOSITION D.1 (a). —  $I_h(V) \subset \alpha^{-1}(I(\mu_*([V])), [(v_V)_Q])$ .

En particulier, si nous supposons en outre la variété  $V$   $\mathbb{Q}$ -stablement parallélisable, nous obtenons :

THÉORÈME D.2. — Soit  $V$  une variété compacte orientée, sans bord, de dimension  $4k-1$  ( $k \neq 1$ ), simplement connexe et dont le fibré normal stable est de torsion. Alors le groupe d'inertie  $I_h(V)$  de la variété  $V$  est inclus dans le noyau de l'homomorphisme d'oubli  $\alpha : \theta_{4k-1} \rightarrow \theta_{4k-1}^Q$ .

La restriction de l'homomorphisme  $\alpha$  au sous-groupe  $bP_{4k}$  de  $\theta_{4k-1}$ , formé des sphères d'homotopie qui bordent une variété stablement parallélisable a été calculé dans [1].

Soit  $s = \sigma_{4k}^Q / \text{pgcd}(8, \sigma_{4k}^Q)$ .

COROLLAIRE D.3. — Sous les mêmes hypothèses, le sous-groupe  $I_h(V) \cap bP_{4k}$  est contenu dans le sous-groupe cyclique de  $\theta_{4k-1}$  engendré par la sphère d'homotopie  $s \cdot \Sigma$ , où  $\Sigma$  est la sphère de Milnor (générateur de  $bP_{4k}$ ).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. BARGE, J. LANNES, F. LATOUR et P. VOGEL,  $\Lambda$ -sphères (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> série, t. 7, fasc. 4, 1974).
- [2] W. BROWDER, *Surgery on Simply-Connected Manifolds*, Springer, 1972, Ergebnisse, Berlin-Göttingen-Heidelberg.
- [3] W. BROWDER, in *Manifolds*, Amsterdam, 1970 (*Lecture notes in Math.*, t. 197, p. 17-35).
- [4] P. E. CONNER and E. E. FLOYD, *Differentiable Periodic Maps*, Springer Verlag, 1964, Ergebnisse, Berlin.
- [5] FRIEDLANDER-GRIFFITHS-MORGAN, *Homotopy Theory and Differential forms (Seminar de Geometria)*, 1972).
- [6] A. GRAMAIN, *Sphères d'homologie rationnelle (Séminaire Bourbaki)*, 1974).
- [7] F. HIRZEBRUCH, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Springer Verlag, 1966, 1<sup>re</sup> éd. 1962, Ergebnisse.
- [8] M. KERVAIRE and J. MILNOR, *Groups of homotopy spheres, I* (*Ann. of Maths.*, vol. 77, 1963, p. 504-537).
- [9] J. LANNES et F. LATOUR, *Forme quadratique d'enlacement et applications (Astérisque, vol. 26, 1975, S.M.F., Paris)*.
- [10] J.-P. SERRE, *Cours d'arithmétique*, P.U.F., Paris, 1970.
- [11] R. STONG, *Notes on Cobordism Theory*, Princeton, 1968.
- [12] D. SULLIVAN, *Thesis*, Princeton, 1965.
- [13] D. SULLIVAN, *Geometric topology, Part I : Localization, Periodicity and Galois Symmetry*, 1970.
- [14] D. SULLIVAN, Communication orale.
- [15] C. T. C. WALL, *Surgery on Compact Manifolds*, London Academic Press, 1970.

(Manuscrit reçu le 29 septembre 1975.)

Jean BARGE,  
55, rue du Docteur-Soubise,  
92260 Fontenay-aux-Roses.