

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HARRIE HENDRIKS

Une obstruction pour scinder une équivalence d'homotopie en dimension 3

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 9, n° 3 (1976), p. 437-467

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1976_4_9_3_437_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE OBSTRUCTION POUR SCINDER UNE ÉQUIVALENCE D'HOMOTOPIE EN DIMENSION 3

PAR HARRIE HENDRIKS

INTRODUCTION

Soient M et N des variétés de dimension 3 et soit S une 2-sphère plongée dans N . On dit qu'une application (continue et propre) $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ est *scindable le long de S* s'il existe une homotopie (propre et respectant le bord) de f à une application $g : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ telle que $g^{-1}(S)$ soit une 2-sphère. Dans [HL 1] et [HL 2] il est montré le théorème suivant sous l'hypothèse que M et N sont fermées :

Si M est \mathbf{P}^2 -insécable et que f est une équivalence d'homotopie, f est scindable le long de S .

Rappelons que M est \mathbf{P}^2 -insécable (i. e. il n'y a pas de plongements à fibré normal trivial du plan projectif dans M) si et seulement s'il n'y a pas d'éléments du groupe fondamental $\pi_1(M)$ d'ordre 2 et renversant l'orientation (voir [E], (8.2) (i)). Il revient donc au même de supposer que N est \mathbf{P}^2 -insécable. D'autre part, sous l'hypothèse que M et N sont fermées, f est une équivalence d'homotopie dès que f est de degré ± 1 et que f satisfait à l'hypothèse fondamentale $F(f)$ que f induit un isomorphisme de groupes fondamentaux munis de l'homomorphisme d'orientation. À part l'hypothèse fondamentale $F(f)$, les hypothèses du théorème de scindement peuvent être contrariées de deux façons :

1° M n'est pas \mathbf{P}^2 -insécable. $\mathbf{P}^2 \times S^1$ est une telle variété, d'ailleurs une somme connexe $M_1 \# M_2$ de 3-variétés est \mathbf{P}^2 -insécable si et seulement si M_1 et M_2 le sont.

2° Le degré de f n'est pas ± 1 . Si M est fermée et que $\pi_1(M)$ a un sous-groupe libre d'indice fini, il y a des applications $g : M \rightarrow M$ de degré différent de ± 1 et induisant l'identité du groupe fondamental (voir [H 2], IV et [HL 2], § 2.4).

À l'origine de ce travail (et de [HL 1] et [HL 2]) est la question posée par Swarup dans [S 3], s'il y a un théorème de scindement sous l'hypothèse fondamentale seulement. Dans cet article on montrera qu'en général les extensions du théorème de scindement dans les deux directions indiquées ci-dessus ne sont pas valables. On obtiendra des contre-exemples à ces extensions par la modification des valeurs d'une application scindée $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ dans une boule B de M (telle que $f(B) \cap S = \emptyset$) par certains éléments (non scindés) de $\pi_3(N)$.

Exemples. — Soit $M = \mathbf{P}^2 \times S^1 \# \mathbf{P}^2 \times S^1 = N$ (resp. $M = S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1 = N$). On note σ_1 et σ_2 les revêtements à deux feuilletés (resp. les homéomorphismes) sur la fibre \mathbf{P}^2 (resp. S^2) des deux facteurs de la somme connexe, fibrés sur S^1 . On peut modifier l'identité (resp. une application de degré différent de ± 1 , induisant l'identité du groupe fondamental) dans une boule B_0 disjointe de la sphère de la somme connexe par le produit de Whitehead $[\sigma_1, \sigma_2]$.

Dans le scindement d'une application $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ transversale sur la sphère S on rencontre essentiellement la difficulté de diminuer le genre de l'image réciproque $f^{-1}(S)$ de S . Dans l'exemple on peut s'arranger que $f^{-1}(S)$ consiste en la sphère de la somme connexe et en un tore non noué dans la boule B_0 . Pour cette simplification il faut un disque singulier $\Delta : (D^2, S^1) \rightarrow (M, f^{-1}(S))$ tel que, entre autres, $\partial\Delta$ n'est pas homologue à zéro sur $f^{-1}(S)$, que (i) Δ est homotope à un plongement et que (ii) $f(\Delta)$ représente l'élément trivial dans $\pi_2(N, S)$. En partant d'un disque plongé Δ^0 — dans l'exemple on pourrait prendre un disque dans B_0 bordé par un méridien de la composante torique de $f^{-1}(S)$ — pour obtenir (ii) il faut l'existence d'un élément $\sigma \in \pi_2(M)$ tel que $f(\Delta^0) + f_{\#} \sigma = 0$ dans $\pi_2(N, S)$. Si $f_{\#} \pi_2(M) \neq \pi_2(N)$ il n'y a aucune garantie pour l'existence d'un tel σ ; en effet, dans l'exemple on a l'égalité $f(\Delta^0) = \sigma_i$ pour $i = 1$ ou $i = 2$ et si $M = N = S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1$, σ_i n'est pas dans l'image

$$f_{\#} \pi_2(M) = \text{deg}(f) \cdot \pi_2(N)$$

(voir remarque I, § 2.1). Une fois trouvé σ , il faut réaliser $\Delta^0 \# \sigma$ par un prolongement du disque. Ceci est possible si σ est un plongement de la sphère mais il n'en est point si σ est représenté par une immersion dont l'image est un plan projectif à fibré normal trivial : dans l'ensemble des points doubles de $\Delta^0 \# \sigma$ on trouvera une courbe représentant homologiquement la droite projective associée à σ . Ce dernier est le cas dans l'exemple pour $M = N = \mathbf{P}^2 \times S^1 \# \mathbf{P}^2 \times S^1$. On montrera que les applications des deux exemples ne sont pas scindables. Dans le théorème suivant on a donné les cas où on sait faire des contre-exemples aux extensions indiquées ci-dessus du théorème de scindement.

THÉORÈME A. — Soit $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ une application qui induit un isomorphisme de groupes fondamentaux et soit S une 2-sphère plongée dans N . Au cas où S sépare N , disons que $N = N_1 \bigcup_S N_2$, on suppose que $\pi_1(N_1) \neq 0$ et que $\pi_1(N_2) \neq 0$. Alors :

(i) Si f est une équivalence d'homotopie et que M n'est pas \mathbf{P}^2 -insécable, il y a une équivalence d'homotopie f' qui n'est pas scindable le long de S .

(ii) Supposé que M et N soient fermées, que $\text{deg}(f) \neq \pm 1$ et que N n'est pas homotopiquement équivalente à $\mathbf{P}^3 \# \mathbf{P}^3$ ou à un S^2 -fibré sur S^1 , il y a une application f' induisant un isomorphisme de groupes fondamentaux et qui n'est pas scindable le long de S .

En outre. — Dans (i) et (ii) on peut trouver f' de telle façon qu'elle coïncide avec f en dehors d'une boule dans M .

Remarques 1. — Dans les situations suivantes : (a) S borde une sous-variété contractile et (b) M et N sont fermées et homotopiquement équivalentes, soit à $\mathbf{P}^3 \# \mathbf{P}^3$, soit à un

S^2 -fibré sur S^1 , l'application f comme dans le théorème A peut être scindée. Le cas (a) est considéré dans [HL 2], (b) peut être traité avec les techniques élémentaires (et le lemme de Dehn) de simplification de l'image réciproque de S par une homotopie de l'application.

2. Quant au problème de scindement d'équivalences d'homotopie en grandes dimensions, il y a des exemples d'impossibilité de scindement dus à Cappell [C 1], basés sur l'existence d'éléments d'ordre 2 du groupe fondamental qui renversent (en dimension $4k+3$) ou qui conservent (en dimension $4k+1$) l'orientation de la variété. Nos exemples reposent aussi sur ce phénomène comme on a vu ci-dessus. En fait Cappell a appliqué la théorie de la chirurgie pour résoudre le problème de scindement le long d'une sphère (entre autres) d'équivalences d'homotopie de variétés compactes de haute dimension. A une équivalence d'homotopie il associe un invariant homotopique dans un groupe « unitaire nilpotent ». Sa nullité est équivalente à la possibilité de scinder l'application (voir [C 2] et [C 3]).

Pour montrer le théorème A on va associer à toute application en question, f , un invariant homotopique qui s'annule si f est scindable. Supposé que f est transversale sur S, on considère le \mathbf{Z} -module de rang fini $H_1(f^{-1}(S))$. Dans la première partie on munit $H_1(f^{-1}(S))$ d'une fonction ε_f (resp. σ_f sous l'hypothèse que f est une équivalence d'homotopie) (voir I, § 2) telle que $\varepsilon_f(x)$ [resp. $\sigma_f(x)$] est une obstruction pour trouver (resp. pour plonger) un disque singulier $\Delta : (D^2, S^1) \rightarrow (M, f^{-1}(S))$ tel que $\{\partial\Delta\} = x$ et que $[f(\Delta)] = 0 \in \pi_2(N, S)$. A l'aide de la décomposition symplectique de $H_1(f^{-1}(S))$ définie dans I, § 2.3 on peut définir un invariant homotopique $\tau^l(f)$ [resp. $\tau^q(f)$] qui est trivial s'il y a une homotopie de f ayant comme effet d'annuler $H_1(f^{-1}(S))$ (I, § 4). Dans la deuxième partie on définit les contre-exemples f' du théorème A et on y calcule ces invariants (II, § 3).

Supposé que M et N sont compactes on obtient un résultat beaucoup plus précis. On fera à l'aide de [H 2] et de [S 5] une partition des équivalences d'homotopie (coïncidant avec f sur le 1-squelette et sur le bord de M) en une classe d'applications scindables et une classe d'applications susceptibles de ne pas être scindables. En calculant on peut constater que τ^q est une bijection sur les classes d'homotopie de cette deuxième classe.

THÉORÈME B. — Soient M et N des 3-variétés compactes et soit $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ une équivalence d'homotopie. Alors f est scindable si et seulement si $\tau^q(f) = 0$.

Je ne sais pas si l'invariant de Cappell peut rendre les mêmes services que τ^q . Il n'est pas exclu que l'invariant de Cappell et τ^q sont identiques auquel cas il est probable que le théorème D (voir II, § 2) donne une expression des groupes unitaires nilpotents en question.

Comme le théorème de scindement ensemble avec le théorème des sphères de Laudenbach (voir [L], chap. III) a montré sa valeur en donnant l'extension des théorèmes de Waldhausen aux variétés qui sont la somme connexe de variétés suffisamment larges \mathbf{P}^2 -irréductibles et d'exemplaires de S^2 -fibrés sur S^1 (voir [HL 2], § 4), le théorème B aura une valeur analogue une fois qu'il y a des théorèmes à la Waldhausen affirmant que certaines équivalences d'homotopie de certaines variétés non \mathbf{P}^2 -irréductibles sont homotopes à un homéomorphisme (unique à isotopie près). De toute façon le théorème B dégage une obstruction associée à une équivalence d'homotopie d'être homotope à un homéomor-

phisme. Cette obstruction, de scindement, n'est pas de caractère K-théorique (torsion de Whitehead).

THÉORÈME C. — Mêmes hypothèses que pour le théorème A ($f = \text{Id} : N \rightarrow N$). — Si N n'est pas \mathbf{P}^2 -insécable, il y a une équivalence d'homotopie simple de N qui n'est pas homotope à un homéomorphisme. On peut la choisir coïncidant avec l'identité en dehors d'une boule.

Conventions. — Si $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ est une application, on sous-entend que f est continue et propre (i. e. l'image réciproque d'un compact est compacte) et une homotopie de f est une homotopie d'applications de paires. Pour une variété M , connexe, $m \in M$, \tilde{Z} est le système local défini par $\tilde{Z}_m = Z$ et par l'homomorphisme d'orientation $w_M : \pi_1(M, m) \rightarrow \{+1, -1\} = \text{Gl}(1, \mathbf{Z})$ (première classe de Stiefel-Whitney). Si la dimension de M est k , une classe fondamentale $\{M, \partial M\}$ est un générateur du groupe infini cyclique $H_k^{lf}(M, \partial M; \tilde{Z})$ où H_*^{lf} désigne l'homologie du complexe de chaînes singulières localement finies. Si N est une variété de dimension k et $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ est une application telle que $f(m) = n$ et que $w_N f_{\#} = w_M : \pi_1(M, m) \rightarrow \{+1, -1\}$ (i. e. $f^* \tilde{Z} = \tilde{Z}$), alors le degré de f , $\text{deg}(f)$, est l'entier tel que

$$f_* \{M, \partial M\} = \text{deg}(f) \{N, \partial N\},$$

le signe du degré dépend du choix des classes fondamentales. Si $w_N f_{\#} \neq w_M$, on pose $\text{deg}(f) = 0$. Pour un ensemble E et un anneau A , $A[E]$ (resp. $A\{E\}$) désigne le A -module à gauche des fonctions de E dans A à support fini (resp. quelconque).

Le travail est décomposé en une introduction, le premier chapitre et le deuxième chapitre. Une référence du type § 3 est intérieure à un chapitre; I, § 4 renvoie à un paragraphe de l'autre chapitre.

Je veux remercier François Laudénbach pour l'intérêt qu'il a montré sans cesse pendant la préparation de ce travail. Aussi je veux remercier Frans Clauwens qui m'a aidé à surmonter les difficultés que j'ai eues à définir l'invariant τ^q .

CHAPITRE I

1. Homotopie

Soient $f_0, f_1 : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ deux applications homotopes de variétés de dimension m , transversales sur une sous-variété compacte et sans bord, S , dans N . On dira qu'une homotopie $F : M \times I \rightarrow N$ de f_0 à f_1 est *excellente* si F est transversale sur S et que la restriction de la projection $t : M \times I \rightarrow I$ à la sous-variété $F^{-1}(S)$ est une fonction de Morse à valeurs critiques distinctes. Par les techniques standard de transversalité, une homotopie de f_0 à f_1 peut être approximée par une homotopie excellente.

Une homotopie F est *élémentaire* si $t|F^{-1}(S)$ est une fonction de Morse avec exactement un point critique. L'indice de F est celui du point critique de $t|F^{-1}(S)$.

On posera

$$D_+^{i+1} = \{x \in \mathbf{R}^{i+1}; \|x\| \leq 1 \text{ et } x_{i+1} \geq 0\}, \quad D^i = \{x \in D_+^{i+1}; x_{i+1} = 0\}.$$

Si $F : M \times I \rightarrow N$ est une homotopie élémentaire d'indice i , il y a des plongements $\Sigma : D_+^{i+1} \rightarrow M \times I$ et $\Sigma^d : D_+^{m-i+1} \rightarrow M \times I$, tels que

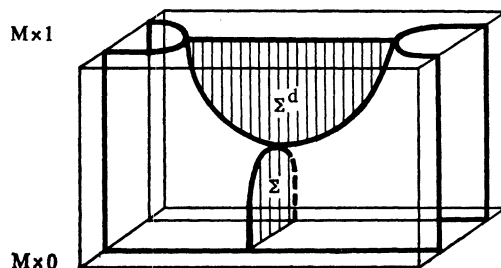
$$1^\circ \Sigma^{-1}(F^{-1}(S)) = \partial D_+^{i+1} - \text{int } D^i, \quad (\Sigma^d)^{-1}(F^{-1}(S)) = \partial D_+^{m-i+1} - \text{int } D^{m-i};$$

$$2^\circ \Sigma^{-1}(M \times 0) = D^i, \quad (\Sigma^d)^{-1}(M \times 1) = D^{m-i};$$

3° Σ et Σ^d soient transversales sur $F^{-1}(S)$ et sur $M \times \partial I$;

4° $t\Sigma$ et $t\Sigma^d$ soient sans point critique et

5° $\Sigma(D_+^{i+1}) \cap F^{-1}(S)$ [resp. $\Sigma^d(D_+^{m-i+1}) \cap F^{-1}(S)$] contient le point critique de $t \mid F^{-1}(S)$, et la restriction de t à cette sous-variété est une fonction de Morse ayant un seul point critique qui est un maximum (resp. un minimum).



Le plongement $\Sigma \mid D^i : (D^i, \partial D^i) \rightarrow (M \times 0, F^{-1}(S) \cap M \times 0) \xrightarrow{\text{proj}} (M, F_0^{-1}(S))$ [resp. $\Sigma^d \mid D^{m-i} : (D^{m-i}, \partial D^{m-i}) \rightarrow (M \times 1, F^{-1}(S) \cap M \times 1) \xrightarrow{\text{proj}} (M, F_1^{-1}(S))$] est appelé une *membrane* (resp. une *membrane duale*) de l'homotopie élémentaire. La classe d'homotopie $[\Sigma \mid D^i] \in \pi_i(M, F_0^{-1}(S))$ a la propriété que $(F_0)_\# [\Sigma \mid D^i] = 0 \in \pi_i(N, S)$, l'homotopie à zéro étant donnée par $F\Sigma$.

Dans le paragraphe suivant on va définir, au cas où M et N sont des variétés de dimension 3 et où $S \cong S^2$, une obstruction pour l'existence d'une homotopie élémentaire ayant comme effet de diminuer le genre de l'image réciproque de S , en cherchant une obstruction pour l'existence d'une membrane.

2. Les données algébriques

Dans ce paragraphe on suppose que $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ est une application de variétés de dimension 3, transversale sur une 2-sphère S dans N et que f induit un isomorphisme de groupes fondamentaux. On note $T = f^{-1}(S)$, T est une réunion finie de surfaces fermées orientables.

En premier lieu on va définir des fonctions sur $H_1(T)$ qui, à un élément $z \in H_1(T)$, associent des obstructions pour trouver un disque plongé D dont le bord représente z et

tel que $[fD] = 0 \in \pi_2(N, S)$. En second lieu on définit une décomposition « symplectique » de $H_1(T)$. Ces ingrédients constitueront l'abstraction algébrique du problème de scindement.

2.1. HOMOMORPHISME DE DÉFICIT. — Soit T_k une composante connexe de $T = f^{-1}(S)$. On dénote par $T_k \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} (M, T_k)$ et $S \xrightarrow{s} N \xrightarrow{t} (N, S)$ les injections et par

$$\bar{f} : (M, T_k) \rightarrow (N, S)$$

l'application définie par f . Considérons le diagramme commutatif suivant dont les suites horizontales sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_2(M) & \xrightarrow{j_{\#}} & \pi_2(M, T_k) & \xrightarrow{\partial} & \pi_1(T_k) & \xrightarrow{i_1} & \pi_1(M) \\ & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow \bar{f}_{\#} & & \downarrow \cong f_1 \\ \pi_2(S) & \xrightarrow{s_{\#}} & \pi_2(N) & \xrightarrow{t_{\#}} & \pi_2(N, S) & \rightarrow & \pi_1(S) = 0 \rightarrow \pi_1(N) \end{array}$$

L'homomorphisme i_1 est trivial parce que $f_1 i_1$ factorise par 0 et f_1 est injectif. Par conséquent on peut définir un homomorphisme

$$\varepsilon_k : \pi_1(T_k) \rightarrow \pi_2(N)/\text{im } s_{\#} + \text{im } f_{\#},$$

en posant que $\varepsilon_k(x)$ est la classe des éléments $z \in \pi_2(N)$ tels qu'il existe $y \in \pi_2(M, T_k)$ ayant les propriétés $\partial y = x$ et $\bar{f}_{\#} y = t_{\#} z$.

Le sous-groupe $\text{im } f_{\#}$ est indépendant du point base choisi dans $f^{-1}(S)$ parce que par la surjectivité de f_1 , $\text{im } f_{\#}$ est $\pi_1(N)$ -invariant. En outre ε_k factorise par l'abélianisé $H_1(T_k; \mathbf{Z})$ de $\pi_1(T_k)$ et en identifiant $H_1(T; \mathbf{Z})$ à $\bigoplus_k H_1(T_k; \mathbf{Z})$ les ε_k induisent un homomorphisme, dit de déficit

$$\varepsilon_f : H_1(T; \mathbf{Z}) \rightarrow \pi_2(N)/\text{im } s_{\#} + \text{im } f_{\#}.$$

Remarque. — Si M et N sont fermées, $\text{im } f_{\#}$ est le sous-groupe $\mu \cdot \pi_2(N)$ des éléments de $\pi_2(N)$ divisibles par le degré μ de f (voir [L], App. III ou [H 2], III, 2.2). D'autre part si f est une équivalence d'homotopie, l'homomorphisme de déficit ε_f est trivial.

2.2. UNE OBSTRUCTION DE PLONGEMENT. — Si dans la situation du paragraphe 2.1, f est une équivalence d'homotopie, $f_{\#}$ est un isomorphisme et on peut définir la fonction

$$\delta_k : \pi_1(T_k) \rightarrow \pi_2(M, T_k)/j_{\#} f_{\#}^{-1} s_{\#} \pi_2(S),$$

qui associe à x la classe des éléments $y \in \pi_2(M, T_k)$ tels que $\partial y = x$ et que $\bar{f}_{\#}(y) = 0$. Puisque $\text{im } j_{\#}$ est contenu dans le centre de $\pi_2(M, T_k)$, $j_{\#} f_{\#}^{-1} s_{\#} \pi_2(S)$ est un sous-groupe distingué de $\pi_2(M, T_k)$. δ_k est un homomorphisme.

(a) *Self-intersection et intersection.* — On va construire une fonction sur $\pi_2(M, T_k)$ qui associe à une classe d'homotopie d'un disque singulier sa « self-intersection » au but, elle factorise par le quotient ci-haut si $j_{\#} f_{\#}^{-1} s_{\#} \pi_2(S)$ est engendré par un plongement.

Rappels. — Soient X, X_1, X_2 et Y des variétés, V une sous-variété de $\text{int}(Y)$; on suppose X, X_1 et X_2 compactes. On note par $\Delta : Y \rightarrow Y \times Y$ l'injection de la diagonale et par $E : X \times X \rightarrow X \times X$ l'échange des facteurs.

Soit $\xi : (X, \partial X) \rightarrow (Y, V)$ une immersion en position générale, alors

$$D(\xi) = (\xi \times \xi)^{-1} \Delta(Y) - \Delta(X)$$

est une sous-variété compacte de $X \times X$, qui est E -invariant, et $\partial D(\xi) \subset \partial(X \times X)$. La self-intersection de ξ est l'application

$$i(\xi) : (D(\xi)/E, \partial D(\xi)/E) \rightarrow (Y, V), \quad \text{telle que } i(\xi)(\overline{\langle x_1, x_2 \rangle}) = \xi(x_1).$$

Soit $\xi_i : (X_i, \partial X_i) \rightarrow (Y, V)$ une application pour $i = 1, 2$, telle que $\xi_1 \times \xi_2$ soit transversale sur $\Delta(Y)$ (i. e. ξ_1 et ξ_2 sont transversaux l'un sur l'autre) alors

$$D(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1 \times \xi_2)^{-1} \Delta(Y)$$

est une sous variété compacte de $X_1 \times X_2$, telle que $\partial D(\xi_1, \xi_2) \subset \partial(X_1 \times X_2)$. L'intersection $j(\xi_1, \xi_2)$ de ξ_1 avec ξ_2 est l'application

$$j(\xi_1, \xi_2) = \Delta^{-1}(\xi_1 \times \xi_2) : (D(\xi_1, \xi_2), \partial D(\xi_1, \xi_2)) \rightarrow (Y, V).$$

Soit $\xi : (X, \partial X) \rightarrow (Y, V)$ une application, alors l'image de la classe fondamentale de $(X, \partial X)$ par ξ_* est notée par $\{\xi\} \in H_{\dim X}(Y, V; \mathbf{Z}_2)$.

Remarques 1. — En posant

$$q_i = \dim Y - \dim X_i \quad (i = 1, 2)$$

et

$$L^q : H_c^q(Y - U(V), \partial Y; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_{\dim Y - q}(Y - U(V), \partial U(V); \mathbf{Z}_2) \cong H_{\dim Y - q}(Y, V; \mathbf{Z}_2),$$

l'isomorphisme composé de l'isomorphisme de la dualité de Poincaré-Lefschetz et celui de l'excision $[U(V)$ est un voisinage tubulaire ouvert de V et H_c^* désigne la cohomologie à supports compacts], on a l'égalité suivante (ξ_1 et ξ_2 étant comme ci-dessus)

$$\{j(\xi_1, \xi_2)\} = L^{q_1 + q_2}((L^{q_1})^{-1}(\{\xi_1\}) \cup (L^{q_2})^{-1}(\{\xi_2\})).$$

2. Si $\xi : (X, \partial X) \rightarrow (Y, V)$ est une immersion à fibré normal trivial et si

$$\xi^+ : (X, \partial X) \rightarrow (Y, U(V))$$

est obtenue « en poussant ξ dans son fibré normal », alors $j(\xi, \xi^+)$ est homologue à $2i(\xi)$, donc

$$\{j(\xi, \xi^+)\} = 0 \in H_{2\dim X - \dim Y}(Y, U(V); \mathbf{Z}_2).$$

3. En particulier, si $\xi_1, \xi_2 : (X, \partial X) \rightarrow (Y, V)$ sont des applications homologues et ξ_1 est une immersion à fibré normal trivial, alors $\{j(\xi_1, \xi_2)\} = 0$.

(b) *Applications aux 2-disques singuliers en dimension 3.* — Soit V une sous-variété de dimension 2 de M et soit $x \in \pi_2(M, V)$. A partir d'une application (générique) $\xi : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (M, V)$ représentant x on peut trouver une homotopie de ξ à une immersion ξ' représentant x par la théorie des immersions ([H 4], th. 5.7) tout au moins si on choisit convenablement le jet de ξ le long du bord. On peut aussi y arriver en faisant fuir une à une les singularités (« parapluies de Whitney ») par le bord, à condition à chaque fois de changer d'un tour le jet le long du bord.

Le lemme suivant justifie la définition de la fonction

$$i_V : \pi_2(M, V) \rightarrow H_1(M, V; \mathbf{Z}_2), \quad i_V(x) = \{i(\xi')\},$$

i_V prend comme valeur sur une classe représentée par une immersion $S^2 \rightarrow M$ dont l'image est un plan projectif à fibré normal trivial, la classe d'homologie non triviale portée par ce plan projectif.

LEMME. — Soient $\xi_0, \xi_1 : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (M, V)$ deux immersions en position générale représentant $x \in \pi_2(M, V)$, alors $\{i(\xi_0)\} = \{i(\xi_1)\}$.

Démonstration. — Il est clair que $\{i(\xi)\}$ ne dépend que de la classe d'homotopie régulière de ξ . Quitte à faire une homotopie régulière on peut supposer que ξ_0 est transversale sur ξ_1 . Soit $U(V)$ un voisinage tubulaire de V dans M . S'il y a une immersion

$$\xi : S^2 = D^2 \times \{0\} \Big|_{\partial D^2 \times \{0\} = S^1 \times \{0\}} S^1 \times [0, 1] \Big|_{S^1 \times \{1\} = \partial D^2 \times \{1\}} D^2 \times \{1\} \rightarrow M,$$

en position générale, telle que $\xi|_{D^2 \times \{i\}} = \xi_i$ ($i = 0, 1$) et que $\xi(S^1 \times [0, 1]) \subset U(V)$, alors $\{i(\xi)\} = \{i(\xi_0)\} + \{i(\xi_1)\} + \{j(\xi_0, \xi_1)\}$ dans $H_1(M, V; \mathbf{Z}_2)$.

Par la remarque 3, $\{j(\xi_0, \xi_1)\} = 0$ et, puisque $[\xi] = 0$ dans $\pi_2(M, V)$, il y a une homotopie qu'on peut supposer régulière ([H 4]) de ξ à une immersion ξ' dont l'image est contenue dans $U(V)$. Donc $\{i(\xi)\} = 0$ et $\{i(\xi_0)\} = \{i(\xi_1)\}$.

En utilisant le fait que les jets le long du bord de ξ_0 et de ξ_1 étendent à une immersion du disque, on trouve l'immersion $\xi|_{S^1 \times [0, 1]}$ à partir d'une homotopie

$$\xi_0|_{\partial D^2} \sim \xi_1|_{\partial D^2} : \partial D^2 \rightarrow V \subset U(V)$$

à l'aide de ([H 4], th. 5.7) ou en éliminant deux à deux les singularités, un nombre pair de « parapluies de Whitney », d'une approximation générique.

C. Q. F. D.

Soit, pour toute composante V_k de V , v_k un point base de V_k . $\pi_2^*(M, V)$ [resp. $\pi_1^*(V)$] désigne la somme directe $\bigoplus_k \pi_2(M, V, v_k)$ [resp. $\bigoplus_k \pi_1(V_k, v_k)$]. Soit

$$x = (x_k) \in \pi_2^*(M, V).$$

Il y a une immersion en position générale $\xi : \bigcup_k (D^2, \partial D^2) \times k \rightarrow (M, V)$ telle que $\xi(\partial D^2 \times k) \subset V_k$ et que $\xi|_{(D^2, \partial D^2) \times k}$ représente x_k . On peut définir

$$i_V(x) = \{ i(\xi) \} \in H_1(M, V; \mathbb{Z}_2);$$

$i_V(x)$ ne dépend pas du représentant choisi de x par le lemme et la remarque 1.

PROPOSITION 1. — Soit $j_V : \pi_2^*(M, V) \times \pi_2^*(M, V) \rightarrow H_1(M, V; \mathbb{Z}_2)$ la fonction définie par $j_V(x, y) = i_V(x+y) - i_V(x) - i_V(y)$, alors j_V est symétrique et bi-additive et $j_V(x, x) = 0$ pour tout x .

En effet, soient $x, y \in \pi_2^*(M, V)$, ξ et η des représentants de x et y tels que ξ soit transversal sur η , alors $j_V(x, y) = \{ j(\xi, \eta) \}$. En utilisant ces propriétés de i_V et j_V on trouve :

COROLLAIRE. — Soient $x, y, z \in \pi_2^*(M, V)$. Si $x-y$ appartient au sous-groupe des commutateurs de $\pi_2^*(M, V)$, alors $i_V(x) = i_V(y)$. Si $x-y = z+z$, alors $i_V(x) = i_V(y)$.

(c) Une fonction sur $H_1(f^{-1}(S))$. — Supposons dans la suite qu'il existe une sphère plongée R , telle que $f|_R$ soit homotope à un difféomorphisme $R \rightarrow S$. Dans II § I il est montré que R existe dès que M et N sont compactes, f étant une équivalence d'homotopie. On note $T = f^{-1}(S)$ comme au début de ce paragraphe. Il est clair que $i_T(x + \gamma.R) = i_T(x)$ pour tout $x \in \pi_2^*(M, T)$ et pour tout chemin γ joignant R et T . Par conséquent i_T définit une unique fonction χ , compatible avec la commutativité du diagramme (D) : (h désignera l'homomorphisme de Hurewicz réduit modulo 2) :

$$(D) \quad \begin{array}{ccc} \pi_1^*(f^{-1}(S)) = \bigoplus_k \pi_1(T_k) & \xrightarrow{\oplus \delta_k} \bigoplus_k (\pi_2(M, T_k) / j_{\#} f_{\#}^{-1} s_{\#} \pi_2(S)) & \xleftarrow{\text{proj}} \pi_2^*(M, T) \\ \downarrow h & & \downarrow \chi \\ H_1(f^{-1}(S); \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{i_f} & H_1(M, f^{-1}(S); \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

$\swarrow i_T$

Le corollaire implique que i_T factorise par $\pi_2^*(M, T)^{ab} \otimes \mathbb{Z}_2$ et donc la commutativité de (D) définit une fonction i_f qui est une forme quadratique d'après la proposition 1.

DÉFINITION. — $I_f : H_1(f^{-1}(S); \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(N; \mathbb{Z}_2)$ est la fonction définie par

$$I_f(x) = t_*^{-1} \bar{f}_* i_f(x)$$

(t et \bar{f} sont introduits dans le paragraphe 2.1).

PROPOSITION 2. — I_f est une forme quadratique et la forme bilinéaire symétrique J_f associée à I_f a la propriété que $J_f(x, x) = 0$, $x \in H_1(f^{-1}(S); \mathbf{Z}_2)$.

Soient $x_1, x_2 \in H_1(f^{-1}(S); \mathbf{Z}_2)$ et soient $\xi_1, \xi_2 \in H_2(M, f^{-1}(S); \mathbf{Z}_2)$ des éléments tels que $\partial \xi_i = x_i$ ($i = 1, 2$) et que $\bar{f}_*(\xi_i) = 0 \in H_2(N, S; \mathbf{Z}_2)$, alors

$$J_f(x_1, x_2) = L^2((L^1)^{-1}(\xi_1) \cup (L^1)^{-1}(\xi_2)).$$

(d) *Digression.* — Dans la situation de l'introduction du paragraphe 2, on suppose en plus que f respecte les homomorphismes d'orientation, c'est-à-dire $f^* \tilde{\mathbf{Z}} \cong \tilde{\mathbf{Z}}$. On oriente le fibré normal à S , qui est trivial, et ceci définit par f une orientation transversale de $f^{-1}(S)$. Étant donné un cycle x sur $f^{-1}(S)$, il est alors défini le cycle x^+ obtenu en poussant x dans la direction positive dans le voisinage tubulaire de $f^{-1}(S)$.

On se donne un isomorphisme de la restriction à S du système local $\tilde{\mathbf{Z}}$ (sur N) sur le système constant \mathbf{Z} ; ceci définit un isomorphisme de $H_1(f^{-1}(S); f^* \tilde{\mathbf{Z}})$ sur $H_1(f^{-1}(S); \mathbf{Z})$. Soient $x, y \in H_1(f^{-1}(S); \mathbf{Z})$, si on les conçoit comme éléments de $H_1(f^{-1}(S); f^* \tilde{\mathbf{Z}})$ on les note par \tilde{x} et \tilde{y} . Soit $\xi \in H_2(M, f^{-1}(S); \mathbf{Z})$ [resp. $\tilde{\xi} \in H_2(M, f^{-1}(S); f^* \tilde{\mathbf{Z}})$] tel que $\partial \xi = x$ [resp. $\partial \tilde{\xi} = \tilde{x}$]. $\tilde{\xi}$ existe parce que

$$f_* : H_1(M, f^* \tilde{\mathbf{Z}}) \rightarrow H_1(N; \tilde{\mathbf{Z}})$$

est un isomorphisme, cf. le diagramme du paragraphe 2.1].

Étant donnée une orientation $\{M, \partial M\} \in H_3(M, \partial M; \tilde{\mathbf{Z}})$, on a deux notions d'enlacement, à savoir

$$l(\tilde{x}, y) = \tilde{\xi} \cap y^+ \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad \tilde{l}(x, \tilde{y}) = \xi \cap \tilde{y}^+ \in \mathbf{Z}.$$

Modulo 2 ces notions coïncident avec l'enlacement standard à valeurs dans \mathbf{Z}_2 . En particulier $l(\tilde{x}, y) - \tilde{l}(x, \tilde{y})$ est pair.

Notons w_N^{add} la première classe de Stiefel-Whitney vue comme classe de cohomologie à valeurs dans le groupe « additif » $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ [au lieu du groupe « multiplicatif » $\text{Gl}(1; \mathbf{Z})$].

Remarque :

$$\frac{1}{2} [l(\tilde{x}, y) - \tilde{l}(x, \tilde{y})] \equiv w_N^{\text{add}} J_f(x, y) \pmod{2}.$$

Démonstration. — Par linéarité on peut supposer que x est porté par une composante de $f^{-1}(S)$ ainsi que y . Soient donnés deux disques immergés transversaux l'un sur l'autre, $\xi, \eta : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (M, f^{-1}(S))$, tels que $\xi|_{\partial D^2}$ et $\eta|_{\partial D^2}$ représentent x et y . Désignons par l_α ces composantes-là de $\text{im } \xi \cap \text{im } \eta$ qui sont des arcs immergés à extrémités $l'_\alpha \in \xi(\partial D^2)$ et $l''_\alpha \in \eta(\partial D^2)$. Si le point l''_α est de multiplicité ε_α ($\varepsilon_\alpha = \pm 1$) dans $\xi \cap \tilde{y}^+$, alors

$$\tilde{l}(x, \tilde{y}) = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \quad \text{et} \quad l(\tilde{x}, y) = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha w_N(f(l_\alpha)).$$

C. Q. F. D.

(e) *Fin de la définition.* — Je veux proposer une fonction qui rendra plus de services que celle de (c) (l'astuce de considérer des revêtements convenables m'a été suggérée par F. Laudenbach).

Soit $n \in S$ et soit $G = \{g \in \pi_1(N, n); g \neq e, g^2 = e\}$. Pour $g \in G$, $q^g : (N^g, n^g) \rightarrow (N, n)$ désigne le revêtement associé au sous-groupe $\{e, g\} \subset \pi_1(N, n)$, $p^g = f^* q^g : M^g \rightarrow M$ le revêtement induit de q^g par f , $f^g : M^g \rightarrow N^g$ le relèvement canonique de f et S^g le relèvement de S passant par n^g . Alors $p^g | (f^g)^{-1}(S^g)$ est un homéomorphisme sur $f^{-1}(S)$ et en identifiant $H_1(N^g; Z_2)$ et Z_2 on obtient une fonction

$$\sigma_f : H_1(f^{-1}(S); Z_2) \rightarrow Z_2[G] = \bigoplus_{g \in G} Z_2 \cdot g,$$

définie par la formule

$$(\Sigma) \quad x \mapsto \sum_{g \in G} I_{f^g} [(p^g | (f^g)^{-1} S^g)_*^{-1}(x)] \cdot g.$$

Il est clair que I_{f^g} est défini dès que I_f est défini. La somme (Σ) est finie. En effet, soit $\xi : \bigcup_k (D^2, S^1) \times k \rightarrow (M, f^{-1}(S))$ une immersion en position générale telle que $\partial \xi$ représente x et soit ξ^g le relèvement de ξ dont le bord est dans $(f^g)^{-1}(S^g)$. Soit l une composante orientée de la self-intersection $i(\xi)$. Il est clair que l survit dans le revêtement M^g [i. e. $l \subset p^g i(\xi^g)$] si et seulement si l'élément $[fl] \in \pi_1(N, n)$ déterminé par fl appartient à $\{e, g\}$. Si l est fermée on remarque que l est contenue dans $\xi(D^2 \times k)$ pour certain k et on entend par $[fl]$ la classe du lacet fl reporté au point base n par un chemin image de $f\xi$ d'un chemin de la partie uni-dimensionnelle de $\xi^{-1}(l) \cap D^2 \times k$ à $\partial D^2 \times k$.

Remarque. — σ_f est une forme quadratique, et la forme bilinéaire symétrique ψ_f associée à σ_f a la propriété que $\psi_f(x, x) = 0$ pour $x \in H_1(f^{-1}(S); Z_2)$.

2.3. LA DÉCOMPOSITION SYMPLECTIQUE. — Soit $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ comme dans l'introduction du paragraphe. Soit $q : (\tilde{N}, \tilde{n}) \rightarrow (N, n)$ le revêtement universel, $n \in S$, et soit \tilde{S} le relèvement de S qui contient \tilde{n} . Alors on peut écrire $\tilde{N} = \tilde{N}_1 \cup \tilde{N}_2$ telle que $\tilde{N}_1 \cap \tilde{N}_2 = \tilde{S}$. On note $p : (\tilde{M}, \tilde{m}) \rightarrow (M, m)$ le revêtement induit de q par f (qui est universel), $\tilde{f} : (\tilde{M}, \tilde{m}) \rightarrow (\tilde{N}, \tilde{n})$ le relèvement de f , $\tilde{M}_i = \tilde{f}^{-1} \tilde{N}_i$ pour $i = 1, 2$, $\tilde{f}^{-1}(\tilde{S}) = \tilde{T}$ et $\partial : H_2(\tilde{M}, \tilde{T}; Z) \rightarrow H_1(\tilde{T}; Z)$ l'opérateur bord.

Il y a un isomorphisme naturel $H_2(\tilde{M}, \tilde{T}; Z) = H_2(\tilde{M}_1, \tilde{T}; Z) \oplus H_2(\tilde{M}_2, \tilde{T}; Z)$. Soient

$$\tilde{P}_f^+ = \partial(H_2(\tilde{M}_1, \tilde{T}; Z)) \quad \text{et} \quad \tilde{P}_f^- = \partial(H_2(\tilde{M}_2, \tilde{T}; Z)).$$

Puisque l'injection $\tilde{T} \subset \tilde{M}$ induit l'homomorphisme trivial $H_1(\tilde{T}; Z) \rightarrow H_1(\tilde{M}; Z)$, ∂ est surjectif et $H_1(\tilde{T}; Z) = \tilde{P}_f^+ + \tilde{P}_f^-$. $\tilde{P}_f^+ \cap \tilde{P}_f^- = 0$ parce que pour $z_i \in H_2(\tilde{M}_i, \tilde{T}; Z)$, ($i = 1, 2$) tels que $\partial z_1 = \partial z_2$, $z_1 - z_2$ provient de $H_2(\tilde{M}; Z)$ et donc l'intersection $x \cap \partial z_1 = x \cap (z_1 - z_2) = 0$ pour tout $x \in H_1(\tilde{T}; Z)$ et donc $\partial z_1 = 0$.

Avec les mots de Cappell on peut parler de \tilde{P}_f^+ (resp. \tilde{P}_f^-) comme de l'ensemble des cycles qui meurent, disons à gauche (resp. à droite).

Remarque 1. — Par l'homéomorphisme $p | \tilde{T} : \tilde{T} \rightarrow T$ on définit une décomposition en somme directe $H_1(T; Z) = P_f^+ \oplus P_f^-$ où $P_f^\varepsilon = (p | \tilde{T})_* (\tilde{P}_f^\varepsilon)$ pour $\varepsilon = +, -$.

Remarque 2. — Le choix d'une orientation de \tilde{M} et du fibré normal à S définit une orientation de \tilde{T} et donc de T . La forme d'intersection ainsi définie,

$$\cap : H_1(T; Z) \otimes H_1(T; Z) \rightarrow Z$$

met P_f^+ et P_f^- en dualité, i. e. $x \cap y = 0$ dès que $x, y \in P_f^+$ ou que $x, y \in P_f^-$ et \cap définit un isomorphisme $(P_f^+)^d = P_f^-$.

3. Changements des données algébriques dans une homotopie

Soient $F : M \times I \rightarrow N$ une homotopie transversale sur la sphère $S, n \in S, q : (\tilde{N}, \tilde{n}) \rightarrow (N, n)$ le revêtement universel de $N, p : \widetilde{M \times I} \rightarrow M \times I$ le revêtement induit de q par $F, p_i : \widetilde{M \times i} \rightarrow M \times i$ la restriction de p à $M \times i (i = 0, 1), \tilde{F} : \widetilde{M \times I} \rightarrow \tilde{N}$ le relèvement canonique de F, \tilde{F}_i la restriction de \tilde{F} à $\widetilde{M \times i}$ et \tilde{S} le relèvement de S dans \tilde{N} contenant \tilde{n} . Soit $\tilde{N} = \tilde{N}_1 \cup \tilde{N}_2$, notons comme dans le paragraphe 2.3, $\tilde{P}_F^+ = \partial H_2(\tilde{F}^{-1}(\tilde{N}_1, \tilde{S}))$, $\tilde{P}_F^- = \partial H_2(\tilde{F}^{-1}(\tilde{N}_2, \tilde{S}))$ et notons $\tilde{j}_i : \tilde{F}_i^{-1}(\tilde{S}) \subset \tilde{F}^{-1}(\tilde{S})$ l'injection ($i = 0, 1$).

PROPOSITION :

- (1) $(\tilde{j}_i)_* \tilde{P}_{F_i}^\varepsilon \subset \tilde{P}_F^\varepsilon$ pour $\varepsilon = +, -$.
- (2) $H_1(\tilde{F}^{-1}(\tilde{S})) = \tilde{P}_F^+ \oplus \tilde{P}_F^-$.

Démonstration. — On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(\widetilde{M \times I}) & \xrightarrow{\partial} & H_2(\tilde{F}^{-1}(\tilde{N}_1, \tilde{S})) \oplus H_2(\tilde{F}^{-1}(\tilde{N}_2, \tilde{S})) & \xrightarrow{\partial} & H_1(\tilde{F}^{-1}(\tilde{S})) & \rightarrow & 0 \\ \cong \uparrow & & \uparrow \rho_1 & & \uparrow \rho_2 & & \uparrow \tilde{G}_i^* \\ H_2(\widetilde{M \times i}) & \xrightarrow{\partial} & H_2(\tilde{F}_i^{-1}(\tilde{N}_1, \tilde{S})) \oplus H_2(\tilde{F}_i^{-1}(\tilde{N}_2, \tilde{S})) & \xrightarrow{\partial} & H_1(\tilde{F}_i^{-1}(\tilde{S})) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

ρ_1 et ρ_2 sont induits par les injections d'espaces topologiques.

(1) en est une conséquence immédiate. De l'exactitude des suites horizontales de Mayer-Vietoris il suit comme dans le paragraphe 2.3 que $H_1(\tilde{F}^{-1}(\tilde{S})) = \tilde{P}_F^+ + \tilde{P}_F^-$. Pour montrer que $\tilde{P}_F^+ \cap \tilde{P}_F^- = 0$, soient $z_k \in H_2(\tilde{F}^{-1}(\tilde{N}_k, \tilde{S})) (k = 1, 2)$ tels que $\partial z_1 = \partial z_2$ et soit $z \in H_2(\widetilde{M \times I})$ tel que $\theta(z) = (z_1, -z_2)$. Il y a un élément $\zeta \in H_2(\widetilde{M \times i})$ tel que $(\rho_1 \oplus \rho_2) \vartheta(\zeta) = (z_1, -z_2)$ et en notant $\vartheta(\zeta) = (\zeta_1, -\zeta_2)$ on a

$$\partial \zeta_1 = \partial \zeta_2 \in H_1(\tilde{F}_i^{-1}(\tilde{S})).$$

Selon le paragraphe 2.3 ceci implique que $\partial\zeta_1 = \partial\zeta_2 = 0$, donc que $\partial z_k = (\tilde{j}_i)_* \partial\zeta_k = 0$, pour $k = 1, 2$ et $i = 0, 1$. Ceci montre (2).

C. Q. F. D.

Dans les mêmes circonstances que dans le paragraphe 2.3, $\tilde{F}^{-1}(\tilde{S})$ est muni d'une orientation compatible avec celles associées à $\tilde{F}_i^{-1}(\tilde{S})$ ($i = 0, 1$), c'est-à-dire que

$$\partial \{ \tilde{F}^{-1}(\tilde{S}), \partial\tilde{F}^{-1}(\tilde{S}) \} = \{ \tilde{F}_1^{-1}(\tilde{S}) \} - \{ \tilde{F}_0^{-1}(\tilde{S}) \}.$$

Par conséquent, soient $x_i, y_i \in H_1(F_i^{-1}(S))$ ($i = 0, 1$) tels que $(j_0)_*(x_0) = (j_1)_*(x_1)$ et que $(\tilde{j}_0)_*(y_0) = (\tilde{j}_1)_*(y_1)$ et soit $z \in H_2(\tilde{F}^{-1}(\tilde{S}), \partial\tilde{F}^{-1}(\tilde{S}))$ tel que $\partial z = x_1 - x_0$, alors l'intersection homologique \cap a la propriété suivante :

PROPOSITION :

$$(3) \quad x_0 \cap y_0 = z \cap (\tilde{j}_0)_*(y_0) = z \cap (\tilde{j}_1)_*(y_1) = x_1 \cap y_1.$$

Supposons que F est une homotopie excellente. En notant $T = F^{-1}(S)$, $T_i = F_i^{-1}(S)$ et $j_i : T_i \subset T$ ($i = 0, 1$), on a les résultats suivants :

Cas 1. — Dans les situations suivantes :

1° $t | T : T \subset M \times I \xrightarrow{\text{proj}} I$ n'a pas de points critiques;

2° F est élémentaire d'indice 0;

3° F est élémentaire d'indice 1 et la membrane de F joint deux composantes différentes de T_0 ;

j_i induit un isomorphisme $(j_i)_* : H_1(T_i) \rightarrow H_1(T)$ ($i = 0, 1$) et l'isomorphisme

$$(j_1)_*^{-1} (j_0)_* : H_1(T_0) \rightarrow H_1(T_1)$$

respecte la décomposition en somme directe définie dans le paragraphe 2.3 : $(j_1)_*^{-1} (j_0)_* P_{F_0}^\varepsilon = P_{F_1}^\varepsilon$ ($\varepsilon = +, -$) (voir prop. (1)).

Cas 2. — Si F est une homotopie élémentaire d'indice 1 et la membrane de F est attachée à une seule composante de T_0 , on a les suites exactes suivantes (α désigne l'opérateur bord et β est induit par l'injection $T \subset (T, T_0)$) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H_2(T, T_1) & \xrightarrow{\alpha} & H_1(T_1) & \xrightarrow{(j_1)_*} & H_1(T) & \rightarrow & 0 \\ & & & & \parallel & & \\ & & 0 \rightarrow H_1(T_0) & \xrightarrow{(j_0)_*} & H_1(T) & \xrightarrow{\beta} & H_1(T, T_0) \rightarrow 0, \end{array}$$

où $H_2(T, T_1) \cong \mathbb{Z}$ et $H_1(T, T_0) \cong \mathbb{Z}$. En outre on a les relations suivantes :

(i) $\beta (j_1)_*(x) = \alpha(1) \cap x$ pour $x \in H_1(T_1)$;

(ii) $(j_0)_* P_{F_0}^\varepsilon \subset (j_1)_* P_{F_1}^\varepsilon$ pour $\varepsilon = +, -$ (voir prop. (1) et (2)), en plus $\alpha(1)$ est représentée par le bord de la membrane duale de F dont l'intérieur est disjointe de T_1 , donc $\alpha(1) \in P_{F_1}^+$ ou $\alpha(1) \in P_{F_1}^-$.

tel que les suites horizontales soient exactes et que

- (i) $\alpha(1) \cap z = \beta p(z)$ pour tout $z \in P_1 \oplus P_1^d$;
- (ii) $i P_0 \subset p P_1, i P_0^d \subset p P_1^d$ et soit $\alpha(1) \in P_1$, soit $\alpha(1) \in P_1^d$;
- (iii) pour $z_j, z'_j \in P_j \oplus P_j^d (j = 0,1)$ tels que $p(z_1) = i(z_0)$ et que $p(z'_1) = i(z'_0)$ on a les égalités

$$z_1 \cap z'_1 = z_0 \cap z'_0 \quad \text{et} \quad \Phi_1(z_1) = \Phi_0(z_0).$$

Pour un sous-ensemble E d'un A-module M, $[[E]]$ désignera le sous-module de M engendré par (les éléments de) E.

LEMME. — Il y a des homomorphismes $s : P_0 \rightarrow P_1$ et $s^* : P_0^d \rightarrow P_1^d$ tels que $p(s \oplus s^*) = i : P_0 \oplus P_0^d \rightarrow S$ et il y a des éléments $a \in P_1$ et $b \in P_1^d$ tels que $a \cap b = +1$ et que $[[a, b]] \cap (s \oplus s^*) (P_0 \oplus P_0^d) = 0$; nécessairement $s \oplus s^*$ est injectif, soit $a = \pm \alpha(1)$, soit $b = \pm \alpha(1)$ et $P_1 = s(P_0) \oplus [[a]]$ et $P_1^d = s^*(P_0^d) \oplus [[b]]$.

Preuve. — Supposons que $\alpha(1) \in P_1$, alors $i P_0 = p P_1$. En effet, soit $v_1 \in P_1$, alors $\beta p v_1 = \alpha(1) \cap v_1 = 0$ et il y a $v_0 \in P_0 \oplus P_0^d$ tel que $i(v_0) = p(v_1)$. Pour tout $y_0 \in P_0$ il y a $y_1 \in P_1$ tel que $i(y_0) = p(y_1)$ et alors $v_0 \cap y_0 = v_1 \cap y_1 = 0$, donc $v_0 \in P_0$.

Soit $\chi : P_1 \rightarrow P_0$ la composition $i^{-1} p$ ainsi définie. On prendra pour $s : P_0 \rightarrow P_1$ une section de χ et pour $s^* : P_0^d \rightarrow P_1^d$ le dual χ^d de χ . Il est facile de vérifier que $p(s \oplus s^*) = i$. Donc $s \oplus s^*$ est injectif.

$\alpha(1)$ engendre le noyau de χ qui contient exactement les éléments de P_1 qui s'annulent sur $s^*(P_0^d)$, donc $a = \pm \alpha(1)$. L'élément b est déterminé en posant que l'écriture en somme directe de $P_1^d, P_1^d = s^*(P_0^d) \oplus [[b]]$ est la duale de celle de $P_1, P_1 = [[a]] \oplus s(P_0)$ et que $a \cap b = +1$.

C. Q. F. D.

4.2. Supposons que (P, Φ) soit une structure bilatérale linéaire.

DÉFINITION. — Soit $\{a_1, \dots, a_n\}$ une base de P, et soit $\{a_1^*, \dots, a_n^*\}$ sa base duale, alors on pose

$$\tau^l(P, \Phi) = \sum_{i=1}^n \Phi(a_i) \otimes \Phi(a_i^*) \in F \otimes_A F.$$

On peut définir τ^l de façon intrinsèque comme suit : soit $\delta : F \otimes P^d \rightarrow \text{Hom}(P, F)$ l'isomorphisme défini par l'égalité $(\delta(f \otimes x^*))(y) = x^*(y).f$ pour $f \in F, x^* \in P^d$ et $y \in P$. Alors $\tau^l(P, \Phi) = (1_F \otimes \Phi | P^d) \delta^{-1}(\Phi | P) \in F \otimes_A F$.

LEMME. — Si (P', Φ') et (P, Φ) sont des structures bilatérales linéaires et (P', Φ') est une expansion de (P, Φ) , on a $\tau^l(P', \Phi') = \tau^l(P, \Phi)$.

Démonstration. — Soient s, s^*, a et b comme dans le lemme du paragraphe 4.1, et soit $\{a_1, \dots, a_n\}$ une base de P. Puisque $\Phi'(a) \otimes \Phi'(b) = 0$,

$$\tau^l(P, \Phi) = \sum_{i=1}^n \Phi(a_i) \otimes \Phi(a_i^*) = \sum_{i=1}^n \Phi'(s(a_i)) \otimes \Phi'(s^*(a_i^*)) + \Phi'(a) \otimes \Phi'(b) = \tau^l(P', \Phi').$$

On a la propriété suivante de l'invariant du type d'Arf, τ^l :

PROPOSITION. — Soit (P, Φ) une structure bilatérale linéaire. Si $\tau^l(P, \Phi) = 0$, il y a une suite d'expansions et de rétractions de (P, Φ) à zéro.

Démonstration. — $F \otimes_A F$ est engendré par les éléments $f_1 \otimes f_2$ ($f_1, f_2 \in F$) avec les seules relations

$$f_1 \otimes f_2 + f_1 \otimes f_3 = f_1 \otimes (f_2 + f_3) \quad \text{et} \quad f_1 \otimes f_3 + f_2 \otimes f_3 = (f_1 + f_2) \otimes f_3$$

parce que A est un \mathbf{Z} -module cyclique.

La donnée $\tau^l(P, \Phi) = 0$ permet alors de se ramener à des opérations du type suivant, correspondant à une relation dans $F \otimes_A F$: soit $\{a_1, \dots, a_n\}$ une base de P , $\{a_1^*, \dots, a_n^*\}$ la base duale. Supposé que $\Phi(a_1) = \Phi(a_2)$, on peut faire une rétraction $(\check{P}, \check{\Phi})$ où $\check{P} = [[a_2, \dots, a_n]] \subset P$ et $\check{P}^d = [[a_1^* + a_2^*, a_3^*, \dots, a_n^*]] \subset P^d$; $\check{\Phi}$ est défini par restriction. Dans le diagramme du paragraphe 4.1 on a $\alpha(1) = a_1 - a_2$, $p(a_1) = p(a_2) = a_2 \in S = \check{P} \oplus P^d$, $\beta = 0$ sur \check{P} et $\beta = \cdot \cap (a_1 - a_2)$ sur P^d .

4.3. Si (P, Φ) est une structure bilatérale non linéaire, on ne peut pas procéder comme dans le paragraphe 4.2. On suppose que l'anneau A égale \mathbf{Z}_2 et on va construire un élément associé à (P, Φ) dans l'anneau des fonctions de $F^d \times F^d$ dans \mathbf{Z}_2 , $\mathbf{Z}_2 \{F^d \times F^d\}$. Soit $l : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_2$ la fonction définie par $l(z) = 0$ si $z \geq 0$ et $l(z) = 1$ si $z < 0$.

DÉFINITION. — Soit (P, Φ) une structure bilatérale ($A = \mathbf{Z}_2$). En posant pour $\mu, \nu \in F^d$;

$$e_{\mu, \nu}(P, \Phi) = \sum_{x \in P, x^* \in P^*} (-1)^{\mu\Phi(x) + \nu\Phi(x^*) + x^*(x)},$$

on définit

$$\tau^q(P, \Phi) = \sum_{\mu, \nu \in F^d} l e_{\mu, \nu}(P, \Phi) \cdot \langle \mu, \nu \rangle \in \mathbf{Z}_2 \{F^d \times F^d\}.$$

Dans la situation géométrique ($\Phi = \sigma_f$) Φ est une forme quadratique et en ce cas la forme quadratique à valeurs dans \mathbf{Z}_2 :

$$P \oplus P^d \ni x + x^* \mapsto \mu\Phi(x) + \nu\Phi(x^*) + x^*(x) \in \mathbf{Z}_2$$

est une forme non dégénérée (voir § 4.5) et $e_{\mu, \nu}(P, \Phi)$ réduit à une somme de Gauss ordinaire.

LEMME 1. — Si (P', Φ') est une expansion de (P, Φ) , $\tau^q(P', \Phi') = \tau^q(P, \Phi)$.

Démonstration. — Soient s, s^*, a et b comme dans le lemme du paragraphe 4.1. On suppose que $a = \alpha(1)$, donc $\Phi'(x+a) = \Phi'(x)$ pour tout $x \in s(P)$. Alors on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} e_{\mu, \nu}(P', \Phi') &= \sum_{x \in P, x^* \in P^d} (-1)^{\mu\Phi'(s(x)) + \nu\Phi'(s^*(x^*)) + s^*(x^*)(s(x))} \\ &\quad + (-1)^{\mu\Phi'(s(x)+a) + \nu\Phi'(s^*(x^*)) + s^*(x^*)(s(x)+a)} \\ &\quad + (-1)^{\mu\Phi'(s(x)) + \nu\Phi'(s^*(x^*)+b) + (s^*(x^*)+b)s(x)} \\ &\quad + (-1)^{\mu\Phi'(s(x)+a) + \nu\Phi'(s^*(x^*)+b) + (s^*(x^*)+b)(s(x)+a)} = 2 e_{\mu, \nu}(P, \Phi), \end{aligned}$$

parce que les deux premiers termes sont égaux et les deux derniers sont opposés. Donc $le_{\mu, \nu}(P', \Phi') = le_{\mu, \nu}(P, \Phi)$.

C. Q. F. D.

Supposé que la fonction $P \ni x \mapsto \mu \Phi(x) \in \mathbb{Z}_2$ est un *homomorphisme*, alors on peut calculer $le_{\mu, \nu}(P, \Phi)$ de la façon suivante : notons par $x^* \in P^d$ l'homomorphisme $\mu \Phi | P$ alors :

$$e_{\mu, \nu}(P, \Phi) = \text{card}(P) \cdot (-1)^{\nu \Phi(x^*)},$$

donc

$$le_{\mu, \nu}(P, \Phi) = \nu \Phi(x^*).$$

4.4. *Remarque-clef.* — Soit $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ une application induisant un isomorphisme de groupes fondamentaux, et soit $S \subset N$ une 2-sphère plongée. Alors

PROPOSITION. — 1° (P_f^+, ε_f) est une structure bilatérale linéaire. Si en plus f est une équivalence d'homotopie, (P_f^+, σ_f) est une structure bilatérale;

2° une homotopie de f fait changer ces structures bilatérales par isomorphismes, expansions et rétractions;

3° si f est une application scindée (P_f^+, ε_f) resp. (P_f^+, σ_f) est la structure triviale.

Cette proposition permet de définir l'invariant par homotopie de f :

$$\tau^1(f) = \tau^1(P_f^+, \varepsilon_f) \in \pi_2(N) / (\pi_2(S) + f_* \pi_2(M)) \otimes \pi_2(N) / (\pi_2(S) + f_{\#} \pi_2^1(M))$$

et, si en plus f est une équivalence d'homotopie

$$\tau_{\mathbb{Z}_2}^q(f) = \tau_{\mathbb{Z}_2}^q(P_f^+ \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}, \sigma_f) \in \mathbb{Z}_2 \{ \mathbb{Z}_2[G]_{\mathbb{Z}_2}^d \times \mathbb{Z}_2[G]^d \}.$$

Démonstration. — 1° suit du paragraphe 2, 2° suit du paragraphe 3, 3° est évident. De 3° il suit que $\tau^1(f) = 0$ et éventuellement que $\tau^q(f) = 0$ dès que f est scindable.

4.5. *Structures simples.* — On suppose que l'anneau A égale \mathbb{Z}_2 .

DÉFINITION. — Soit (P, Φ) une structure bilatérale non linéaire. (P, Φ) est *quadratique* si la fonction symétrique $\psi_{\Phi} : (P \oplus P^d) \times (P \oplus P^d) \rightarrow F$ définie par

$$\psi_{\Phi}(x, y) = \Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)$$

est bilinéaire.

Pour démontrer le lemme suivant F. Clauwens m'a proposé la définition suivante :

(P, Φ) est *simple* si (P, Φ) est une structure bilatérale quadratique et qu'en plus pour tout $\mu, \nu \in F^d$, l'homomorphisme composé

$$P \xrightarrow{(\psi_{\Phi})_{\nu}} P^d \xrightarrow{(\psi_{\Phi})_{\mu}} P$$

n'a pas de valeurs propres égales à 1.

Ici $(\Psi_\Phi)_\nu$ [resp. $(\Psi_\Phi)^\mu$] est l'homomorphisme défini par $(\Psi_\Phi)_\nu(x) \cap y = \nu \Psi_\Phi(x, y)$ pour $x, y \in P$ [resp. $(\Psi_\Phi)^\mu(x^*) \cap y^* = \mu \Psi_\Phi(x^*, y^*)$ pour $x^*, y^* \in P^d$].

Il est facile de vérifier qu'une structure quadratique (P, Φ) est simple si et seulement si pour tout $\mu, \nu \in F^d$ la forme quadratique

$$P \oplus P^d \ni x + x^* \mapsto \mu \Phi(x) + \nu \Phi(x^*) + x^*(x) \in \mathbb{Z}_2$$

est *non dégénérée*, d'où le lemme 1 correspondant à un fait bien connu des formes quadratiques non dégénérées.

LEMME 1. — Si (P, Φ) est une structure simple, alors pour tout $\mu, \nu \in F^d$,

$$|e_{\mu, \nu}(P, \Phi)| = \text{card}(P).$$

On définit la somme directe de deux structures bilatérales

$$(P_1, \Phi_1) \oplus (P_2, \Phi_2) = (P_1 \oplus P_2, \Phi)$$

en posant

$$\Phi(x_1 + x_2 + x_1^* + x_2^*) = \Phi_1(x_1 + x_1^*) + \Phi_2(x_2 + x_2^*)$$

pour $x_1 + x_2 + x_1^* + x_2^* \in P_1 \oplus P_2 \oplus P_1^d \oplus P_2^d$.

En ce cas on a :

LEMME 2. — Soit pour $i = 1, 2$, (P_i, Φ_i) une structure simple, alors $(P_1, \Phi_1) \oplus (P_2, \Phi_2)$ est une structure simple et

$$\tau^q((P_1, \Phi_1) \oplus (P_2, \Phi_2)) = \tau^q(P_1, \Phi_1) + \tau^q(P_2, \Phi_2).$$

Ceci suit des propriétés logarithmiques de l et du lemme de non-nullité, le lemme 1.

LEMME 3. — Si (P, Φ) et (P', Φ') sont des structures bilatérales quadratiques et (P', Φ') est une expansion de (P, Φ) , alors (P', Φ') est simple si et seulement si (P, Φ) l'est.

Démonstration. — Soient s, s^*, a et b comme dans le lemme du paragraphe 4.1. Des propriétés (i) et (iii) d'une expansion il suit que $(\Psi_{\Phi'})_\nu(\alpha(1)) = 0$ et $(\Psi_{\Phi'})^\mu(\alpha(1)) = 0$ (si c'est défini) et que $\beta p(\Psi_{\Phi'})_\nu = 0$ et $\beta p(\Psi_{\Phi'})^\mu = 0$. De ceci et de (iii) il suit que $i^{-1} p(\Psi_{\Phi'})_\nu s = (\Psi_{\Phi'})_\nu$ et que $i^{-1} p(\Psi_{\Phi'})^\mu s^* = (\Psi_{\Phi'})^\mu$. Par conséquent

$$i^{-1} p(\Psi_{\Phi'})^\mu (\Psi_{\Phi'})_\nu s = (\Psi_{\Phi'})^\mu (\Psi_{\Phi'})_\nu.$$

Soit $x \in P$ (resp. $x' \in P'$) un vecteur propre de $(\Psi_\Phi)^\mu (\Psi_\Phi)_\nu$ [resp. de $(\Psi_{\Phi'})^\mu (\Psi_{\Phi'})_\nu$] pour la valeur propre 1, s'il en existe. Alors $(\Psi_{\Phi'})^\mu (\Psi_{\Phi'})_\nu s(x) = s(x) + n \cdot \alpha(1)$ pour certain n et alors $s(x) + n \cdot \alpha(1)$ est un vecteur propre de $(\Psi_{\Phi'})^\mu (\Psi_{\Phi'})_\nu$ pour la valeur propre 1 [resp. $i^{-1} p x'$ est un vecteur propre de $(\Psi_{\Phi'})^\mu (\Psi_{\Phi'})_\nu$ pour la valeur propre 1].

C. Q. F. D.

THÉORÈME. — Soit $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ une équivalence d'homotopie de variétés compactes et soit S une sphère plongée dans N , alors la structure (P_f^+, σ_f) associée à f (voir § 2) est une structure simple.

Par le théorème 2 de II, § 1, f est la modification dans une boule de M d'une application scindée f_0 . Par le paragraphe II, § 2, on peut choisir f_0 de telle façon que f est une modification dans une boule de f_0 appartenant à l'image $CW(\Lambda)$ de C [associée à f_0 dans II, § 2] et par la remarque de II, § 2 on peut supposer que f appartient à $CW_S(\Lambda)$. Par la remarque 3 de II, § 1, il suffit de montrer :

LEMME 4. — Soit $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Lambda$ une paire en forme simple et soit f_0 une équivalence d'homotopie scindée. En posant $f_1 = (\lambda, \mu) \cdot f_0$ (voir II, § 3.1), $(P_{f_1}^+, \sigma_{f_1})$ est une structure simple.

Démonstration. — Pour la base de $P_{f_1}^+$ décrite dans II, § 3.2, l'homomorphisme

$$Z = (\psi_{\sigma_{f_1}})^\mu (\psi_{\sigma_{f_1}})_\nu : P_{f_1}^+ \rightarrow P_{f_1}^+ \quad (\mu, \nu \in \mathbb{Z}_2[G]^d)$$

a une matrice triangulaire supérieure (avec une diagonale triviale). Par conséquent Z est nilpotent et donc, *a fortiori*, $(P_{f_1}^+, \sigma_{f_1})$ est une structure simple.

C. Q. F. D.

Remarque. — Il n'est pas clair que la nullité de $\tau^a(P, \Phi)$ implique qu'il y ait une suite d'expansions et de rétractions de (P, Φ) à zéro. Dans l'exemple suivant $\tau^a(P, \Phi) = 0$ et néanmoins il n'y a aucune rétraction possible.

Exemple. — P est un \mathbb{Z}_2 -module ayant comme base $\{a_1, a_2, a_3\}$. $\Phi : P \rightarrow \mathbb{Z}_2$ est la fonction définie par

$$\Phi(n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3) = n_1 \cdot n_2 + n_3 \quad \text{et} \quad \Phi(n_1 a_1^* + n_2 a_2^* + n_3 a_3^*) = n_1 + n_2 \cdot n_3.$$

Grâce au « catalogue » des équivalences d'homotopie $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ fourni par [H 2] on n'aura pas besoin d'étudier ces éventuelles failles de l'algèbre ainsi que le problème de relever en homotopies élémentaires les expansions et rétractions algébriques.

CHAPITRE II

1. Modifications dans une boule

Le point de départ est une application $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ de variétés de dimension 3, scindée le long d'une 2-sphère S dans N , telle que $f(m) = n \in S$ et que f induise un isomorphisme de groupes fondamentaux. On suppose que S n'est pas homotope à zéro ce qui implique que le revêtement universel de N n'est pas fermé. Soit B une boule dans M telle que $B \cap f^{-1}(S) = \emptyset$ et soit $b_0 \in \partial B$. Quitte à faire une homotopie F de f à support dans un voisinage arbitrairement petit de B telle que $F_t^{-1}(S) \cap B = \emptyset$ pour tout t , on peut supposer que $f(B) = \{f(b_0)\}$. On se donne une identification de B avec D^3 .

DÉFINITION. — Soit donnée une application $w : (D^3, S^2) \rightarrow (N, f(b_0))$, alors l'application $w.f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ est définie comme suit :

$$w.f(x) = x \quad \text{si } x \notin B \quad \text{et} \quad w.f(x) = w(x) \quad \text{si } x \in B!$$

On dira que $w.f$ est la *modification de f par w dans la boule B* .

Remarque 1. — Si B' est une boule dans M ($b'_0 \in \partial B'$, $m \notin B'$), telle que $f(B') = f(b'_0)$ alors pour tout chemin γ de $f(b'_0)$ à $f(b_0)$ et $[w] \in \pi_3(N, f(b_0))$ les modifications dans B respectivement dans B' de f par w respectivement par $\gamma.w$ sont homotopes rel m .

Remarque 2. — Soit $w.f$ une modification de f dans une boule de B ($m \notin B$) alors (i) $w.f$ et f induisent les mêmes homomorphismes en homotopie,

$$(w.f)_\# = f_\# : \pi_\#(M, m) \rightarrow \pi_\#(N, n),$$

(ii) les degrés de $w.f$ et de f sont égaux et (iii) $w.f$ est une équivalence d'homotopie si et seulement si f en est une.

Remarque 3. — La fonction qui associe à $[w] \in \pi_3(N, f(b_0))$ l'obstruction pour le scindement de $w.f$,

$$\tau^l(w.f) \in \pi_2(N)/(\pi_2 S + f_\# \pi_2 M) \otimes \pi_2(N)/(\pi_2 S + f_\# \pi_2 M),$$

resp. $\tau^q(w.f) \in \mathbf{Z}_2 \{ \mathbf{Z}_2 [G]^d \times \mathbf{Z}_2 [G]^d \}$, si f est une équivalence d'homotopie [voir I, § 4.4; G désigne le sous-ensemble d'éléments d'ordre 2 de $\pi_1(N)$], est un homomorphisme. Rappelons que f est scindée le long de S .

Démonstration. — Soient $[w_1], [w_2] \in \pi_3(N, f(b_0))$ alors $[w_1] + [w_2]$ peut être représenté par une application $w : (D^3, S^2) \rightarrow (N, f(b_0))$ ayant son « support » en deux boules disjointes B_1 et B_2 qui portent respectivement w_1 et w_2 . Le résultat pour τ^l est immédiat. Si f est une équivalence d'homotopie la forme bilinéaire $\psi_{w.f}$ associée à $\sigma_{w.f}$ a la propriété que $\psi_{w.f}(x_1, x_2) = 0$ si $x_i \in H_1((w.f)^{-1}(S) \cap B_i)$ ($i = 1, 2$) parce que l'intersection homologique de deux classes d'homologie sphériques de dimension 2, $\{\xi_1\}$ et $\{\xi_2\}$ où $\xi_i : S^2 \rightarrow M$ ($i = 1, 2$), est triviale : elle est représentée par des cycles provenant de S^2 . Par conséquent la structure bilatérale associée à $w.f$, $(P_{w.f}^+, \sigma_{w.f})$, est la somme directe de celles associées à $w_1.f$ et $w_2.f$. Le résultat suit du lemme 2 de I, § 4.5.

C. Q. F. D.

Par modification dans une boule d'applications scindées le long de S , on obtient une classe importante d'applications comme le montrera la suite.

Soit $g : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ une application telle que $g(m) = n$; par l'hypothèse fondamentale $F(g)$ on entend que g induit un isomorphisme $g_\#$ de groupes fondamentaux et que $g_\#$ respecte l'homomorphisme d'orientation, i. e. :

$$w_N g_\# = w_M : \pi_1 M \rightarrow \{ +1, -1 \}.$$

En suivant la voie de [HL 2] on obtient

THÉORÈME 1. — (a) *Supposons que M et N sont compactes et que F(g) est vrai. A condition qu'il y ait une application scindable $g' : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ qui coïncide avec g sur le 1-squelette de M et sur ∂M et telle que $\deg(g) = \deg(g')$, g est homotope rel $\partial M \cup \{m\}$ à une modification dans une boule d'une application scindée (non nécessairement g').*

(b) *Si M et N sont fermées la condition dans (a) est une conséquence de F(g).*

Remarque 4. — L'hypothèse dans (b) que M et N sont fermées est nécessaire pour appliquer la généralisation de Swarup du théorème de Thomas (voir [S 4] et évent. [S 3]).

Démonstration. — On peut supposer que S sépare parce que sinon, il y a une sphère S' et une décomposition $N = N'_1 \cup N'_2$ telle que $N'_1 \cap N'_2 = S'$, que $S \subset N'_1$ et que $N'_1 \bigcup_{S' \cong S^2} D^3$ est un S^2 -fibré sur S^1 . Il est facile de réduire le cas général au cas où la sphère est S' et au cas trivial de $S \subset N'_1$.

Le théorème (b) est une généralisation immédiate de la proposition 1.3 de [HL 2] en utilisant comme référence [S 4]. Il s'agit de trouver une application scindée $g'' : (M, m) \rightarrow (N, n)$ induisant le même isomorphisme de groupes fondamentaux que g et telle que $\deg(g) = \deg(g'')$. A l'aide de la conjecture de Kneser (voir [S 2]) on peut trouver une sphère R dans M qui induit la même décomposition en produit libre de $\pi_1(M, m)$ que le transporté par $g_{\#}$ de celle de $\pi_1(N, n)$ induite par S.

En posant $M = M_1 \#_{\mathbb{R}} M_2$ et $N = N_1 \#_S N_2$ de telle façon que $g_{\#} \pi_1 M_i = \pi_1 N_i$ ($i = 1, 2$) l'existence de g'' est impliquée par l'existence d'applications $g_i : M_i \rightarrow N_i$, induisant l'isomorphisme $\theta_i = g_{\#} |_{\pi_1 M_i}$ de groupes fondamentaux et dont le degré est $\deg(g)$. Selon Swarup [S 4], l'image τ_M de la classe fondamentale de M dans $H_3(\pi_1(M, m); \tilde{\mathbb{Z}})$ a la propriété suivante : étant donné un isomorphisme

$$\theta : \pi_1(M, m) \rightarrow \pi_1(N, n)$$

respectant l'homomorphisme d'orientation, θ est induit d'une application

$$g : (M, m) \rightarrow (N, n)$$

de degré d si et seulement si $\theta_* \tau_M = d \tau_N$. L'invariant de Swarup est additif, c'est-à-dire que, si $M = M_1 \# M_2$, on a

$$\tau_M = \tau_{M_1} + \tau_{M_2} \quad \text{dans } H_3(\pi_1(M, m); \tilde{\mathbb{Z}}) = H_3(\pi_1(M_1, m); \tilde{\mathbb{Z}}) \oplus H_3(\pi_1(M_2, m); \tilde{\mathbb{Z}}).$$

Dans la situation ci-dessus on obtient les égalités

$$(\theta_1)_* \tau_{M_1} + (\theta_2)_* \tau_{M_2} = (g_{\#})_* \tau_M = \deg(g) \tau_N = \deg(g) \tau_{N_1} + \deg(g) \tau_{N_2}.$$

Il en suit immédiatement l'existence des applications g_1 et g_2 .

Le théorème (a) est une conséquence du théorème que la condition dans (a) implique qu'il existe un homéomorphisme ρ de M tel que $g' \rho$ soit homotope à une application coïncidant avec g même sur le 2-squelette de M :

THÉORÈME ([H 2], IV, 2.2). — Soient $g_1, g_2 : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ des applications de variétés compactes satisfaisant à l'hypothèse fondamentale i. e. $F(g_1)$ et $F(g_2)$. Si g_1

et g_2 coïncident sur le 1-squelette de M et sur ∂M et que $\deg(g_1) = \deg(g_2)$, il y a une composition ρ de « rotations » parallèles à un système de plans projectifs $\{P_\alpha\}$ plongés dans M à fibré normal trivial, mutuellement disjoints, telle que $g_1 \rho$ soit homotope rel $\partial M \cup \{m\}$ à une application coïncidant avec g_2 sur le 2-squelette de M (cf. la remarque dans [HL 2], 2.5).

C. Q. F. D.

Si g est une équivalence d'homotopie on peut généraliser [HL 1] (voir [L], chap. V) pour obtenir un théorème sans hypothèse sur le bord.

THÉORÈME 2. — Soit $g : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ une équivalence d'homotopie de variétés compactes alors g coïncide sur le 2-squelette avec une application scindable le long de S .

Démonstration [S 5]. — L'énoncé du théorème 2 couvre le lemme de [L], p. 115, qui concerne les variétés fermées. Pour montrer le théorème, il faut d'abord l'existence d'une sphère R dans M tel que $g|_R$ soit homotope à S (Step 1 de [S 5], § 3).

Supposé que $g|_R$ soit un homéomorphisme sur R , on essaie de construire une homotopie de g rel $\partial M \cup R$ à une application g_1 telle que $g_1^{-1}(S)$ soit contenu dans la réunion disjointe de R et de deux boules (de chaque côté de R il y en aura une). Ceci peut être fait suivant les lignes de [L], chap. V (voir step 2 et 3 de [S 5], § 3).

2. Équivalences d'homotopie

On est dans la situation du paragraphe 1. On suppose en plus que l'application scindée, $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$, est une équivalence d'homotopie de variétés compactes. Soit $m \in M$, on désigne par $\mathcal{H}(f, m)$ l'espace des applications $g : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ homotopes rel $\partial M \cup \{m\}$ à une application coïncidant avec f sur le 2-squelette, c'est-à-dire des homotopes à une modification dans une boule de f .

Soit $\Lambda = \{\lambda \in \pi_1(M, m); \lambda^2 = 1, w_M(\lambda) = -1\}$. $W(\Lambda)$ est le \mathbf{Z}_2 -module engendré par les paires (λ, μ) , pour $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$ avec les relations

- (i) $(g \lambda g^{-1}, g \mu g^{-1}) = (\lambda, \mu)$ pour $g \in \pi_1(M, m)$;
- (ii) $(\lambda, \mu) = (\mu, \lambda)$;
- (iii) $(\lambda, \mu \lambda \mu) = (\lambda, \mu)$.

En désignant par $p_2 : S^2 \rightarrow \mathbf{P}^2$ le revêtement standard à deux feuillets, $\bar{y}_0 = p_2(y_0)$, soit pour tout $\lambda \in \Lambda$, $t_\lambda : (\mathbf{P}^2, \bar{y}_0) \rightarrow (M, m)$ un plongement tel que $[t_\lambda|_{\mathbf{P}^1}] = \lambda$ (par intermédiaire d'un homéomorphisme $\mathbf{P}^1 \cong S^1$). Il existe d'après [E], (8.2) (i). Le fibré normal à t_λ dans M est trivial. Dans [H 2], chap. V, on montre que la formule

$$C(\lambda, \mu) = [f t_\lambda p_2, f t_\mu p_2] \cdot f \in \pi_0 \mathcal{H}(f, m),$$

définit une fonction $C : W(\Lambda) \rightarrow \pi_0 \mathcal{H}(f, m)$. (On modifie f ici dans une boule qui contient m .)

Il est clair que $\pi_0 \mathcal{H}(f, m)$ est un quotient (en tant qu'ensemble) du quotient de $\pi_3(M, m)$ par l'action du groupe fondamental (voir la remarque 1 du paragraphe 1). Dans [H 2], chap. V, on montre même, en désignant par Hopf, $\text{Hopf} : \pi_2(N, n) \rightarrow \pi_3(N, n)$, l'homomorphisme défini par la composition avec la fibration de Hopf, $H : S^3 \rightarrow S^2$, que :

THÉORÈME 1. — $\pi_0 \mathcal{H}(f, m)$ a une structure de groupe abélien compatible avec celle de $\pi_3(M, m)$. Pour cette structure $\pi_0 \mathcal{H}(f, m)$ est un \mathbf{Z}_2 -module et il y a une suite exacte

$$0 \rightarrow W(\Lambda) \xrightarrow{c} \pi_0 \mathcal{H}(f, m) \xrightarrow{r} V \rightarrow 0,$$

où V est un quotient du \mathbf{Z}_2 -module fini $\mathbf{Z}_2 \otimes_{\pi_1(N, n)} \pi_2(N, n)$ et où $r([\text{Hopf } \sigma].f) = \overline{1 \otimes \sigma}$ pour $\sigma \in \pi_2(N, n)$.

Soit $s : (S^2, y_0) \rightarrow (N, n)$ une application transversale sur S . A l'aide d'un procédé « chirurgical » le long de l'intersection $s^{-1}(S)$ il est facile de voir que modulo l'action de $\pi_1(N, n)$ sur $\pi_2(N, n)$ s est la somme $\sum s_j$ d'applications $s_j : (S^2, y_0) \rightarrow (N, n)$ telles que $s_j^{-1}(S) = \{y_0\}$. Donc, par la remarque 1 du paragraphe 1, il n'y a pas d'obstruction pour scinder le représentant $[\sum_j \text{Hopf } s_j].f$ de $\overline{1 \otimes s} \in V$ (sous la surjection r du théorème).

Dans ce qui suit on va construire un \mathbf{Z}_2 -module $W_s(\Lambda)$ et un homomorphisme $W_s(\Lambda) \rightarrow W(\Lambda)$; on montrera dans le paragraphe 3 que la composition

$$W_s(\Lambda) \rightarrow W(\Lambda) \xrightarrow{c} \pi_0 \mathcal{H}(f, m) \xrightarrow{\tau^q} \mathbf{Z}_2 \{ \mathbf{Z}_2[G]^d \times \mathbf{Z}_2[G]^d \}$$

est un isomorphisme sur l'image de $\tau^q | \pi_0 \mathcal{H}(f, m)$, qui est égale à $\tau^q C W(\Lambda)$ comme on vient de voir (τ^q est un homomorphisme d'après la remarque 3 du paragraphe 1).

En rappelant que f est scindée le long de S , on note $R = f^{-1}(S)$. La sphère R munie d'une orientation du fibré normal (qui est trivial) définit un pré-groupe π , dont le groupe universel est $\pi_1(M, m)$, de la façon suivante. Les éléments de π sont des classes d'homotopie de lacets γ qui rencontrent R seulement à ses extrémités. Le produit de deux éléments est défini s'il appartient à π (voir [S 2] au sujet de pré-groupes).

π est la réunion disjointe de trois ensembles $\pi_0 = \{e\}$, π_+ et π_- , où e désigne l'élément neutre et où π_+ (resp. π_-) est l'ensemble des classes $[\gamma]$ telles que γ parte du côté positif (resp. négatif) de R .

Soit $g \in \pi_1(M, m)$, alors l'écriture réduite de g , $g = g_1 \dots g_n$, telle que $g_i \in \pi$ et que $g_i g_{i+1} \notin \pi$, est unique. On définit la longueur $N(g)$ de g en posant $N(e) = 0$ et $N(g) = n$ si $g \neq e$.

Soit $\lambda \in \Lambda$, puisque λ est d'ordre fini, il est conjugué à un élément λ_0 dans π et il y a une écriture réduite $\lambda = g_1 \dots g_n \lambda_0 g_n^{-1} \dots g_1^{-1}$ ($\lambda_0, g_i \in \pi$). Une paire $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Lambda$ est en forme simple s'il a les propriétés suivantes :

- 1° $\lambda \in \pi$ ou $\mu \in \pi$;
- 2° les écritures réduites de λ et μ ne commencent pas dans le même ensemble π_+ ou π_- ;
- 3° si $\mu = g \lambda g^{-1}$ et $g^2 = 1$, alors $g \notin \Lambda$ [cf. la relation (iii) de $W(\Lambda)$].

Soit (λ, μ) une paire en forme simple, $\mu \in \pi$, $\lambda = g_1 \dots g_n \lambda_0 g_n^{-1} \dots g_1^{-1}$ une écriture réduite. En choisissant comme $t_{\lambda_0}, t_\mu : (\mathbf{P}^2, \bar{y}_0) \rightarrow (M, m)$ ($m \in \mathbf{R}$) des applications qui se trouvent d'un côté de \mathbf{R} [i. e. $t_{\lambda_0}^{-1}(\mathbf{R}) = \{\bar{y}_0\} = t_\mu^{-1}(\mathbf{R})$], soit

$$f_1 = f_{\#} [g_1 \dots g_n \cdot t_{\lambda_0} p_2, t_\mu p_2] \cdot f.$$

Si on choisit convenablement la boule B de la modification, l'image réciproque $f_1^{-1}(S)$ consiste en \mathbf{R} et une réunion de $n+1$ tores parallèles et non noués dans B (voir § 3.2). Ceci correspond à la notion géométrique de la « forme simple » introduite dans [HL 2].

DÉFINITION. — $W_S(\Lambda)$ est le \mathbf{Z}_2 -module engendré par les paires $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Lambda$ qui sont en forme simple, ayant comme relations :

(i) Supposé que $\lambda_0, \mu_0 \in \pi$, alors $(\lambda_0, g \mu_0 g^{-1}) = (g^{-1} \lambda_0 g, \mu_0)$ si les deux membres sont en forme simple. (Dans cette relation g est uniquement déterminé par l'élément $g \mu_0 g^{-1} \in \Lambda$);

(ii) $(\lambda, \mu) = (\mu, \lambda)$.

Il y a un homomorphisme canonique $W_S(\Lambda) \rightarrow W(\Lambda)$, parce que $W(\Lambda)$ contient plus de générateurs et plus de relations.

Remarque. — Si le générateur $(\lambda, \mu) \in W(\Lambda)$ n'est pas dans l'image de $W_S(\Lambda) \rightarrow W(\Lambda)$, alors $C(\lambda, \mu)$ est scindable le long de S et donc $\tau^q C(\lambda, \mu) = 0$. En effet, à l'aide de la relation (i) dans $W(\Lambda)$ on peut écrire (λ, μ) de telle façon que $\lambda \in \pi$, disons que $\lambda \in \pi_+$. Si la longueur $N(\mu)$ de μ est strictement supérieure à 1 on peut s'arranger pour que l'écriture réduite de μ commence dans π_- (ceci peut changer λ).

En appliquant la relation (iii) dans $W(\Lambda)$ on peut obtenir la propriété 3° de la forme simple, parce qu'à chaque fois la longueur de μ diminue. Ceci fait, (λ, μ) provient de $W_S(\Lambda)$. Si $N(\mu) = 1$ et $\mu \in \pi_-$ il en est de même.

Si $\lambda, \mu \in \pi_+$, $C(\lambda, \mu)$ peut être construit à l'aide de plongements t_λ et t_μ qui se trouvent du même côté de \mathbf{R} dans M . Par conséquent $C(\lambda, \mu)$ est scindable.

Dans le paragraphe suivant on montrera entre autres le théorème D suivant, dont le théorème B de l'introduction est une conséquence.

THÉORÈME D. — La composition suivante :

$$\tau : W_S(\Lambda) \rightarrow W(\Lambda) \xrightarrow{C} \pi_0 \mathcal{H}(f, m) \xrightarrow{\tau^q} \mathbf{Z}_2 \{ \mathbf{Z}_2[G]^d \times \mathbf{Z}_2[G]^d \}$$

est un isomorphisme sur $\tau_q \pi_0 \mathcal{H}(f, m)$ [G désigne le sous-ensemble des éléments d'ordre 2 de $\pi_1(N, n)$.] Chaque classe de $\pi_0 \mathcal{H}(f, m)$ modulo $C(W_S(\Lambda))$ contient une équivalence d'homotopie scindée.

Esquisse de la démonstration. — On vient de montrer dans ce paragraphe la surjectivité de τ sur l'image de τ^q . Pour l'injectivité on procède comme suit : A chaque paire $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Lambda$ en forme simple telle que $\lambda \in \pi$, on associe une paire de fonctions

$\xi_{(\lambda, \mu)} \in \mathbf{Z}_2 [G]^d \times \mathbf{Z}_2 [G]^d$ tel que le coefficient $\xi_{(\lambda, \mu)}^* (\tau^q C(\lambda, \mu)) = 1$ et que la non-trivialité de $\xi_{(\lambda, \mu)}^* (\tau^q C(\lambda', \mu'))$, pour $(\lambda', \mu') \in \Lambda \times \Lambda$ en forme simple tel que $\lambda' \in \pi$, implique que, soit $(\lambda', \mu') = (\lambda, \mu)$ dans $W_S(\Lambda)$, soit $N(\mu') > N(\mu)$. Le théorème est une conséquence immédiate de l'existence de ces paires.

3. Le calcul des invariants dans des exemples

Soient $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ une application scindée le long de la 2-sphère S dans N , $R = f^{-1}(S)$ et $m \in R$. On munit R de l'orientation du fibré normal induite par f de celle, choisie pour S . Pour $\varepsilon = +$ (resp. $-$), γ_ε est un chemin partant de m dans la direction positive (resp. négative) du voisinage tubulaire de R et rencontrant R transversalement et en un point, m . L'extrémité de γ_ε est notée par m_ε . Soit B_ε une boule disjointe de R telle que $m_\varepsilon \in \partial B_\varepsilon$. Soit pour tout $g \in \pi$ (voir § 2), $\hat{g} : (I, \partial I) \rightarrow (M, m)$ une application transversale sur R , rencontrant R seulement à ses extrémités et représentant g .

3.1. LA CONSTRUCTION DES EXEMPLES AU CAS OU f EST UNE ÉQUIVALENCE D'HOMOTOPIE. — (Le cas sans cette hypothèse sur f , i. e. $\deg f \neq \pm 1$ est reporté au paragraphe 3.3). Soit pour tout $\lambda \in \Lambda \cap \pi$, $\varepsilon(\lambda)$ l'indice pour lequel $\lambda \in \pi_{\varepsilon(\lambda)}$ et soit $\bar{s}_\lambda : (\mathbf{P}^2, \bar{y}_0) \rightarrow (M, m_{\varepsilon(\lambda)})$ un plongement (à fibré normal trivial) disjoint de R , tel que $\gamma_{\varepsilon(\lambda)}(\bar{s}_\lambda | \mathbf{P}^1) \gamma_{\varepsilon(\lambda)}^{-1}$ représente λ . On note s_λ la composition suivante :

$$s_\lambda : (D^2, \partial D^2) \xrightarrow{\text{proj}} (D^2 | \partial D^2, *) = (S^2, y_0) \xrightarrow{p_2} (\mathbf{P}^2, \bar{y}_0) \xrightarrow{\bar{s}_\lambda} (M, m_{\varepsilon(\lambda)}).$$

Soit $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Lambda$ en forme simple (voir § 2) et supposons que $\lambda = \lambda_0 \in \pi$ et que μ s'écrit en écriture réduite comme

$$\mu = g_1 \dots g_n \mu_0 g_n^{-1} \dots g_1^{-1} \quad (\mu_0, g_i \in \pi).$$

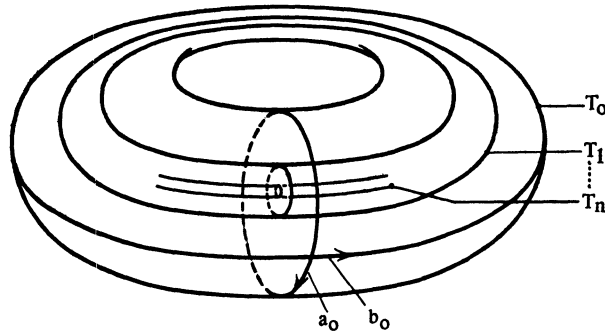
La classe d'homotopie de $\gamma_{\varepsilon(\lambda)}^{-1} [t_\lambda p_2, t_\mu p_2] \in \pi_3(M, m_{\varepsilon(\lambda)})$ est représentée par l'application $w_{(\lambda, \mu)} : (D^3, \partial D^3) \rightarrow (M, m_{\varepsilon(\lambda)})$ construite comme suit :

On décompose D^3 en $X \cup Y$, où X et Y sont deux tores pleins dont l'intersection est un tore troué; soient $\psi_X : (X, \partial X) \rightarrow (D^2, S^1)$ et $\psi_Y : (Y, \partial Y) \rightarrow (D^2, S^1)$ les trivialisations « canoniques » de ces deux tores pleins, c'est-à-dire que les préimages de deux points distincts de D^2 par ψ_X (resp. par ψ_Y) ne sont pas enlacées dans D^3 . On définit alors :

$$\begin{aligned} w_{(\lambda, \mu)} | X \cap Y &= m_{\varepsilon(\lambda)}, \\ w_{(\lambda, \mu)} | X &= s_\lambda \psi_X, \\ w_{(\lambda, \mu)} | Y &= \gamma_{\varepsilon(\lambda)}^{-1} \hat{g}_1 \dots \hat{g}_n \gamma_{\varepsilon(\mu_0)} s_{\mu_0} \psi_Y. \end{aligned}$$

On voit que $w_{(\lambda, \mu)}^{-1}(R) \cap X$ est vide et que $w_{(\lambda, \mu)}^{-1}(R) \cap Y$ est formé de $(n+1)$ tores deux à deux parallèles et parallèles à ∂Y . On pose $(\lambda, \mu).f = f_{\#} w_{(\lambda, \mu)}.f$. Cette application est dans la classe d'homotopie $C(\lambda, \mu)$ (pour la notation du paragraphe 2).

3.2. L'OBJET ALGÈBRE. — On se place dans la situation du paragraphe 3.1. Soit $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Lambda$ en forme simple telle que $\lambda \in \pi$. On pose $f_1 = (\lambda, \mu).f$ (voir § 3.1). Soit $\tilde{f}_1 : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ le relèvement de f_1 dans les revêtements universels de M et de N et soit $\tilde{S} \subset \tilde{N}$ un relèvement. $\tilde{f}_1^{-1}(\tilde{S})$ consiste en une réunion d'un relèvement \tilde{R} de R et de $(n+1)$ tores qui se trouvent dans $(n+1)$ boules disjointes, chacun dans une boule différente. C'est



Pneu à plusieurs chambres à air vu par un poisson

parce que l'écriture $g_1 \dots g_n$ est réduite (§ 2). $f_1^{-1}(S) \cap B_{\varepsilon(\lambda)}$ consiste en $(n+1)$ tores notés par T_0, \dots, T_n de telle façon que T_i contient T_j dans son intérieur si $i < j$ (voir fig.). On choisit sur T_i des lacets a_i et b_i bordant des disques plongés qui se trouvent à l'intérieur respectivement à l'extérieur du tore T_i et ayant un nombre d'intersection $a_i \cap b_i = 1$ [rappelons que \cap est défini après le choix d'une orientation du fibré normal à S et du fibré tangent à \tilde{M} , (voir I, § 2.3)].

En désignant $P_+ = P_{f_1}^+$ et $P_- = P_{f_1}^-$ (voir I, § 2.3) et $-\varepsilon = -$ si $\varepsilon = +$, $-\varepsilon = +$ si $\varepsilon = -$, on a $P_{\varepsilon(\lambda)} = [b_0, a_1, b_2, \dots]$ et $P_{-\varepsilon(\lambda)} = [a_0, b_1, a_2, \dots]$.

Voici les valeurs de σ_{f_1} et de ψ_{f_1} sur la base $\{a_i, b_i; i\}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{f_1}(a_i) &= f_{\#} g_{i+1} \dots g_n \mu_0 g_n^{-1} \dots g_{i+1}^{-1}, \\ \sigma_{f_1}(b_i) &= f_{\#} g_i^{-1} \dots g_1^{-1} \lambda_0 g_1 \dots g_i, \\ \psi_{f_1}(a_i, b_j) &= \psi_{f_1}(b_j, a_i) = f_{\#} g_j^{-1} \dots g_{i+1}^{-1} \end{aligned}$$

si $i < j$ et que $g_j^{-1} \dots g_{i+1}^{-1}$ est d'ordre 2.

$$\psi_{f_1}(a_i, b_j) = \psi_{f_1}(b_j, a_i) = 0 \quad \text{sinon.}$$

On définira maintenant les paires $\xi_{(\lambda, \mu)} \in Z_2 [G]^d \times Z_2 [G]^d$ pour démontrer le théorème D du paragraphe 2. Les éléments de G seront considérés comme des éléments de $Z_2 [G]^d$ de la façon habituelle.

Si $g_1 \dots g_n$ est d'ordre 2 et $\lambda_0 = \mu_0$ je pose

$$\begin{aligned} \xi_{(\lambda, \mu)} &= (f_{\#} \lambda, f_{\#} g_1 \dots g_n) & \text{si } \varepsilon(\lambda_0) = +, \\ \xi_{(\lambda, \mu)} &= (f_{\#} g_1 \dots g_n, f_{\#} \lambda) & \text{si } \varepsilon(\lambda_0) = -; \end{aligned}$$

si $g_1 \dots g_n$ n'est pas d'ordre 2 je pose

$$\xi_{(\lambda, \mu)} = (f_{\#} \lambda, f_{\#} \mu) \quad \text{si } \varepsilon(\lambda_0) = +,$$

$$\xi_{(\lambda, \mu)} = (f_{\#} \mu, f_{\#} \lambda) \quad \text{si } \varepsilon(\lambda_0) = -.$$

PROPOSITION 1. — Soit $(\lambda', \mu') \in \Lambda \times \Lambda$ en forme simple, $\lambda' \in \pi$ et $N(\mu) \leq N(\mu')$ alors :
 $le_{\xi_{(\lambda', \mu')}}(P_{f_1}^+, \sigma_{f_1}) = 1$ si et seulement si $(\lambda', \mu') = (\lambda, \mu)$ dans $W_S(\Lambda)$.

Démonstration. — Par définition $\xi_{(\lambda', \mu')}$ est de la forme $(f_{\#} \lambda', f_{\#} \alpha')$ [resp. $(f_{\#} \alpha', f_{\#} \lambda')$] si $\varepsilon(\lambda') = +$ [resp. si $\varepsilon(\lambda') = -$] pour un certain élément $\alpha' \in \pi_1(M, m)$ tel que $(\alpha')^2 = e$ et que $\mu' = \alpha'$ ou $\mu' = \alpha' \lambda' \alpha'$. Remarquons les choses suivantes :

(i) les valeurs $\psi_{f_1}(a_i, b_j)$, pour $j-i < n$, sont des éléments de $\pi_1(N, n)$ de longueur strictement inférieure à n ;

(ii) pour $1 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq n-1$, $\sigma_{f_1}(a_i)$ et $\sigma_{f_1}(b_j)$ sont des éléments de longueur inférieure à $2n-1$ qui renversent l'orientation; par conséquent :

(iii) $f_{\#}(\alpha') \sigma_{f_1}(x+y) = f_{\#}(\alpha') \sigma_{f_1}(x)$ pour $x \in [a_0, b_n]$ et $y \in [a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_{n-1}]$.

(iv) puisque $f_{\#} \lambda'$ est de longueur 1 :

$$[a_0, b_0, a_n, b_n] \ni x \mapsto f_{\#}(\lambda') \sigma_{f_1}(x)$$

est un homomorphisme;

(v) on peut supposer que $\lambda' \in \pi_+$. En ce cas il y a $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{Z}_2$ tels que $\rho_1 a_0 + \rho_2 b_n \in P_{f_1}^-$ et que $f_{\#}(\lambda') \sigma_{f_1}(x) = (\rho_1 a_0 + \rho_2 b_n) \cap x$ pour tout $x \in P_{f_1}^+ \cap [a_0, b_0, a_n, b_n]$. On peut montrer (cf. I, § 4.3) qu'en ce cas

$$le_{\xi_{(\lambda', \mu')}}(P_{f_1}^+, \sigma_{f_1}) = f_{\#}(\alpha') \sigma_{f_1}(\rho_1 a_0 + \rho_2 b_n) \in \mathbb{Z}_2.$$

Rappelons que

$$\sigma_{f_1}(\rho_1 a_0 + \rho_2 b_n) = \rho_1 f_{\#} \mu + \rho_2 f_{\#} g_n^{-1} \dots g_1^{-1} \lambda g_1 \dots g_n + \rho_1 \rho_2 f_{\#} g_1 \dots g_n$$

si $g_1 \dots g_n$ est d'ordre 2 et que

$$\sigma_{f_1}(\rho_1 a_0 + \rho_2 b_n) = \rho_1 f_{\#} \mu + \rho_2 f_{\#} g_n^{-1} \dots g_1^{-1} \lambda g_1 \dots g_n \quad \text{sinon.}$$

Supposons que $f_{\#}(\alpha') \sigma_{f_1}(\rho_1 a_0 + \rho_2 b_n) = 1$. Si $\rho_1 = 1$ et $\rho_2 = 0$, alors $\lambda' = \lambda$ et $\alpha' = \mu$, et donc $\mu' = \alpha'$. Par conséquent $(\lambda', \mu') = (\lambda, \mu)$. Si $\rho_1 = 0$ et $\rho_2 = 1$, alors $\lambda' = \mu_0$ et $\alpha' = g_n^{-1} \dots g_1^{-1} \lambda g_1 \dots g_n$ et donc $\alpha' = \mu'$. Par conséquent $(\lambda', \mu') = (\lambda, \mu)$ dans $W_S(\Lambda)$. Si $\rho_1 = \rho_2 = 1$, alors $\lambda' = \lambda = \mu_0$ et soit $\alpha' = \mu$, soit $\alpha' = g_n^{-1} \dots g_1^{-1} \lambda g_1 \dots g_n$, soit $\alpha' = g_1 \dots g_n$. Au dernier cas $\mu' = \alpha' \lambda' \alpha' = \mu$. De toute façon $(\lambda', \mu') = (\lambda, \mu)$ dans $W_S(\Lambda)$. La réciproque peut facilement être déduite des lignes ci-dessus.

C. Q. F. D.

Démonstration des théorèmes A (i) et C de l'introduction. — Pour montrer A (i) on suppose que l'équivalence d'homotopie $f : (M, \partial M) \rightarrow (N, \partial N)$ est scindable et scindée, on pose $R = f^{-1}(S)$. Sous l'hypothèse de A (i) on peut facilement trouver un élément $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times \Lambda$ qui est en forme simple et on peut montrer comme ci-dessus que $(\lambda, \mu).f$ n'est pas scindable. Pour montrer C il suffit de montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — *Toute modification dans une boule de l'identité de la variété N est une équivalence d'homotopie simple, pourvu que le revêtement universel de N ne soit pas une variété fermée.*

Démonstration. — D'après le théorème d'Epstein ([E], (2.1)) il y a une sous-variété V de N à fibré normal trivial, réunion finie de sphères S_α et de plans projectifs P_β telle que le $\mathbb{Z}[\pi_1(N)]$ -module $\pi_2(N)$ est engendré par des applications $\varphi_\alpha : S^2 \rightarrow S_\alpha$ et $\varphi_\beta : S^2 \rightarrow P_\beta$ en les ramenant au point base de N. Le sous-complexe K de N, réunion de V et du 1-squelette de N, a la propriété que tout élément de $\pi_2(N)$ a un représentant $\varphi : S^2 \rightarrow N$ tel que $\varphi(S^2)$ soit contenu dans un voisinage régulier U(K) de K. On peut montrer (voir [H 1] ou la proposition 2 de [H 2], V, 1.1) que tout élément de $\pi_3(N)$ a un représentant $\varphi : S^3 \rightarrow U(K)$.

Par conséquent toute modification dans une boule de l'identité de N est homotope à une application g telle que $g|_{N-U(K)}$ coïncide avec l'identité et que

$$g|_{U(K)} : U(K) \rightarrow U(K)$$

est une modification dans une boule de l'identité de U(K). Puisque $\pi_1 U(K)$ est le produit libre d'un groupe libre (de type fini) et d'un nombre fini de groupes isomorphes à \mathbb{Z}_2 , le groupe de Whitehead $Wh(\pi_1 U(K)) = 0$ (voir [H 3], [S 1]) et donc

$$g|_{U(K)} : U(K) \rightarrow U(K)$$

est une équivalence d'homotopie simple (cf. la remarque 2 du paragraphe 1). Par la formule de la somme pour la torsion de Whitehead la torsion de g est nulle.

C. Q. F. D.

3.3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME A (ii). — Soit $f : M \rightarrow N$ une application induisant un isomorphisme de groupes fondamentaux, et supposons que le degré μ de f n'est pas ± 1 , que M et N sont des 3-variétés fermées et que f est scindée le long de la 2-sphère S plongée dans N. On utilise les notations de l'introduction du paragraphe 3, et on désigne par s_ε un plongement de la sphère S^2 , disjoint de S et parallèle à S, passant par $f(m_\varepsilon)$ pour $\varepsilon = +, -$. Supposons qu'il existe des lacets $c_\varepsilon : (I, \partial I) \rightarrow (M-R, m_\varepsilon)$ ($\varepsilon = +, -$) qui ne sont pas nuls-homotopes et tels que fc_ε conserve l'orientation.

Affirmation. — (i) Si $(c_+)^2 \neq e$ et que $(c_-)^2 \neq e$, ou si S ne sépare pas, la modification dans B_+ de f , $f_1 = [f(\gamma_+^{-1} \gamma_- c_-) s_-, f(c_+) s_+].f$, n'est pas scindable le long de S;

(ii) si $(c_+)^2 \neq e$ et que $(c_-)^2 = e$, la modification dans B_+ de f ,

$$f_2 = [f([\gamma_+^{-1} \gamma_- c_-] [\gamma_-^{-1} \gamma_+ c_+]) s_+, f(c_+) s_+].f,$$

n'est pas scindable le long de S.

Le théorème A (ii) en découle, ses hypothèses impliquent l'existence de c_+ et c_- comme sous (i) ou comme sous (ii), en échangeant éventuellement les signes \pm .

La sous-variété $f_1^{-1}(S) \cap B_+$ [resp. $f_2^{-1}(S) \cap B_+$] consiste en un tore non noué T_0 (resp. en deux tores parallèles et non noués $T'_0 \cup T'_1$).

Cas (i). — On peut choisir a_0 et b_0 dans le paragraphe 3.2, générateurs de $H_1(f_1^{-1}(S); \mathbf{Z})$ (et l'orientation de \tilde{M}) de telle façon que

$$\varepsilon_{f_1}(a_0) = [f(\gamma_- c_-) s_-]$$

et que

$$\varepsilon_{f_1}(b_0) = [f(\gamma_+ c_+) s_+]$$

et par conséquent

$$\tau^l(P_{f_1}^+, \varepsilon_{f_1}) = [f(\gamma_+ c_+) s_+] \otimes [f(\gamma_- c_-) s_-]$$

dans $(\pi_2(N, n)/\text{im } s_{\#} + \text{im } f_{\#}) \otimes (\pi_2(N, n)/\text{im } s_{\#} + \text{im } f_{\#})$.

Cas (ii). — Remarquons tout de suite que le difféomorphisme $T'_0 \cong T'_1$ défini par une isotopie de T'_0 à T'_1 dans le cobordisme trivial U entre T'_0 et T'_1 renverse l'orientation héritée de l'orientation du revêtement universel de M et du fibré normal à S , c'est parce que $f c_-$ est supposé de conserver l'orientation. On choisit a_i et b_i ($i = 0, 1$), générateurs de $H_1(T'_i; \mathbf{Z})$, de telle façon que b_0 soit isotope dans U à b_1 et que a_0 soit isotope dans U à l'opposé de a_1 .

Une base de $P_{f_2}^+$ est donnée par $\{b_0, a_1\}$, sa base duale est $\{a_0, -b_1\}$.

D'autre part

$$\begin{aligned} \varepsilon_{f_2}(a_0) &= [f(\gamma_- c_- \gamma^{-1} \gamma_+ c_+) s_+], & \varepsilon_{f_2}(b_0) &= [f(\gamma_+ c_+) s_+], \\ \varepsilon_{f_2}(a_1) &= -[f(\gamma_+ c_+) s_+], & \varepsilon_{f_2}(b_1) &= [f(\gamma_- c_- \gamma^{-1} \gamma_+ c_+) s_+]. \end{aligned}$$

Il en suit que

$$\tau^l(P_{f_2}^+, \varepsilon_{f_2}) = 2[f(\gamma_+ c_+) s_+] \otimes [f(\gamma_- c_- \gamma^{-1} \gamma_+ c_+) s_+]$$

dans $(\pi_2(N, n)/\text{im } s_{\#} + \text{im } f_{\#}) \otimes (\pi_2(N, n)/\text{im } s_{\#} + \text{im } f_{\#})$.

D'après la remarque I, § 2.1, on a $\text{im } f_{\#} = \mu \cdot \pi_2(N, n)$. D'après Specker $\pi_2(N, n)$ est un groupe abélien libre, en outre tout système de 2-sphères plongées dans le revêtement universel \tilde{N} , mutuellement disjointes, tel qu'il n'y ait pas de cobordisme compact dans \tilde{N} dont le bord soit contenu dans ce système, est homologiquement indépendant sur \mathbf{Z}_μ (pour $\mu \neq \pm 1$). Au cas (i) [resp. (ii)], les relèvements à partir du point base de \tilde{N} de S , $f(\gamma_- c_-) s_-$ et $f(\gamma_+ c_+) s_+$ [resp. de S , $f(\gamma_- c_- \gamma^{-1} \gamma_+ c_+) s_+$ et $f(\gamma_+ c_+) s_+$] forment un tel système « indépendant ». Ceci montre (i).

Pour (ii) il faut encore montrer que μ et 2 sont relativement premiers (voir [H 2], III, 2.1).

D'après Epstein $f(c_-)$, qui est d'ordre fini dans $\pi_1(N, n)$ est conjugué dans un facteur de N pour la somme connexe, L , tel que L soit une variété fermée à groupe fondamental fini, donc d'ordre pair ([E], (8.2)). Considérons le diagramme homotopiquement commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{r} & L \\ \downarrow j_M & & \downarrow j_N & & \downarrow j_L \\ K(\pi_1 M, 1) & \xrightarrow{f_{\#}} & K(\pi_1 N, 1) & \xrightarrow{r_{\#}} & K(\pi_1 L, 1) \end{array}$$

où $K(E, 1)$ désigne l'espace d'Eilenberg-MacLane pour le groupe E et où r est une rétraction de N sur L de degré 1. Les flèches verticales sont les applications canoniques, induisant un isomorphisme de groupes fondamentaux.

On sait que $H_3(K(\pi_1 L, 1); \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/|\pi_1 L|$ et que $(j_L)_* \{L\}$ est un générateur de ce groupe (cf. [S 3], [T]). Par conséquent

$$\mu(j_L)_* \{L\} = (j_L)_* r_* f_* \{M\} = (r_{\#})_* (f_{\#})_* (j_M)_* \{M\},$$

et il suffit de montrer que $(r_{\#})_* (f_{\#})_* (j_M)_*$ est surjectif pour que μ soit d'ordre premier à $|\pi_1 L|$.

D'après la conjecture de Kneser (voir [S 2]) il y a un facteur L' de M pour la somme connexe qui définit la même décomposition en produit libre de $\pi_1 M$ que celle induite par $f_{\#}$ de la décomposition de $\pi_1 N$ défini par L . Clairement $(r_{\#} f_{\#} j_M)_*$ coïncide avec l'homomorphisme surjectif:

$$H_3(M) \xrightarrow{r_*} H_3(L') \xrightarrow{(j_{L'})_*} H_3(K(\pi_1 L', 1)) \xrightarrow{\cong} H_3(K(\pi_1 L, 1)).$$

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

- [C 1] S. E. CAPPELL, *Splitting obstructions for Hermitian forms and manifolds with $\mathbf{Z}_2 = \pi_1$* (Bull. Amer. Math. Soc., vol. 79, 1973, p. 909-913).
- [C 2] S. E. CAPPELL, *Unitary nilpotent groups and Hermitian K-theory, I* (Bull. Amer. Math. Soc., vol. 80, 1974, p. 1117-1122).
- [C 3] S. E. CAPPELL, *Manifolds with fundamental group a generalized free product, I* (Bull. Amer. Math. Soc., vol. 80, 1974, p. 1193-1198).
- [E] D. B. A. EPSTEIN, *Projective planes in 3-manifolds* (Proc. London Math. Soc., (3), 11, 1961, p. 469-484).
- [H 1] H. HENDRIKS, *Applications de la théorie d'obstruction en dimension 3* (C. R. Acad. Sc., Paris, t. 276, 1973, p. A 1101-1104).
- [H 2] H. HENDRIKS, *Applications de la théorie d'obstruction en dimension 3* (Thèse, Publ. math. d'Orsay, n° 133-7535, 1975).
- [H 3] G. HIGMAN, *The units of group-rings* (Proc. London Math. Soc., vol. 46, 1940, p. 231-248).
- [H 4] M. W. HIRSCH, *Immersions of manifolds* (Trans. Amer. Soc., vol. 93, 1959, p. 242-276).
- [HL 1] H. HENDRIKS et F. LAUDENBACH, *Scindement d'une équivalence d'homotopie en dimension 3* (C. R. Acad. Sc., Paris, t. 276, 1973, p. A 1275-1278).

- [HL 2] H. HENDRIKS et F. LAUDENBACH, *Scindement d'une équivalence d'homotopie en dimension 3* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 7, 1974, p. 203-218).
- [L] F. LAUDENBACH, *Topologie de la dimension 3 : homotopie et isotopie* (*Astérisque*, vol. 12, 1974).
- [S 1] J. STALLINGS, *Whitehead torsion of free products* (*Ann. of Math.*, vol. 82, 1965, p. 354-363).
- [S 2] J. STALLINGS, *Group theory and three-dimensional manifolds*, Yale University Press, 1971.
- [S 3] G. A. SWARUP, *On a theorem of C. B. Thomas* (*J. London Math. Soc.*, vol. 8, 1974, p. 13-21).
- [S 4] G. A. SWARUP, *Homotopy type of closed 3-manifolds*, preprint, Tata Institute, 1974.
- [S 5] G. A. SWARUP, *On embedded spheres in 3-manifolds II*, preprint, Tata Institute, 1974.
- [T] C. B. THOMAS, *The oriented homotopy type of compact 3-manifolds* (*Proc. London Math. Soc.*, vol. 19, 1969, p. 31-44).

(Manuscrit reçu le 11 octobre 1975).

Ajouté sur épreuve. — Le théorème 1 (b) de II, § 1 peut être remplacé par : *Théorème 1(b')*.
— *La condition dans (a) est une conséquence de F(g)*. La démonstration suit des lignes analogues, mais utilise au lieu de [S4] la référence :

H. HENDRIKS, *Obstruction theory in 3-dimensional topology : An extension theorem*, preprint, Nijmegen, 1976.

Le théorème 2 de II, § 1 est impliqué par les théorèmes 1 (a) et (b').

Harrie HENDRIKS,
Matematisch Instituut,
Toernooiveld,
Nijmegen,
Pays-Bas.