ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GEIR ELLINGSRUD

Sur le schéma de Hilbert des variétés de codimension 2 dans $\mathbf{P}^e$ à cône de Cohen-Macaulay

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 8, no 4 (1975), p. 423-431
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1975_4_8_4_423_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 8, 1975, p. 423 à 432.

SUR LE SCHÉMA DE HILBERT DES VARIÉTÉS DE CODIMENSION 2 DANS $\mathbf{P}^e$ A CÔNE DE COHEN-MACAULAY

PAR GEIR ELLINGSRUD (*)

Les sous-schémas fermés de codimension 2 de $\mathbf{P}_k^e$ ayant un cône projetant de Cohen-Macaulay correspondent à des points lisses du schéma de Hilbert. Ce résultat est démontré par Fogarty [F] pour $e = 2$. On démontre ici ce résultat pour $e \geqq 3$ et on calcule la dimension des anneaux locaux de ces points.

La méthode utilisée ici est différente de celle de Fogarty et ne s'applique pas dans le cas $e = 2$. Elle repose essentiellement sur les deux faits suivants :

1. Soit X une famille de sous-schémas fermés, plate sur un anneau local, noethérien A, à corps résiduel k et soit X_0 sa fibre spéciale. Si le cône projetant C_0 de X_0 est de profondeur supérieure ou égale à 2 alors le cône projetant C de X est plat sur A et $C \underset{A}{\otimes} k = C_0$.

2. Si $Y \subseteq \mathbf{P}_k^e$ est de codimension 2 à cône projetant de Cohen-Macaulay alors ce cône admet une résolution déterminentielle de longueur 2.

Cette dernière remarque permet de calculer la dimension de la composante irréductible du schéma de Hilbert contenant Y comme fonction de certains entiers associés à la résolution.

On donne enfin quelques exemples qui permettent de mieux comprendre la situation. Certains de ces exemples sont déjà étudiés par M. Noether dans son article fondamental sur les courbes de l'espace [N].

Soit A un anneau noethérien et e un entier positif. On notera R_A l'anneau $A[X_0, ..., X_e]$ et R_A^+ l'idéal $(X_0, \ldots, X_e)$. Si $X \subseteq \mathbf{P}_A^e$ est un sous-schéma fermé et $\mathfrak{A}$ un idéal homogène, maximal parmi ceux qui définissent X, on appellera $R_A/\mathfrak{A}$ le cône minimal de X et on le notera $C_A(X)$. Il est caractérisé par le fait que R_A^+ n'est contenu dans aucun de ses idéaux premiers associés.

(*) Université d'Oslo, I.R.M.A., Strasbourg, 1973-1974.

Soient maintenant k un corps et $X \subseteq \mathbf{P}_k^e$ un sous-schéma fermé. Il existe une résolution libre, graduée de $C_k(X)$ en tant que R_k-module :

$$(1) \quad 0 \to \bigoplus_{j=1}^{m_s} R_k[-n_{s,j}] \xrightarrow[\varphi_s]{} \bigoplus_{j=1}^{m_{s-1}} R_k[-n_{s-1,j}] \xrightarrow[\varphi_{s-1}]{} \ldots \to \bigoplus_{j=1}^{m_1} R_k[-n_{1,j}] \xrightarrow[\varphi_1]{} R_k \to C_k(X) \to 0,$$

où les n_{ij} sont des entiers positifs et chaque φ_i est homogène de degré 0. Notons par (n_{ij}) la suite d'ensembles $(\{n_{1,1}, \ldots, n_{1,m_1}\}, \ldots, \{n_{s,1}, \ldots, n_{s,m_s}\})$; nous dirons que X est de type (n_{ij}). On appellera s la longueur de la suite (n_{ij}). Si (1) est une résolution minimale par rapport à l'idéal maximal R_k^+, (n_{ij}) est uniquement déterminée par X, et on dira que X est de type minimal (n_{ij}). Sinon il existe pour certains i une sous-matrice carrée, inversible, maximale Ψ_i de φ_i qui définit un isomorphisme

$$\bigoplus_{j \in I_i} R_k[-n_{i,j}] \tilde{\to} \bigoplus_{j \in J_{i-1}} R_k[-n_{i-1,j}]$$

pour certains sous-ensembles $I_i \subseteq \{1, \ldots, m_i\}$ et $J_{i-1} \subseteq \{1, \ldots, m_{i-1}\}$. Il existe alors une bijection $\sigma_i : I_i \to J_{i-1}$ telle que $n_{ij} = n_{i-1, \sigma(j)}$. Soit (n'_{ij}) la suite obtenue à partir de (n_{ij}) en supprimant $\{n_{ij}\}_{j \in I_i}$ et $\{n_{i-1,j}\}_{j \in J_{i-1}}$ pour les i en question. Nous dirons que (n_{ij}) prolonge (n'_{ij}).

Le polynôme de Hilbert P de X est bien déterminé par (n_{ij}). Soit $\tilde{X}$ le sous-schéma fermé, universel de $\mathbf{P}_k^e \times \mathrm{Hilb}^P$. Définissons le sous-ensemble $U_{(n_{ij})}$ de Hilb^P par

$$U_{(n_{ij})} = \{x \in \mathrm{Hilb}^P \mid \tilde{X} \otimes k(x) \text{ est de type } (n_{ij})\}.$$

THÉORÈME 1. — *Si la longueur de* (n_{ij}) *est inférieure ou égale à* $e-1$, *alors* $U_{(n_{ij})}$ *est un ouvert dans* Hilb^P.

Remarque 1. — Si X est de type (n_{ij}) alors $s \leqq e-1$ implique que le cône minimal de X est de profondeur supérieure ou égale à 2.

De plus, si pour tout point de $U_{(n_{ij})}$ le schéma correspondant a un cône minimal de profondeur supérieure ou égale à 2, alors il existe (n'_{ij}) de longueur inférieure ou égale à $e-1$ telle que $U_{(n_{ij})} = U_{(n'_{ij})}$.

Remarque 2. — L'hypothèse $s \leqq e-1$ est nécessaire comme le montre l'exemple suivant. Dans le schéma de Hilbert des sous-schémas finis de $\mathbf{P}_k^2$ de degré 3, les sous-schémas qui sont contenus dans une droite, forment un fermé de codimension 1. Ils forment aussi l'ensemble $U_{(\{1,3\},\{4\})}$.

La proposition-clé de la démonstration du théorème est la suivante :

PROPOSITION 1. — *Soit* A *un anneau local, noethérien, de corps résiduel* k. *Soit* $X \subseteq \mathbf{P}_A^e$ *un sous-schéma fermé, plat sur* A, *et soit* $X_0 = X \otimes k$. *Soit*

$$L_k : \quad 0 \to \bigoplus_{j=1}^{m_s} R_k[-n_{s,j}] \xrightarrow[\varphi_s]{} \bigoplus_{j=1}^{m_{s-1}} R_k[-n_{s-1,j}] \xrightarrow[\varphi_{s-1}]{} \ldots$$

$$\to \bigoplus_{j=1}^{m_1} R_k[-n_{1,j}] \xrightarrow[\varphi_1]{} R_k \to C_k(X_0) \to 0,$$

une résolution libre, graduée de $C_k(X_0)$ *à homomorphismes de degré* 0. *Supposons que* prof $C_k(X_0) \geqq 2$. *Alors :*

(i) $C_A(X)$ *est* A-*plat et* $C_A(X) \otimes k = C_k(X_0)$;

(ii) $C_A(X) \simeq \bigoplus_{v} H^0(X, \mathcal{O}_X(v))$;

(iii) *il existe une résolution libre, graduée à homomorphismes de degré* 0 :

$$L_A : \quad 0 \to \bigoplus_{j=1}^{m_s} R_A[-n_{s,j}] \xrightarrow[\varphi'_s]{} \bigoplus_{j=1}^{m_{s-1}} R_A[-n_{s-1,j}] \xrightarrow[\varphi'_{s-1}]{} \cdots$$

$$\to \bigoplus_{j=1}^{m_1} R_A[-n_{1,j}] \xrightarrow[\varphi'_1]{} R_A \to C_A(X) \to 0,$$

telle que

$$L_A \otimes k \simeq L_k.$$

Démonstration. – Comme R_A^+ n'est contenu dans aucun des idéaux associés à $C_A(X)$, on a une suite exacte

$$0 \to C_A(X) \xrightarrow{d} \bigoplus_{v} H^0(X, \mathcal{O}_X(v)) \to H \to 0.$$

En tensorisant par k on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} C_A(X) \otimes k & \xrightarrow{d \otimes k} & \bigoplus_{v} H^0(X, \mathcal{O}_X(v)) \otimes k & \to H \otimes k \to 0 \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \oplus_{v} \beta_v & \\ C_k(X_0) & \xrightarrow[\rho]{\qquad\qquad} & \bigoplus_{v} H^0(X_0, \mathcal{O}_{X_0}(v)) & \end{array}$$

dans lequel tous les homomorphismes sont canoniques et le carré est commutatif. Comme γ est surjectif et comme ρ est un isomorphisme car prof $C_k(X_0) \geqq 2$ alors $\oplus \beta_v$ est surjectif. D'après le théorème de changement de base ([EGA], Chap. 3, § 7.7 et 7.8), chaque β_v est un isomorphisme et chaque $H^0(X, \mathcal{O}_X(v))$ est A-plat. Donc $\bigoplus_{v} \beta_v$ est un isomorphisme et $\bigoplus_{v} H^0(X, \mathcal{O}_X(v))$ est A-plat. Alors $d \otimes k$ est surjectif et $H \otimes k = 0$. Comme H est une somme directe de A-modules de type fini, $H = 0$ d'après le lemme de Nakayama. Donc d est un isomorphisme, ce qui démontre (i) et (ii).

En relevant les φ_i successivement on voit qu'il existe un complexe gradué à homomorphismes de degré 0 :

$$L_A : \quad 0 \to \bigoplus_{j=1}^{m_s} R_A[-n_{s,j}] \xrightarrow[\varphi'_s]{} \bigoplus_{j=1}^{m_{s-1}} R_A[-n_{s-1,j}] \xrightarrow[\varphi'_{s-1}]{} \cdots$$

$$\to \bigoplus_{j=1}^{m_1} R_A[-n_{1,j}] \xrightarrow[\varphi'_1]{} R_A \to C_A(X) \to 0.$$

Comme $C_A(X)$ est plat sur A, l'exactitude de L_A se déduit du lemme de Nakayama.

Démontrons maintenant le théorème 1. Soit $x \in U_{(n_{ij})}$ et soit A l'anneau local de Hilb^P au point x. Soient $k = k(x)$, $X = \tilde{X} \otimes A$ et $X_0 = X \otimes k$. Soit Spec B′ un voisinage affine de x. Comme A est B′-plat, on a $C_A(X) = C_{B'}(\tilde{X} \otimes B') \otimes A$.

Regardons le complexe L_A de la proposition. Chaque φ'_i est donné par un système de générateurs homogènes de $\ker \varphi'_{i-1}$. Un tel système ne contenant qu'un nombre fini d'éléments on trouve en effectuant une récurrence sur i, un voisinage affine Spec B de x sur lequel il existe un complexe

$$L_B: \quad 0 \to \bigoplus_{j=1}^{m_s} R_B[-n_{s,j}] \to \bigoplus_{j=1}^{m_{s-1}} R_B[-n_{s-1,j}] \to \dots$$

$$\to \bigoplus_{j=1}^{m_1} R_B[-n_{1,j}] \to R_B \to C_B(\tilde{X} \otimes B) \to 0,$$

prolongeant L_A, et dont les homomorphismes sont de degré 0. D'après le lemme 6.3 de [PS 1] l'ensemble des points $y \in \operatorname{Spec} B$ tels que $L_B \otimes k(y)$ est exact, forme un ouvert qui est bien contenu dans $U_{(n_{ij})}$.

THÉORÈME 2. — *Supposons que les points de* Hilb^P *correspondent à des sous-schémas fermés de codimension* 2 *de* $\mathbf{P}_k^e$.

(i) *Les sous-schémas fermés ayant un cône minimal de Cohen-Macaulay forment un ouvert lisse* U *de* Hilb^P.

Pour $e \geqq 3$ *on a :*

(ii) *Si la longueur de* (n_{ij}) *est* 2, *alors l'ouvert* $U_{(n_{ij})}$ *de* Hilb^P *est lisse et connexe de dimension*

$$\sum_{n_{2i} \geqq n_{1j}} \binom{n_{2i}-n_{1j}+e}{e} + \sum_{n_{1j} \geqq n_{2i}} \binom{n_{1j}-n_{2i}+e}{e}$$

$$- \sum_{n_{2i} \geqq n_{2j}} \binom{n_{2i}-n_{2j}+e}{e} - \sum_{n_{1j} \geqq n_{1i}} \binom{n_{1j}-n_{1i}+e}{e} + 1.$$

(iii) *Les* $U_{(n_{ij})}$ *forment un recouvrement de* U. *De plus* $U_{(n_{ij})} \cap U_{(n'_{ij})} \neq \varnothing$ *si et seulement si il existe* (n''_{ij}) *telle que* (n_{ij}) *et* (n'_{ij}) *prolongent* (n''_{ij}), *et telle qu'il existe un sous-schéma de type* (n''_{ij}).

Remarque. — Pour $e = 2$, il s'agit d'un théorème de Fogarty ([F], Th. 2.4). Nous n'étudierons donc que le cas $e \geqq 3$. Dans ce cas (i) se déduit immédiatement de (ii) et (iii). En effet dire que le cône minimal de X est de Cohen-Macaulay, lorsque X est de codimension 2 dans $\mathbf{P}_k^e$, est équivalent à dire que X est de type (n_{ij}) avec longueur $(n_{ij}) = 2$.

Démonstration. — Soit $x \in U_{(n_{ij})}$ et soit A l'anneau local de $\mathrm{Hilb}^P_{\mathbf{P}_k^e}$ au point x.

Il suffit pour démontrer la lissitude de prouver qu'on peut compléter chaque diagramme

$$\begin{array}{ccc} C' & & \\ \big\downarrow & \nwarrow & \\ C & \longleftarrow & A \end{array}$$

où $C' \twoheadrightarrow C$ est une surjection d'algèbres artiniennes, locales. D'après la définition du schéma de Hilbert il est équivalent de trouver un sous-schéma fermé $X' \subseteq \mathbf{P}^e_{C'}$, plat sur C', vérifiant $\tilde{X}' \otimes C = \tilde{X} \otimes C$.

Soit $I = \ker (C' \twoheadrightarrow C)$. On peut supposer que $I^2 = 0$.

Comme $\operatorname{prof} C_k (X_0) \geqq 2$, on déduit de la proposition 1 et de [PS 2] (Chap. 1, Th. 3.3), la suite exacte

$$L_C : \quad 0 \to \bigoplus_{j=1}^{m-1} R_C[-n_{2j}] \underset{\Phi}{\to} \bigoplus_{j=1}^{m} R_C[-n_{1j}] \xrightarrow[\overset{m-1}{\wedge}\, \Phi^v]{} R_C \to C_C(\tilde{X} \otimes C) \to 0,$$

où Φ est une matrice $m \times (m-1)$ à coefficients homogènes de degré $n_{2j}-n_{1i}$ dans R_C. En relevant Φ à une matrice Φ_1 à coefficients homogènes de degré $n_{2j}-n_{1i}$ dans $R_{C'}$ on obtient un complexe

$$L_{C'} : \quad 0 \to \bigoplus_{j=1}^{m-1} R_{C'}[-n_{2j}] \underset{\Phi_1}{\to} \bigoplus_{j=1}^{m} R_{C'}[-n_{1j}] \xrightarrow[\overset{m-1}{\wedge}\, \Phi_1^v]{} R_{C'}.$$

Comme $I^2 = 0$, on a que $IL_{C'} = I \otimes L_C$ qui est exacte parce que $C_C(\tilde{X} \otimes C)$ est plat. La suite d'homologie associée à la suite exacte

$$0 \to I \underset{C}{\otimes} L_C \to L_{C'} \to L_C \to 0,$$

montre que $L_{C'}$ est exact. Donc $\operatorname{Tor}_1^{C'} (H_0 (L_{C'}), C) = 0$ et comme

$$H_0 (L_{C'}) \otimes C = C_C(\tilde{X} \otimes C)$$

est plat, $H_0 (L_{C'})$ est plat d'après le critère local de platitude.

$$\operatorname{Proj} H_0 (L_{C'}) \subseteq \operatorname{Proj} R_{C'} = \mathbf{P}^e_{C'}$$

est le sous-schéma cherché.

Montrons maintenant l'irréductibilité de $U_{(n_{ij})}$. Dans [PS 1] (Th. 6.2) il est démontré qu'il existe un ouvert $Z_{(n_{ij})} \subseteq \mathbf{P}^{N-1}$ où

$$N = \sum_{n_{2j} \geqq n_{1i}} \binom{n_{2j}-n_{1i}+e}{e},$$

et une matrice $\Phi_{(n_{ij})}$ à coefficients homogènes de degré $n_{2j}-n_{1i}$ dans $\Gamma(\mathcal{O}_{Z(n_{ij})}) [X_0, \ldots, X_e]$ ayant la propriété suivante. (On y suppose $n_{2j} > n_{1i}$ pour tous i et j, mais la démonstration de ce point ne nécessite pas cette hypothèse.) Soient B une k-algèbre et Φ une matrice à coefficients homogènes de degré $n_{2j}-n_{ij}$ dans R_B. Soit $L(\Phi)$ le complexe

$$0 \to \bigoplus_{j=1}^{m-1} R_B[-n_{2j}] \xrightarrow[\Phi]{} \bigoplus_{j=1}^{m} R_B[-n_{1j}] \xrightarrow[\overset{m-1}{\wedge}\Phi^v]{} R_B.$$

Alors si $L(\Phi) \otimes k(y)$ est exact pour tout $y \in \operatorname{Spec} B$ il existe un morphisme unique f : $\operatorname{Spec} B \to Z_{(n_{ij})}$ avec $f^* \Phi_{(n_{ij})} = \alpha \Phi$ pour un élément $\alpha \in k^* = k-\{0\}$.

$L(\Phi_{(n_{ij})})$ est exacte et $H_0(L(\Phi_{(n_{ij})}))$ est plat sur $\mathcal{O}_{Z_{(n_{ij})}}$. Le faisceau d'algèbres graduées $H_0(L(\Phi_{(n_{ij})}))$ définit donc un sous-schéma fermé $X_{(n_{ij})} \subsetneq \mathbf{P}^e \times Z_{(n_{ij})}$, plat sur $Z_{(n_{ij})}$ dont les fibres ont P comme polynôme de Hilbert. Il existe alors un morphisme unique h : $Z_{(n_{ij})} \to \operatorname{Hilb}^P_{\mathbf{P}^e_k}$ avec $h^* \tilde{X} = X_{(n_{ij})}$. On voit facilement que l'image de h est $U_{(n_{ij})}$. Comme $Z_{(n_{ij})}$ est un ouvert dans $\mathbf{P}^{N-1}$, il est irréductible. Alors $U_{(n_{ij})}$ est irréductible.

Pour calculer la dimension de $U_{(n_{ij})}$ nous aurons besoin du lemme qui suit sur les relèvements d'un module gradué (nous n'en donnerons pas la démonstration).

Soit C un anneau. Si M et N sont des R_C-modules gradués de type fini, alors les modules $\operatorname{Ext}^i_{R_C}(M, N)$ ont une graduation induite par celles de M et N. Nous désignerons par M_ν la composante de degré ν d'un module gradué M.

LEMME. — *Soit* $C' \twoheadrightarrow C$ *une surjection d'anneaux de noyau* I. *Supposons que* $I^2 = 0$. *Soit M un* R_C*-module gradué de type fini, plat sur* C. *Alors l'ensemble*

$$\left\{ M' \,\middle|\, \begin{matrix} M' \; R_{C'}\text{-module gradué plat sur } C' \\ \text{avec } M' \otimes C \simeq M \end{matrix} \right\} \Big/ \text{isomorphismes relevant l'identité}$$

est un espace homogène principal sous $\operatorname{Ext}^1_{R_C}(M, M \otimes I)_0$.

Soient maintenant $x \in U_{(n_{ij})}$ et t_x l'espace tangent de Hilb^P au point x. Soit

$$X_0 = \tilde{X} \otimes k(x).$$

Notons $k[\varepsilon]$ l'algèbre $k[T]/T^2$. D'après la proposition 1 et le lemme, il y a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} t_X &\simeq \{ X \subset \mathbf{P}^e_{k[\varepsilon]} \mid X \text{ plat}, X \otimes k(x) = X_0 \} \\ &\simeq \{ M \mid M\; R_{k[\varepsilon]} \text{ module gradué, avec } M \otimes k \simeq C_k(X_0) \} \simeq \operatorname{Ext}^1_{R_k}(C_k(X_0), C_k(X_0))_0. \end{aligned}$$

Soient $R = R_k$ et $C_k(X_0) \simeq R/\mathfrak{A}$. Il existe une résolution graduée à homomorphismes de degré 0 :

$$(1) \qquad 0 \to \bigoplus_{j=1}^{m-1} R[-n_{2j}] \to \bigoplus_{j=1}^{m} R[-n_{1j}] \to R \to R/\mathfrak{A} \to 0.$$

En appliquant le foncteur $\operatorname{Hom}_R(-, R/\mathfrak{A})$ on obtient la suite exacte à homomorphismes de degré 0 :

$$(2) \quad 0 \to \operatorname{Ext}^1_R(R/\mathfrak{A}, R/\mathfrak{A}) \to \bigoplus_{j=1}^{m} R/\mathfrak{A}[n_{1j}] \to \bigoplus_{j=1}^{m-1} R/\mathfrak{A}[n_{2j}] \to \operatorname{Ext}^2_R(R/\mathfrak{A}, R/\mathfrak{A}) \to 0.$$

D'où

$$\dim \operatorname{Ext}^1_{\mathrm{R}}(\mathrm{R}/\mathfrak{A}, \mathrm{R}/\mathfrak{A})_0 = \sum_{j=1}^{m} \dim(\mathrm{R}/\mathfrak{A})_{n_{1j}} - \sum_{j=1}^{m-1} \dim(\mathrm{R}/\mathfrak{A})_{n_{2j}} + \dim \operatorname{Ext}^2_{\mathrm{R}}(\mathrm{R}/\mathfrak{A}, \mathrm{R}/\mathfrak{A})_0.$$

Comme d. p. $\mathrm{R}/\mathfrak{A} = 2$ il y a un isomorphisme $\operatorname{Ext}^2_{\mathrm{R}}(\mathrm{R}/\mathfrak{A}, \mathrm{R}/\mathfrak{A}) \simeq \operatorname{Ext}^2(\mathrm{R}/\mathfrak{A}, \mathrm{R})$. Comme $\operatorname{Ext}^i(\mathrm{R}/\mathfrak{A}, \mathrm{R}) = 0$ pour $i < 2$, on obtient à partir de (1) une suite exacte

$$0 \to \mathrm{R} \to \bigoplus_{j=1}^{m} \mathrm{R}[n_{1j}] \to \bigoplus_{j=1}^{m-1} \mathrm{R}[n_{2j}] \to \operatorname{Ext}^2_{\mathrm{R}}(\mathrm{R}/\mathfrak{A}, \mathrm{R}) \to 0. \tag{3}$$

Alors, d'après (1) :

$$\sum_{j=1}^{m} \dim(\mathrm{R}/\mathfrak{A})_{n_{1j}} = \sum_{j=1}^{m} \left[\binom{n_{1j}+e}{e} - \sum_{n_{1j} \geqq n_{2i}} \binom{n_{1j}-n_{2i}+e}{e} + \sum_{n_{1j} \geqq n_{1i}} \binom{n_{1j}-n_{1i}+e}{e}\right],$$

$$\sum_{j=1}^{m-1} \dim(\mathrm{R}/\mathfrak{A})_{n_{2j}} = \sum_{j=1}^{m-1} \left[\binom{n_{2j}+e}{e} - \sum_{n_{2j} \geqq n_{1i}} \binom{n_{2j}-n_{1i}+e}{e} + \sum_{n_{2j} \geqq n_{2i}} \binom{n_{2j}-n_{2i}+e}{e}\right],$$

et d'après (3) :

$$\dim \operatorname{Ext}^2_{\mathrm{R}}(\mathrm{R}/\mathfrak{A}, \mathrm{R}/\mathfrak{A})_0 = \sum_{j=1}^{m-1} \binom{n_{2j}+e}{e} - \sum_{j=1}^{m} \binom{n_{1j}+e}{e} + 1.$$

On en déduit la formule annoncée.

Remarque. — On peut aussi déterminer la dimension de $\mathrm{U}_{(n_{ij})}$ en calculant les fibres du morphisme $h : \mathrm{Z}_{(n_{ij})} \to \mathrm{Hilb}^{\mathrm{P}}$. Soit G le groupe algébrique des couples des matrices (A, B) où A (resp. B) induit un R_k-automorphisme gradué de degré 0 de

$$\bigoplus_{j=1}^{m} \mathrm{R}_k[-n_{1j}] \left(\text{resp. } \bigoplus_{j=1}^{m-1} \mathrm{R}_k[-n_{2j}]\right).$$

G est de dimension

$$\sum_{n_{1j} \geqq n_{1i}} \binom{n_{1j}-n_{1i}+e}{e} + \sum_{n_{2j} \geqq n_{2i}} \binom{n_{2j}-n_{2i}+e}{e}.$$

G opère sur $\mathrm{Z}_{(n_{ij})}$ par $\Phi \to \mathrm{A}\,\Phi\,\mathrm{B}^{-1}$. Il est clair que G opère transitivement sur la fibre d'un k-point de $\mathrm{U}_{(n_{ij})}$. Le stabilisateur de Φ est constitué par les isomorphismes entre $\mathrm{L}(\Phi)$ et $\mathrm{L}(\alpha\Phi)$ pour $\alpha \in k^*$; un tel isomorphisme se compose d'une homotopie de $\mathrm{L}(\Phi)$, d'une homothétie de $\mathrm{L}(\Phi)$ et d'un isomorphisme de type

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bigoplus \mathrm{R}[-n_{2j}] \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\alpha^{(m-1)^2-1}"'] & \bigoplus \mathrm{R}[-n_{1j}] \arrow[r, "\overset{m-1}{\wedge}\Phi^{v}"] \arrow[d, "\alpha^{(m-1)^2}"] & \mathrm{R} \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \bigoplus \mathrm{R}[-n_{2j}] \arrow[r, "\alpha\Phi"'] & \bigoplus \mathrm{R}[-n_{1j}] \arrow[r, "\overset{m-1}{\wedge}(\alpha\Phi)^{v}"'] & \mathrm{R}
\end{tikzcd}$$

Le stabilisateur est donc isomorphe à

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}\left(\bigoplus_{j=1}^{m} \mathrm{R}[-n_{1j}], \bigoplus_{j=1}^{m-1} \mathrm{R}[-n_{2j}]\right)_0 \times k^{*2},$$

et sa dimension est

$$\sum_{n_{1j} \geqq n_{2i}} \binom{n_{1j}-n_{2i}+e}{e}.$$

On en déduit la dimension de $\mathrm{U}_{(n_{ij})}$.

Exemples. — Comme M. Noether [N], nous noterons R_d^g l'ouvert du schéma de Hilbert formé des courbes équidimensionnelles, sans composantes immergées, dans $\mathbf{P}_k^3 = \mathrm{P}$, de genre g et de degré d. Étudions quelques cas particuliers.

1. $g = 0$, $d = 3$. Dans ce cas, toutes courbes de R_3^0 est projectivement Cohen-Macaulay de type $t = (\{2, 2, 2\}, \{3, 3\})$, donc R_3^0 est lisse, connexe de dimension 12, d'après le théorème 2. En effet, soit X une telle courbe et soit $\mathscr{I}$ le faisceau d'idéaux la définissant dans P. On montre, que $\dim \mathrm{H}^0(\mathrm{P}, \mathscr{I}(2)) \geqq 3$. Il existe alors S_1, S_2 deux surfaces de degré 2, s'intersectant proprement et contenant X. Sinon il existe des formes linéaires l_0, l_1, l_2, l_3 telles que l_1, l_2, l_3 soient linéairement indépendantes et que $l_0 l_1$, $l_0 l_2$, $l_0 l_3 \in \mathrm{H}^0(\mathrm{P}, \mathscr{I}(2))$ ce qui est impossible parce que X est équidimensionnelle et sans composantes immergées. Alors $\mathrm{S}_1 \cap \mathrm{S}_2$ est la réunion de X et d'une droite. On en déduit le résultat annoncé d'après [PS 1] (prop. 1.2 et § 3).

2. $g = 3$, $d = 6$. Dans l'ouvert des courbes réduites et irréductibles de R_6^3 les courbes projectivement Cohen-Macaulay sont toutes de type $t = (\{3, 3, 3, 3\}, \{4, 4, 4\})$ et forment un ouvert lisse connexe de dimension 24, alors que les courbes dont le cône minimal n'est pas Cohen-Macaulay forment un fermé de dimension 23. De plus, on peut montrer que l'ouvert et le fermé contiennent des courbes lisses connexes.

En effet, soit X une courbe réduite et irréductible de R_6^3 et soit $\mathscr{I}$ le faisceau d'idéaux la définissant. Comme le degré de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(3)$ est supérieur à $2g-2$ on a

$$\dim \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(3)) = 16 \quad ([\mathrm{M}], \S 11).$$

On en déduit $\dim \mathrm{H}^0(\mathrm{P}, \mathscr{I}(3)) \geqq 4$. Deux cas se présentent :

(i) $\mathrm{H}^0(\mathrm{P}, \mathscr{I}(2)) = 0$. Il existe alors S_1, S_2 deux surfaces de degré 3 contenant X et s'intersectant proprement. L'intersection des surfaces S_1 et S_2 est la réunion de X et d'une courbe de genre 0 et de degré 3. On en déduit que X est projectivement Cohen-Macaulay et de type t, en utilisant l'exemple précédent et [PS 1] (§ 3).

(ii) $\mathrm{H}^0(\mathrm{P}, \mathscr{I}(2)) \neq 0$. On vérifie que $\dim \mathrm{H}^0(\mathrm{P}, \mathscr{I}(4)) \geqq 13$. Donc il existe des surfaces S_1 de degré 2 et S_2 de degré 4 contenant X et s'intersectant proprement. La courbe $\mathrm{S}_1 \cap \mathrm{S}_2$ est la réunion de X et d'une courbe C de degré 2, et de genre -1. Alors C est nécessairement la réunion disjointe de deux droites, donc son cône minimal n'est pas Cohen-Macaulay et celui de X non plus d'après [PS 1] (prop. 1.2). On peut démontrer que la condition $\mathrm{H}^0(\mathrm{P}, \mathscr{I}(2)) \neq 0$ définit un fermé de dimension 23.

3. $g = 12$, $d = 9$. Dans ce cas, les courbes à cône minimal de Cohen-Macaulay dans R_9^{12} forment un ouvert, lisse non-équidimensionnel, donc non-connexe. En effet, soit L une droite dans P et soient S_1 et S_2 deux surfaces de degrés respectifs 2 et 5 contenant L s'intersectant proprement. Alors $S_1 \cap S_2$ est la réunion de L et d'une courbe X de genre 12 et de degré 9. D'après ([PS 1], § 3) cette courbe est à cône minimal de Cohen-Macaulay de type $t_1 = (\{2, 5, 5\}, \{6, 6\})$. Soient S'_1 et S'_2 deux surfaces de degrés respectifs 3 et 6 contenant X et s'intersectant proprement. Alors $S'_1 \cap S'_2$ est la réunion de X et d'une courbe X′ de degré 9 et de genre 12 et de type $t_2 = (\{3, 3, 3, 6\}, \{4, 4, 7\})$.

On vérifie facilement que $U_{t_1} \cap U_{t_2} = \emptyset$. D'après le théorème 2, dim $U_{t_1} = 38$ et dim $U_{t_2} = 39$ ce qui démontre le résultat. On peut démontrer que toute courbe réduite et irréductible de R_9^{12} est contenue dans U_{t_1}. De plus U_{t_1} contient des courbes lisses connexes ([PS 1], § 6.2).

BIBLIOGRAPHIE

[B] L. Burch, *On Ideals of Finite Homological Dimension in Local Rings* (*Proc. Camb. Phil. Soc.* Vol. 64, 1968, p. 941-948).

[F] J. Fogarty, *Algebraic Families on an Algebraic Surface* (*Amer. J. Math.*, vol. 90, 1968, p. 511-521).

[EGA] A. Grothendieck, *Éléments de Géométrie Algébrique* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 11).

[N] M. Noether, *Zur Grundlegung der Theorie der Raumcurven* (*Crelle Journal*, 1882).

]PS 1] C. Peskine et L. Szpiro, *Liaison des variétés algébriques* (*Invent. Math.* vol. 26, 1974, p. 271-302).

[PS 2] C. Peskine et L. Szpiro, *Cohomologie locale et dimension projective finie* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 42, p. 47-119).

[M] D. Mumford, *Lectures on Curves on an Algebraic Surface* (*Ann. of Math. Studies*, n° 59).

(Manuscrit reçu le 14 octobre 1974.)

G. Ellingsrud
Université d'Oslo,
Institut de Mathématiques,
Blindern, Oslo 3,
Norvège.