ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. DOUADY

Le problème des modules locaux pour les espaces C-analytiques compacts

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 7, nº 4 (1974), p. 569-602
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1974_4_7_4_569_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 7, 1974, p. 569 à 602.

LE PROBLÈME DES MODULES LOCAUX POUR LES ESPACES C-ANALYTIQUES COMPACTS

PAR A. DOUADY

INTRODUCTION

La notion de déformation d'une variété **C**-analytique compacte a été définie par Kodaira et Spencer [9] : Si X_0 est une variété **C**-analytique compacte, une déformation de X_0 paramétrée par un germe d'espace analytique (S, s_0) est un espace X propre et lisse sur S muni d'un isomorphisme de $X(s_0)$ sur X_0. On dit que $X \to (S, s_0)$ est une déformation universelle (resp. verselle) si, pour toute autre déformation $X' \to (S', s'_0)$ de X_0, il existe un unique (resp. il existe un) germe de morphisme $f : (S', s'_0) \to (S, s_0)$ tel que $f^* X$ soit isomorphe à X'. Kodaira, Nirenberg et Spencer ont montré en 1958 [10] que, si $H^2(X_0; \mathscr{T}_{X_0}) = 0$, il existe une déformation verselle de X_0 paramétrée par une variété. En 1962, Kuranishi a démontré l'existence d'une déformation verselle sans l'hypothèse $H^2(X_0; \mathscr{T}_{X_0}) = 0$; la base est alors un germe d'espace analytique, singulier en général. La démonstration initiale de Kuranishi a été simplifiée dans [3], suivant des idées de Malgrange.

Soit maintenant X_0 un espace analytique compact. Serre et Grothendieck ont proposé de définir les déformations de X_0 en remplaçant la condition de lissité par celle de platitude. Leur motivation était d'ordre algébrique, mais le principe de « platitude et privilège » ([2], § 8, Scholie) donne une motivation analytique à cette convention. Le problème s'est alors posé [8] de généraliser le théorème de Kuranishi aux espaces analytiques compacts.

Dans le but d'approcher ce problème, j'ai démontré en 1965 [2] que, si X est un espace analytique quelconque, il existe une famille universelle $(Y_s)_{s \in S}$ de sous-espaces analytiques compacts de X, où $S = H(X)$ est un espace analytique. Comme intermédiaire, j'ai dû considérer des espaces analytiques banachiques, mais l'espace X d'où on part et l'espace H (X) que l'on construit sont bien entendu de dimension finie. D'autres travaux d'approche, plus récents ([16], [17], [6], et enfin [13] qui utilise des méthodes banachiques) ont fait mûrir le problème.

On peut essayer de décrire la difficulté essentielle de ce problème de la façon suivante : Dans le théorème de Kuranishi, quelque chose reste fixe au cours de la déformation, le type topologique et même la structure $\mathscr{C}^\infty$, de sorte qu'il s'agit d'étudier l'ensemble des structures complexes que l'on peut mettre sur une variété réelle donnée (et c'est bien ainsi que Kuranishi aborde le problème). Dans le problème étudié dans [2], quelque chose reste fixe, l'espace ambiant, de sorte qu'il s'agit d'étudier l'ensemble des faisceaux d'idéaux du faisceau $\mathcal{O}_X$. Dans le problème considéré ici, il n'y a rien de fixe à quoi se raccrocher, et on est tout désemparé pour partir.

A la fin de juillet 1973, John-Hamal Hubbard m'a convaincu que cette difficulté est d'ordre psychologique bien plus que mathématique : il s'agit de la peur du vide, la même qui vous accroche au rocher quand on veut faire un plongeon de 6 m dans l'Esterel. Il suffit de se lancer. Naturellement, il vaut mieux savoir nager à l'arrivée, mais les outils techniques nécessaires se trouvaient déjà dans [2] et [3], sauf quelques-uns qui ont été mis au point par Geneviève Pourcin dans [15] et qui sont exposés sans démonstration au paragraphe II. En particulier, la « cure d'amaigrissement » qui fait passer de $\mathfrak{Z}$ à Z est analogue à celle de [2] (§ 9, n° 6) (passage de Θ à H).

Entre le 1er et le 6 août, Hubbard et moi avons établi le plan de la démonstration présentée dans cet article et rédigé dans la Note [4]. Je dois remercier MM. Stein, Remmert et Grauert, qui m'ont permis d'exposer cette Note à Oberwolfach en septembre, bien que je ne fusse pas inscrit au colloque qui s'y tenait. La présente démonstration a fait l'objet du Séminaire de Géométrie algébrique et analytique de l'École Normale Supérieure 1973/1974, auquel ont participé notamment J.-L. Verdier, J. Le Potier et Geneviève Pourcin (Hubbard se trouvait alors aux États-Unis).

Le présent article suit le plan exposé dans [4], à l'exception des points suivants :

1° Il a fallu tenir compte de la difficulté signalée à la fin du paragraphe II : je ne sais pas montrer que, si U est un ouvert de $X(s)$ plongeable dans un polydisque et K un compact contenu dans U, il existe un ouvert W de X, plongeable dans $S' \times V$, où S' est un ouvert de S et V un polydisque, tel que $K \subset W \cap X(s) \subset U$ (1). Ceci nous a amené à considérer, outre l'espace $P_S^0(K; X)$, qui est celui noté $P_S(K; X)$ dans [4], l'espace noté ici $P_S(K; X)$. Malheureusement, je ne sais pas montrer que $P_S(K; X)$ est lisse sur S, mais seulement qu'il est « subimmersif ». Heureusement, la proposition 2 du paragraphe IV donne une condition suffisante, *qui se vérifie en connaissant seulement* X (s), pour que $P_S(K; X)$ soit lisse en un point donné au-dessus de s.

2° Dans la définition des cuirasses d'ordre 2, les données ont été allégées à la suite d'une remarque de Le Potier. Dans la définition des puzzles, on a rajouté les axiomes qui assurent que l'espace reconstitué à partir d'un puzzle est séparé et compact.

3° La définition de l'espace Z a été modifiée : l'espace noté Z dans [4] est celui noté Z_1 dans le paragraphe VII (n° 1). Ceci permet d'avoir le théorème 1 du paragraphe VII, plus fort que la proposition 1 de [4]. En outre, on obtient ainsi une déformation semi-universelle (2).

Je dois à Le Potier, qui a exposé ce travail au Séminaire Bourbaki en juin 1974 [12], des simplifications importantes, notamment dans le paragraphe III.

---

(1) La dernière phrase du n° 1 de [4] est incorrecte.

(2) La dernière assertion du théorème de [4] est inexacte : avec l'espace Z tel qu'il y est défini la déformation de base S serait seulement verselle.

En septembre 1973, j'ai appris que Grauert travaillait activement sur ce sujet depuis le printemps. Il a obtenu en décembre une démonstration qu'il a publiée [7]. A ce jour, je n'ai pas lu cette démonstration avec suffisamment de soin pour dire à quel point elle diffère de celle présentée ici. Forster et Knorr auraient également obtenu une autre démonstration par une méthode différente [5].

C'est pour moi une grande joie de pouvoir faire paraître cet article dans le volume des Annales de l'École Normale Supérieure dédié à Henri Cartan, pour qui j'ai une profonde admiration.

I. — Morphismes lisses et subimmersifs

1. Rappel sur les espaces analytiques banachiques. — La catégorie $\mathfrak{C}$ des espaces analytiques banachiques a été définie dans [2] (§ 3). C'est une catégorie locale (au sens de Ehresmann), avec produits et noyaux de doubles flèches. Les variétés analytiques banachiques forment une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{C}$ (objets lisses).

Soient E et F des espaces de Banach, U un ouvert de E et $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ une application analytique. Le noyau $\mathrm{X} = f^{-1}(0)$ de la double flèche $(f, 0) : \mathrm{U} \rightrightarrows \mathrm{F}$ est appelé un modèle; tout morphisme de X dans un espace de Banach G est localement induit par une application analytique d'un ouvert de U dans G; une application analytique $g : \mathrm{U} \to \mathrm{G}$ induit le morphisme nul sur X si et seulement si elle est localement de la forme

$$h.f = (x \mapsto h(x)(f(x))),$$

où h est une application analytique de U dans l'espace de Banach $\mathbf{L}(\mathrm{F}; \mathrm{G})$. Tout espace analytique est localement isomorphe à un modèle.

Soit X un espace analytique banachique. Un *sous-espace* analytique de X est un objet Y de $\mathfrak{C}$ qui est localement de la forme $f^{-1}(0)$, où f est un morphisme d'un ouvert de X dans un espace de Banach F (on dit que f est une équation locale de Y dans X).

Soit T un germe d'espace analytique banachique. Si X est un espace analytique banachique, on note X(T) l'ensemble des (germes de) morphismes de T dans X, et les éléments de X(T) sont appelés points de X paramétrés par T. La considération de X(T) pour tout T permet souvent de simplifier des démonstrations, ou du moins de les rendre plus compréhensibles en se rapprochant d'un point de vue ensembliste. Par exemple, un morphisme $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est déterminé par la donnée de l'application $f_* : \mathrm{X}(\mathrm{T}) \to \mathrm{Y}(\mathrm{T})$ pour tout T; f est un isomorphisme si et seulement si $f_* : \mathrm{X}(\mathrm{T}) \to \mathrm{Y}(\mathrm{T})$ est bijectif pour tout T.

2. Espace défini par une application linéaire continue. — Le résultat suivant montre que l'information contenue dans une structure d'espace analytique banachique est considérable. Nous l'utiliserons au n° 8.

Proposition 1. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *une application linéaire continue. Pour que* $u^{-1}(0)$ *soit lisse, il faut et il suffit que* u *soit direct.*

Démonstration. — La condition est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Notons N l'espace analytique $u^{-1}(0)$ et N_0 l'espace de Banach Ker u, considéré comme espace analytique lisse : N et N_0 ont même ensemble sous-jacent, et on a un morphisme $i : N_0 \to N$.

a. Ker *u est direct.* — Si V est une variété, toute application analytique $h : V \to E$ telle que $u \circ h = 0$ est une application analytique dans N_0. En particulier, si N est lisse, l'injection canonique de N dans E est un morphisme dans N_0, mais comme N est un sous-espace analytique de E, ce morphisme est localement induit par une application analytique d'un ouvert de E dans N_0. En prenant l'application linéaire tangente à l'origine, on obtient une rétraction linéaire continue de E sur N_0.

b. u est strict et Im *u est direct.* — Le morphisme canonique $N \to E/N_0$ est ensemblistement nul, donc analytiquement nul si N est lisse. Il existe alors une application analytique $x \mapsto h_x$ de E dans $\mathbf{L}(F; E/N_0)$ définie au voisinage de 0 telle que $\chi(x) = h_x(f(x))$ pour $x \in E$ assez petit, $\chi : E \to E/N_0$ étant l'application canonique. En prenant les applications linéaires tangentes en 0, on obtient $\chi = h_0 \circ u$.

C. Q. F. D.

3. Fibrés vectoriels. — Soient X un espace analytique banachique et F un espace de Banach. Le *fibré trivial* F_X est l'espace produit $X \times F$, muni de sa projection sur X. Si F′ est un autre espace de Banach, à un morphisme $u : X \to \mathbf{L}(F; F')$ on associe un morphisme $\tilde{u} : X \times F \to X \times F'$ par $\tilde{u}(x, y) = (x, u(x)(y))$ [pour $x \in X(T)$, $y \in F(T)$, T quelconque].

Lemme et Définition. — *L'application* $u \mapsto \tilde{u}$ *de* Mor (X; $\mathbf{L}$(F; F′)) *dans* Mor (X × F; X × F′) *est injective. Son image est notée* Hom $(F_X; F'_X)$.

Démonstration. — On peut supposer que X est un modèle $g^{-1}(0)$, où $g : U \to G$ est une application analytique, et que u est induit par une application analytique $v : U \to \mathbf{L}(F, F')$. Alors $\tilde{u}$ est induit par $\tilde{v} : U \times F \to U \times F'$. Si $\tilde{u}$ est le morphisme nul, $\tilde{v}$ est localement de la forme $\tilde{v}(x, y) = (x, h(x, y).g(x))$, où h est une application analytique d'un ouvert de $U \times F$ dans L (G; F′). Alors la partie linéaire en y de h est une application analytique h_1 d'un ouvert de U dans $\mathbf{L}(F; \mathbf{L}(G; F')) = \mathscr{B}il(F, G; F')$. En notant h'_1 l'application correspondante dans $\mathbf{L}(G; \mathbf{L}(F; F'))$, on a $v = h'_1 . g$ sur cet ouvert, donc v induit le morphisme nul sur X.

C. Q. F. D.

Soit E un espace analytique banachique au-dessus de X. Un *atlas vectoriel* sur E au-dessus d'un recouvrement ouvert (U_i) de X est une famille d'isomorphismes $f_i : E|_{U_i} \to U_i \times F_i$, où les F_i sont des espaces de Banach, telle que

$$\gamma_{ij} = f_i \circ f_j^{-1} \in \mathrm{Hom}((F_j)_{U_{ij}}; (F_i)_{U_{ij}})$$

pour tout couple (i, j). La condition $\gamma_{ik} = \gamma_{ij} . \gamma_{jk}$ est automatiquement satisfaite en vertu du lemme ci-dessus.

Une structure de *fibré vectoriel* sur E est une classe d'équivalence d'atlas vectoriels.

Soit E un fibré vectoriel sur X. Un *sous-fibré* vectoriel de E est un sous-espace analytique de E muni d'une structure de fibré vectoriel telle que le morphisme d'inclusion soit un monomorphisme (localement) direct de fibrés vectoriels. On définit alors un fibré quotient. Si F est un espace de Banach, les sous-fibrés (et les fibrés quotients) du fibré trivial F_X correspondent bijectivement aux morphismes de X dans la grassmannienne de F.

4. MORPHISMES LISSES, SUBIMMERSIFS. — Soit $\pi : X \to S$ un morphisme d'espaces analytiques banachiques. On dit que π est *subimmersif* en un point $x \in X$ s'il existe un voisinage ouvert X' de x dans X et un voisinage ouvert S' de $\pi(x)$ dans S tels que $\pi(X') \subset S'$ et que X' soit S'-isomorphe à un espace de la forme $S_1 \times U$, où S_1 est un sous-espace analytique de S' et U un ouvert d'un espace de Banach. S'il en est ainsi, le germe de S_1 en $\pi(x)$ ne dépend pas du choix de X', et est appelé le *germe image* de X en x. Si ce germe image est le germe de S, on dit que π est *lisse* en x, ou que X est lisse sur S en x.

Nous allons définir le *fibré tangent vertical* $T_S X$ sur X d'un espace X subimmersif au-dessus de S.

Soit S un espace analytique banachique. Si S_1 est un sous-espace analytique de S et W un ouvert de $S_1 \times E$, où E est un espace de Banach, on note $T_S W$ le fibré trivial E_W, et on l'appelle fibré tangent vertical de W sur S. Si W' est un ouvert de $S_1 \times E'$, où E' est encore un espace de Banach, et $f : W \to W'$ un S-morphisme (i. e. un S_1-morphisme), on définit un f-morphisme $T_S f : T_S W \to T_S W'$ de la façon suivante : si S_1 est une variété, $T_S f(s, x)$ est l'application linéaire tangente en x à l'application $f(s) : W(s) \to W'(s)$. Dans le cas général, on peut plonger S localement dans une variété U et prolonger localement f en un U-morphisme $\bar{f}$ d'un ouvert $\tilde{W}$ de $U \times E$ dans $U \times E'$. Le lemme qui suit montre que le morphisme $T_S f : E_W \to E_{W'}$ induit par $T_S \bar{f}$ ne dépend pas du choix de $\bar{f}$.

LEMME 2. — *Soient* E *et* E' *des espaces de Banach*, U *une variété banachique*, W *un ouvert de* $U \times E$ *et* f *une application analytique de* W *dans* E'. *Notons* ∂f *la dérivée partielle* $W \to \mathbf{L}(E; E')$ *de* f. *Soit* S *un sous-espace analytique de* U. *Alors, si* f *est nulle sur* $W \cap S \times E$, *il en est de même de* ∂f.

Démonstration. — Soit $g : U \to F$ une équation de S dans U. Alors $(s, x) \mapsto g(s)$ est une équation de $S \times E$ dans $U \times E$. Si $f(s, x) = h(s, x) . g(s)$ pour $(s, x) \in W$, avec $h : W \to \mathbf{L}(F; E')$ analytique, on a $\partial f(s, x)\, t = (\partial h(s, x)\, t) f(s)$, donc ∂f est nulle sur $S \times E \cap W$.

C. Q. F. D.

5. FONCTORIALITÉ DE $T_S X$. — On a des propriétés évidentes de fonctorialité. En particulier, si f est un isomorphisme, il en est de même de $T_S f$. Ceci permet de définir, par recollement, le fibré tangent vertical $T_S X$ d'un espace lisse au-dessus de S, ou plus généralement d'un espace X muni d'un morphisme subimmersif dans S. Si X et X' sont des espaces subimmersifs sur S, on définit de même pour tout S-morphisme $f : X \to X'$ un f-morphisme $T_S f : T_S X \to T_S X'$.

PROPOSITION 2. — *Soient* S *un espace analytique banachique*, X *et* Y *des espaces lisses au-dessus de* S, x_0 *et* y_0 *des points de* X *et* Y *respectivement*, $f : X \to Y$ *un* S-*morphisme tel que* $f(x_0) = y_0$.

a. Si $T_S f(x_0) : T_S X(x_0) \to T_S Y(y_0)$ *est un isomorphisme,* f *est un isomorphisme local.*

b. Soit $\sigma : S \to Y$ *une section telle que* $\sigma(p(x_0)) = y_0$, *où* $p : X \to S$ *est la projection. On suppose que* $T_S f(x_0) : T_S X(x_0) \to T_S Y(y_0)$ *est un épimorphisme direct. Alors l'image réciproque par* f *de* $\sigma(S)$, *i. e. le noyau de la double flèche* $(f, \sigma \circ p) : X \rightrightarrows Y$, *est lisse au-dessus de* S *et son espace tangent vertical en* x_0 *est* $\operatorname{Ker} T_S f(x_0)$.

C'est une variante relative du théorème des fonctions implicites. Elle s'en déduit immédiatement.

PROPOSITION 3. — *Soient* S *un espace analytique banachique* X *et* Y *des espaces lisses au-dessus de* S *et* $f : X \to Y$ *un* S-*morphisme. On suppose que* $T_S f = 0$ *et que les fibres de* X *sont connexes non vides. Alors* f *est de la forme* $\sigma \circ p$, *où* $\sigma : S \to Y$ *est une section et* $p : X \to S$ *désigne la projection.*

Démonstration. — Supposons d'abord S défini dans une variété U par une équation $g : U \to G$, X de la forme $S \times V$, où V est un ouvert étoilé d'un espace de Banach E, et Y ouvert dans $S \times F$, où F est un espace de Banach. Alors f est donné par un morphisme $\tilde{f} : S \times V \to F$ qui se prolonge localement en $\bar{f} : U \times V \to F$. Si la dérivée partielle $\partial\bar{f} : U \times V \to \mathbf{L}(E; F)$ est nulle sur $S \times V$, elle se met localement sous la forme $\partial\bar{f}(s, x) = h(s, x)\, g(s)$, où $h : U \times V \to \mathbf{L}(G; \mathbf{L}(E; F))$ est une application analytique. Soit $\tilde{h}$ l'application correspondante à valeurs dans $\mathbf{L}(E; \mathbf{L}(G; F))$. On a

$$\bar{f}(s, x) = \bar{f}(s, 0) + \int_0^1 \partial\bar{f}(s, tx)\, x\, dt = \bar{f}(s, 0) + \left(\int_0^1 \tilde{h}(s, tx)\, x\, dt\right) g(s),$$

donc f coïncide avec le morphisme $(s, x) \mapsto f(s, 0)$.

Dans le cas général, d'après cette étude locale, le germe f_x de f en un point $x \in X$ est de la forme $\sigma^x \circ p_x$, où σ^x est un germe en $p(x)$ de section de Y. L'application $x \mapsto \sigma^x$ est localement constante, donc constante sur les fibres de X, ce qui permet de définir pour tout $s \in S$ un germe σ_s en s de section de Y. Ces différents germes sont les germes d'une même section $\sigma : S \to Y$: il suffit de le vérifier localement et cela résulte de l'étude locale. On a bien $f = \sigma \circ p$.

C. Q. F. D.

6. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — Soient S un espace analytique banachique, E un espace de Banach, U un ouvert de E, D un voisinage ouvert de 0 dans **C**. Si $f : S \times D \to U$ est un morphisme, on définit un morphisme $\partial f : S \times D \to E$ par $\partial f(s, t) = T_S f(s, t).1$ [3]. Soient $\theta : S \times D \times U \to E$ et $f_0 : S \to U$ des morphismes. On dit qu'un morphisme $f : S \times D \to U$ est *solution de l'équation différentielle définie par* θ *avec condition initiale* f_0 si l'on a

$$\partial f(s, t) = \theta(s, t, f(s, t)) \qquad \text{et} \qquad f(s, 0) = f_0(s).$$

(3) Pour $s \in S(T)$, $t \in D(T)$, T espace analytique banachique, ou mieux germe d'espace analytique banachique quelconque. Dans les calculs, nous ferons toujours tacitement cette convention.

Une *solution locale* est un morphisme $f : S' \times D' \to U$, où S' et D' sont des ouverts de S et D respectivement, satisfaisant aux mêmes conditions.

PROPOSITION 4. — *Les morphismes* θ *et* f_0 *étant donnés, pour tout* $s_0 \in S$, *il existe une solution locale de l'équation différentielle définie par* θ *avec condition initiale* f_0 *définie au voisinage de* $(s_0, 0)$. *Deux telles solutions locales coïncident au voisinage de ce point.*

Démonstration. — *a. Existence.* — Si S est lisse, le résultat est classique (*cf.* [1]). Dans le cas général, on peut plonger localement S dans une variété V, prolonger localement θ en $\bar{\theta} : V \times D' \times U' \to E$, et f_0 en $\bar{f}_0 : V \to U'$. Alors, si $\bar{f} : V' \times D'' \to U'$ est une solution locale de l'équation différentielle définie par $\bar{\theta}$ avec condition initiale $\bar{f}_0$, le morphisme f $(S \cap V') \times D' \to U$ induit par $\bar{f}$ est la solution locale cherchée.

b. Unicité. — Soit $F : S' \times U' \times D' \to U$ une solution locale universelle de θ, i. e. une solution locale de l'équation différentielle définie par $(s, x_0, t, x) \mapsto \theta(s, t, x)$ avec condition initiale $(s, x_0) \mapsto x_0$. Définissons $\Phi : S' \times D' \times U' \to S \times D \times U$ par

$$\Phi(s, t, x) = (s, t, F(s, x, t)).$$

D'après la proposition 1, *a*, Φ est un isomorphisme local. Soit f une solution locale de l'équation différentielle définie par θ. Définissons $g : S'' \times D'' \to U$ par

$$\Phi^{-1}(s, t, f(s; t)) = (s, t, g(s, t)),$$

avec D'' connexe. On a alors $\partial g = 0$, d'où $g(s, t) = g(s, 0)$ d'après la proposition 3. Par suite, on a nécessairement $f(s, t) = F(s, f_0(s), t)$ sur $S'' \times D''$, d'où l'unicité locale.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Si* D *est connexe, il existe au plus une solution de l'équation différentielle définie par* θ *avec condition initiale* f_0.

7. ESPACE LINÉAIRE TANGENT (DE ZARISKI) VERTICAL. — Pour tout espace analytique banachique X, on définit un espace analytique banachique TX au-dessus de X de la façon suivante : si X est une variété, TX est son fibré tangent. Si X est le noyau d'une double flèche $(f, g) : V \rightrightarrows W$, où V et W sont des variétés, TX est le noyau de la double flèche $(Tf, Tg) : TV \rightrightarrows TW$. Ceci permet de définir TX pour tout modèle X; dans le cas général, TX est défini par recollement. A un morphisme $f : X \to Y$ correspond un morphisme $Tf : TX \to TY$ au-dessus de f. Si X est un espace au-dessus de S, on note $T_S X$ l'image réciproque de la section nulle de TS par $T_\pi : TX \to TS$, où $\pi : X \to S$ est la projection.

L'espace $T_S X$ jouit de la propriété suivante : notons A l'image réciproque de 0 par l'application $t \mapsto t^2$ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$: c'est un espace analytique de dimension finie, constitué par un point muni de l'algèbre $\mathbf{C}[t]/(t^2)$. Pour tout espace analytique banachique T au-dessus de S, les S-morphismes de T dans $T_S X$ correspondent bijectivement, et de façon fonctorielle en T, aux S-morphismes de $T \times A$ dans X. Dans cette correspondance, si $\tilde{f} : T \times A \to T_S X$ correspond à $f : T \to T_S X$, on a $\tilde{f}|_T = p \circ f$, où $p : T_S X \to X$ est la projection.

Remarque. — Soit X un espace analytique banachique de la forme $f^{-1}(0)$, où $f: \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ est une application analytique, et x un point de X. Notons N l'espace $(\mathrm{T}_x f)^{-1}(0)$ et N_0 l'espace de Banach Ker $\mathrm{T}_x f$. On a vu que $\mathrm{N} = \mathrm{N}_0$ si et seulement si $\mathrm{T}_x f$ est direct. S'il en est ainsi, on peut plonger localement X dans $\mathrm{N} = \mathrm{N}_0$. Dans le cas général, on ne peut pas plonger X dans N_0 ni même dans N. Par exemple, on peut prendre f de telle sorte que N_0 soit nul, mais X homéomorphe à un ensemble de Cantor.

Nous aurons l'occasion de rencontrer des espaces définis par des équations dont la partie linéaire n'est pas directe, ni même stricte (par exemple compacte).

8. Critère de subimmersivité.

Théorème 1. — *Soient* S *un espace analytique banachique et* X *un espace analytique banachique au-dessus de* S. *Pour que* $\mathrm{T_S X}$ *soit lisse sur* X, *il faut et il suffit que la projection* $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *soit un morphisme subimmersif.*

Démonstration. — Si π est subimmersif, l'espace $\mathrm{T_S X}$ est l'espace total du fibré vectoriel déjà noté $\mathrm{T_S X}$ au n° 5; il est donc lisse sur S. Démontrons la réciproque.

L'énoncé étant local, on peut supposer que l'on a des espaces de Banach E et F, un ouvert U de E et un morphisme $f: \mathrm{S} \times \mathrm{U} \to \mathrm{F}$, et que $\mathrm{X} = f^{-1}(0)$. Alors, la restriction de $\mathrm{T_S} f$ à $\mathrm{T_S X}$ est le morphisme nul.

Lemme 3. — *Soient* S *un espace analytique banachique*, E *et* F *des espaces de Banach*, U *un ouvert de* E, $f: \mathrm{S} \times \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ *un morphisme*, $\mathrm{X} = f^{-1}(0)$, *et* $(s_0, x_0) \in \mathrm{X}$. *On suppose que* $\mathrm{T_S} f(s_0, x_0)$ *est direct, et qu'il existe un sous-fibré vectoriel* Θ *de* $\mathrm{E_X}$ *tel que* $\Theta(s_0, x_0) = \mathrm{Ker}\ \mathrm{T_S} f(s_0, x_0)$ *et que le morphisme de* Θ *dans* $\mathrm{F_X}$ *induit par* $\mathrm{T_S} f$ *soit nul. Alors, au voisinage de* (s_0, x_0), *la projection de* X *dans* S *est un morphisme subimmersif et* $\mathrm{T_S X} = \Theta$.

Démonstration. — *a. Cas où* $\Theta = \mathrm{E_X}$. — Dans ce cas, $\mathrm{T_S} f$ est nul sur X, donc on peut écrire localement $\mathrm{T_S} f(s, x) = h(s, x).f(s, x)$, où h est un morphisme de $\mathrm{S}' \times \mathrm{U}'$ dans $\mathbf{L}(\mathrm{F}; \mathbf{L}(\mathrm{E}; \mathrm{F}))$. On peut trouver un voisinage U'' de x_0 dans U, un voisinage V de 0 dans E et un disque D de rayon > 1 dans $\mathbf{C}$ tels que $x + tx' \in \mathrm{U}'$ pour $x \in \mathrm{U}''$, $t \in \mathrm{D}$ et $x' \in \mathrm{V}$. Le morphisme

$$\mathrm{F} : \quad (s, x, x', t) \mapsto f(s, x+tx')$$

de $\mathrm{S}' \times \mathrm{U}'' \times \mathrm{V} \times \mathrm{D}$ dans F est solution de l'équation différentielle définie par le morphisme

$$\theta : \quad (s, x, x', t, y) \mapsto h(s, x+tx').y.x'$$

de $\mathrm{S}' \times \mathrm{U}'' \times \mathrm{V} \times \mathrm{D} \times \mathrm{F}$ dans F. Le morphisme nul est aussi solution de cette équation différentielle. En posant $\mathrm{X}' = (\mathrm{S}' \times \mathrm{U}'') \cap \mathrm{X}$, la restriction de F à $\mathrm{X}' \times \mathrm{V} \times \mathrm{D}$ a pour condition initiale 0. Il résulte de l'unicité des solutions d'une équation différentielle (cor. de la prop. 3), que la restriction de F à $\mathrm{X}' \times \mathrm{V} \times \mathrm{D}$ est nulle. En particulier, puisque $1 \in \mathrm{D}$, on a $f(s, x+x') = 0$ pour $(s, x) \in \mathrm{X}'$, $x' \in \mathrm{V}$. Notons S_1 le sous-espace analytique de S' formé des s tels que $f(s, x_0) = 0$. On a $f(s, x_0 + x') = 0$ pour $s \in \mathrm{S}_1$, donc X contient $\mathrm{S}_1 \times (x_0 + \mathrm{V})$, et $f(s, x_0) = 0$ pour $(s, x) \in X'$ si $x_0 - x \in V$, donc $X' \cap (S \times (x_0 - V))$ est contenu dans $S_1 \times U$. Finalement, X coïncide avec $S_1 \times U$ au voisinage de (s_0, x_0).

b. Cas général. — Mettons F sous la forme $F_1 \oplus F_2$, où $F_1 = \operatorname{Im} T_S f(s_0, x_0)$; alors $f = (f_1, f_2)$, avec $f_i : S \times U \to F_i$. Posons $Y = f_1^{-1}(0)$. D'après la proposition 1 *b*, Y est lisse sur S au voisinage de (s_0, x_0). On a $X \subset Y$, et comme $T_S f_1$ induit le morphisme nul sur Θ, le fibré Θ est un sous-fibré de $\operatorname{Ker} T_S f_1 |_X = TY |_X$. Comme les fibrés Θ et $T_S Y$ ont même fibre au point (s_0, x_0), ils coïncident sur un voisinage de ce point. En prenant une carte relative de Y au voisinage de (s_0, x_0), on est ramené au cas particulier *a*.

C. Q. F. D.

Fin de la démonstration du théorème. — Pour tout $x \in X$, l'application linéaire tangente $T_S f(x) : E \to F$ est directe. En effet, d'après la proposition 1, l'image réciproque de 0 par cette application est lisse. On peut donc appliquer le lemme 3.

C. Q. F. D.

II. — L'espace $\mathfrak{Mor}_S(Y; X)$

Ce paragraphe contient des résultats qui ont été démontrés par Geneviève Pourcin dans [15].

1. Sous-espaces privilégiés d'un polycylindre. — Soit $K = K_1 \times \ldots \times K_n$ un polycy indre dans $\mathbf{C}^n$, i. e. un produit de n compacts convexes de $\mathbf{C}$ d'intérieur non vide. On note B(K) l'espace de Banach des fonctions continues de K dans $\mathbf{C}$ holomorphes sur $\mathring{K}$. Pour tout ouvert U de $\mathbf{C}^n$, notons $\mathscr{B}_K(U)$ l'espace de Fréchet des fonctions continues de $U \cap K$ dans $\mathbf{C}$ qui sont holomorphes sur $U \cap \mathring{K}$. On définit ainsi un faisceau d'algèbres $\mathscr{B}_K$ concentré sur K; nous considérerons K comme un espace annelé en le munissant de ce faisceau. On a évidemment $H^0(K; \mathscr{B}_K) = B(K)$. On a aussi $H^q(K; \mathscr{B}_K) = 0$ pour $q > 0$ ([2], § 6, th. 1; [15], prop. 1.1).

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau $\mathscr{B}_K$-module. On dit que $\mathscr{F}$ est K-*privilégié* s'il existe une résolution finie $\mathscr{L}_.$ de $\mathscr{F}$ sur K telle que le complexe d'espaces de Banach $B(K; \mathscr{L}_.) = \mathscr{L}_.(K)$ soit direct et acyclique en degré > 0. Ce complexe est alors une résolution de $B(K; \mathscr{F}) = \mathscr{F}(K)$. On dit que $\mathscr{F}$ est *localement* K-*privilégié* si, pour tout point $x \in K$, il existe un polycylindre P voisinage de x dans K tel que le faisceau $\mathscr{B}_P \otimes_{\mathscr{B}_K} \mathscr{F}$ soit P-privilégié. En fait, ces deux notions coïncident : tout faisceau localement K-privilégié est privilégié et réciproquement ([15], th. 3.1, (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)).

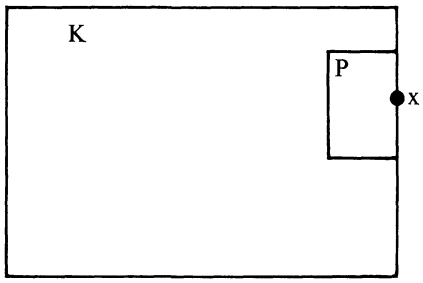
On appelle *sous-espace privilégié* de K un espace annelé $(Y, \mathscr{B}_Y)$ tel que Y soit un sous-espace de K et que le faisceau $\mathscr{B}_Y$, prolongé par 0, soit un quotient privilégié de $\mathscr{B}_K$, de support Y.

Remarque. — Si Y est un sous-espace privilégié de K, l'espace $Y \cap \mathring{K}$ est un sous-espace analytique de $\mathring{K}$, mais Y n'est en général pas de la forme $\tilde{Y} \cap K$, où $\tilde{Y}$ est un sous-espace analytique d'un voisinage de K.

2. Sous-espaces S-anaplats de $S \times K$. — Soient S un espace analytique banachique et K un polycylindre de $\mathbf{C}^n$. Pour tout polycylindre P contenu dans K, notons $\mathring{P}_K$ l'intérieur de P dans K (*cf. fig.*) et, si S′ est un ouvert de S, posons

$$\mathscr{B}_{S \times K}(S' \times \mathring{P}_K) = \varprojlim \operatorname{Mor}(S'; B(Q)),$$

où la limite projective est prise sur les polycylindres Q contenus dans $\mathring{P}_K$. On définit ainsi un préfaisceau d'algèbres $\mathscr{B}_{S \times K}$ sur $S \times K$. Ce préfaisceau est un faisceau ([15], prop. 4.8),



Ici P est un voisinage de x dans K. On a $x \in \mathring{P}_K$ mais $x \notin \mathring{P}$.

et nous considérerons $S \times K$ comme un espace annelé en le munissant de ce faisceau. Pour $s \in S$ on a $H^q(\{s\} \times K; \mathscr{B}_{S \times K}) = 0$ pour $q > 0$ et $H^0(\{s\} \times K; \mathscr{B}_{S \times K})$ est l'ensemble des germes de morphismes de S dans B (K).

Soit $\mathscr{F}$ un faisceau $\mathscr{B}_{S \times K}$-module sur $S \times K$. Pour tout $s \in S$, on définit un faisceau $\mathscr{B}_K$-module $\mathscr{F}(s)$ sur K par

$$\mathscr{F}(s)_x = \mathscr{B}_{K, x} \otimes_{\mathscr{B}_{S \times K, (s, x)}} \mathscr{F}_{(s, x)}.$$

On dit que $\mathscr{F}$ est S-*anaplat* s'il satisfait aux conditions suivantes :

(A 1) *Pour tout point* $(s, x) \in S \times K$, *il existe une résolution* $\mathscr{B}_{S \times K}$-*libre finie* $\mathscr{L}_{\bullet}$ *de* $\mathscr{F}$ *au voisinage de* (s, x) *telle que* $\mathscr{L}_{\bullet}(s)$ *soit une résolution de* $\mathscr{F}(s)$ *au voisinage de* x *;*

(A 2) *Pour tout* $s \in S$, *le faisceau* $\mathscr{F}(s)$ *est* K-*privilégié.*

Remarque. — Dans [2], on considère des faisceaux sur $S \times U$, où U est un ouvert de $\mathbf{C}^n$. On dit qu'un tel faisceau est S-anaplat s'il satisfait à la condition analogue à (A 1). Si $\mathscr{F}$ est un faisceau S-anaplat sur $S \times K$, il est anaplat au sens de [2] sur $S \times \mathring{K}$; si $\mathscr{F}$ est un faisceau S-anaplat sur $S \times U$ et si K est un polycylindre de U qui est $\mathscr{F}(s)$-privilégié pour tout s, le faisceau $\mathscr{B}_{S \times K} \otimes_{\mathscr{B}_{S \times K}} \mathscr{F}$ est un faisceau S-anaplat sur $S \times K$.

Si $\mathscr{F}$ est un faisceau S-anaplat sur $S \times K$, pour tout $s \in S$ il existe un voisinage S′ de s dans S et une résolution libre finie $\mathscr{L}_{\bullet}$ de $\mathscr{F}$ sur $S' \times K$. Pour une telle résolution, $\mathscr{L}_{\bullet}(s')$ est une résolution du faisceau $\mathscr{F}(s')$ et $B(K; \mathscr{L}_{\bullet}(s'))$ est une résolution B (K)-libre directe du module $B(K; \mathscr{F}(s'))$ pour tout $s' \in S'$. Ceci permet de construire sur S un fibré vectoriel $B(K; \mathscr{F})$ dont la fibre en tout point s est $B(K; \mathscr{F}(s))$.

On appelle *sous-espace* S-*anaplat* de $S \times K$ un espace annelé $(Y, \mathscr{B}_Y)$ tel que $\mathscr{B}_Y$, prolongé par 0, soit un quotient S-anaplat de $\mathscr{B}_{S\times K}$, de support Y. Si Y est un sous-espace S-anaplat de $S \times K$, la projection de Y sur S est ouverte et propre, et pour tout $s \in S$ on définit un sous-espace privilégié $Y(s)$ de K par $Y(s) = pr^{-1}(s)$ et $\mathscr{B}_{Y(s)} = \mathscr{B}_Y(s)$.

Notons $G(K)$ l'espace analytique banachique des algèbres qui sont quotient de $B(K)$ par un idéal admettant une résolution finie directe. C'est l'espace construit dans ([2], § 4), où il est noté $\mathfrak{G}_{B(K)}(B(K))$, ou $\mathfrak{G}_K(\mathscr{O}_{C^n})$ [4]. L'espace $G(K)$ représente le foncteur qui, à tout espace analytique banachique S, associe l'ensemble des sous-espaces S-anaplats de $S \times K$. Autrement dit, on peut définir naturellement dans $G(K) \times K$ un sous-espace $G(K)$-anaplat Υ ayant la propriété universelle suivante :

Pour tout espace analytique banachique S et tout sous-espace S-anaplat Y de $S \times K$, il existe un morphisme $f : S \to G(K)$ et un seul tel que $Y = f^*(\Upsilon)$ { [15], th. 4.12)

3. Morphismes définis sur un sous-espace anaplat de $S \times K$. — La catégorie $\mathfrak{C}$ des espaces analytiques banachiques a été définie comme sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathfrak{E}$ des « espaces foncté s». Soient S un espace analytique banachique et K un polycylindre de $\mathbf{C}^n$; tout sous-espace S-anaplat Y de $S \times K$ est naturellement muni d'une structure d'espace foncté au-dessus de S, et, si X est un espace analytique banachique au-dessus de S, on note $\mathrm{Mor}_S(Y; X)$ l'ensemble des morphismes de Y dans X au-dessus de S dans $\mathfrak{E}$.

La description suivante permet d'utiliser cette définition : Pour tout ouvert W de Y, on a $\mathrm{Mor}_S(W; S \times \mathbf{C}^p) = (\mathscr{B}_Y(W))^p$. Si U est un ouvert de $S \times \mathbf{C}^p$, l'ensemble $\mathrm{Mor}_S(W; U)$ est formé des $f \in \mathrm{Mor}_S(W; S \times \mathbf{C}^p)$ tels que l'image de W par l'application sous-jacente à f soit contenue dans U. Si $X = h^{-1}(0)$, où h est un morphisme de U dans $\mathbf{C}^q$, l'ensemble $\mathrm{Mor}_S(W; X)$ est formé des $f \in \mathrm{Mor}_S(W; U)$ tels que $h \circ f = 0$. Enfin, comme la catégorie $\mathfrak{E}$ est locale, $W \mapsto \mathrm{Mor}_S(W; X)$ est un faisceau sur Y pour tout espace analytique X au-dessus de S, ce qui permet de décrire $\mathrm{Mor}_S(Y; X)$ quand X est localement de présentation analytique finie sur S.

4. L'espace $\mathfrak{Mor}_S(Y; X)$.

Théorème ([15], th. 6.5). — *Soient* Y *un sous-espace* S-*anaplat de* $S \times K$ *et* X *un espace analytique banachique de présentation analytique finie sur* S. *Le foncteur contravariant qui, à tout espace analytique banachique* T *au-dessus de* S, *associe* $\mathrm{Mor}_T(Y_T; X_T)$, *est représentable.*

Autrement dit, il existe un espace analytique banachique $\mathfrak{Mor}_S(Y; X)$ muni d'un morphisme p dans S, et un morphisme $m : p^* Y \to p^* X$ au-dessus de $\mathfrak{Mor}_S(Y; X)$ jouissant de la propriété universelle suivante : pour tout espace analytique banachique T au-dessus de S et tout T-morphisme $f : Y_T \to X_T$, il existe un S-morphisme $h : T \to \mathfrak{Mor}_S(Y; X)$ et un seul tel que $h^* m = f$.

---

[4] Plus précisément, G (K) s'identifie à un ouvert de $\mathfrak{G}_{B(K)}(B(K))$, car dans [2], on a défini cet espace comme l'espace des idéaux de présentation finie directe de B (K). En fait, il est vraisemblable que tout idéal de présentation finie directe de B (K) admet une résolution finie directe.

Remarque. — Nécessairement, la fibre de $\mathfrak{Mor}_S(Y; X)$ en un point $s \in S$ est l'ensemble des morphismes de $Y(s)$ dans $X(s)$. En général, l'espace $\mathfrak{Mor}_S(Y; X)$ n'a aucune propriété de finitude ni de platitude sur S : On peut donner des exemples où la projection de $\mathfrak{Mor}_S(Y; X)$ dans S n'est pas ouverte.

Nous dirons que X est *petit* s'il est isomorphe à un espace de la forme $h^{-1}(0)$, où h est un morphisme de $S' \times U$ dans $\mathbf{C}^q$ avec S' un ouvert de S et U polydisque ouvert de $\mathbf{C}^p$. Dans le cas où X est petit, la construction de $\mathfrak{Mor}_S(Y; X)$ ne présente pas de difficulté, et ne nécessite d'ailleurs pas l'hypothèse que X est de présentation analytique finie ([5]). En effet, $\mathfrak{Mor}_S(Y; S \times \mathbf{C}^p)$ est le fibré vectoriel $B(K; \mathscr{B}_Y^p)$; si U est un ouvert de $S \times \mathbf{C}^p$ l'espace $\mathfrak{Mor}_S(Y; U)$ est un ouvert de $\mathfrak{Mor}_S(Y; S \times \mathbf{C}^p)$; à un morphisme $h : U \to \mathbf{C}^q$ on associe un S-morphisme

$$h_* : \quad \mathfrak{Mor}_S(Y; U) \to \mathfrak{Mor}_S(Y; S \times \mathbf{C}^q)$$

et si $X = h^{-1}(0)$ on a $\mathfrak{Mor}_S(Y; X) = h_*^{-1}(0)$.

Dans le cas général, soit s un point de S. Nous dirons qu'un morphisme $f : U(s) \to X(s)$ est petit dans X si son image est contenue dans un ouvert petit de X. L'ensemble $\mathfrak{Mor}_S^0(Y; X)$ des couples (s, f) où $s \in S$ et f est un morphisme petit de $Y(s)$ dans $X(s)$ petit dans X est muni d'une structure obtenue en recollant les $\mathfrak{Mor}_S(Y; W)$ pour W ouvert petit de X.

Il convient de signaler une difficulté, sans laquelle on pourrait dans la suite se contenter de considérer les $\mathfrak{Mor}_S^0(Y; X)$: je ne sais pas montrer que, pour que $f : Y(s) \to X(s)$ soit petit dans X, il suffit qu'il soit petit dans $X(s)$.

Dans le cas général, on obtient l'espace $\mathfrak{Mor}_S(Y; X)$ par une construction analogue à celle de [2].

III. — **L'espace** $P_S(K; X, U)$

1. Morphismes transverses a un sous-espace analytique. — Soient n un entier, K un polycylindre dans $\mathbf{C}^n$, U un ouvert de $\mathbf{C}^n$, X un sous-espace analytique de U et $f \in B(K; U)$. On dit que f est *transverse* à X en un point $t \in K$ si le faisceau $\mathscr{B}_{f^{-1}(X)} = f^* \mathscr{O}_X$ est K-privilégié et $\operatorname{Tor}_q^{\mathscr{O}_{U,x}}(\mathscr{B}_{K,t}, \mathscr{O}_{X,x}) = 0$, où $x = f(t)$, pour $q > 0$. Autrement dit, dire que f est transverse à X en t signifie qu'il existe un polycylindre P voisinage de t dans K, un voisinage V de $x = f(t)$ dans U contenant $f(P)$ et une résolution $\mathscr{O}_U$-libre $\mathscr{L}.$ de $\mathscr{O}_X$ sur V tels que $B(P) \otimes_{\mathscr{O}(V)} \mathscr{L}.(V)$ soit un complexe direct et acyclique en degré > 0.

On dit que f est transverse à X si f est transverse à X en tout point de K. Si f est transverse à X et s'il existe une résolution libre $\mathscr{L}.$ de X sur un voisinage V de $f(K)$ (ce qui est le cas si U est de Stein) $f^* \mathscr{L}.$ est une résolution $\mathscr{B}_K$-libre de $\mathscr{B}_{f^{-1}(X)}$ et $B(K) \otimes_{\mathscr{O}(V)} \mathscr{L}.(V) = B(K; f^* \mathscr{L}.)$ est une résolution directe du module de Banach $B(f^{-1}(X))$.

Soient maintenant S un espace analytique banachique, U un ouvert de $S \times \mathbf{C}^n$ et X un sous-espace analytique S-anaplat de U. On dit qu'un S-morphisme $f : S \times K \to U$

([5]) Il est vraisemblable que cette hypothèse est inutile dans le cas général.

est transverse à X en un point (s, t) si le morphisme $f(s) : \mathrm{K} \to \mathrm{U}(s)$ est transverse à $\mathrm{X}(s)$ en t. Il résulte du théorème de perturbation des complexes acycliques directs ([2], § 2, n° 3, prop. 2 *b*) que l'ensemble des points (s, t) où f est transverse à X est ouvert dans $\mathrm{S} \times \mathrm{K}$, et comme $\mathrm{S} \times \mathrm{K}$ est propre sur S, l'ensemble des $s \in \mathrm{S}$ tels que f soit transverse à X sur $\{s\} \times \mathrm{K}$ est ouvert dans S.

Si $f : \mathrm{S} \times \mathrm{K} \to \mathrm{U}$ est transverse à X, le sous-espace $f^{-1}(\mathrm{X})$ de $\mathrm{S} \times \mathrm{K}$ est S-anaplat. Il lui correspond donc (§ II, n° 2) un morphisme $w_f : \mathrm{S} \to \mathrm{G}(\mathrm{K})$ caractérisé par $w_f^*(\Upsilon) = f^{-1}(\mathrm{X})$; pour $s \in \mathrm{S}$, on a $w_f(s) = \mathrm{B}(f(s)^{-1}(\mathrm{X}(s)))$.

En appliquant ceci au morphisme universel m au-dessus de $\mathfrak{Mor}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S} \times \mathrm{K}; \mathrm{U})$, on voit que l'ensemble des couples (s, f) où $s \in \mathrm{S}$ et $f \in \mathrm{B}(\mathrm{K}; \mathrm{U}(s))$ est un morphisme transverse à $\mathrm{X}(s)$ et un ouvert de $\mathfrak{Mor}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S} \times \mathrm{K}; \mathrm{U})$. Nous noterons $\mathfrak{Mor}_{\mathrm{S}}^{\pitchfork \mathrm{X}}(\mathrm{K}; \mathrm{U})$ cet ouvert, muni de la structure induite. Au morphisme universel correspond un morphisme

$$\mathfrak{w} = w_m : \quad \mathfrak{Mor}_{\mathrm{S}}^{\pitchfork \mathrm{X}}(\mathrm{K}; \mathrm{U}) \to \mathrm{G}(\mathrm{K}).$$

2. L'ESPACE $\mathrm{P}_{\mathrm{S}}(\mathrm{K}; \mathrm{X}, \mathrm{U})$. — Soient S un espace analytique banachique, K un polycylindre de $\mathbf{C}^n$, U un ouvert de $\mathrm{S} \times \mathbf{C}^n$ et X un sous-espace analytique S-anaplat de U. Notons Υ le sous-espace universel de $\mathrm{G}(\mathrm{K}) \times \mathrm{K}$. L'espace $\mathrm{S} \times \Upsilon$ est un sous-espace anaplat de $\mathrm{S} \times \mathrm{G}(\mathrm{K}) \times \mathrm{K}$ et $\mathrm{G}(\mathrm{K}) \times \mathrm{X}$ est un espace analytique anaplat sur $\mathrm{S} \times \mathrm{G}(\mathrm{K})$; on peut donc considérer $\mathfrak{Mor}_{\mathrm{S} \times \mathrm{G}(\mathrm{K})}(\mathrm{S} \times \Upsilon; \mathrm{G}(\mathrm{K}) \times \mathrm{X})$: ses points sont les triplets (s, Y, f) où $s \in \mathrm{S}$, Y est un sous-espace privilégié de K et f un morphisme de Y dans $\mathrm{X}(s)$.

DÉFINITION. — *On note* $\mathrm{P}_{\mathrm{S}}(\mathrm{K}; \mathrm{X}, \mathrm{U})$ *l'ensemble des*

$$(s, \mathrm{Y}, f) \in \mathfrak{Mor}_{\mathrm{S} \times \mathrm{G}(\mathrm{K})}(\mathrm{S} \times \Upsilon; \mathrm{G}(\mathrm{K}) \times \mathrm{X})$$

tels qu'il existe un $g : \mathrm{K} \to \mathrm{U}(s)$ *transverse à* $\mathrm{X}(s)$ *avec* $\mathrm{Y} = g^{-1}(\mathrm{X}(s))$ *et* $f = g|_{\mathrm{Y}}$.

L'ensemble $\mathrm{P}_{\mathrm{S}}(\mathrm{K}; \mathrm{X}, \mathrm{U})$ est donc l'image du S-morphisme

$$\Phi : \quad (s, g) \mapsto (s, g^{-1}(\mathrm{X}(s)), g|_{g^{-1}(\mathrm{X}(s))})$$

de $\mathfrak{Mor}_{\mathrm{S}}^{\pitchfork \mathrm{X}}(\mathrm{K}; \mathrm{U})$ dans $\mathfrak{Mor}_{\mathrm{S} \times \mathrm{G}(\mathrm{K})}(\mathrm{S} \times \Upsilon; \mathrm{G}(\mathrm{K}) \times \mathrm{X})$.

PROPOSITION 1. — *Le morphisme* Φ *est lisse.*

Démonstration. — Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Mor}_{\mathrm{S}}^{\pitchfork \mathrm{X}}(\mathrm{K}; \mathrm{U}) & \xrightarrow{(s, f) \mapsto (s, f^{-1}(\mathrm{X}(s)), f)} & \mathfrak{Mor}_{\mathrm{S} \times \mathrm{G}(\mathrm{K})}(\mathrm{S} \times \mathrm{G}(\mathrm{K}) \times \mathrm{K}; \mathrm{G}(\mathrm{K}) \times \mathrm{U}) \\ {\scriptstyle \Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (s, \mathrm{Y}, g) \mapsto (s, \mathrm{Y}, g|_{\mathrm{Y}})} \\ \mathfrak{Mor}_{\mathrm{S} \times \mathrm{G}(\mathrm{K})}(\mathrm{S} \times \Upsilon; \mathrm{G}(\mathrm{K}) \times \mathrm{X}) & \xrightarrow{\iota_*} & \mathfrak{Mor}_{\mathrm{S} \times \mathrm{G}(\mathrm{K})}(\mathrm{S} \times \Upsilon; \mathrm{G}(\mathrm{K}) \times \mathrm{U}) \end{array}$$

Ce diagramme est localement cartésien, i. e. il induit un plongement ouvert de $\mathfrak{Mor}_{\mathrm{S}}^{\pitchfork \mathrm{X}}(\mathrm{K}, \mathrm{U})$ dans le produit fibré. En effet, soit $q = (s, \mathrm{Y}, f, g)$ un élément du produit fibré, avec $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{Y} \in \mathrm{G}(\mathrm{K})$, $f \in \mathrm{Mor}(\mathrm{Y}; \mathrm{X}(s))$ et $g \in \mathrm{Mor}(\mathrm{K}; \mathrm{U}(s))$, tels que $g^{-1}(\mathrm{X}(s)) = \mathrm{Y}$ et $g|_{\mathrm{Y}} = f$. Si q appartient à l'image de $\mathfrak{Mor}_{\mathrm{S}}^{\pitchfork \mathrm{X}}(\mathrm{K}, \mathrm{U})$, pour $q' = (s', \mathrm{Y}', f', g')$ assez voisin de q, on a $g' \in \mathfrak{Mor}_{\mathrm{S}}^{\pitchfork \mathrm{X}}(\mathrm{K}, \mathrm{U})$, et $g'^{-1}(\mathrm{X}(s')) \supset \mathrm{Y}$; comme on a l'égalité en q, on l'a encore en q', ce qui montre que q' est l'image de (s', g').

Le morphisme vertical est lisse, car il est induit par un épimorphisme direct de fibrés vectoriels. Le morphisme Φ est donc lisse.

C. Q. F. D.

Il résulte de la proposition 1 que $P_S(K; X, U)$ est ouvert dans

$$\mathfrak{Mor}_{S\times G(K)}(S\times \Upsilon;\ G(K)\times X);$$

nous le munirons de la structure induite.

THÉORÈME 1. — *L'espace* $P_S(K; X, U)$ *est lisse sur* S.

Ce théorème résulte de la proposition 1 et du lemme suivant, d'ailleurs immédiat.

LEMME. — *Soient* X_1, X_2, X_3 *trois espaces analytiques banachiques et*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & X_2 \arrow[dl, "w"] \\ & X_3 & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif. Si u est lisse surjectif et si v est lisse, w est lisse.

Remarque. — L'espace $P_S(K; X, U)$ n'est pas en général lisse sur $S\times G(K)$, ni sur $G(K)$.

3. DESCRIPTION DU FIBRÉ TANGENT VERTICAL $T_S P_S(K; X, U)$. — On munit $T_S P_S(K; X, U)$ d'une structure de fibré en B(K)-modules de la façon suivante : considérons l'espace A formé d'un point muni de $\mathbf{C}[Z]/(Z^2)$. Si T est un espace analytique au-dessus de S, un S-morphisme de T dans $T_S P_S(K; X, U)$ est donné par un S-morphisme de $T\times A$ dans $P_S(K; X, U)$, i. e. par un couple (Y, f) où Y est un sous-espace $T\times A$-anaplat de $T\times A\times K$ et $f: Y\to X_{T\times A}$ un morphisme au-dessus de $T\times A$. A un morphisme $h: T\to B(K)$ associons le T-morphisme $h_*: T\times A\times K\to T\times A\times K$ induit par le morphisme $(t, z, x)\mapsto (t, h(t, x).z, x)$ de $T\times \mathbf{C}\times K$ dans lui-même.

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} T\times A\times K \arrow[r, "h_*"] & T\times A\times K & \\ h_*^{-1}(Y) \arrow[u, phantom, "\bigcup" description] \arrow[r, "h_*"] \arrow[dr] & Y \arrow[u, phantom, "\bigcup" description] \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X_{T\times A} \arrow[dl] \\ & T\times A & \end{tikzcd}$$

On définit le produit $h.(Y, f)$ comme étant $(h_*^{-1}(Y), f\circ h_*)$.

Notons Υ le sous-espace universel de $P_S(K; X, U)\times K$. On a sur $P_S(K; X, U)$ un fibré en algèbres de Banach $B(\Upsilon)$ quotient du fibré trivial de fibre B(K).

PROPOSITION 2. — *Le fibré* $T_S P_S(K; X, U)$ *est un* $B(\Upsilon)$*-module localement libre de rang n.*

Démonstration. — Le morphisme lisse $\Phi : \mathfrak{Mor}_S^{\pitchfork X}(K; U) \to P_S(K; X, U)$ donne une suite exacte

$$0 \to \operatorname{Ker} T_S \Phi \to T_S \mathfrak{Mor}_S^{\pitchfork X}(K; U) \xrightarrow{T_S\Phi} \Phi^* T_S P_S(K; X, U) \to 0$$

de fibrés sur $\mathfrak{Mor}_S^{\pitchfork X}(K; U)$.

Le morphisme $T_S \Phi$ est $B(K)$-linéaire, comme on le voit en considérant, pour T espace analytique banachique, $g : T \times A \to \mathfrak{Mor}_S^{\pitchfork X}(K; U)$ et $h : T \to B(K)$, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} T \times A \times K & \xrightarrow{h_*} & T \times A \times K & \xrightarrow{g} & U_{T \times A} \\ \cup & & \cup & & \cup \\ h_*^{-1}(Y) & \xrightarrow{h_*} & Y & \xrightarrow{g|Y} & X_{T \times A} \end{array}$$

où $Y = g^{-1}(X)$.

Le fibré $T_S \mathfrak{Mor}_S^{\pitchfork X}(K; U)$ s'identifie au fibré trivial de fibre $B(K)^n$. Le fibré $\operatorname{Ker} T_S \Phi$, fibré tangent aux fibres de Φ, s'identifie au fibré $B(K; \mathscr{I}_\Upsilon)^n$, où $\mathscr{I}_\Upsilon$ est l'idéal définissant Υ. Par suite $\Phi^* T_S P_S(K; X, U)$ s'identifie comme $B(K)$-module à $B(\Upsilon)^n$. Comme le morphisme Φ est lisse, il admet des sections locales, donc $T_S P_S(K; X, U)$ est localement libre de rang n sur $B(\Upsilon)$.

C. Q. F. D.

Remarque. — En un point (s, Y, f) de $P_S(K; X, U)$, l'identification de la fibre de $T_S P_S(K; X, U)$ à $B(Y)^n$ dépend du choix de $g : K \to U(s)$ prolongeant f.

IV. — L'espace $P_S(K; X)$

1. LES ESPACES $P_S^0(K; X)$ ET $P_S(K; X)$. — Soient S un espace analytique banachique et X un espace analytique anaplat au-dessus de S (on ne suppose plus X plongé dans $S \times \mathbf{C}^n$). Soient n un entier et K un polycylindre de $\mathbf{C}^n$. On note $P_S^0(K; X)$ l'ensemble des $(s, Y, f) \in \mathfrak{Mor}_{S \times G(K)}(S \times \Upsilon; G(K) \times X)$ tels qu'il existe un ouvert X' de X contenant $f(Y)$ et un S-plongement ι de X' dans un ouvert U de $S \times \mathbf{C}^n$ avec

$$(s, Y, \iota \circ f) \in P_S(K; \iota(X'), U).$$

L'espace $P_S^0(K; X)$ est ouvert dans $\mathfrak{Mor}_{S \times G(K)}(S \times \Upsilon; G(K) \times X)$ et lisse sur S. En effet, les $P_S(K; \iota(X'), U)$ forment quand X', U et ι varient, un recouvrement de $P_S^0(K; X)$ par des ouverts de $\mathfrak{Mor}_{S \times G(K)}(S \times \Upsilon; G(K) \times X)$ lisses sur S.

On note $P_S(K; X)$ l'ensemble des $(s, Y, f) \in \mathfrak{Mor}_{S \times G(K)}(S \times \Upsilon; G(K) \times X)$ tels que, pour tout $y \in Y$, il existe un polycylindre K' voisinage de y dans K, privilégié pour Y, tel que $(s, Y \cap K', f|_{Y \cap K'}) \in P_S^0(K'; X)$.

PROPOSITION 1. — *L'ensemble* $P_S(K; X)$ *est ouvert dans* $\mathfrak{Mor}_{S \times G(K)}(S \times \Upsilon; G(K) \times X)$.

Démonstration. — Soient T un espace analytique banachique muni d'un morphisme $h : T \to S$, Y un sous-espace T-anaplat de $T \times K$ et $f : T \to h^* X$ un T-morphisme. Notons Ω l'ensemble des $(t, y) \in Y$ tels qu'il existe un polycylindre K' privilégié pour Y avec

$(t, Y(t) \cap K', f(t)|_{Y(t) \cap K'}) \in P^0_S(K'; X)$ et $y \in \mathring{K}'_K$. L'ensemble Ω est ouvert. Comme Y est propre sur T, l'ensemble des $t \in T$ tels que $(\forall y \in Y(t))\,(t, y) \in \Omega$, est ouvert dans T. En appliquant ceci à $T = \mathfrak{Mor}_{S \times G(K)}(S \times \Upsilon; G(K) \times X)$ et au morphisme universel, on obtient la proposition.

C. Q. F. D.

Remarque. — Si S′ est un espace analytique banachique au-dessus de S, on a $S' \times_S P_S(K; X) = P_{S'}(K; S' \times_S X)$. En particulier, la fibre en un point $s \in S$ de $P_S(K; X)$ est $P(K; X(s))$. Je ne peux en dire autant des P^0_S : on peut seulement affirmer que $S' \times_S P^0_S(K; X)$ s'identifie à un ouvert de $P^0_{S'}(K; S' \times_S X)$, (*cf.* § II, n° 4).

2. Subimmersivité de $P_S(K; X)$.

Théorème 1. — *La projection* $\pi : P_S(K; X) \to S$ *est un morphisme subimmersif.*

Démonstration. — Notons Υ le sous-espace universel de $P_S(K; X) \times K$. Soient $V \subset P_S(K; X)$ un ouvert et $K' \subset K$ un polycylindre tels que, pour $(s, Y, f) \in V$ on ait $(s, Y \cap K', f|_{Y \cap K'}) \in P^0_S(K'; X)$. Posons $\Upsilon' = \Upsilon \cap (V \times K')$ et notons ρ le morphisme $(s, Y, f) \mapsto (s, Y \cap K', f|_{Y \cap K'})$ de V dans $P^0_S(K'; X)$. Le fibré vectoriel banachique $\rho^* T_S P^0_S(K'; X)$ sur V est un $B(\Upsilon')$-module localement libre de rang *n*. Il lui correspond un fibré vectoriel $\Theta_{\Upsilon'}$ de rang *n* sur Υ'.

Comme les intérieurs des Υ' obtenus par ce procédé recouvrent Υ, les fibrés $\Theta_{\Upsilon'}$ se recollent en un fibré Θ sur Υ.

Lemme. — *L'espace linéaire tangent de Zariski vertical* $T_S P_S(K; X)$ *s'identifie à* $B(\Upsilon; \Theta)$.

Démonstration. — Soit A l'espace forme d'un point muni de $\mathbf{C}[Z]/(Z^2)$. D'après le paragraphe I (n° 7), il suffit de montrer que, pour tout espace analytique banachique T au-dessus de S, les S-morphismes de $T \times A$ dans $P_S(K; X)$ correspondent bijectivement et de façon fonctorielle en T aux morphismes de T dans $B(\Upsilon; \Theta)$ au-dessus de S.

Soit $\varphi : T \to P_S(K; X)$ un S-morphisme donné par (Y, f), où $Y \subset T \times K$ est un espace T-anaplat et $f : Y \to X_T$ un T-morphisme. Définissons sur Y des faisceaux $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$: le faisceau $\mathscr{F}_1$ est le faisceau des sections de $\varphi^* \Theta$ et $\mathscr{F}_2$ est construit en sorte que ses sections globales soient les S-morphismes $\tilde{\varphi} : T \times A \to P_S(K; X)$ tels que $\tilde{\varphi}|_T = \varphi$. Plus précisément, pour $U \subset T \times K$ ouvert, $\mathscr{F}_2(U)$ est l'ensemble des couples $(\tilde{Y}, \tilde{f})$ où $\tilde{Y}$ est un sous-espace de $U \times A$ anaplat sur $T \times A$ tel que $\tilde{Y}|_T = Y \cap U$ et $\tilde{f} : \tilde{Y} \to X_{T \times A}$ un $T \times A$-morphisme tel que $\tilde{f}|_{U \cap Y} = f|_{U \cap Y}$.

D'après la construction de Θ, les faisceaux $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ s'identifient localement, et les isomorphismes d'identification se recollent. Ceci permet d'identifier $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$, donc leurs sections globales.

C. Q. F. D.

Fin de la démonstration du théorème. — L'espace $T_S P_S(K; X)$ est un fibré vectoriel banachique sur $P_S(K; X)$; en particulier il est lisse. Le théorème résulte alors du paragraphe I (th. 1).

C. Q. F. D.

3. Ouvert de lissité de $P_S(K; X)$. — Notons $P'_S(K; X)$ l'ensemble des points de $P_S(K; X)$ où le morphisme de projection sur S est lisse. C'est un ensemble ouvert, qui contient $P^0_S(K; X)$ et qui rencontre chacune des fibres $P_S(K; X)(s)$ suivant un ouvert fermé : en effet l'application qui à chaque point de la fibre fait correspondre le germe image est localement constante.

Nous allons maintenant donner un procédé pour construire des éléments de $P'_S(K; X)(s)$ connaissant seulement $X(s)$.

On définit par récurrence sur n la notion d'*ensemble triangulaire* dans $\mathbf{R}^{*n}_+$. Dans $\mathbf{R}^*_+$, un ensemble triangulaire est un intervalle $]0, a[$. Dans $\mathbf{R}^{*n}_+$, un ensemble triangulaire est un ensemble de la forme

$$\Delta = \{(x', x_n) \mid x' \in \Delta', 0 < x_n < h(x')\},$$

où Δ' est un ensemble triangulaire dans $\mathbf{R}^{*n-1}_+$ et $h : \Delta' \to \mathbf{R}^*_+$ une fonction semi-continue inférieurement. Tout ensemble triangulaire est ouvert et connexe, et son adhérence dans $\mathbf{R}^n_+$ contient 0.

Soient K un polycylindre dans $\mathbf{C}^n$ et Y un sous-espace privilégié de K. Nous dirons que Y est *triangulairement privilégié* s'il existe un point $c \in K$ et un ensemble triangulaire $\Delta \subset \mathbf{R}^{*n}_+$ contenant $(1, \ldots, 1)$ tels que, pour tout $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \Delta \cap]0, 1]^n$ le polycylindre $K_{t_1, \ldots, t_n}$ transformé de K par l'affinité h_t de centre c et de rapport $(t_1, \ldots, t_n)$ soit privilégié pour Y.

Exemple. — Soit Z un sous-espace analytique d'un ouvert U de $\mathbf{C}^n$. La démonstration du théorème des voisinages privilégiés ([2], § 7, th. 1, *cf.* remarque après la démonstration) montre que tout point $z \in Z$ admet un voisinage $K \subset U$ triangulairement privilégié pour Z, i. e. tel que $Z \cap K$ soit triangulairement privilégié.

Proposition 2. — *Soit (s, Y, f) un point de* $P_S(K; X)$. *Si* Y *est triangulairement privilégié, on a* $(s, Y, f) \in P'_S(K; X)$.

Lemme. — *Avec les notations ci-dessus, $t \mapsto (s, h_t^{-1}(Y), f \circ h_t)$ est une application continue de $\Delta \cap]0, 1]^n$ dans* $P_S(K; X)(s)$.

Démonstration. — Si $B(K)^q \xrightarrow{\beta} B(K)^p \xrightarrow{\alpha} B(K) \to B(Y) \to 0$ est une résolution de $B(Y)$, dans la résolution

$$B(K)^q \xrightarrow{h_t^*\beta} B(K)^p \xrightarrow{h_t^*\alpha} B(K) \to B(h_t^{-1}(Y)) \to 0$$

les coefficients des matrices $h_t^*\alpha$ et $h_t^*\beta$, dépendent continûment de t, donc $h_t^{-1}(Y)$ dépend continûment de t dans $G(K)$. Soit $t \in \Delta \cap]0, 1]^n$ et soit (K_i) une famille de polycylindres dont les intérieurs recouvrent K, privilégiés pour $h_t^{-1}(Y)$, i. e. tels que les $h_t(K_i)$ soient Y-privilégiés et assez petits pour qu'on puisse plonger un voisinage de $f(h_t(K_i) \cap Y)$ dans $X(s)$ dans un ouvert U_i de $\mathbf{C}^n$ et prolonger f en un morphisme g_i d'un voisinage de $h_t(K_i)$ dans K dans U_i. Alors $g_i \circ h_{t' \mid K_i} \in B(K_i)^n$ dépend de façon continue de t' au voisinage de t, et il en résulte que $f \circ h_{t'}$ dépend continûment de t'.

C. Q. F. D.

Démonstration de la proposition. — Pour t assez voisin de 0, l'élément $(s, h_t^{-1}(Y), f \circ h_t)$ appartient à $P_S^0(K; X)$. Comme $\Delta \cap]0, 1]^n$ est connexe, la composante connexe de (s, Y, f) dans $P_S(K; X)(s)$ rencontre $P_S^0(K; X)$, donc est contenue dans $P'_S(K; X)$.

C. Q. F. D.

Remarque. — L'ensemble des $(s, Y, f) \in P_S(K; X)$ tels que Y soit triangulairement privilégié rencontre peut-être chaque fibre suivant un ouvert, mais n'est pas ouvert en général.

4. L'ESPACE $P_S(K, \tilde{K}; X)$. — On suppose X séparé sur S. Soit $\tilde{K}$ un compact contenu dans $\mathring{K}$. On note $P_S(K, \tilde{K}; X)$ l'ensemble des $(s, Y, f) \in P^S(K; X)$ tels que f induise un isomorphisme d'un voisinage de $Y \cap \tilde{K}$ dans Y sur un ouvert de X.

PROPOSITION 3. — *L'ensemble* $P_S(K, \tilde{K}; X)$ *est ouvert dans* $P_S(K; X)$. *En notant* Υ *le sous-espace universel de* $P_S(K; X) \times K$, *le morphisme universel de* Υ *dans* $X_{P_S(K;X)}$ *induit un isomorphisme d'un voisinage de* $\Upsilon \cap (P_S(K, \tilde{K}; X) \times \tilde{K})$ *sur un ouvert de* $X_{P_S(K,\tilde{K};X)}$.

Comme $\Upsilon \cap (P_S(K; X) \times \mathring{K})$ est un espace analytique anaplat sur $P_S(K; X)$, cette proposition est une conséquence du lemme suivant :

LEMME. — *Soient* X *et* Y *des espaces analytiques anaplats sur* S, *et* $f : Y \to X$ *un* S-*morphisme.*

a. L'ensemble Y' *des points* $y \in Y$ *tels que* $f(s) : Y(s) \to X(s)$ *soit un isomorphisme au voisinage de* y, *où* $s = \pi(y)$, *est ouvert dans* Y, *et* $f|_{Y'}$ *est un isomorphisme local.*

b. Soit M *une partie de* Y' *propre sur* S. *L'ensemble des* $s \in S$ *tels* $f|_{M(s)}$ *soit injectif est ouvert dans* S.

Démonstration. — *a.* La question est locale, on peut donc supposer $X \subset S \times U$, $Y \subset S \times U \times V$ et f induit par la projection, U et V étant des ouverts de $\mathbf{C}^n$ et $\mathbf{C}^p$ respectivement. Soient (s, x, y) un point de Y, K_1 et K_2 des polycylindres dans U et V tels que K_1 soit privilégié pour $X(s)$ et $K_1 \times K_2$ pour $Y(s)$. Alors f induit un morphisme de fibrés sur S de $B(K_1 \times K_2; \mathcal{O}_Y)$ dans $B(K_1; \mathcal{O}_X)$. Si $f(s)$ est un isomorphisme local en (s, x, y), on peut choisir K_1 et K_2 de façon que ce morphisme soit un isomorphisme en s. Il l'est alors sur un voisinage S' de s dans S, et f induit alors un isomorphisme de $X \cap (S' \times \mathring{K}_1)$ sur $Y \cap (S' \times \mathring{K}_1 \times \mathring{K}_2)$.

b. La restriction de f à M est localement injective, donc la diagonale Δ_M de M est ouverte et fermée dans l'ensemble N des $(y, y') \in M \times M$ tels que $f(y) = f(y')$. Par suite, $N - \Delta_M$ est propre sur S, son image est fermée, et le complémentaire de cette image, qui est l'ensemble des s tels que $f|_{M(s)}$ soit injectif, est ouvert.

C. Q. F. D.

V. — Cuirasses d'ordre 2

1. TYPE DE 2-CUIRASSE. — Un *ensemble simplicial* $I_{.}$ *de dimension* 2 est donné par trois ensembles I_0, I_1, I_2 que nous supposerons disjoints, et des applications $(d_0, d_1, d_2) : I_2 \rightrightarrows I_1$, $(d_0, d_1) : I_1 \rightrightarrows I_0$ satisfaisant aux relations

$$d_0 \circ d_0 = d_0 \circ d_1, \qquad d_1 \circ d_0 = d_0 \circ d_2 \qquad \text{et} \qquad d_1 \circ d_1 = d_1 \circ d_2.$$

Pour l'usage que nous avons en vue, il n'y a pas lieu d'introduire des opérateurs de dégénérescence. L'ensemble I sous-jacent à $I_{.}$ est $I_0 \cup I_1 \cup I_2$. Pour $i \in I$, on pose

$$\partial i = \{ d_0 i, d_1 i, d_2 i \} \quad \text{si} \quad i \in I_2,$$
$$\partial i = \{ d_0 i, d_1 i \} \quad \text{si} \quad i \in I_1$$

et

$$\partial i = \varnothing \quad \text{si} \quad i \in I_0;$$

on note *di* l'élément $(d_0 i, d_1 i, d_2 i)$ de I_1^3 [resp. $(d_0 i, d_1 i)$ de I_0^2] pour $i \in I_2$ (resp. I_1).

On appelle *type de* 2-*cuirasse* la donnée d'un ensemble simplicial fini $I_{.}$ de dimension 2, pour chaque $i \in I$ d'un entier n_i, d'un polycylindre $K_i \subset \mathbf{C}^{n_i}$ et d'un compact $\tilde{K}_i \subset \mathring{K}_i$, et pour tout $i \in I_0 \cup I_1$ d'un compact $K'_i \subset \mathring{\tilde{K}}_i$.

2. CUIRASSES D'ORDRE 2. — Soit X un espace analytique compact. On appelle *cuirasse d'ordre* 2 ou 2-cuirasse sur X la donnée d'un type de 2-cuirasse $\mathfrak{I} = (I_{.}, (K_i), (\tilde{K}_i), (K'_i))$ et, pour tout $i \in I$, d'un élément (Y_i, f_i) de $P(K_i, \tilde{K}_i; X)$, ces données étant soumises aux relations (C_0), (C_1) et (C_2) ci-dessous.

On pose

$$X_i = f_i(Y_i), \qquad \mathring{X}_i = f_i(Y_i \cap \mathring{K}_i), \qquad \tilde{X}_i = f_i(Y_i \cap \tilde{K}_i),$$
$$\mathring{\tilde{X}}_i = f_i(Y_i \cap \mathring{\tilde{K}}_i), \qquad X'_i = f_i(Y_i \cap K'_i), \qquad \mathring{X}'_i = f_i(Y_i \cap \mathring{K}'_i)$$

(bien que $\mathring{X}_i$ ne soit pas nécessairement l'intérieur de X_i dans X, etc.).

(C_0) $\quad X = \bigcup_{i \in I_0} \mathring{X}'_i;$

(C_1) $\quad$ Pour $(i_0, i_1) \in I_0^2$, on a

$$X'_{i_0} \cap X'_{i_1} \subset \bigcup_{dj = (i_0, i_1)} \mathring{X}'_j \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{dj = (i_0, i_1)} X_j \subset \mathring{\tilde{X}}_{i_0} \cap \mathring{\tilde{X}}_{i_1};$$

(C_2) $\quad$ Pour $(j_0, j_1, j_2) \in I_1^3$ tel que $d_0 j_0 = d_0 j_1$, $d_1 j_0 = d_0 j_2$ et $d_1 j_1 = d_1 j_2$, on a

$$X'_{j_0} \cap X'_{j_1} \cap X'_{j_2} \subset \bigcup_{dk = (j_0, j_1, j_2)} \mathring{\tilde{X}}_k \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{dk = (j_0, j_1, j_2)} X_k \subset \mathring{\tilde{X}}_{j_0} \cap \mathring{\tilde{X}}_{j_1} \cap \mathring{\tilde{X}}_{j_2}.$$

3. EXISTENCE.

PROPOSITION 1. — *Tout espace analytique compact admet une cuirasse d'ordre* 2.

Démonstration. — Soit X un espace analytique compact. Le théorème des voisinages privilégiés permet de construire une famille finie $(Y_i, f_i)_{i \in I_0}$ avec $(Y_i, f_i) \in P(K_i; X)$, où K_i est un polycylindre dans un espace $\mathbf{C}^{n_i}$ pour tout i, telle que f_i induise pour tout i un isomorphisme de $\mathring{Y}_i$ sur un ouvert $\mathring{X}_i$ de X, et que les ouverts $\mathring{X}_i$ recouvrent X. On peut alors choisir les $K'_i \subset\subset K_i$ de façon que (C_0) soit satisfaite, puis les $\tilde{K}_i$ tels que $K'_i \subset\subset \tilde{K}_i \subset\subset K_i$.

Pour tout $(i_0, i_1) \in I_0^2$, on peut construire une famille finie $(Y_j, f_j)_{j \in J(i_0, i_1)}$ avec $(Y_j, f_j) \in P(K_j; X)$, f induisant un isomorphisme de $\mathring{Y}_j$ sur un ouvert $\mathring{X}_j$ de X contenu dans $\mathring{\tilde{X}}_{i_0} \cap \mathring{\tilde{X}}_{i_1}$, et les $\mathring{X}_j$ recouvrant $X'_{i_0} \cap X'_{i_1}$. On peut alors choisir les K'_j de façon que les $\mathring{X}'_j$ recouvrent encore $X'_{i_0} \cap X'_{i_1}$, puis choisir les $\tilde{K}_i$ tels que $K'_i \subset\subset \tilde{K}_i \subset\subset K_i$. On prend alors pour I_1 l'ensemble somme des $J(i_0, i_1)$, et pour $d : I_1 \to I_0^2$ l'application canonique. La condition (C_1) est alors satisfaite.

Notons $\mathscr{Z}$ l'ensemble des $(j_0, j_1, j_2) \in I_1^3$ tels que $d_0 j_0 = d_0 j_1$, etc. [c'est l'ensemble des morphismes du bord du simplexe canonique Δ_2 dans l'ensemble simplicial (I_0, I_1)]. Pour tout $z \in \mathscr{Z}$, on construit de la même façon une famille finie $(Y_k, f_k)_{k \in J(z)}$ et des $\tilde{K}_k \subset\subset K_k$. On pose $I_2 = \coprod_{z \in \mathscr{Z}} J(z)$, et on prend pour $d : I_2 \to I_1^3$ l'application canonique dans $\mathscr{Z}$. A cause de la définition de $\mathscr{Z}$, les relations simpliciales $d_0 \circ d_0 = d_0 \circ d_1$, etc. sont satisfaites, et on a ainsi obtenu une cuirasse. C. Q. F. D.

Remarque. — Nous dirons qu'une cuirasse $q = (\mathfrak{I}, (Y_i), (f_i))$ est triangulairement privilégiée si, pour tout i, l'espace Y_i est triangulairement privilégié. La construction ci-dessus montre que tout espace analytique compact admet une 2-cuirasse triangulairement privilégiée.

4. L'ESPACE DES CUIRASSES. — Soit $\mathfrak{I} = (I_., (K_i), (\tilde{K}_i), (K'_i))$ un type de 2-cuirasse. Pour tout espace analytique compact X, l'ensemble $Q(\mathfrak{I}; X)$ des cuirasses de type $\mathfrak{I}$ sur X est ouvert dans $\prod_{i \in I} P(K_i; X)$. Plus généralement :

PROPOSITION 2 et DÉFINITION. — *Soient* S *un espace analytique banachique et* X *un espace analytique propre et anaplat sur* S. *Dans le produit fibré des* $P_S(K_i; X)$ *pour* $i \in I$, *l'ensemble des* $(s, (Y_i), (f_i))$ *tels que* $((Y_i), (f_i))$ *soit une cuirasse sur* $X(s)$ *est ouvert. Muni de la structure induite, on le note* $Q_S(\mathfrak{I}; X)$, *ou simplement* $Q_S(X)$; *une section* $S \to Q_S(X)$ *est appelée une cuirasse relative au-dessus de* S.

Démonstration. — On a vu au paragraphe précédent que les $P_S(K_i, \tilde{K}_i; X)$ sont ouverts dans les $P_S(K_i; X)$. Reste à voir que les conditions (C_0), (C_1) et (C_2) sont ouvertes. Après changement de base, ceci se ramène au résultat suivant de topologie : soit E un espace topologique au-dessus de S, A et B deux parties de E; on suppose A propre sur S et B ouvert dans E; alors l'ensemble des $s \in S$ tels que $A(s) \subset B(s)$ est ouvert. Or, $A - B$ étant fermé dans A, sa projection est fermée dans S.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. — *La projection de* $Q_S(X)$ *dans* S *est un morphisme subimmersif.*

COROLLAIRE 2. — *Soit* $q_0 \in Q(X(s_0))$ *une cuirasse triangulairement privilégiée. Alors* $Q_S(X)$ *est lisse sur* S *au voisinage de* q_0.

En particulier, toute cuirasse triangulairement privilégiée sur $X(s_0)$ peut être insérée dans une cuirasse relative au-dessus d'un voisinage de s_0 dans S.

VI. — Puzzles

1. PUZZLES. — Soit $\mathfrak{I} = (I_., (K_i), (\tilde{K}_i), (K'_i))$ un type de 2-cuirasse. Un *puzzle* de type $\mathfrak{I}$ est constitué par les données suivantes :

1° Pour chaque $i \in I$, un sous-espace privilégié Y_i de K_i; on pose

$$\tilde{Y}_i = Y_i \cap \tilde{K}_i, \qquad \tilde{\tilde{Y}}_i = Y_i \cap \tilde{\tilde{K}}_i$$

et on définit de même Y'_i et $\mathring{Y}'_i$.

2° Pour chaque couple (i, j) tel que $i \in \partial j$, un morphisme g_i^j de Y_j dans Y_i.

Ces données sont astreintes aux conditions suivantes :

(P_0) $(Y_j, g_i^j) \in P(K_j, \tilde{K}_j, \tilde{\tilde{Y}}_i)$.

(P_1) (Fonctorialité simpliciale). Pour $k \in I_2$, $j \in \partial k$, $j' \in \partial k$ et $i \in \partial j \cap \partial j'$, on a

$$g_i^j \circ g_j^k = g_i^{j'} \circ g_{j'}^k.$$

(P_2) (Condition de Kan). Soient j et j' dans I_1 et $i \in I_0$ tels que $i = d_0 j = d_0 j'$ (resp. $i = d_1 j = d_0 j'$; resp. $i = d_1 j = d_1 j'$); posons $i' = d_1 j$ (resp. $d_0 j$; resp. $d_0 j$) et $i'' = d_1 j'$ (resp. $d_1 j'$; resp. $d_0 j'$). Soient $y \in Y'_j$ et $y' \in Y'_{j'}$ tels que

$$g_i^j(y) = g_i^{j'}(y'), \qquad g_{i'}^j(y) \in Y'_{i'} \qquad \text{et} \qquad g_{i''}^{j'}(y') \in Y'_{i''}.$$

Il existe alors un $k \in I_2$ avec $d_0 k = j$, $d_1 k = j'$ (resp. $d_0 k = j$, $d_2 k = j'$; resp. $d_1 k = j$, $d_2 k = j'$) et un $z \in \tilde{\tilde{Y}}_k$ tel que $g_j^k(z) = y$ et $g_{j'}^k(z) = y'$.

(P_3) (Compacité). Pour $i \in I_0$ et $x \in Y'_i$ il existe un $i' \in I_0$, un $x' \in \mathring{Y}'_{i'}$, un $j \in I_1$ tel que $dj = (i, i')$ et un $y \in \mathring{Y}'_j$ tel que $g_i^j(y) = x$ et $g_{i'}^j(y) = x'$.

(P_4) (Séparation). Pour $j \in I_1$, $dj = (i_0, i_1)$ et $y \in Y_j$ tel que $g_{i_0}^j(y) \in Y'_{i_0}$ et $g_{i_1}^j(y) \in Y'_{i_1}$, il existe un $j' \in I_1$ et un $y' \in \mathring{Y}'_{j'}$ tel que $dj' = (i_0, i_1)$ et

$$g_{i_0}^{j'}(y') = g_{i_0}^j(y) \qquad \text{et} \qquad g_{i_1}^{j'}(y') = g_{i_1}^j(y).$$

2. PUZZLE ASSOCIÉ A UNE CUIRASSE. — Soient X un espace analytique compact et $(\mathfrak{I}, ((Y_i, f_i))_{i \in I})$ une cuirasse d'ordre 2 sur X. Pour $i \in \partial j$, le morphisme $f_j : Y_j \to X$ a son image contenue dans $f_i(\tilde{\tilde{Y}}_i)$, et f_i induit un isomorphisme de $\tilde{\tilde{Y}}_i$ sur son image, d'où un morphisme $g_i^j = f_i^{-1} \circ f_j : Y_j \to \tilde{\tilde{Y}}_i$.

PROPOSITION 1. — *Dans ces conditions*, $((Y_i), (g_i^j))$ *est un puzzle de type* I.

Démonstration. — On a (P_0) d'après la deuxième assertion de (C_1) et (C_2). La propriété (P_1) est immédiate. Vérifions (P_2). Soient j, j', i, y et y' satisfaisant aux hypothèses de (P_2). Alors

$$x = f_j(y) = f_{j'}(y') \in f_{i'}(Y'_{i'}) \cap f_{i''}(Y'_{i''}),$$

donc il existe d'après (C_1) un $j'' \in I_1$ avec $dj'' = (i', i'')$ tel que $x \in f_{j''}(\mathring{Y}'_{j''})$ et d'après (C_2) il existe $k \in I_2$ tel que $x \in f_k(\mathring{\mathring{Y}}_k)$, et $z = f_k^{-1}(x)$ répond à la question.

La propriété (P_3) résulte de (C_0) et (P_4) de (C_1).

C. Q. F. D.

On dit que le puzzle $((Y_i), (g_i^j))$ est le *puzzle associé* à la cuirasse donnée.

3. L'ESPACE DES PUZZLES. — Soit I un type de 2-cuirasse. Les données $((Y_i), (g_i^j))$ vérifiant (P_0) et (P_1) forment de façon naturelle un espace analytique banachique Ω qui peut être décrit de la façon suivante :

Pour tout $i \in I$, notons Υ_i le sous-espace anaplat universel de $G(K_i) \times K_i$, posons $\mathring{\mathring{\Upsilon}}_i = \Upsilon_i \cap (G(K_i) \times \mathring{\mathring{K}}_i)$, etc. Posons

$$W = \Bigg(\prod^*_{\substack{(j,k) \in I_1 \times I_2 \\ j \in \partial k}} P_{G(K_j)}(K_k, \tilde{K}_k; \mathring{\mathring{\Upsilon}}_j)\Bigg) \times_{\prod_{j \in I_1} G(K_j)} \Bigg(\prod^*_{\substack{(i,j) \in I_0 \times I_1 \\ i \in \partial j}} P_{G(K_i)}(K_j, \tilde{K}_j; \mathring{\mathring{\Upsilon}}_i)\Bigg)$$

où $\prod^*$ désigne le produit fibré au-dessus de

$$\prod (G(K_j) \times G(K_k)) \quad (\text{resp. } \prod (G(K_i) \times G(K_j))).$$

Pour $i \in \partial j$ et $j \in \partial k$, on définit un morphisme

$$P_{G(K_j)}(K_k, \tilde{K}_k; \mathring{\mathring{\Upsilon}}_j) \times_{G(K_j)} P_{G(K_i)}(K_j, \tilde{K}_j; \mathring{\mathring{\Upsilon}}_i) \to P_{G(K_i)}(K_k, \tilde{K}_k; \mathring{\mathring{\Upsilon}}_i)$$

en interprétant la composition des morphismes au moyen de la propriété universelle des $P_S(K; X)$ qui sont, rappelons-le, des ouverts dans des espaces de la forme $\mathfrak{Mor}_{S'}(Y'; X')$. En considérant pour chaque couple $(i, k) \in I_0 \times I_2$ tel que $i \in \partial\partial k$ les deux $j \in I_1$ intermédiaires, on obtient une double flèche $W \rightrightarrows \prod_{\substack{(i,k) \in I_0 \times I_2 \\ i \in \partial\partial k}} P_{G(K_i)}(K_k, \tilde{K}_k; \mathring{\mathring{\Upsilon}}_i)$. L'espace Ω est le noyau de cette double flèche.

Dans Ω, les conditions (P_2), (P_3) et (P_4) définissent un ouvert, comme on le voit en appliquant le même résultat de topologie que pour la proposition 2 du paragraphe précédent. Cet ouvert est l'*espace des puzzles* de type $\mathfrak{I}$, on le note $\mathfrak{Z}^{\mathfrak{I}}$ ou simplement $\mathfrak{Z}$.

Remarque. — Très vraisemblablement, l'espace $\mathfrak{Z}$ est pathologique en général, par exemple il ne se plonge pas localement dans son espace tangent. Il n'y a en effet aucune raison pour que l'équation définissant Ω dans W ait une application linéaire tangente directe.

4. MORPHISME ASSOCIÉ A UNE CUIRASSE RELATIVE. — Soient S un espace analytique banachique, X un espace analytique propre et anaplat sur S, et $q : S \to Q_S(X)$ une cui-

rasse relative sur X, de type $\mathfrak{I}$. On définit un morphisme $\varphi_q : S \to \mathfrak{Z}$ de la façon suivante : la cuirasse relative q est donnée par des sous-espaces S-anaplats Y_i des $S \times K_i$ et des S-morphismes $f_i : Y_i \to X$. Pour $i \in \partial j$, on définit comme au n° 2 un morphisme $g_i^j = f_i^{-1} \circ f_j : Y_j \to \mathring{\tilde{Y}}_i$. Les Y_i définissent des morphismes $S \to G(K_i)$, les g_i^j des morphismes $S \to P_{G(K_i)}(K_j, \tilde{K}_j; \mathring{\tilde{Y}}_i)$, et la relation $g_j^k \circ g_i^j = g_{j'}^k \circ g_i^{j'}$ montre que l'on obtient ainsi un morphisme $\varphi_q : S \to \Omega$. Pour chaque s, $\varphi_q(s) \in \mathfrak{Z}$, et comme $\mathfrak{Z}$ est un ouvert de Ω muni de la structure induite, φ_q est un morphisme de S dans $\mathfrak{Z}$.

Pour tout $s \in S$, le puzzle $\varphi_q(s)$ est le puzzle associé à la cuirasse $q(s)$ sur $X(s)$. D'autre part, on a compatibilité avec les changements de base : si $h : S' \to S$ est un morphisme, en posant $X' = h^* X$ et $q' = h^* q$, on a $\varphi_{q'} = \varphi_q \circ h$.

5. Reconstitution d'un espace a partir d'un puzzle. — Soient S un espace analytique banachique et ζ un morphisme de S dans l'espace $\mathfrak{Z}$ des puzzles de type $\mathfrak{I}$ (ce que nous appellerons un puzzle paramétré par S). Le morphisme ζ est donné par des sous-espaces S-anaplats $Y_i \subset S \times K_i$ et des S-morphismes $g_i^j : Y_j \to Y_i$, satisfaisant à des conditions $(P_0)_S, \ldots, (P_4)_S$ correspondant à $(P_0), \ldots, (P_4)$. La condition $(P_0)_S$ est que (Y_j, g_i^j) définit une section de $P_S(K_j, \tilde{K}_j; \mathring{\tilde{Y}}_i)$, la condition $(P_1)_S$ s'écrit

$$g_i^j \circ g_j^k = g_i^{j'} \circ g_{j'}^k,$$

les conditions $(P_2)_S$, $(P_3)_S$ et $(P_4)_S$ sont simplement les conditions (P_2), (P_3) et (P_4) pour chaque $s \in S$.

Pour $(i, i') \in I_0 \times I_0$, soit $Y_{ii'}$ le sous-ensemble de $\mathring{Y}_i'$ formé des x tels qu'il existe un $j \in I_1$ et un $y \in \mathring{Y}_j$ avec $dj = (i, i')$, $g_i^j(y) = x$, $g_{i'}^j(y) \in \mathring{Y}_{i'}'$. D'après $(P_0)_S$, le sous-ensemble est ouvert, et il résulte de $(P_2)_S$, $(P_1)_S$ et $(P_0)_S$ que les $g_{i'}^j (g_i^j)^{-1}$ se recollent en un morphisme $\gamma_{ii'} : Y_{ii'} \to \mathring{Y}_{i'}'$.

Lemme 1 :

(*a*) $Y_{ii} = \mathring{Y}_i'$ *et* $\gamma_{ii} = 1$;

(*b*) $Y_{i'i} = \gamma_{ii'}(Y_{ii'})$ *et* $\gamma_{i'i} = \gamma_{ii'}^{-1}$;

(*c*) *pour* $(i, i', i'') \in I_0^3$, *posons* $Y_{ii'i''} = \gamma_{ii'}^{-1}(Y_{i'i''})$, *alors*

$$Y_{ii'i''} \subset Y_{ii''} \qquad et \qquad \gamma_{i'i''} \circ (\gamma_{ii'} \,|_{Y_{ii'i''}}) = \gamma_{ii''} \,|_{Y_{ii'i''}}.$$

Démonstration. — La partie (*c*) résulte de (P_2). La première assertion de (*a*) résulte de (P_3) et (P_2) [on n'a pas introduit d'opérateurs de dégénérescence dans la définition de $I_.$, c'est ici que l'on risquerait d'en avoir besoin mais on s'en passe grâce à (P_3)]. La première assertion de (*b*) résulte de (P_2), la deuxième assertion de (*a*) est immédiate et la deuxième assertion de (*b*) s'en déduit.

C. Q. F. D.

Ce lemme permet de construire un espace analytique X_ζ au-dessus de S en recollant les $\mathring{Y}_i'$ pour $i \in I_0$ au moyen des $\gamma_{ii'}$. Pour tout $i \in I_0$, on a un isomorphisme χ_i de $\mathring{Y}_i'$ sur un ouvert de X_ζ, et les images de ces isomorphismes recouvrent X_ζ, donc X_ζ est un espace analytique anaplat sur S. En général, χ_i ne se prolonge pas en un morphisme de Y_i dans X.

PROPOSITION 2. — *L'espace* X_ζ *est propre et séparé sur* S.

Démonstration. — Dans l'espace topologique somme des Y'_i pour $i \in I_0$, écrivons $\mathscr{R}(x, x')$ si $x \in Y'_i$ et $x' \in Y'_{i'}$ sont tels qu'il existe $j \in I_1$ et $y \in Y'_i$ avec $dj = (i, i')$, $g^j_i(y) = x$ et $g^j_{i'}(y) = x'$. Il résulte de (P_2) que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence [peut-être bien en utilisant (P_3) pour la réflexivité]. Le quotient $\hat{X} = \coprod Y'_i/\mathscr{R}$ est propre sur S puisque les Y'_i sont propres sur S et en nombre fini. Comme le graphe de $\mathscr{R}$ est propre sur S, l'espace $\hat{X}$ est séparé sur S. D'après (P_4), la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ coïncide avec celle définie par les $\mathring{Y}'_j$ pour $j \in I_1$. Par suite X_ζ s'identifie à un ouvert de $\hat{X}$. D'après (P_3), cet ouvert est $\hat{X}$ tout entier, donc X_ζ est séparé et propre sur S.

C. Q. F. D.

Remarque. — En prenant $S = \mathfrak{Z}$ et $\zeta = 1$, on obtient un espace analytique $\mathfrak{X}$ propre et anaplat sur $\mathfrak{Z}$. Pour S et ζ quelconques, on a $X_\zeta = \zeta^* \mathfrak{X}$.

6. L'ISOMORPHISME α_q. — Soient S un espace analytique banachique, X un espace analytique propre et anaplat sur S et $q : S \to Q_S(X)$ une cuirasse relative. La cuirasse relative q est donnée par des sous-espaces S-anaplats $Y_i \subset S \times K_i$ et des S-morphismes $f_i : Y_i \to X$. Considérons le morphisme $\varphi_q : S \to \mathfrak{Z}$ associé à q et l'espace analytique X_{φ_q} au-dessus de S construit au n° précédent en recollant les $\mathring{Y}'_i$. Les morphismes $f_i |_{\mathring{Y}'_i}$ se recollent en un S-morphisme $\alpha_q : X_{\varphi_q} \to X$.

PROPOSITION 3. — *Le morphisme* α_q *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Comme les χ_i et les $f_i |_{\mathring{Y}'_i}$ sont des isomorphismes locaux, il suffit de montrer que α_q est bijectif. La surjectivité résulte de (C_0) et l'injectivité de (C_1).

C. Q. F. D.

Remarque. — On a compatibilité de la formation de α_q avec les changements de base.

COROLLAIRE (propriété verselle de $\mathfrak{Z}$). — *Soient* X_0 *un espace analytique compact et* q_0 *une cuirasse triangulairement privilégiée sur* X_0, *de type* $\mathfrak{T}$. *Notons* z_0 *le puzzle associé à* q_0. *L'espace* $\mathfrak{X}$ *au-dessus de* $\mathfrak{Z}$ *construit au* n° 5 *muni de l'isomorphisme* $\alpha_{q_0} : \mathfrak{X}(z_0) \to X_0$, *est une déformation verselle de* X_0.

Autrement dit, si S est un espace analytique banachique, X un espace analytique propre et anaplat sur S, s_0 un point de S et ι un isomorphisme de $X(s_0)$ sur s_0, il existe un voisinage S' de s_0 dans S, un morphisme $h : S' \to \mathfrak{Z}$ tel que $h(s_0) = z_0$ et un isomorphisme $u : h^* \mathfrak{X} \to X_{S'}$ tel que $u(s_0) = \iota^{-1} \circ \alpha_{q_0}$.

Démonstration. — D'après le corollaire 2 de la proposition 2 du paragraphe précédent, il existe une cuirasse relative q de X au-dessus d'un voisinage S' de s_0 telle que $q(s_0) = \iota^* q_0$. Alors $h = \varphi_q$ et $u = \alpha_q$ répondent à la question.

C. Q. F. D.

Comme tout espace analytique compact admet une cuirasse triangulairement privilégiée, nous avons construit pour tout espace analytique compact une déformation verselle paramétrée par un espace analytique banachique, à savoir $\mathfrak{Z}$, qui est particulièrement affreux comme nous l'avons remarqué. Dans la suite, nous nous proposons d'améliorer la situation jusqu'à obtenir une déformation verselle paramétrée par un espace de dimension finie.

VII. — L'espace Z et le théorème principal

1. L'ESPACE Z. — Soient $\mathfrak{J}$ un type de 2-cuirasse, $\mathfrak{Z}$ l'espace des puzzles de type $\mathfrak{J}$, et $\mathfrak{X}$ l'espace au-dessus de $\mathfrak{Z}$ construit au paragraphe précédent (nº 5). Considérons l'espace $Q_3(\mathfrak{X})$. C'est un espace au-dessus de $\mathfrak{Z}$, notons π sa projection. D'autre part, l'identité de $Q_3(\mathfrak{X})$ définit sur $\mathfrak{X}_{Q_3(\mathfrak{X})} = \pi^* \mathfrak{X}$ une cuirasse relative $\mathfrak{q}$, que nous appellerons la cuirasse relative universelle. Ceci définit un morphisme $\varphi_{\mathfrak{q}} : Q_3(\mathfrak{X}) \to \mathfrak{Z}$ et un isomorphisme $\alpha_{\mathfrak{q}} : \varphi_{\mathfrak{q}}^* \mathfrak{X} \xrightarrow{\approx} \pi^* \mathfrak{X}$. Notons Z_1 le noyau de la double flèche

$$(\pi, \varphi_{\mathfrak{q}}) : Q_3(\mathfrak{X}) \rightrightarrows \mathfrak{Z}.$$

L'isomorphisme $\alpha_{\mathfrak{q}}$ induit un Z_1-automorphisme de $\mathfrak{X}_{Z_1}$.

Il résulte de [14] (§ 2, prop. 1) qu'il existe un sous-espace analytique Z de Z_1, dont les points sont les $z \in Z_1$ tels que $\alpha_{\mathfrak{q}}(z) = 1$, qui possède la propriété universelle suivante : un morphisme h d'un espace analytique banachique T dans Z_1 se factorise par Z si et seulement si $h^* \alpha_{\mathfrak{q}} = 1$.

2. PROPRIÉTÉ UNIVERSELLE DE Z.

THÉORÈME 1. — *L'espace* Z, *muni de* $\mathfrak{X}_Z$ *et de la cuirasse relative universelle* $\mathfrak{q}$, *jouit de la propriété universelle suivante : soient* S *un espace analytique banachique,* X *un espace analytique banachique propre et anaplat sur* S *et* $q : S \to Q_S(X)$ *une cuirasse relative de type* $\mathfrak{J}$; *alors il existe un morphisme* $h : S \to Z$ *et un isomorphisme* $u : h^* \mathfrak{X}_Z \xrightarrow{\approx} X$ *tels que* $u_*(h^* \mathfrak{q}) = q$; *les morphismes* h *et* u *sont uniquement déterminés.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que, si X et X′ sont deux espaces analytiques propres et plats sur S, $u : X \to X'$ un S-isomorphisme, q une cuirasse relative sur X et $q' = u_* q$, on a $\varphi_{q'} = \varphi_q$ et $\alpha_{q'} = u \circ \alpha_q$.

Posons $X' = \varphi_q^* \mathfrak{X}$ et $q' = (\alpha_q^{-1})_* q$. D'après la propriété universelle évidente de $Q_3(\mathfrak{X})$, il existe un morphisme unique $\psi_q : S \to Q_3(\mathfrak{X})$ rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} & Q_3(\mathfrak{X}) \arrow[d, "\pi"] \\ S \arrow[ur, "\psi_q"] \arrow[r, "\varphi_q"'] & \mathfrak{Z} \end{tikzcd}$$

commutatif et tel que $\psi_q^* \mathfrak{q} = q'$. On a $\varphi_{\mathfrak{q}} \circ \psi_q = \varphi_{\psi_q^* \mathfrak{q}} = \varphi_{q'} = \varphi_q = \pi \circ \psi_q$, donc ψ_q est un morphisme de S dans Z_1. On a $\psi_q^* \alpha_{\mathfrak{q}} = \alpha_{q'} = \alpha_q^{-1} \circ \alpha_q = 1$, donc ψ_q est un morphisme de S dans Z.

Comme $\psi_q^* \mathfrak{q} = (\alpha_p^{-1})_* q$, on a $\alpha_{q*}(\psi_q^* \mathfrak{q}) = q$, donc le couple formé de $h = \psi_q$ et $u = \alpha_q$ répond à la question.

Démontrons maintenant l'unicité. Soient $h : \mathrm{S} \to \mathrm{Z}$ et $u : h^* \mathfrak{X}_{\mathrm{Z}} \xrightarrow{\approx} \mathrm{X}$ répondant à la question. On a $\pi \circ h = \varphi_{\mathfrak{q}} \circ h = \varphi_{h^* \mathfrak{q}} = \varphi_{u_*^{-1} q} = \varphi_q$. Posons $q'' = h^* \mathfrak{q} = u_*^{-1} q$. On a $u^{-1} \circ \alpha_q = \alpha_{q''} = h^* \alpha_{\mathfrak{q}} = 1$, d'où $u = \alpha_q$. La relation $h^* \mathfrak{q} = (\alpha_q^{-1})_* q$ montre alors que $h = \psi_q$.

C. Q. F. D.

NOTATION. — Le morphisme h sera noté ψ_q comme dans la démonstration.

3. CUIRASSES ET PUZZLES PROLONGEABLES. — Soient S un espace analytique banachique, X un espace analytique anaplat sur S, K et $\hat{\mathrm{K}}$ deux polycylindres de $\mathbf{C}^n$ tels que $\mathrm{K} \subset\subset \hat{\mathrm{K}}$. L'ensemble W des $(\hat{\mathrm{Y}}, \hat{f}) \in \mathrm{P}_{\mathrm{S}}(\hat{\mathrm{K}}; \mathrm{X})$ tels que K soit $\hat{\mathrm{Y}}$-privilégié et que, en posant $\mathrm{Y} = \mathrm{K} \cap \hat{\mathrm{Y}}$ et $f = \hat{f}|_{\mathrm{Y}}$, on ait $(\mathrm{Y}, f) \in \mathrm{P}_{\mathrm{S}}(\mathrm{K}; \mathrm{X})$ est un ouvert de $\mathrm{P}_{\mathrm{S}}(\hat{\mathrm{K}}; \mathrm{X})$. En utilisant la propriété universelle de $\mathrm{P}_{\mathrm{S}}(\mathrm{K}; \mathrm{X})$, on définit un morphisme $\rho : \mathrm{W} \to \mathrm{P}_{\mathrm{S}}(\mathrm{K}; \mathrm{X})$.

PROPOSITION 1. — *Pour tout* $w \in \mathrm{W}$, *l'application linéaire tangente* $\mathrm{T}_{\mathrm{S}}\, \rho(w)$ *est compacte.*

Démonstration. — On a vu au paragraphe IV que l'espace tangent vertical à $\mathrm{P}_{\mathrm{S}}(\hat{\mathrm{K}}; \mathrm{X})$ en $(\hat{\mathrm{Y}}, \hat{f})$ s'identifie à $\mathrm{B}(\hat{\mathrm{K}}; \mathscr{M})$, où $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{O}_{\hat{\mathrm{Y}}}$-module localement libre. L'application linéaire tangente verticale à ρ s'identifie alors à la restriction $\mathrm{B}(\hat{\mathrm{K}}; \mathscr{M}) \to \mathrm{B}(\mathrm{K}; \mathscr{M})$, qui est compacte.

C. Q. F. D.

Soient $\mathfrak{I} = (\mathrm{I}_., (\mathrm{K}_i), (\tilde{\mathrm{K}}_i), (\mathrm{K}'_i))$ et $\hat{\mathfrak{I}} = (\mathrm{I}_., (\hat{\mathrm{K}}_i), (\hat{\tilde{\mathrm{K}}}_i), (\hat{\mathrm{K}}'_i))$ deux types de 2-cuirasses ayant même ensemble simplicial sous-jacent $\mathrm{I}_.$; nous écrirons $\mathfrak{I} \subset\subset \hat{\mathfrak{I}}$ si $\mathrm{K}_i \subset\subset \hat{\mathrm{K}}_i$ $\tilde{\mathrm{K}}_i \subset \hat{\tilde{\mathrm{K}}}_i$, $\mathrm{K}'_i \subset \hat{\mathrm{K}}'_i$.

Supposons $\mathfrak{I} \subset\subset \hat{\mathfrak{I}}$, soient S un espace analytique banachique, X un espace analytique propre et anaplat sur S, $s_0 \in \mathrm{S}$ et posons $\mathrm{X}_0 = \mathrm{X}(s_0)$. Soit $\hat{q}_0 = ((\hat{\mathrm{Y}}_i^0), (\hat{f}_i^0))$ une cuirasse de type $\hat{\mathfrak{I}}$ sur X_0. Supposons que les K_i soient $\hat{\mathrm{Y}}_i^0$-privilégiés et que les $\mathrm{Y}_i^0 = \mathrm{K}_i \cap \hat{\mathrm{Y}}_i^0$ et les $f_i^0 = \hat{f}_i^0|_{\mathrm{Y}_i^0}$ forment une cuirasse de type $\mathfrak{I}$ sur X_0. Alors cette propriété est encore vraie pour $\hat{q} \in \mathrm{Q}_{\mathrm{S}}^{\hat{\mathfrak{I}}}(\mathrm{X})$ assez voisin de $\hat{q}_0$, et on peut définir en utilisant la propriété universelle des $\mathrm{P}_{\mathrm{S}}(\mathrm{K}_i; \mathrm{X})$ un morphisme $\rho = \rho_{\mathfrak{I}}^{\hat{\mathfrak{I}}} : \hat{q} \to q$ d'un ouvert de $\mathrm{Q}_{\mathrm{S}}^{\hat{\mathfrak{I}}}(\mathrm{X})$ contenant q_0 dans $\mathrm{Q}_{\mathrm{S}}^{\mathfrak{I}}(\mathrm{X})$.

Comme $\mathrm{Q}_{\mathrm{S}}^{\hat{\mathfrak{I}}}(\mathrm{X})$ est un ouvert du produit fibré des $\mathrm{P}_{\mathrm{S}}(\hat{\mathrm{K}}_i; \mathrm{X})$, l'application linéaire tangente verticale à $\rho_{\mathfrak{I}}^{\hat{\mathfrak{I}}}$ est compacte.

On dit qu'une cuirasse relative $q : \mathrm{S} \to \mathrm{Q}_{\mathrm{S}}^{\mathfrak{I}}(\mathrm{X})$ est *prolongeable* s'il existe un $\hat{\mathfrak{I}} \supset\supset \mathfrak{I}$ et une cuirasse relative $\hat{q}$ de type $\hat{\mathfrak{I}}$ telle que $q = \rho . \hat{q}$. Tout espace analytique compact X_0

admet une cuirasse triangulairement privilégiée prolongeable, avec un prolongement triangulairement privilégié. Si $X_0 = X(s_0)$, une telle cuirasse peut être insérée dans une cuirasse relative prolongeable définie au voisinage de s_0.

Si $\mathfrak{I} \subset\subset \hat{\mathfrak{I}}$, on définit de même un morphisme de restriction $\rho_{\mathfrak{I}}^{\hat{\mathfrak{I}}}$ d'un ouvert de l'espace des puzzles $\mathfrak{Z}^{\hat{\mathfrak{I}}}$ dans $\mathfrak{Z}^{\mathfrak{I}}$. Ce morphisme est compact au sens de [2] (§ 3, nº 4). En effet, dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G(\hat{K}_i) \times B(\hat{K}_j)^{n_i} & \rightarrow & G(K_i) \times B(K_j)^{n_i} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_{G(\hat{K}_i)}(\hat{K}_j;\ \hat{\hat{\Upsilon}}_i) & \xrightarrow{\rho_{ij}} & P_{G(K_i)}(K_j;\ \hat{\Upsilon}_i) \end{array}$$

la flèche horizontale du haut est compacte et les flèches verticales admettent des sections locales, donc ρ_{ij} est compacte; or $\rho_{\mathfrak{I}}^{\hat{\mathfrak{I}}}$ est induit par $\prod \rho_{ij}$.

4. Approche de Z par l'intérieur. — Soient X_0 un espace analytique compact et q_0 une cuirasse triangulairement privilégiée sur X_0, de type $\mathfrak{I}$, admettant un prolongement triangulairement privilégié. Soit z_0 le puzzle associé à q_0 et identifions $\mathfrak{X}(z_0)$ à X_0 par φ_{q_0}. Posons : $Q_0 = Q(X_0)$. Soit $\sigma : \mathfrak{Z} \rightarrow Q_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X})$ une cuirasse relative prolongeable au voisinage de z_0 telle que $\sigma(z_0) = q_0$ et choisissons un $\mathfrak{Z}$-isomorphisme $(\pi, p) : Q_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}) \rightarrow \mathfrak{Z} \times Q_0$ au voisinage de z_0 induisant l'identité sur Q_0 et tel que $p \circ \sigma$ soit le morphisme constant $\mathfrak{Z} \rightarrow q_0$.

Notons $\mathfrak{q}_0$ la cuirasse relative universelle sur l'espace $Q_0 \times X_0$ au-dessus de Q_0, et δ le morphisme $\psi_{\mathfrak{q}_0} : Q_0 \rightarrow Z \subset Q_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X})$.

Proposition 2. — *L'application linéaire tangente à* $p \circ \delta : Q_0 \rightarrow Q_0$ *au point* q_0 *est de la forme* $1 - v$, *où* v *est compacte.*

Démonstration. — Le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Q_0 \times X_0 & \xrightarrow{\beta} & \mathfrak{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_0 & \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{q}_0}} & \mathfrak{Z} \end{array}$$

où $\beta = \bar{\varphi}_{\mathfrak{q}_0} \circ \alpha_{\mathfrak{q}_0}^{-1}$, donne un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Q_0 \times Q_0 & \xrightarrow{\beta_*} & Q_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_0 & \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{q}_0}} & \mathfrak{Z} \end{array}$$

en remarquant que $Q_{Q_0}(Q_0 \times X_0) = Q_0 \times Q_0$. Les morphismes $\delta : Q_0 \rightarrow Q_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X})$ et $\sigma : \mathfrak{Z} \rightarrow Q_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X})$ donnent des morphismes Δ et τ de Q_0 dans $Q_0 \times Q_0$. Le morphisme Δ est le morphisme diagonal de Q_0, quant à τ il est de la forme $(1, \theta)$, où θ est un morphisme de Q_0 dans Q_0. Comme σ est prolongeable, θ est de la forme $\rho \circ \hat{\theta}$, où $\hat{\theta}$ est un morphisme de Q_0 dans $Q^{\hat{\mathfrak{I}}}(X_0)$ avec $\hat{\mathfrak{I}} \supset\supset \mathfrak{I}$. Par suite $T_{q_0}\theta$ est compacte.

Notons p', θ' et Δ' les applications tangentes à p, θ et Δ en q_0. Les conditions imposées à p par hypothèse entraînent que $p'(t, u) = u - \theta'(t)$. On a $\Delta'(t) = (t, t)$, d'où

$$(p \circ \delta)'(t) = p'(\Delta'(t)) = t - \theta'(t),$$

avec θ' compacte.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Soit* V_0 *une sous-variété de* Q_0 *telle que* $q_0 \in V_0$ *et que* $TV_0(q_0)$ *soit un supplémentaire de* $\operatorname{Ker} T\delta(q_0)$. *Si* V'_0 *est un voisinage assez petit de* q_0 *dans* V_0, $\Sigma_1 = \delta(V'_0)$ *est une variété contenue dans* Z *et p induit un isomorphisme d'une sous-variété* Σ'_1 *de codimension finie dans* Σ_1 *sur une sous-variété de codimension finie de* Q_0.

5. UN CRITÈRE DE FINITUDE RELATIVE. — Soit S un espace analytique banachique. X et Y des espaces analytiques au-dessus de S, et $f : X \to Y$ un S-morphisme. Nous dirons que f est S-compact en un point $x \in X$ s'il existe des variétés banachiques U et V, des plongements $X \hookrightarrow S \times U$ et $Y \hookrightarrow S \times V$ et un S-morphisme $\bar{f} : S \times U \to S \times V$ prolongeant f tel que l'application linéaire tangente verticale à $\bar{f}$ en x soit compacte.

PROPOSITION 3. — *Soient* S *un espace analytique banachique,* X *un espace analytique au-dessus de* S *et* $x_0 \in X$ *un point tel que l'identité de* X *soit* S-*compacte en* x_0. *Alors* X *est relativement de dimension finie au-dessus de* S *au voisinage de* x_0.

Démonstration. — Au voisinage de x_0, plongeons X dans $S \times U$, où U est un ouvert d'un espace de Banach E. Il existe un morphisme $h : S \times U \to S \times E$ au voisinage de x_0 induisant l'identité sur X et tel que $v = T_S h(X_0)$ soit un endomorphisme compact de E. L'espace $E' = \operatorname{Im}(1 - v)$ est fermé de codimension finie dans E; soit $m : E \to E'$ une projection linéaire. Le morphisme $g = (1_S \times m) \circ (1 - h) : S \times U \to S \times E'$ est une submersion relative en x_0, donc $\Sigma = g^{-1}(S \times \{0\})$ est lisse sur S au voisinage de x_0. L'espace $T_S \Sigma(x_0) = \operatorname{Ker}(m \circ (1 - v)) = \operatorname{Ker}(1 - v)$ est de dimension finie, donc Σ est relativement de dimension finie sur S au voisinage de x_0. Comme $X \subset \Sigma$, il en est de même de X.

C. Q. F. D.

6. APPROCHE DE Z PAR L'EXTÉRIEUR. — On reprend les notations et les hypothèses du n° 4.

PROPOSITION 4. — *L'espace* Z, *muni de* p, *est relativement de dimension finie sur* Q_0 *au voisinage de* q_0.

Démonstration. — Considérons au voisinage de q_0 le diagramme :

$$\begin{tikzcd} Q_3(\mathfrak{X}) \arrow[rr, shift left, "(p, \varphi_q)"] \arrow[rr, shift right] \arrow[dr, "p"'] & & Q_0 \times \mathfrak{Z} \arrow[dl, "pr_1"] \\ & Q_0 & \end{tikzcd}$$

Le noyau de la double flèche horizontale est Z_1. D'autre part, comme σ est prolongeable, le morphisme $\varphi_q \circ \sigma$ se factorise par $\rho : \mathfrak{Z}^{\hat{\mathfrak{I}}} \to \mathfrak{Z}$, où $\hat{\mathfrak{I}} \supset\supset \mathfrak{I}$, donc est compact. Posons $\Phi = (p, \varphi_q) \circ (p, \pi)^{-1} : Q_0 \times \mathfrak{Z} \to Q_0 \times \mathfrak{Z}$ et soit $\Phi_0 : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}$ le morphisme induit par Φ en identifiant $\mathfrak{Z}$ à $\{ q_0 \} \times \mathfrak{Z}$. Plongeons $\mathfrak{Z}$ dans un ouvert U d'un espace de Banach. Comme $\sigma(\mathfrak{Z}) = p^{-1}(q_0) = (p, \pi)^{-1}(q_0 \times \mathfrak{Z})$, le morphisme Φ_0 est compact. Autrement dit, il existe un morphisme $h_0 : U \to U$ défini au voisinage de z_0, prolongeant Φ_0 et tel que $T\, h_0(z_0)$ soit compact.

Lemme 1. — *Soient* W *et* W' *des ouverts dans des espaces de Banach* E *et* E' *respectivement,* X_1 *et* X_2 *deux sous-espaces analytiques de* W *et* $x_0 \in X_1 \cap X_2$. *Soient* $f_1 : W_1 \to W'$ *et* $f_2 : X_2 \to W'$ *des morphismes qui coïncident sur* $X_1 \cap X_2$. *Alors il existe au voisinage de* x_0 *un morphisme* $g : W \to W'$ *induisant* f_1 *et* f_2.

Démonstration du lemme. — Soient $h_1 : W \to F_1$ et $h_2 : W \to F_2$ des équations de X_1 et X_2 ; alors $(h_1, h_2) : W \to F_1 \oplus F_2$ est une équation de $X_1 \cap X_2$. Soient g_1 et $g_2 : W \to W'$ induisant f_1 et f_2 respectivement. Alors $g_1 - g_2$ est nul sur $X_1 \cap X_2$. Autrement dit, il existe au voisinage de x_0 une application analytique $u = (u_1, u_2)$:

$$W \to \mathbf{L}(F_1 \oplus F_2 ; E') = \mathbf{L}(F_1 ; E') \times \mathbf{L}(F_2 ; E')$$

telle que

$$g_1 - g_2 = u . (h_1, h_2) = u_1 . h_1 + u_2 . h_2 .$$

Alors $g = g_1 - u_1 . h_1 = g_2 + u_2 . h_2$ répond à la question.

C. Q. F. D.

Fin de la démonstration de la proposition. — D'après le lemme, il existe une application analytique $h : Q_0 \times U \to Q_0 \times U$ au-dessus de Q_0, définie au voisinage de (q_0, z_0), induisant h_0 sur $\{ q_0 \} \times U$ et Φ sur $Q_0 \times \mathfrak{Z}$. Comme $T\, h_0(z_0)$ est compacte, h est un morphisme Q_0-compact. Comme h induit l'identité sur l'image de Z_1 par (p, π) qui est un isomorphisme, Z_1 est relativement de dimension finie sur Q_0 d'après la proposition 3. *A fortiori*, il en est de même de Z, puisque $Z \subset Z_1$.

C. Q. F. D.

Corollaire. — *On peut plonger* Z *au voisinage de* q_0 *dans une variété* Σ_2 *munie d'une submersion* $\Sigma_2 \to Q_0$ *à fibres de dimension finie coïncidant sur* Z *avec* p.

Remarque. — Si Σ_1 et Σ_2 satisfont aux conditions des corollaires aux propositions 2 et 4, nécessairement Σ_1 est de codimension finie dans Σ_2.

7. Espaces en sandwich entre deux variétés. — Soient Σ_1 et Σ_2 deux variétés banachiques telles que Σ_1 soit une sous-variété de codimension finie de Σ_2, et soit z_0 un point de Σ_1. Soit Z un sous-espace analytique de Σ_2 contenant Σ_1. Soit H une sous-variété de Σ_2 telle que $z_0 \in H$ et que $TH(z_0)$ soit un supplémentaire de $T\,\Sigma_1(z_0)$ dans $T\,\Sigma_2(z_0)$. Posons $R = H \cap Z$.

Proposition 5. — *Soit* Φ *un morphisme de* $\Sigma_1 \times R$ *dans* Z *défini au voisinage de* (z_0, z_0). *On suppose que* Φ *induit l'identité sur* $\Sigma_1 \times \{ z_0 \}$ *et sur* $\{ z_0 \} \times R$. *Alors* Φ *est un isomorphisme de* $\Sigma_1 \times R$ *sur* Z *au voisinage de* (z_0, z_0).

Démonstration. — D'après le lemme 1 (n° 6), il existe un morphisme $\Gamma : \Sigma_1 \times H \to \Sigma_2$ défini au voisinage de (z_0, z_0), induisant Φ sur $\Sigma_1 \times R$ et l'injection canonique sur H. L'application linéaire $T\Gamma(z_0, z_0)$ est un isomorphisme, donc Γ est un isomorphisme au voisinage de (z_0, z_0). En identifiant Σ_2 à $\Sigma_1 \times H$ par Γ, on est ramené à démontrer le lemme suivant :

LEMME 2. — *Soient* Σ *un ouvert d'un espace de Banach,* H *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, R *un sous-espace analytique de* H *et* Z *un sous-espace analytique de* $\Sigma \times H$. *On suppose que* $0 \in H$, $0 \in \Sigma$, $Z \supset \Sigma \times R$ *et* $Z \cap (\{0\} \times H) = R$. *Alors* $Z = \Sigma \times R$ *au voisinage de* 0.

Démonstration. — Soit $f : \Sigma \times H \to F$ une équation de Z et pour $t \in \Sigma$, notons f_t la fonction $x \mapsto f(t, x)$ de H dans F. Soient $u_1, \ldots, u_k$ des formes linéaires sur F telles que les équations $u_1 \circ f, \ldots, u_k \circ f$ définissent R sur un voisinage H′ de 0 dans H. Soit $K \subset H'$ un polycylindre $\mathcal{O}_R$-privilégié. Alors $t \mapsto u_i \circ f_t$ est pour $i = 1, \ldots, k$ une application analytique de Σ dans $B(K; \mathcal{I}_R)$, où $\mathcal{I}_R = \operatorname{Ker}(\mathcal{O}_H \to \mathcal{O}_R)$. Pout $t = 0$, les $u_i \circ f_t$ engendrent le B (K)-module $B(K; \mathcal{I}_R)$; il en est donc de même pour t appartenant à un voisinage Σ' de 0 dans Σ, et les $u_i \circ f$ définissent $\Sigma \times R$ dans $\Sigma' \times \mathring{K}$. Par suite $Z \subset \Sigma \times R$ sur cet ouvert.

C. Q. F. D.

Ceci termine la démonstration de la proposition.

8. EXISTENCE D'UNE DÉFORMATION VERSELLE DE DIMENSION FINIE. — Soit X_0 un espace analytique compact.

Choisissons $\mathfrak{I}$, q_0, σ, p comme au n° 4, V_0, Σ_1 et Σ_2 satisfaisant aux conditions des corollaires des propositions 2 et 4. Posons $z_0 = \psi(q_0) \in Z$, choisissons H et définissons R comme au n° 7.

THÉORÈME PRINCIPAL. — *L'espace* $\mathfrak{X}_R$ *au-dessus de* R, *muni de l'isomorphisme* $\alpha_{q_0} : \mathfrak{X}_R(z_0) \to X_0$, *est une déformation verselle de* X_0.

Autrement dit, si S est un espace analytique banachique, X un espace analytique propre et anaplat sur S, s_0 un point de S et ι un isomorphisme de $X(s_0)$ sur X_0, il existe un voisinage S′ de s_0 dans S, un morphisme $h : S' \to R$ tel que $h(s_0) = z_0$, et un isomorphisme $u : h^* \mathfrak{X}_R \to X|_{S'}$ tel que $u(s_0) = \iota^{-1} \circ \alpha_{q_0}$.

Démonstration. — Identifions X_0 à $\mathfrak{X}_R(z_0)$ par α_{q_0}. Notons $\mathfrak{q}_R$ la cuirasse relative induite sur $\mathfrak{X}_R$ par la cuirasse universelle paramétrée par $Q_3(\mathfrak{X})$. Notons π la projection de $Q_R(\mathfrak{X}_R)$ sur R. Sur l'espace $\pi^* \mathfrak{X}_R$ au-dessus de $Q_R(\mathfrak{X}_R)$, on a deux cuirasses relatives canoniques : $\pi^* \mathfrak{q}_R$ et la cuirasse universelle $\mathfrak{q}'$. Ces deux cuirasses coïncident sur l'image du morphisme $\mathfrak{q}_R : R \to Q_R(\mathfrak{X}_R)$. Comme $Q_R(\mathfrak{X}_R)$ est lisse sur R et que sa fibre en z_0 est $Q_0 = Q(X_0)$, il existe un sous-espace V de $Q_R(\mathfrak{X}_R)$ lisse sur R, contenant l'image de $\mathfrak{q}_R$ au voisinage de z_0 et tel que $V(z_0) = V_0$.

LEMME 3. — *Le morphisme* $\psi_{\mathfrak{q}'} : Q_R(\mathfrak{X}_R) \to Z$ *induit au voisinage de* (z_0, q_0) *un isomorphisme* Φ *de* V *sur* Z.

Démonstration du lemme. — Identifions $R \times V_0$ à V par un R-isomorphisme local induisant q_R sur $R \times \{ q_0 \}$ et l'injection canonique sur V_0. Identifions également V_0 à son image Σ_1 par δ. Le morphisme Φ induit par $\psi_{q'}$ satisfait alors aux hypothèses de la proposition 5, donc est un isomorphisme local.

C. Q. F. D.

Remarque. — On voit donc que l'espace Z est localement isomorphe au produit d'un espace analytique de dimension finie par un ouvert d'un espace de Banach.

Fin de la démonstration du théorème principal. — D'après le n° 2, on a un isomorphisme $\alpha_{q'} : \Phi^* \mathfrak{X}_Z \to \pi^* \mathfrak{X}_R$, qui induit l'identité au-dessus de l'image du morphisme q_R, en particulier sur la fibre au point de base.

Soient S, s_0, X et ι comme ci-dessus et identifions X (s_0) à X_0 par ι. Soit q une cuirasse relative sur X définie au voisinage de s_0 telle que $q(s_0) = q_0$. Considérons $\psi_q : S \to Z$ et $\eta = \Phi^{-1} \circ \psi_q : S \to V$. On a des isomorphismes

$$\alpha_q : \quad \psi_q^* \mathfrak{X}_Z \to X \qquad \text{et} \qquad \beta = \psi_q^* (\Phi^{-1})^* \alpha_{q_R} : \quad \psi_q^* \mathfrak{X}_Z \to \psi_q^* (\Phi^{-1})^* \pi^* \mathfrak{X}_R$$

induisant l'identité sur X_0. Posons $h = \pi \circ \eta$. Alors $u = \alpha_q \circ \beta^{-1}$ est un isomorphisme de $h^* \mathfrak{X}_R$ sur X au-dessus d'un voisinage de s_0, induisant l'identité sur X_0.

C. Q. F. D.

VIII. — **Compléments**

1. Semi-universalité. — Rappelons que Aut (X_0) est un groupe de Lie complexe de dimension finie ([2], § 10). Reprenons les notations du paragraphe VII (n° 4), en particulier $Q_0 = Q(X_0)$, et soit z_0 le point de base de Z, i. e. $z_0 = \delta(q_0)$.

Lemme 1. — *a. L'application* $\mu : (\alpha, q) \mapsto \alpha_* q$ *de* Aut $X_0 \times Q_0$ *dans* Q_0 *est analytique.*

b. L'application $\omega : \alpha \mapsto \alpha_* q$ *de* Aut X_0 *dans* Q_0 *est une immersion injective et son image est* $\delta^{-1}(z_0)$.

Démonstration. — Soit T un espace analytique.

a. Soient $\alpha : T \to \text{Aut } X_0$ et $q : T \to Q_0$ des morphismes. Le morphisme α définit un T-automorphisme de $T \times X_0$ et q définit une cuirasse relative sur $T \times X_0$. Alors $\alpha_* q$ est une cuirasse relative sur $T \times X_0$, donc correspond à un morphisme de T dans Q_0 qui est $\mu \circ (\alpha, q)$. Comme T est arbitraire, il en résulte que μ est analytique.

b. Soit $q : T \to Q_0$ un morphisme, i. e. une cuirasse relative sur $T \times X_0$. On a $\psi_q = \delta \circ q : T \to Z$. D'après le théorème 1, le morphisme ψ_q est le morphisme constant d'image z_0 si et seulement si $T \times X_0$ muni de q est isomorphe à $T \times X_0$ muni de la cuirasse constante q_0, autrement dit si et seulement si il existe un T-automorphisme α de $T \times X_0$, i. e. un morphisme $T \to \text{Aut } X_0$, tel que $q = \alpha_* q_0$. D'après le théorème 1 également, le morphisme α est alors unique, ce qui prouve l'injectivité en prenant pour T un point simple et l'immersivité en prenant $T = \text{Spec}(\mathbf{C}\{ t \}/ t^2))$.

C. Q. F. D.

LEMME 2. — *L'application* δ *est au voisinage de* q_0 *une subimmersion d'image* Σ_1, *dont les fibres sont les orbites pour l'opération de* Aut (X_0).

Démonstration. — D'après le théorème des fonctions implicites et vu la définition de V_0 (§ VII, cor. de la prop. 2), le morphisme μ induit au voisinage de q_0 un isomorphisme de Aut $(X_0) \times V_0$ sur Q_0. Ceci permet de définir au voisinage de q_0 une rétraction $r : Q_0 \to V_0$ dont les fibres sont les orbites pour l'opération de Aut (X_0). Comme on a $\delta(\alpha_* q) = \delta(q)$, on a $\delta = \delta|_{V_0} \circ r$.

Reprenons maintenant les notations du paragraphe VII (n° 8).

THÉORÈME 1. — *Soient* S *un espace analytique banachique*, $s_0 \in S$ *et* $f : S \to R$ *un morphisme tel que* $f(s_0) = z_0$. *Si* $f^* \mathfrak{X}_R$ *est* S-*isomorphe à* $S \times X_0$, *le morphisme* f *coïncide avec le morphisme constant d'image* z_0 *au voisinage de* s_0.

Démonstration. — Comme $R \subset Z \subset Q_3 \mathfrak{X}$, l'espace $\mathfrak{X}_R$ est muni d'une cuirasse canonique $\mathfrak{q}$. Identifions $f^* \mathfrak{X}_R$ à $S \times X_0$.

La cuirasse relative $f^*(\mathfrak{q})$ définit alors un morphisme $\tilde{f} : S \to Q_0$, et il résulte du théorème 1 du paragraphe VII que $f = \delta \circ \tilde{f}$.

D'après le lemme 2, on peut considérer f comme un morphisme dans Σ_1. Comme on a $\Sigma_1 \cap R = \{ q_0 \}$, le morphisme f est nécessairement constant.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Soit* X *une déformation de* X_0 *paramétrée par* (S, s_0), *et soient* h *et* $h' : (S, s_0) \to (R, z_0)$ *des morphismes tels que* $h^* \mathfrak{X}_R$ *et* $h'^* \mathfrak{X}_R$ *soient isomorphes à* X. *Alors* h *et* h' *sont tangentes en* s_0.

Démonstration. — Considérons $A = \operatorname{Spec}(\mathbf{C}\{ t \}/(t^2))$.

L'ensemble $\text{Déf}_A X_0$ des classes de déformations paramétrées par A et Mor $((A, 0); (R, z_0))$ sont de façon naturelle des espaces vectoriels, et l'application

$$g \mapsto g^* \mathfrak{X}_R$$

de Mor $((A, 0); (R, z_0))$ dans $\text{Déf}_A X_0$ est linéaire. Elle est surjective d'après le théorème principal (§ VII) et injective d'après le théorème 1, donc bijective.

C. Q. F. D.

2. OUVERTURE DE LA VERSALITÉ. — Pour la construction faite au paragraphe VII, on a choisi une variété V_0 telle que $TV_0(q_0)$ soit un supplémentaire de $\operatorname{Ker} T\delta(q_0)$ (cor. de la prop. 2). Si on prenait pour V_0 une variété de codimension finie dans Q_0 telle que $TV_0(q_0) \cap \operatorname{Ker} T\delta(q_0) = 0$, la construction faite au paragraphe VII serait encore possible, et donnerait encore une déformation verselle. Cependant le raisonnement fait au n° 1 du paragraphe VIII ne s'appliquerait plus, de sorte qu'on n'obtiendrait plus une déformation semi-universelle.

Pour $z \in R$, considérons $\delta_z : Q(\mathfrak{X}(z)) \to Z$ défini comme δ, et notons q_z le point de $Q(\mathfrak{X}(z))$ correspondant à z.

Le noyau de $T\,\delta_z(q_z)$ [qui s'identifie à l'espace des automorphismes infinitésimaux de $\mathfrak{X}(z)$] dépend de z de façon semi-continue supérieurement. Autrement dit, pour $z \in R$ suffisamment proche de z_0, la variété $V(z)$, où V est l'espace considéré dans la démonstration du théorème principal, est de codimension finie dans $Q(\mathfrak{X}(z))$ et son espace tangent au point q correspondant à z ne rencontre le noyau de $T\,\delta_z(q)$ qu'en 0. L'espace R peut alors être considéré comme obtenu par la construction faite au paragraphe VII à partir de $V(z)$. Il en résulte que l'espace $\mathfrak{X}_R$ au-dessus de R pointé en z est une déformation verselle de $\mathfrak{X}(z)$.

3. Lissité du foncteur $(S, s_0) \mapsto \text{Déf}_{S, s_0}(X_0)$.

Proposition 1. — *Soient* S *un espace analytique banachique,* s_0 *un point de* S *et* X *une déformation de* X_0 *paramétrée par* (S, s_0). *Soient* S' *un sous-espace analytique de* S *contenant* s_0 *et* $h' : (S', s_0) \to (R, z_0)$ *un morphisme tel que* $h'^* \mathfrak{X}_R$ *soit isomorphe à* $X|_{S'}$. *Il existe alors un morphisme* $h : (S, s_0) \to (R, z_0)$ *défini au voisinage de* s_0 *tel que* $h^* \mathfrak{X}_R$ *soit isomorphe à* X *et* $h|_{S'} = h'$.

Démonstration. — Comme $Q_S X$ est lisse sur S au voisinage de q_0, la cuirasse relative $h'^* \mathfrak{q}$ sur $X|_{S'}$ se prolonge au voisinage de s_0 en une cuirasse relative q sur X. Cette cuirasse relative définit un morphisme $\tilde{h} : S \to Z$, au voisinage de s_0.

En identifiant Z à $R \times \Sigma$, au voisinage de z_0 par l'isomorphisme Φ construit au paragraphe VII (n° 7), on obtient une projection $\rho : Z \to R$, et $h = \rho \circ \tilde{h}$ répond à la question.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki, *Variétés différentielles et analytiques*, II (§ 8 à 15), Hermann, Paris, 1971.
[2] A. Douady, *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. XVI, n° 1, 1966, p. 1-95).
[3] A. Douady, *Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes* (d'après M. Kuranishi) (*Séminaire Bourbaki*, n° 277, décembre 1964, Benjamin Addison Wesley éditeur).
[4] A. Douady et J. H. Hubbard, *Le problème des modules locaux pour les espaces* **C**-*analytiques compacts* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 277, série A, 1973, p. 901, séance du 17 sept. 1973).
[5] O. Forster et K. Knorr (à paraître).
[6] H. Grauert, *Über die Deformation isolierter Singularitäten analytischer Mengen* (*Invent. Math.* vol. 15, fasc. 3, 1972).
[7] H. Grauert, *Der Satz von Kuranishi für kompakte komplexe Räume* (*Invent. Math.*, t. 25, 1974, p. 107-142).
[8] A. Grothendieck, *Techniques de construction en géométrie analytique IX : Quelques problèmes de modules* (*Séminaire H. Cartan*, E. N. S., Paris, publié par Benjamin, New York).
[9] K. Kodaira et D. C. Spencer, *On the Deformation of Complex Analytic Structures* (*Ann. of Math.*, t. 67, 1958, p. 328-460).
[10] K. Kodaira, L. Nirenberg et D. C. Spencer, *On the Existence of Deformation of Complexes Analytic Structures* (*Ann. of Math.*, t. 68, 1958, p. 450-459).
[11] M. Kuranishi, *On the Locally Complete Families of Complex Analytic Structures* (*Ann. of Math.*, t. 75, 1962, p. 536-577).
[12] J. Le Potier, *Le problème des modules locaux pour les espaces* **C**-*analytiques compacts* (d'après Douady et Hubbard) (*Séminaire Bourbaki*, exposé n° 449, *Lecture Notes in Maths*, vol. 431, 1974, Springer-Verlag).

[13] G. Pourcin, *Déformation de singularités isolées* (*Séminaire de géométrie analytique de l'École Normale Supérieure*, exposé n° IX, 1971-1972, publié par Astérisque, *Société Math. de France*, p. 161-173).
[14] G. Pourcin, *Théorème de Douady au-dessus de* S (*Annali della Scuola normale superiore di Pisa*, t. 23, 1969, p. 451-459).
[15] G. Pourcin, *Sous-espaces privilégiés d'un polycylindre* (à paraître aux *Annales de l'Institut Fourier*, Grenoble, 1975).
[16] M. Schlessinger, *Functors of Artin Rings* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 130, 1968, p. 208 à 222).
[17] Tiourina, *Locally Semi-Universal Flat Deformations of Isolated Singularities of Complex Spaces* (*Mathematics of the U. S. S. R. Izvestija*, vol. 3, n° 5, p. 967-999).

(Manuscrit reçu le 11 septembre 1974.)

Adrien Douady,
Centre de Mathématiques,
91405 Orsay.